Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM

19

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI), Svizzera.
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino, Svizzera.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.

Impaginazione:
Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
matematica

19

Maggio 2026

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
2026 (19), I–II. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.0

Editoriale

Con questo diciannovesimo numero siamo entrati nel decimo anno di vita della nostra amata rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*. Dieci anni di impegno da parte delle istituzioni che ci sostengono, dei membri del comitato scientifico e del comitato redazionale, dei grafici,[1] degli autori che si sono susseguiti in questi anni e di tutti i lettori che con costanza seguono le nuove uscite. Una rivista innovativa basata sull'incontro di due mondi: quello della ricerca e delle pratiche d'aula, che ha riscontrato una grande adesione sia a livello nazionale sia internazionale. Ne è testimonianza l'ampliamento del comitato scientifico – che ora conta 36 membri, affiliati in Svizzera, Italia, Francia, Spagna, Cipro, Canada – e la costituzione di un nuovo comitato "esperienze didattiche" formato da 19 docenti di scuola dell'infanzia, elementare, media, media superiore e professionale, a cui sarà affidata in modo particolare la sezione *Esperienze didattiche* come promotori e revisori.
In particolare, il decimo anno della rivista sarà festeggiato con l'uscita del prossimo numero, il ventesimo. Si tratterà di un numero speciale dove verranno presentati alcuni progetti di ricerca in didattica della matematica che hanno avuto negli anni significative ricadute nel mondo scolastico e ad essi verranno affiancati articoli con testimonianze di docenti che hanno cambiato le proprie concezioni e pratiche d'aula grazie a questi progetti. Anche le recensioni di questo numero speciale avranno una veste adatta al particolare tema.

Questo numero, invece, segue la classica impostazione. Nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli. Il primo contributo, anche disponibile in inglese, approfondisce il ruolo dell'argomentazione per il futuro cittadino e in particolare nella didattica della matematica, adottando la prospettiva pragma-dialettica sull'argomentazione come quadro teorico di riferimento; l'articolo propone cinque elementi teorici (verbalizzazione, coscienza delle ragioni, dialogo, differenza di opinione e incentivo all'argomentazione) utili all'analisi di quesiti matematici argomentativi, al fine di distinguerli tra loro sulla base della caratterizzazione pragma-dialettica dell'argomentazione, e identificando al contempo alcuni fattori progettuali che possano incentivare tali elementi. Il secondo contributo presenta il progetto di ricerca "Confrontare senza Calcolare", nato nell'ambito del progetto ArAl allo scopo di promuovere un insegnamento relazionale dell'aritmetica favorendo il confronto di espressioni matematiche, da interpretare come oggetti su cui riflettere e argomentare invece che come calcoli da eseguire; l'articolo analizza quindi episodi tratti da sperimentazioni condotte in diverse classi di scuola primaria[2] e di scuola secondaria di primo grado[3] in Italia, al fine di individuare strategie didattiche per lo sviluppo di tali competenze relazionali negli allievi, insieme alle competenze necessarie al docente per poter adottare tali strategie in modo efficace. Il terzo contributo indaga le potenzialità dell'ambiente multi-touch, in particolare dell'app *TouchCounts*, nel favorire lo sviluppo del senso del numero in allievi di quattro anni; il contributo analizza gli schemi adottati dai bambini nell'interazione con l'app e mostra come consegne intenzionalmente progettate e una mediazione adulta competente permettano loro di mobilitare specifici aspetti del senso del numero, in particolare la gestione dell'ordinalità, la gestione del senso ricorsivo e la gnosia digitale.

1. Il genere maschile viene usato in questo testo per designare persone, indipendentemente dal genere.
2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.
3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

La sezione *Esperienze didattiche* presenta quattro articoli. Il primo contributo descrive un percorso didattico proposto in una classe di quinta elementare con l'obiettivo di promuovere il pensiero strategico nella risoluzione di problemi e giochi di strategia; l'esperienza didattica valorizza il ricorso a rappresentazioni grafiche e il ragionamento per analogia al fine di guidare gli allievi a riconoscere, sviluppare e riutilizzare strategie risolutive efficaci. Il secondo contributo presenta un laboratorio museale sulle anamorfosi catottriche a specchio cilindrico, realizzato a partire dai modelli della *Collezione Macchine Matematiche* del Sistema dei Musei e Orto Botanico dell'Università di Modena e Reggio Emilia; il laboratorio, rivolto ad allievi di scuola secondaria di primo grado, ha permesso loro di apprendere in modo pratico e collaborativo come realizzare un'immagine anamorfica, configurandosi come un esempio di educazione matematica informale. Il terzo contributo propone un percorso laboratoriale per introdurre la radice quadrata nella scuola secondaria di primo grado, ispirato alla teoria dell'apprendimento significativo di Ausubel; attraverso la realizzazione di origami, l'uso di strumenti e di giochi didattici, che sono risultati efficaci anche per un'allieva cieca partecipante al percorso, gli allievi hanno potuto costruire una comprensione solida dei concetti matematici in gioco. Il quarto contributo presenta una rubrica per la valutazione delle competenze argomentative in matematica nella scuola media, sperimentata sia dall'insegnante sia dagli allievi per l'autovalutazione in una classe di terza media; l'analisi degli elaborati mostra come lo strumento possa sostenere la produzione di argomentazioni più chiare e consapevoli e integrarsi efficacemente nella pratica didattica quotidiana.

Auguriamo a tutte e a tutti una buona lettura di questi articoli e recensioni, dandovi appuntamento per l'uscita speciale del numero 20!

Prof.ssa Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
2026 (19), III–IV. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.0

OPEN ACCESS

Editorial

With this nineteenth issue we have entered the tenth year of our dear journal *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*. Ten years of dedication from the institutions that support us, the members of the scientific and editorial committees, the graphic designers, the authors who have contributed over the years, and all the readers who faithfully follow our new issues. An innovative journal based on the convergence of two worlds: that of research and that of classroom practice, by receiving significant support both nationally and internationally. This is evidenced by the expansion of the scientific committee – which now comprises 36 members based in Switzerland, Italy, France, Spain, Cyprus and Canada – and the establishment of a new "teaching and learning experiences" committee made up of 19 teachers from pre-primary, primary, lower secondary, upper secondary and professional schools, who will be specifically responsible for the *Esperienze didattiche* section as promoters and reviewers.
In particular, the journal's tenth anniversary will be celebrated with the release of the next issue, the twentieth. This will be a special issue featuring several research projects in mathematics education that have had significant impacts on the school world over the years, accompanied by articles with testimonials from teachers who have changed their classroom conceptions and practices thanks to these projects. Even the reviews in this special issue will be tailored to the specific theme.

This issue, however, follows the classic format. The *Riflessione e ricerca* section contains three articles. The first contribution, also available in English, explores the role of argumentation for future citizens and, in particular, in mathematics education, adopting the pragma-dialectical perspective on argumentation as a theoretical framework; the paper proposes five theoretical elements (verbalization, awareness of reasons, dialogue, difference of opinion, and incentive to argue) useful for analyzing argumentative mathematical tasks; the purpose is to distinguish them based on the pragma-dialectical characterization of argumentation, while identifying certain task design factors that can encourage these elements. The second article presents the research project "Comparing without Calculating", developed within the ArAl project to promote a relational teaching of arithmetic by encouraging the comparison of mathematical expressions, which are to be interpreted as objects for reflection and argumentation rather than as calculations to be performed; the paper analyses fifteen episodes drawn from classroom experiments conducted in primary school[1] and lower secondary school[2] in Italy, to identify teaching strategies for developing these relational skills in students, as well as the skills necessary for teachers to adopt such strategies effectively. The third paper investigates the potential of the multi-touch environment, specifically the app *TouchCounts*, in fostering the development of number sense in four-year-old children; the study analyses the schemes adopted by children when interacting with the app and shows how intentionally designed tasks and competent adult mediation enable them to mobilize specific aspects of number sense, especially the management of ordinal and recursive structure, as well as finger gnosis.

The *Esperienze didattiche* section includes four articles. The first article describes an educational path implemented in a fifth-grade class to foster strategic thinking in problem-solving and strategy games; the didactical experience emphasises the use of graphic representations and reasoning by

1. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.
2. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.

analogy for guiding students to recognize, develop, and reuse effective problem-solving strategies. The second contribution presents a museum workshop on catoptric anamorphoses with a cylindrical mirror, based on models from the *Collezione Macchine Matematiche* within the *Sistema dei Musei e Orto Botanico* of University of Modena and Reggio Emilia; the workshop, aimed at lower secondary school students, allowed them to learn practically and collaboratively how to create an anamorphic image, serving as an example of informal mathematics education. The third contribution proposes a hands-on workshop to introducing square roots in lower secondary school, inspired by Ausubel's theory of meaningful learning; through the folding of origami, the use of tools and of didactical games, which proved effective even for a blind student participating in the program, the students were able to build a solid understanding of the mathematical concepts involved. The fourth contribution presents a rubric for evaluating argumentative skills in mathematics in lower secondary school, tested by both the teacher and the students for self-assessment in an eighth-grade class; the analysis of the students' work shows how the tool can support the production of clearer and more informed argumentations and can be effectively integrated into everyday teaching practice.

We wish you all a pleasant reading of these articles and reviews, and do not miss the next special issue of number 20!

Prof.ssa Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Switzerland

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 10–38. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.1

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

La pragma-dialettica come approccio teorico all'argomentazione in didattica della matematica

Pragma-dialectics as a theoretical approach to argumentation in mathematics education

Lorenzo Cosci°•, Andrea Rocci• e Silvia Sbaragli°
°Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera
•Facoltà di comunicazione, cultura e società, USI – Svizzera

✉ lorenzo.cosci@supsi.ch, andrea.rocci@usi.ch, silvia.sbaragli@supsi.ch

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA INGLESE

Sunto / La pratica dell'argomentazione assume un ruolo di estrema rilevanza in innumerevoli contesti della vita di ciascun individuo, siano essi lavorativi o quotidiani. La sua importanza trova riscontro in ambito didattico, nei quadri di riferimento delle indagini internazionali e nelle indicazioni di diversi Paesi, in quanto strumento a supporto dell'apprendimento e come competenza centrale nella formazione di ogni futuro cittadino di una complessa società democratica. Questo articolo propone la teoria pragma-dialettica come approccio all'argomentazione in didattica della matematica, mettendo in evidenza come questa prospettiva risulti in linea con le indicazioni nazionali e internazionali. Sulla base di questo approccio teorico si definiscono cinque elementi analitici essenziali affinché l'argomentazione possa dirsi tale in senso pragma-dialettico: verbalizzazione, coscienza delle ragioni, dialogo, differenza di opinione e incentivo all'argomentazione. Attraverso questi elementi si analizzano alcuni esempi di quesiti argomentativi, evidenziando come la pratica scolastica consideri talvolta come argomentative attività didattiche che escludono elementi afferenti alle dimensioni pragmatica e sociale dell'argomentazione messe in luce dalla teoria pragma-dialettica, che invece sarebbero da considerare dal punto di vista didattico.

Parole chiave: argomentazione; pragma-dialettica; ragionamento; analisi di quesiti.

Abstract / The practice of argumentation plays an extremely important role in countless contexts in the life of every individual, whether at work or in everyday life. Its importance is reflected in the educational field through the reference frameworks of international surveys and the guidelines of various countries, which highlight it as a tool to support learning and as a core skill in the education of every future citizen of a complex democratic society. This article proposes pragma-dialectical theory as an approach to argumentation in mathematics education, highlighting how this perspective is in line with national and international guidelines. Based on this theoretical approach, five essential analytical elements for pragma-dialectical argumentation are defined: verbalisation, awareness of reasons, dialogue, difference of opinion, and incentive for argumentation. Through these elements, some examples of argumentative tasks are analysed, highlighting how school practice sometimes considers as argumentative also teaching activities that exclude elements related to the pragmatic and social dimensions of argumentation emphasised by pragma-dialectical theory, which should instead be considered from an educational perspective.

Keywords: argumentation; pragma-dialectics; reasoning; task analysis.

1 Introduzione

La capacità di argomentare riveste un'importanza cruciale in molteplici ambiti dell'esistenza umana, trovando applicazione tanto nelle sfide professionali quanto nelle interazioni della vita quotidiana. L'argomentazione entra in gioco ogni qualvolta non ci si limiti ad affermare qualcosa o a presentare un'informazione o un dato, ma si sceglie di dare ragione di ciò che si sostiene, spesso cercando di convincere qualcuno in merito a un certo argomento o rispetto a una decisione da prendere. Argomentiamo, ad esempio, quando consigliamo un libro a un amico oppure invitiamo un collega a pranzo in un nuovo ristorante. L'argomentazione assume un ruolo fondamentale nelle discussioni quotidiane e informali ed è al tempo stesso lo strumento cardine dell'esercizio di una politica democratica, poiché ricopre una funzione centrale nei contesti formalmente regolati dei dibattiti giuridici e parlamentari.

L'importanza dell'argomentazione nei contesti di vita quotidiana e nella sfera civile si riflette inevitabilmente anche in ambito educativo. Tant'è che i vari quadri di riferimento delle indagini internazionali, nonché le indicazioni e i piani scolastici di diversi Paesi, sottolineano come lo sviluppo di tale competenza sia centrale nella formazione di ogni studente[1] lungo tutto il percorso scolastico da almeno due punti di vista: per favorire l'apprendimento e per formare gli studenti come futuri cittadini di una complessa società democratica.

Come mostrerà questo articolo, per raggiungere questo ambizioso traguardo durante la scolarità può essere importante considerare e adottare in classe le caratteristiche della teoria pragma-dialettica dell'argomentazione, sviluppata ad Amsterdam da van Eemeren e Grootendorst, tra gli anni '70 e la fine degli anni '90, e successivamente ampliata da van Eemeren e Houtlosser nei decenni seguenti. Questa teoria pone le proprie basi sugli aspetti pragmatici, sociali e dialettici dell'argomentazione, cruciali per interagire e confrontarsi efficacemente nelle società contemporanee. In particolare, la pragma-dialettica considera l'argomentazione come parte di un discorso volto a risolvere un confronto tra opinioni, attraverso la verifica metodica della validità delle tesi avanzate dagli interlocutori. In tale approccio, la relazione con l'interlocutore assume un ruolo cruciale, in quanto è l'atteggiamento critico dell'interlocutore, inteso come esigenza di trovare ragioni adeguate ad azioni, decisioni e convinzioni, che contribuisce all'emergere e allo sviluppo dell'argomentazione stessa.

Questi elementi (pragmatici, sociali e dialettici) caratteristici dell'argomentazione considerata in ottica pragma-dialettica dovrebbero essere presi in considerazione e valorizzati anche nel processo di insegnamento-apprendimento, in particolare della matematica, da un lato perché la costruzione di conoscenza avviene nello spazio di relazione comunicativa tra docente e studenti, dall'altro perché le scelte didattiche dei docenti possono essere impostate in modo da trattare temi disciplinari e culturali come argomenti su cui innestare discussioni e dibattiti.

Attualmente, invece, la più diffusa pratica scolastica concernente l'argomentazione in ambito matematico si basa sulla richiesta posta agli allievi di esplicitare e descrivere il ragionamento o il procedimento risolutivo sotteso a un problema, senza che l'attività sia inserita all'interno di un contesto dialettico e pienamente argomentativo in cui diverse opinioni siano messe in discussione.

In questo articolo si intende dunque proporre la teoria pragma-dialettica come approccio teorico per la pratica argomentativa in didattica della matematica. Per fare questo, dapprima mostreremo come la teoria pragma-dialettica dell'argomentazione sia indicata per lo sviluppo di competenze argomentative in linea con le indicazioni internazionali e nazionali. In seguito, dopo aver chiarito le caratteristiche dell'argomentazione in ottica pragma-dialettica focalizzandoci in particolare sul rapporto tra ragionamento e argomentazione, analizzeremo sei quesiti matematici considerati argomentativi dalla pratica scolastica e i contesti potenziali in cui sono inseriti. Si tratta di quesiti profondamente differenti

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

tra loro da vari punti di vista: tipologia, atto linguistico richiesto, contesto nel quale vengono implementati. L'analisi è rivolta a rilevare quali e quanti degli elementi teorici dell'argomentazione nella prospettiva pragma-dialettica vengano stimolati. Alla luce dei risultati raggiunti si mostrerà come in alcune di queste attività siano predominanti gli elementi legati all'esplicitazione del ragionamento rispetto agli elementi caratteristici della prospettiva pragma-dialettica dell'argomentazione. Verrà inoltre messo in evidenza quali elementi progettuali possano incentivare tali elementi analitici.
Tale analisi permetterà di concludere che, affinché l'educazione matematica contribuisca allo sviluppo di competenze argomentative per il futuro cittadino, come auspicato dalle indicazioni nazionali e internazionali in ambito educativo, è necessario che i percorsi educativi includano anche pratiche didattiche in cui l'argomentazione sia strumento di risoluzione di un confronto di opinioni, inserita all'interno di contesti significativi in cui siano valorizzati tutti gli elementi dell'argomentazione evidenziati dalla teoria pragma-dialettica.

2 Il ruolo dell'argomentazione in ambito educativo

La pratica argomentativa è stata riconosciuta dai ricercatori in educazione come fondamentale da più punti di vista, sia come competenza da sviluppare per il cittadino, sia come strumento dalle grandi potenzialità per l'apprendimento disciplinare.
Questa duplice valenza dell'argomentazione è stata sintetizzata in modo efficace da Andriessen et al. (2003) nel libro *Arguing to learn*, attraverso le seguenti due espressioni, *imparare ad argomentare* e *argomentare per imparare*. In sintesi, se *imparare ad argomentare* prevede l'appropriarsi delle abilità che caratterizzano l'argomentazione come atto comunicativo, quali giustificare una propria posizione, o controbattere a un'opinione altrui, *argomentare per imparare* presuppone invece l'uso dell'argomentazione in un contesto educativo al fine di raggiungere uno specifico obiettivo di apprendimento. Per quanto distinti l'uno dall'altro è importante sottolineare che i due processi hanno forti dipendenze reciproche. Infatti, come osservato da Schwarz (2009), nel momento in cui si argomenta per imparare sarà necessario fare affidamento su competenze argomentative già possedute dagli studenti; al tempo stesso, il contenuto d'apprendimento di una discussione argomentativa può riguardare l'argomentazione stessa, come ad esempio le tesi e gli argomenti validi rispetto a un certo tema.
L'argomentazione, intesa in entrambe le interpretazioni evidenziate da Andriessen, ha negli ultimi decenni assunto un'importanza crescente in ambito educativo, diventando oggetto di indagine e di interesse da parte di numerosi ricercatori.
Per quanto concerne *imparare ad argomentare*, l'argomentazione viene concepita come una competenza trasversale, acquisita gradualmente durante l'apprendimento e applicabile in seguito a vari contesti. L'argomentazione rappresenta una competenza chiave per il cittadino di uno stato democratico, come espresso con enfasi da Resnick e Schantz nella prefazione al libro *Dialogue, Argumentation and Education* (Schwarz & Baker, 2016):

> «La partecipazione [di un cittadino] a una democrazia dipende dalla capacità di partecipare attivamente ai dibattiti e alle discussioni pubbliche quotidiane. Ciò significa essere in grado di prendere posizione sulla base di fatti, di controbattere a un'affermazione, di persuadere qualcuno ad avere un'altra opinione a proposito di una certa idea o di convincere qualcun altro della validità di un progetto. Significa saper sostenere una conversazione quando le parti coinvolte sono in forte disaccordo. Sono queste le abilità che permettono agli individui di plasmare il proprio destino. Le stesse competenze necessarie a una cittadinanza istruita per cambiare la società».
> (Schwarz & Baker, 2016, p. xii, traduzione degli autori)

Il ruolo di tale competenza viene inoltre esplicitato nella prefazione del testo *Argue with me* di Kuhn et al. (2017), in cui si ribadisce come l'argomentazione rappresenti

> «lo strumento principale che i cittadini di una democrazia hanno per affrontare le molte questioni che riguardano il loro benessere collettivo. Il presupposto alla base di una democrazia è che i suoi cittadini possiedano l'abilità e la disposizione a utilizzare questi strumenti, per affrontare sia le questioni più piccole sia quelle più grandi».
>
> (Kuhn et al., 2017, p. 150, traduzione degli autori)

Per quanto riguarda l'*argomentare per imparare*, le ricerche in merito hanno indagato le potenzialità dell'argomentazione in termini di apprendimento di contenuti specifici in diversi ambiti disciplinari, tra cui la matematica. In particolare, la ricerca sul tema ha evidenziato come, nel momento in cui l'argomentazione si rivolge a un'altra persona, colui che argomenta è sollecitato a chiarire le contraddizioni e le mancanze di quanto sostiene al fine di convincere il proprio interlocutore, approfondendo in tal modo la comprensione del concetto in questione (Kuhn, 1992). A tal proposito, nell'introduzione al libro *Argumentation and Education*, Muller Mirza e Perret-Clermont (2009) evidenziano come l'argomentazione sia un processo linguistico, logico, dialogico e psicologico che ha le potenzialità di migliorare la comprensione degli studenti, stimolando l'apprendimento in molti modi. Secondo gli autori, le pratiche argomentative, implicando l'esplicitazione della propria posizione e la sua giustificazione, consentono «approcci esplorativi e critici rispetto alla realtà: gli studenti, incoraggiati a testare la validità delle idee degli altri, sono portati a formulare obiezioni e contro-obiezioni e a comprendere una molteplicità di posizioni» (Muller Mirza & Perret-Clermont, 2009, p. 1, traduzione degli autori).
La ricerca sul tema riconosce inoltre all'argomentazione la potenzialità di supportare l'organizzazione della conoscenza (Means & Voss, 1996), nonché di favorire l'apprendimento riducendo il carico cognitivo che questo comporta, grazie alla dimensione dialettica dell'argomentazione e alla collaborazione tra pari. La dimensione sociale dell'argomentazione permette infatti una comprensione condivisa dei concetti, con effetti positivi sulle dimensioni volitive e motivazionali degli studenti.
Le potenzialità didattiche della pratica argomentativa sono state riconosciute anche in ambito scientifico e matematico. Diverse ricerche in ambito didattico mettono in evidenza come sia largamente diffusa tra studenti di ogni grado la convinzione che la matematica sia una disciplina statica, costituita da un sistema finito di regole, fatti e formule (Geisler & Rolka, 2021) nella quale la validazione delle affermazioni si basa spesso sull'autorità dei libri di testo o dell'insegnante (Inglis & Mejia-Ramos, 2009). Una convinzione, questa, che spesso trova riscontro anche tra gli insegnanti di matematica (Handal, 2003). In tal senso attraverso la pratica argomentativa è possibile veicolare una visione della scienza, in particolare della matematica, come di un vivace dibattito, come avviene per tutte le discipline. Una visione della scienza in cui il confronto di opinioni, la compresenza di prospettive differenti e la formulazione di critiche e dubbi rappresentano pratiche fondamentali e legittime per il raggiungimento di nuove conoscenze e soluzioni ai problemi formulati.
Da questo breve resoconto delle potenzialità e dei risvolti didattici dell'argomentazione, anche in contesto matematico, emerge l'importanza di un lavoro specifico in ambito scolastico sia riguardo all'*imparare ad argomentare* sia all'*argomentare per imparare*. Con la consapevolezza delle forti dipendenze reciproche tra i due, come accennato in precedenza, in questo articolo si farà particolare riferimento a questa seconda concezione dell'argomentazione, l'*argomentare per imparare*, con il fine di sviluppare anche la prima.

2.1 L'argomentazione nei documenti educativi istituzionali

L'interesse per l'argomentazione da parte della ricerca in ambito educativo ha avuto negli ultimi anni un notevole impatto anche sui decisori politici e sugli educatori che hanno redatto quadri di riferimento, indagini internazionali e piani di studio dei diversi livelli scolastici.

Lo sviluppo della competenza comunicativa, e in particolare argomentativa, appare infatti oggi come un traguardo di apprendimento cruciale, trasversale e transdisciplinare da perseguire in tutto il percorso educativo partendo dai primi anni scolastici.

Diverse organizzazioni internazionali hanno redatto documenti che ribadiscono questa linea.

Nel documento *Preparing 21st century students for a global society* (National Education Association, 2014), la comunicazione, e in particolare l'argomentazione, assumono un ruolo di primaria importanza tra le competenze fondamentali da sviluppare nella formazione degli studenti affinché maturino capacità critiche e comunicative, vitali per riuscire a scuola e soprattutto nella vita di tutti i giorni, in un mondo sempre più complesso.

Ancora, nelle attese europee in merito alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (European Commission: Directorate-General for Education, Youth, Sport and Culture [DG EAC], 2019), l'argomentazione viene citata sia tra le abilità costituenti la *literacy competence* che nella *citizenship competence*. La *literacy competence* comprende la capacità di «formulare ed esprimere le proprie argomentazioni in forma orale e scritta in modo convincente e adeguato al contesto. Comprende il pensiero critico e la capacità di valutare e utilizzare le informazioni» (DG EAC, 2019, p. 6, traduzione degli autori), mentre la *citizenship competence* comprende la capacità di pensiero critico, nonché la «capacità di sviluppare argomentazioni e di partecipare in modo costruttivo alle attività della comunità» (DG EAC, 2019, p. 12, traduzione degli autori).

L'argomentazione indicata nei documenti internazionali sopra citati, descritta come una competenza trasversale indispensabile per il cittadino del mondo globalizzato contemporaneo, viene individuata anche come componente indispensabile in generale della competenza scientifica, e in particolare di quella matematica.

Il più recente quadro di riferimento del programma PISA, dedicato specificatamente alla valutazione matematica, risale al 2022. In questo documento la capacità di presentare argomenti in modo veritiero e convincente viene indicata come «un'abilità che sta diventando sempre più importante nel mondo odierno» (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2023, p. 15, traduzione degli autori), indicando nella matematica una scienza che offre la possibilità di analizzare e trasformare oggetti e nozioni ben definiti attraverso attività quali la «riflessione su argomentazioni matematiche, e la spiegazione e giustificazione di risultati matematici» (OECD, 2023, p. 21, traduzione degli autori) e in cui «la chiarezza del contesto e la forte enfasi sul ragionamento logico e sul rigore ad un livello appropriato, la rendono perfetta per praticare e sviluppare l'abilità di questo tipo di argomentazione» (OECD, 2023, p. 41, traduzione degli autori).

L'argomentazione compare inoltre come competenza trasversale da favorire nei piani di studio nazionali relativi a tutti gli ordini scolari, solitamente associata a due altri termini di altrettanta rilevanza nell'ambito dell'educazione matematica: la comunicazione e la dimostrazione. In particolare, il tema è centrale nel contesto svizzero: *argomentare e giustificare* rappresenta uno dei due aspetti di competenza dichiarati a livello svizzero nel documento *Competenze fondamentali per la matematica. Standard nazionali di formazione* (Conferenza svizzera dei direttori cantonali della pubblica educazione [CDPE], 2011a) e ripresi sulla base de *L'accordo intercantonale sull'armonizzazione della scuola obbligatoria* (CDPE, 2011b) anche in Cantone Ticino. Nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022), ad esempio, la capacità di comunicare e argomentare le proprie affermazioni viene citata sia come una competenza trasversale, annoverata nel pensiero riflessivo e critico, sia come un processo cognitivo da sviluppare nello specifico ambito della matematica, a cui viene riconosciuta la potenzialità di permettere lo sviluppo dell'attitudine ad ascoltare, comprendere e valorizzare argomentazioni e punti di vista diversi dai propri, per poi farli agire in modo costruttivo con quelli personali.

Il contributo della matematica in tal senso viene riconosciuto anche dalle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (Ministero dell'Istruzione e del Merito [MIM], 2025), affermano che «in una prospettiva di crescita culturale, fin dalla scuola primaria lo stu-

dio delle scienze, insieme e in integrazione con la matematica, è indispensabile per favorire lo sviluppo delle capacità di ragionamento logico e di argomentazione, del pensiero critico, della proprietà di linguaggio e della padronanza della lingua italiana» e in modo particolare «per formare cittadini consapevoli, in grado di prendere decisioni informate su temi di rilevanza globale» (MIM, 2025, p. 130).
La competenza argomentativa viene dunque descritta dalle indicazioni internazionali e nazionali come cruciale per la formazione dei cittadini di una moderna società democratica e, al tempo stesso, di fondamentale importanza per la costruzione della competenza scientifica (in particolar modo matematica) e di una visione della scienza aderente al suo statuto epistemologico.
L'argomentazione appare dunque come una competenza articolata e dalle numerose potenzialità, che non può essere semplicemente assimilata alla capacità di ragionare o di dimostrare, come spesso viene intesa nella pratica didattica delle classi di matematica, ma che prevede necessariamente la considerazione del contesto dialogico in cui è immersa, degli interlocutori a cui è rivolta, nonché dello scopo per cui viene formulata, come previsto dalla teoria pragma-dialettica dell'argomentazione, la cui prima teorizzazione viene formulata da van Eemeren e Grootendorst (1992).

3 La teoria pragma-dialettica dell'argomentazione

La teoria pragma-dialettica dell'argomentazione si fonda sugli aspetti pragmatici, sociali e dialettici dell'argomentazione, che viene concepita come un dialogo critico volto a risolvere una differenza di opinione, in cui i partecipanti al dialogo possono essere ritenuti responsabili delle proprie affermazioni.
In particolare, nel testo *Argumentation theory: A pragma-dialectical perspective*, van Eemeren (2018) definisce l'argomentazione come

> «un complesso di atti comunicativi e interazionali che mirano a risolvere una divergenza di opinione con un interlocutore, proponendo una costellazione articolata di proposizioni di cui chi argomenta potrà essere ritenuto responsabile, con il fine di aumentare (o ridurre) l'accettabilità di una certa tesi in questione, per un giudice razionale che giudica in modo ragionevole».
> (van Eemeren, 2018, p. 3, traduzione degli autori)

Questa definizione di argomentazione è in linea con la concezione di argomentazione citata nei documenti educativi istituzionali, che concepiscono l'argomentazione come strumento per un cittadino in grado di sostenere una tesi e al tempo stesso di assumere un atteggiamento critico nei confronti di argomentazioni altrui, al fine di risolvere collaborativamente problemi, sciogliere conflitti e prendere decisioni. Il focus sulla dimensione dialogica della teoria pragma-dialettica dell'argomentazione rende inoltre questo approccio in linea con le diverse teorie, ampiamente accettate in ambito educativo, che riconoscono nel linguaggio e nel dialogo strumenti fondamentali per l'apprendimento e lo sviluppo cognitivo (Bruner, 1990; Mercer, 2002; Mercer & Littleton, 2007).
L'importanza di adottare una prospettiva pragmatica per l'argomentazione non deriva solo dalla sua vicinanza con quanto si verifica nei contesti quotidiani, nella vita democratica e in ambito educativo, ma trova riscontro anche in ambito teorico in quanto tramite questa prospettiva si possono mettere in evidenza aspetti del discorso argomentativo che altrimenti sarebbero esclusi.
Si riporta a riprova di ciò il caso delle fallacie argomentative tipicamente pragmatiche che non potrebbero essere descritte adottando una visione logica dell'argomentazione. La fallacia dello "*shifting the burden of proof*" ne è un evidente esempio. Questa fallacia si verifica quando chi ha avanzato una tesi chiede all'interlocutore di provare che tale affermazione sia falsa, anziché fornire lui stesso

argomenti a supporto (per una descrizione più approfondita si veda, ad esempio, van Eemeren et al., 2014). Questo esempio mostra chiaramente come la descrizione dell'argomentazione debba necessariamente includere gli aspetti di gestione della conversazione presi in considerazione dalle prospettive pragmatiche dell'argomentazione.

Adottando una prospettiva pragma-dialettica l'argomentazione occorre nella comunicazione tra due o più interlocutori tutte le volte in cui vi sia una qualche differenza di opinione, sia questa reale oppure solo immaginata dagli interlocutori. Tale differenza di opinione non deve necessariamente assumere la forma di un vero e proprio conflitto o di una disputa, anzi, come evidenziato da van Eemeren (2018):

> «il più delle volte la divergenza di opinioni non assume la forma di un disaccordo totale che coinvolge due posizioni opposte, ma rimane superficiale. In tal caso, una parte ha un'opinione su qualcosa e l'altra parte non condivide ancora tale opinione, ma è indecisa se accettarla o meno».
> (van Eemeren, 2018, p. 1, traduzione degli autori)

Questo presupposto implica che «quando si argomenta si presume che il destinatario non sia ancora convinto dell'accettabilità della tesi in questione. In caso contrario argomentare sarebbe del tutto insensato» (van Eemeren et al., 2014, p. 2, traduzione degli autori).

Mettendosi in un'ottica scolastica si può notare come l'argomentazione intesa in questo senso si differenzia dalle attività di descrizione o di spiegazione tipiche delle pratiche scolastiche; infatti, se queste ultime hanno lo scopo di chiarire una certa idea o affermazione, senza che il tema in oggetto venga messo in discussione tramite un dialogo, l'argomentazione nasce invece con l'intento di aumentare o diminuire il grado di accettazione di una certa tesi, attraverso l'uso di argomenti a favore o contro l'idea in questione (van Eemeren & Grootendorst, 2003; van Eemeren & Henkemans, 2016; Walton, 2005).

La definizione di argomentazione formulata da van Eemeren (2018), con la quale si è aperto questo paragrafo, racchiude in sé una serie di caratteristiche generali attribuite all'argomentazione, alcune delle quali indipendenti dal modo in cui questa parola viene usata nel linguaggio ordinario.

A questo proposito, l'autore evidenzia le seguenti quattro caratteristiche dell'argomentazione, cruciali per poterla definire e trattare teoricamente: un'argomentazione è composta da una combinazione funzionale di un insieme di atti comunicativi, è in linea di principio parte di un dialogo, è un'attività della ragione e fa appello alla ragionevolezza di un interlocutore razionale. Da queste quattro caratteristiche deriveranno poi i cinque elementi analitici di interpretazione dei quesiti matematici.

1. Un'argomentazione è necessariamente costituita dalla *combinazione funzionale di un insieme di atti comunicativi* (potenzialmente anche non verbali o visuali, per quanto usualmente presentati in forma orale o scritta), che strutturano l'argomentazione. Ciò significa che la pragma-dialettica non identifica l'argomentazione con la sua struttura, come un complesso di inferenze logiche, ma considera invece l'argomentazione come un insieme di atti comunicativi, concentrandosi in primo luogo sulle funzioni specifiche che i vari atti linguistici svolgono rispetto alla gestione di una differenza di opinione (van Eemeren et al., 2014). L'analisi dell'argomentazione come insieme di atti comunicativi e interazionali si riscontra nella pragma-dialettica in un principio metateorico fondante noto come *funzionalizzazione*. Tale principio consiste nel trattare ogni attività linguistica come un atto che ha una finalità, concentrandosi dunque sul modo in cui il linguaggio viene usato nella pratica argomentativa per comunicare e interagire, focalizzando la propria attenzione sulle «funzioni specifiche che i vari tipi di atti argomentativi compiuti dagli interlocutori coinvolti nel discorso argomentativo svolgono nella gestione del loro disaccordo» (van Eemeren, 2018, p. 21, traduzione degli autori).

2. Un'argomentazione ha una *natura dialogica*, almeno in linea di principio, in quanto volta a suscitare una reazione nell'interlocutore che ne indichi l'accettazione della tesi in questione. Il dialogo in cui è immerso il discorso argomentativo può essere esplicito oppure rimanere implicito, come nel caso di un lettore o di una platea passiva.
   Il ruolo della comunicazione e dell'interazione tra le parti, nell'argomentare una certa tesi, viene dunque riconosciuto come fondamentale dalla prospettiva teorica della pragma-dialettica, ponendola dunque in forte discordanza con gli approcci che descrivono l'argomentazione come il prodotto di un processo di pensiero individuale volto a stabilire la verità di un'affermazione. La concezione dell'argomentazione come scambio interattivo in cui i contributi di entrambe le parti dipendono sistematicamente l'uno dall'altro ha implicazioni metodologiche nella trattazione dell'argomentazione; questo principio metateorico è detto *socializzazione*.
3. L'argomentazione è un'*attività della ragione*, per cui chi argomenta può essere ritenuto responsabile delle costellazioni di proposizioni avanzate (van Eemeren, 2018). Le responsabilità che chi argomenta deve assumersi dipendono dalle proposizioni avanzate e dalla funzione comunicativa che queste hanno nel discorso (van Eemeren et al., 2014). Tali responsabilità possono tradursi in particolari obblighi interazionali. Chi argomenta e ha avanzato un punto di vista ha l'obbligo interazionale di difenderlo quando viene sfidato a farlo dall'ascoltatore. Il principio metateorico che deriva dal fatto che si possa essere ritenuti responsabili di un proprio atto comunicativo è detto *esternalizzazione*.
4. In un'argomentazione *l'interlocutore può dirsi un giudice ragionevole*; questo implica che l'argomentatore sarà tenuto a convincere il proprio interlocutore rispettando gli standard critici di ragionevolezza reciprocamente condivisi. Ciò significa che l'argomentazione non mira a far accettare una certa tesi a un uditorio automaticamente, come può invece accadere nelle pratiche persuasive che utilizzano e fanno leva in modo spregiudicato sui sentimenti degli ascoltatori; al contrario, l'obiettivo è quello di convincere l'interlocutore mostrando che i criteri condivisi di ragionevolezza sono stati rispettati, facendo in modo che possa giudicare ragionevolmente la fondatezza dell'argomentazione (van Eemeren et al., 2014). Questo punto è collegato al principio metateorico di *dialettizzazione*, per il quale una discussione critica volta a risolvere una differenza di opinione debba essere sottoposta a standard di ragionevolezza.

Nella prospettiva pragma-dialettica il concetto di ragionevolezza viene distinto da quello di razionalità e la differenza semantica tra i due viene chiarita da van Eemeren in questo modo: la ragionevolezza consiste nell'«uso della facoltà di ragionare in modo appropriato rispetto alla situazione comunicativa e interazionale» (van Eemeren, 2015, p. 577, traduzione degli autori), mentre la razionalità è concepita in modo più generale come l'«uso del ragionamento» (van Eemeren et al., 2014, p. 6, traduzione degli autori).
Dalla definizione fornita da van Eemeren (2018) emerge la profonda relazione che sussiste tra ragionamento e argomentazione. Per l'autore un'argomentazione coinvolge un ragionamento, e questo implica che l'argomentatore potrà essere ritenuto responsabile delle proprie argomentazioni e al tempo stesso che il destinatario di un'argomentazione debba essere considerato un giudice razionale, che giudica ragionevolmente, sulla base di standard critici di ragionevolezza reciprocamente condivisi.
Il ragionamento risulta dunque essere un elemento basilare e centrale per l'argomentazione, per quanto un'argomentazione non sia assimilabile alla verbalizzazione di un ragionamento. Per tracciare le differenze tra i due concetti è necessario però chiarire cosa sia un ragionamento, facendo riferimento alle ricerche sul tema in ambito psicologico.

4 Il ragionamento

Nell'ambito di ricerca della psicologia cognitiva, Mercier e Sperber (2011, 2018) descrivono il ragionamento come un particolare tipo di inferenza. Se un'inferenza consiste in generale nell'«estrazione di nuove informazioni da quelle già disponibili, qualunque sia il processo cognitivo in atto» (definizione che risulta in accordo con quella proposta da altri ricercatori nel campo della psicologia cognitiva, come Moshman, 1998, p. 952), nel ragionamento questo atto di estrazione è accompagnato dalla coscienza del proprio pensiero, cioè dalla comprensione della relazione di supporto tra una o più ragioni e una conclusione. Ne deriva che nel ragionamento la coscienza delle ragioni rappresenta una caratteristica indispensabile a differenza di quanto avviene per le inferenze; esisteranno dunque alcune inferenze che non sono ragionamenti.

Mercier e Sperber (2018) delineano dunque il ragionamento come «il particolare processo di conseguimento di tale obiettivo [la generazione di nuove convinzioni] prestando attenzione alle ragioni» (p. 53, traduzione degli autori), enfatizzando il ruolo delle ragioni e della coscienza di tali ragioni nell'ottenimento di nuove convinzioni. Mercier e Sperber, dunque, si servono della coscienza del pensiero per distinguere i vari processi inferenziali, ponendo il ragionamento a uno degli estremi di un continuum che va da inferenze totalmente inconsce a inferenze di cui abbiamo una parziale consapevolezza. In questo senso, secondo gli autori, le inferenze «non si distinguono l'una dall'altra per le proprietà dei meccanismi inferenziali coinvolti, ma per il modo in cui il processo di inferenza e la relativa conclusione sono oggetto di metacognizione» (Mercier & Sperber, 2018, p. 66, traduzione degli autori).

Ne risulta quindi una descrizione dei processi inferenziali che distingue, ad esempio, le percezioni, le intuizioni e i ragionamenti, sulla base della coscienza che abbiamo della loro formulazione. Nel caso di percezioni (o dei ricordi) non siamo assolutamente consapevoli di stare compiendo inferenze, ma al contrario abbiamo la sensazione che «ciò che percepiamo sia immediatamente presente e ciò che ricordiamo sia ricordato così come è stato memorizzato» (Mercier & Sperber, 2018, p. 62, traduzione degli autori). Ad esempio, nel momento in cui guardando dai finestrini di un treno e vedendo muoversi il treno accanto al nostro, pensiamo che stia partendo, stiamo in realtà compiendo un'inferenza. Tale inferenza è tanto spontanea e inconscia da renderci conto di averla formulata solo nel caso in cui si riveli errata, cioè nel caso in cui ci rendessimo conto che sia in realtà il nostro treno ad essere partito. Nel caso di un ragionamento, la consapevolezza riguarda sia le conclusioni a cui si è giunti, sia le ragioni che sono implicate in favore della conclusione.

Mercier e Sperber (2018) evidenziano, inoltre, che anche il ragionamento non risulta totalmente consapevole per l'individuo che lo formula, racchiudendo sempre in sé una componente intuitiva. Per quanto riguarda l'intuizione, essa consiste in un'inferenza caratterizzata da una certa consapevolezza di quanto si è concluso, ma non delle ragioni che sono state considerate. Si ha un'intuizione, ad esempio, nel momento in cui cogliamo un significato implicito durante una conversazione, o nel caso in cui percepiamo che nostro padre è di cattivo umore fin dalle prime parole di una telefonata. Il ragionamento, secondo gli autori, non rappresenta un processo cognitivo differente dall'intuizione, il ragionamento è infatti «l'uso di inferenze intuitive sulle ragioni» (Mercier & Sperber, 2018, p. 133, traduzione degli autori); in altre parole, nel caso di un ragionamento la componente intuitiva risiede nella comprensione che le ragioni considerate supportino una certa conclusione (gli autori chiamano tale conclusione *riflessiva* e la descrivono come *incorporata* in un argomento intuitivo, sottolineando la dimensione intuitiva che sottende un qualsiasi ragionamento).

Per chiarire questo punto si consideri come esempio il caso in cui venga promesso un premio se, scegliendo tra due sacchetti, si estragga una biglia bianca. Il primo sacchetto contiene tre biglie bianche e tre nere, mentre il secondo ne contiene quattro bianche e tre nere.

Si potrebbe intuire che, poiché la probabilità di estrarre una biglia bianca dal secondo sacchetto è più alta, sia preferibile scegliere il secondo sacchetto, e questo conduce alla conclusione riflessiva della scelta del secondo sacchetto. La conclusione di scegliere il secondo sacchetto è dunque un prodotto indiretto dell'intuizione che una probabilità più alta sia una buona ragione per preferire un sacchetto all'altro.
Si sottolinea inoltre che anche un argomento può essere ottenuto in modo riflessivo, consentendo la costruzione di ragionamenti gradualmente più complessi in cui più livelli di argomenti siano incorporati l'uno nell'altro. Riprendendo il caso dei due sacchetti, se ad esempio il nostro interlocutore non trovasse convincente l'argomento esposto, potremmo incorporarlo in un ragionamento più generale. Potremmo quindi produrre un argomento di questo tipo: a fronte del medesimo numero di biglie nere, il numero di biglie bianche contenute nel secondo sacchetto è più alto; quindi, la probabilità di estrarre una biglia bianca dal secondo sacchetto è più alta. In questo caso il fatto che la probabilità di estrarre una biglia bianca dal secondo sacchetto sia più alta costituirebbe un argomento riflessivo e la scelta del secondo sacchetto sarebbe una conclusione riflessiva. Il ragionamento potrebbe essere reso ulteriormente più complesso, incorporando ulteriormente l'argomento appena formulato in uno più generale.
In conclusione, secondo Mercier e Sperber (2011, 2018) il pensiero umano è composto in larga parte di processi inferenziali inconsci, tanto che sono relativamente rare le circostanze che ci inducono a prestare attenzione alle ragioni che supportano le nostre conclusioni. In accordo con gli autori, i motivi che ci spingono a sviluppare un ragionamento riguardano solitamente la messa in discussione delle nostre conclusioni da parte dell'esperienza o, caso ancora più probabile e significativo, da parte dei nostri interlocutori. Il dialogo con un interlocutore e il dialogo con la realtà rappresentano dunque i due contesti principali d'uso del ragionamento.
La ricerca di ragioni valide per le nostre conclusioni trova il suo contesto più naturale proprio nell'argomentazione, laddove l'intento di convincere e l'atteggiamento critico dell'altro ci inducono a ragionare per sostenere le nostre tesi e, in ultima analisi, a esplicitare e assumere coscienza di un certo processo inferenziale.
Spesso, infatti, un'argomentazione si sviluppa una volta che sia già presente in qualche forma un'opinione rispetto a una questione. Colui che argomenta cercherà dunque a posteriori, attraverso un ragionamento, ragioni che giustifichino quanto sostiene (Mercier & Sperber, 2018); esplicitando in questo modo i vari passaggi inferenziali.
Ripercorrendo il pensiero di Mercier e Sperber, è stata dunque fornita una caratterizzazione del ragionamento come attività cognitiva specifica, caratterizzata dalla coscienza e dall'attenzione per le ragioni coinvolte, evidenziandone il profondo legame con l'argomentazione, in quanto quest'ultima rappresenta il contesto privilegiato di applicazione del ragionamento.

5 Il rapporto tra ragionamento e argomentazione

In questo paragrafo viene mostrato il rapporto che sussiste tra ragionamento e argomentazione nella prospettiva della teoria pragma-dialettica dell'argomentazione e della caratterizzazione del ragionamento fornita da Mercier e Sperber, entrambe presentate in precedenza. In particolare, verrà approfondito il rapporto che intercorre tra l'argomentazione e la verbalizzazione di un ragionamento, in quanto quest'ultimo rappresenta un atto comunicativo particolarmente diffuso in ambito scolastico.
Dalla definizione di argomentazione di van Eemeren, riportata in precedenza, emerge come questo atto linguistico non coincida con il ragionamento, ma come l'argomentazione coinvolga il ragionamento all'interno di un contesto conversazionale.

Mercier e Sperber (2011, 2018) ipotizzano inoltre che l'argomentazione sia il contesto più naturale per il ragionamento, in quanto quest'ultimo

> «consente ai comunicatori di produrre argomentazioni per convincere i destinatari che non accetterebbero ciò che viene detto loro sulla base della sola fiducia [e] consente ai destinatari di valutare la solidità di tali argomentazioni e di accettare informazioni valide di cui altrimenti risulterebbero scettici».
>
> (Mercier & Sperber, 2011, p. 72, traduzione degli autori)

In particolare, il rapporto tra ragionamento e argomentazione viene qui descritto attraverso i seguenti cinque elementi analitici: verbalizzazione, coscienza delle ragioni, dialogo, differenza di opinione e incentivo all'argomentazione.

Verbalizzazione. Un primo elemento basilare da osservare riguarda la formulazione di un'argomentazione e di un ragionamento. Mentre un ragionamento può rimanere inespresso, formulato solo mentalmente, un'argomentazione deve essere almeno in linea di principio espressa o semiotizzata. Se il ragionamento è un processo mentale di comprensione di una relazione, anche in ambito matematico, perché si possa parlare di argomentazione, è necessario secondo la definizione di van Eemeren che tale ragionamento venga esplicitato in un «complesso di atti comunicativi e interazionali», attraverso «una costellazione articolata di proposizioni» (van Eemeren, 2018, p. 3, traduzione degli autori). Da questo punto di vista, la teoria pragma-dialettica dell'argomentazione assume come principio fondamentale in termini di oggetto d'analisi le argomentazioni verbalizzate. In particolare, un soggetto all'interno di un dialogo sarà ritenuto responsabile soltanto di ciò che ha effettivamente esplicitato e non di ciò che ha pensato; al contrario, alcuni approcci retorici all'argomentazione si concentrano sulle motivazioni e sugli atteggiamenti che soggiacciono al discorso argomentativo. Questo principio è detto di *esternalizzazione* e consiste nel «determinare le posizioni degli interlocutori in base al modo in cui si sono espresse nel discorso» (van Eemeren et al., 2014, p. 526, traduzione degli autori).

Coscienza delle ragioni. La coscienza delle ragioni rappresenta un aspetto comune tra ragionamento e argomentazione.
Come già anticipato, adottando la prospettiva teorica di Mercier e Sperber (2011, 2018), infatti, il ragionamento rappresenta un particolare processo cognitivo attraverso cui cerchiamo ragioni a supporto di una certa conclusione. Il ragionamento implica dunque il raggiungimento di una coscienza progressivamente maggiore delle ragioni sottese ai processi inferenziali compiuti, solitamente inconsci. Il contesto argomentativo rappresenta per i due ricercatori il contesto più naturale di applicazione del ragionamento; in tale contesto, infatti, l'attenzione alle ragioni è incentivata dal dialogo con l'interlocutore, il cui atteggiamento critico induce colui che argomenta a ricercare e fornire ragioni che possano risultare efficaci e adeguate alla tesi presentata. In un contesto argomentativo, lo scopo persuasivo e la necessità di essere compresi dal proprio interlocutore, così come le obiezioni di quest'ultimo, inducono quindi colui che argomenta a prendere coscienza delle ragioni che supportano le proprie conclusioni.

Dialogo. Un terzo punto di rapporto tra il ragionamento e l'argomentazione emerge ancora una volta dalla riflessione su ciò che afferma van Eemeren e si basa sulla dimensione dialogica dell'argomentazione. L'argomentazione è «un complesso di atti interazionali diretti a suscitare una risposta che indichi l'accettazione della tesi che viene sostenuta» (van Eemeren et al., 2014, p. 5, traduzione degli autori). In linea di principio l'argomentazione è dunque sempre parte di un dialogo con un destinatario. In particolare, secondo la teoria pragma-dialettica il carattere sociale e interazionale dell'argomentazione si riflette sulla natura e sulla distribuzione degli atti comunicativi che le parti coinvolte compiono nel risolvere una differenza di opinione (van Eemeren, 2018).
Al contrario, come detto nel par. 4, il ragionamento, per quanto trovi il proprio contesto di applicazione

più naturale proprio nei contesti argomentativi, viene impiegato anche nella risoluzione di problemi o per rispondere a domande di cui non abbiamo una soluzione intuitiva. Questa constatazione si rispecchia anche nel rapporto tra la verbalizzazione di un ragionamento e l'argomentazione. Un'argomentazione non si limita a un monologo con lo scopo di veicolare in modo unidirezionale un ragionamento compiuto in solitaria, ma si costituisce come un atto comunicativo inserito in un dialogo e non riguarda il solo mittente, ma anzi si rivolge e si plasma sull'interlocutore.

Un ragionamento è sempre coinvolto nella costruzione di un'argomentazione, ma non può rappresentare di per sé l'argomentazione stessa, in quanto quest'ultima non si costituisce del pensiero di un singolo, ma per sua natura è il prodotto della cooperazione degli interlocutori che vi prendono parte (Muller Mirza & Perret-Clermont, 2009).

In un'argomentazione è infatti il feedback costante dell'interlocutore che permette a chi argomenta di calibrare i propri argomenti in modo che siano appropriati e centrati sul destinatario, e allo stesso modo è il dialogo che permette di negoziare le premesse materiali (cioè le premesse condivise) e procedurali (cioè le regole da seguire) condivise tra le parti, che servono come punti di partenza fondamentali per l'argomentazione (van Eemeren, 2018).

Questo punto si rispecchia anche nell'estrema rilevanza didattica del dialogo per l'apprendimento in generale, trovando conferma nelle consolidate teorie pedagogiche che descrivono lo sviluppo del bambino come l'appropriazione progressiva di strumenti costruiti in un contesto interpersonale (Vygotsky, 1978).

Differenza di opinione. Un quarto punto da prendere in considerazione nel tracciare il rapporto tra ragionamento e argomentazione riguarda l'aspetto legato alla differenza di opinione. A questo proposito l'autore sottolinea che «[...] il più delle volte la divergenza di opinioni non assume la forma di un disaccordo totale che coinvolge due punti di vista opposti, ma rimane di natura elementare» (van Eemeren, 2018, p. 1, traduzione degli autori).

Nell'ambito quotidiano della vita comunitaria e dell'azione umana, l'argomentazione emerge solitamente nel caso in cui si debba prendere una decisione comune o stabilire la validità di un'affermazione per cui non sia possibile una verifica diretta. In accordo con Rigotti e Greco Morasso (2009) si può dire che «l'ambito proprio dell'argomentazione è quello della vita comunitaria e dell'azione umana» (p. 19, traduzione degli autori). Argomentare nella vita quotidiana, infatti, concerne più spesso l'agire piuttosto che il sapere, e le azioni spesso non riguardano la sfera dei principi generali ma si muovono nel «campo delle cose che sono in un certo modo ma che potrebbero anche essere in un altro» (p. 19, traduzione degli autori), potendo quindi essere cambiate o attuate dall'intervento umano. In questi casi si viene a costituire una differenza di opinione, la cui risoluzione razionale prevede appunto il ricorso all'argomentazione.

Il ragionamento ha invece ambiti di applicazione più generali: ricorriamo al ragionamento ogni qualvolta cerchiamo la risoluzione di un problema, ponderiamo le opzioni di una scelta, ci poniamo un quesito ecc. Ciò avviene anche individualmente e senza che questo generi una contrapposizione di tesi o emerga dalla necessità di dirimere una differenza di opinione. In questi casi il ragionamento si avvicenda all'intuizione, ricercando, attraverso l'inferenza a ritroso, ragioni a favore di conclusioni intuitive, vagliando e valutando tali conclusioni.

Questa differenza di applicazione si rispecchia anche nel confronto tra la verbalizzazione di un ragionamento e l'argomentazione. Esplicitare un ragionamento, laddove questo non nasca dalla necessità di dirimere un conflitto, conduce a una struttura dell'atto comunicativo e a una scelta delle ragioni che sono basate sul convincimento del soggetto che ha formulato il ragionamento, piuttosto che sull'intento pragmatico di risoluzione di un dubbio. Un'argomentazione, al contrario, «nasce sempre in risposta o in previsione di una divergenza di opinione, e ogni linea argomentativa sarà dunque scelta in funzione di risolvere tale divergenza» (van Eemeren, 2018, p. 21, traduzione degli autori). Non solo la necessità dell'argomentazione, ma anche la sua struttura e i criteri cui deve rispondere, sono direttamente collegati al dubbio o alla differenza di opinione che essa ha lo scopo di risolvere.

Incentivo all'argomentazione. Un ultimo e importante elemento da prendere in considerazione riguarda la presenza di un incentivo all'argomentazione. Di fronte a una differenza di opinione, infatti, è indispensabile che gli interlocutori coinvolti abbiano delle motivazioni personali per risolvere tale differenza e intraprendere quindi un discorso argomentativo. Nel contesto quotidiano, per quanto non sia una regola assoluta, ciò deriva dal fatto che ciascuna parte coinvolta desidera solitamente che la differenza si risolva a proprio favore, e questo si traduce nell'intenzione di convincere il proprio interlocutore della validità della propria tesi.
In generale, nel caso in cui si stia cercando la soluzione a un certo problema o si stiano ponderando le varie opzioni di una scelta, un ragionamento può avere un intento puramente cognitivo, epistemico, oppure essere finalizzato alla valutazione di una conclusione intuitiva una volta che questa venga smentita dall'esperienza. L'argomentazione mira invece a risolvere una differenza di opinione ricercando al contempo l'efficacia del proprio atto comunicativo e il mantenimento degli standard di ragionevolezza. Colui che argomenta cerca allo stesso tempo non solo di garantire che la propria argomentazione sia considerata ragionevole, ma anche che sia efficace nel convincere il proprio interlocutore (van Eemeren, 2018). A tale scopo chi argomenta sceglie i punti di partenza ritenuti più opportuni, il tipo di argomentazione più adatto e imposta le proprie argomentazioni sulla base delle caratteristiche del proprio interlocutore e in modo che risultino più chiare e convincenti possibili (van Eemeren, 2018).
Anche in questo caso sono evidenti le differenze tra l'argomentazione e gli atti comunicativi come la verbalizzazione di un ragionamento. Quest'ultima può avere infatti uno scopo esclusivamente informativo, comunicando ad esempio le ragioni che si sono identificate a supporto di una certa tesi e che sono risultate convincenti per sé stessi o descrivendo il procedimento adottato per la risoluzione di un problema. Questo interessante atto comunicativo, lecito e formativo a scopo didattico, risulta però diverso rispetto a un'argomentazione vera e propria, in cui la volontà di convincere facendo appello alla ragione subisce l'influenza cruciale dell'interlocutore, focalizzandosi sulla ricerca di ragioni che possano convincere l'altro oltre che sé stessi. Basta pensare a quando un allievo cerca di convincere il docente della bontà del suo processo risolutivo quando è in discussione una valutazione numerica maggiore o minore di una verifica.

6 Argomentazione a scuola

Nella pratica scolastica sono numerose le attività matematiche alle quali vengono attribuiti traguardi legati all'argomentazione. Tali proposte risultano profondamente diverse tra loro, differenziandosi ad esempio per la tipologia di quesito che propongono, per il contesto in cui questo è inserito o per gli atti linguistici richiesti nello svolgimento dell'attività. In questo paragrafo si riportano esempi di attività provenienti da diversi contesti, quali le prove di valutazione nazionali italiane dell'Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione (INVALSI), le competizioni del Rally Matematico Transalpino (RMT), attività di classe e un laboratorio proposto in un festival di matematica.
Nello specifico vengono analizzati alcuni quesiti didattici argomentativi alla luce degli elementi analitici identificati nel par. 5: *verbalizzazione, coscienza delle ragioni, dialogo, differenza di opinione* e *incentivo all'argomentazione*, al fine di verificare quali e quanti di questi elementi caratteristici dell'argomentazione nella prospettiva pragma-dialettica vengono potenzialmente stimolati in tali attività. L'analisi condotta riguarda la formulazione dei quesiti e il potenziale contesto nel quale vengono

applicati ma non il dialogo effettivo che emerge dall'interazione con e tra gli studenti.
Tale analisi può dunque risultare utile didatticamente in fase progettuale. Alla luce dei risultati di questa analisi si mostrerà come alcune di queste attività interpretino l'argomentazione come la verbalizzazione di un procedimento, altre come la verbalizzazione di un ragionamento che coinvolge anche la coscienza delle ragioni e come solo in pochi casi esse cerchino di adottare uno sguardo più ampio che si avvicina all'ottica della pragma-dialettica, includendo aspetti dialogici, una differenza di opinione da risolvere e un incentivo all'argomentazione.
Inoltre, nel corso dell'analisi si discuteranno alcuni fattori progettuali relativi ai quesiti e ai contesti didattici in cui questi sono inseriti, che potrebbero favorire o ostacolare il realizzarsi degli elementi analitici dell'argomentazione pragma-dialettica, e che andrebbero contemplati durante la progettazione e realizzazione di attività argomentative in classe, allo scopo di sviluppare negli studenti competenze argomentative.

6.1 Primo esempio: la verbalizzazione del procedimento

In questo paragrafo si riporta un'analisi di alcuni quesiti che in ambito scolastico vengono tipicamente considerati argomentativi e che, a nostro parere, si limitano piuttosto alla verbalizzazione di un procedimento. Gli atti linguistici coinvolti da questi quesiti sono associabili più alla descrizione che all'argomentazione; ricordiamo che si tratta di atti diversi tra loro, con differenze teoriche che sono state esplicitate all'interno del par. 3.
Un esempio di questa tipologia di quesiti qui riportato è tratto dalle prove nazionali italiane dell'INVALSI, riguardanti l'ambito matematico. Va qui ricordato che i quesiti delle prove standardizzate INVALSI vengono risolti individualmente dagli allievi, che hanno a disposizione un tempo massimo di circa un'ora per risolvere circa trenta quesiti. L'argomentazione rappresenta una competenza chiave per tutti i gradi scolastici della scuola italiana, come viene indicato, seppur con diversa enfasi, dalle relative *Indicazioni nazionali*, e in quanto tale rientra tra le competenze matematiche valutate dalle prove INVALSI.
Nello specifico, l'argomentazione figura tra i processi misurati dal *Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica* (INVALSI, 2018) e viene esplicitamente menzionata nell'*Archivio prove INVALSI di Matematica*[2] nel processo 600, «acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...)», e nel processo 610, «utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare, ...)», nonché tra le parole chiave affiancate ai quesiti: «confronto fra argomentazioni», «esplicitazione di argomentazioni» e «giustificazione di argomentazioni».
Va anche detto che il *Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica* (INVALSI, 2018) specifica che le prove standardizzate risultano poco adatte a valutare pienamente il conseguimento della competenza di sostenere argomentazioni, evidenziando dunque i limiti da questo punto di vista dello strumento valutativo.

Il quesito oggetto di analisi è riportato in Figura 1 ed è tratto dalla prova Mat-SNV 2018,[3] destinata ad allievi di quinta elementare. Tale quesito è stato classificato nell'*Archivio prove INVALSI di Matematica* con entrambi i processi 600 e 610 e con la parola chiave «esplicitazione di argomentazioni».

2. https://www.gestinv.it/RicercaGuidata.aspx.
3. La sigla Mat-SNV 2018 indica la prova di matematica del Servizio Nazionale di Valutazione dell'INVALSI dell'anno 2018.

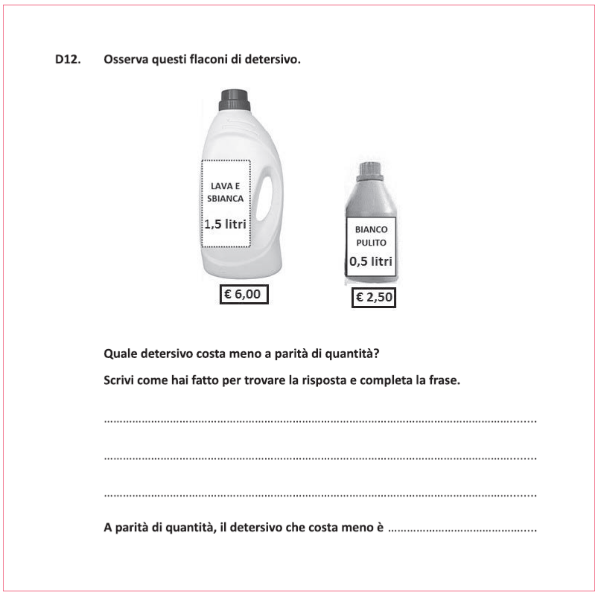


Figura 1. Il quesito 12 della prova Mat-SNV 2018.

Il quesito in questione richiede la formulazione di una risposta a una domanda e la produzione di un breve testo scritto sollecitato dalla richiesta: «Scrivi come hai fatto per trovare la risposta…», dunque rivolta alla *verbalizzazione* di una procedura risolutiva seguita.

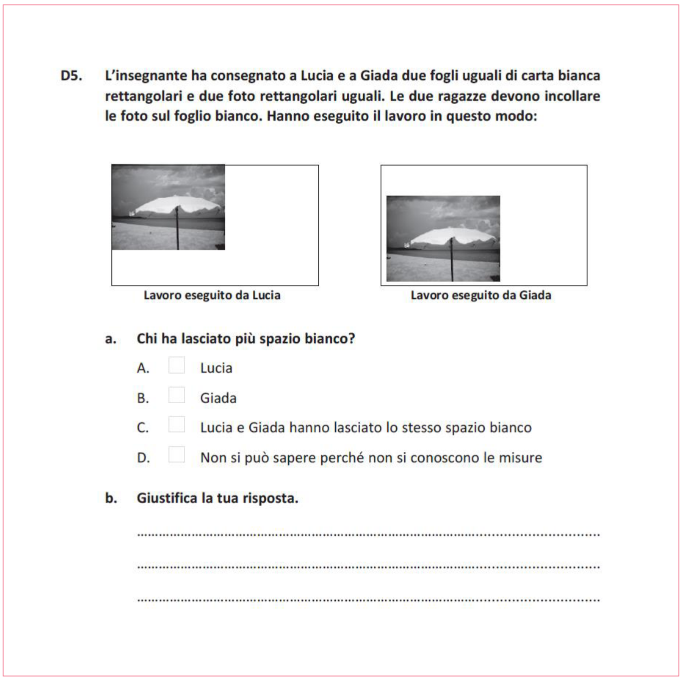
Come ribadito in precedenza, la verbalizzazione di un procedimento, pur avendo un ruolo formativo, non implica necessariamente la ricerca attraverso un ragionamento delle ragioni che supportano il procedimento scelto e che validano la soluzione raggiunta. In questo caso, infatti, la sola richiesta di esporre il procedimento seguito non sollecita direttamente la ricerca e la coscienza delle ragioni che lo supportano. Il tipo di quesito, e soprattutto la richiesta posta, giocano dunque un ruolo fondamentale rispetto alla coscienza da parte degli studenti delle ragioni che supportano un procedimento o una soluzione. Il processo cognitivo del ragionamento, infatti, come esposto nel par. 4 attraverso la teoria di Mercier e Sperber (2018), viene attivato nei casi in cui i processi cognitivi inconsci quali l'intuizione o la memoria risultino insufficienti e di solito in seguito al confronto con la realtà o con un interlocutore. Di conseguenza, la coscienza delle ragioni coinvolte in un'inferenza non viene raggiunta spontaneamente dall'individuo nel caso in cui non risulti necessaria o ne venga fatta richiesta esplicita. Nell'esempio in questione, l'allievo potrebbe ottenere una strategia risolutiva attraverso un'intuizione oppure la memoria, potrebbe ad esempio intuire che si possa triplicare il costo del secondo flacone per poi confrontare questo valore con il costo del primo, oppure potrebbe rievocare questo procedimento dalla memoria se già appreso in precedenza. In entrambi i casi il procedimento applicato potrebbe essere ottenuto senza che ci sia *coscienza* da parte dell'alunno *delle ragioni* che lo rendono valido. In accordo con Mercier e Sperber (2018) e con van Eemeren e Grootendorst (2003), la coscienza delle ragioni a supporto di una certa tesi rappresenta un aspetto centrale nella produzione di argomentazioni: il contesto argomentativo richiede infatti a colui che argomenta di chiarire il proprio processo inferenziale, identificando ragioni che possano risultare convincenti per il proprio interlocutore. Inoltre, il testo del quesito e le necessità valutative delle prove standardizzate non favoriscono la presenza di un *dialogo*, dato che l'atto comunicativo richiesto allo studente non si rivolge a un interlocutore di cui si conoscono le ragioni (il valutatore delle prove) e di cui si possono immaginare le controargomentazioni, impedendo a chi avanza la tesi di regolare di conseguenza la propria argomentazione.

Anche il realizzarsi di una *differenza di opinione* non viene favorita direttamente dal quesito, dato che non vengono presentate tesi e ragioni differenti tra le quali lo studente deve posizionarsi, sostenendo la propria tesi e prendendo al tempo stesso in considerazione quelle altrui, e non viene neppure proposta una situazione sufficientemente ampia da favorire la produzione di diverse soluzioni tra le quali

scegliere, non consentendo così all'argomentazione di essere l'unico strumento razionale per gestire una differenza di opinione.
Non vi è inoltre un *incentivo* alla formulazione di *un'argomentazione*, dato che l'interlocutore a cui si rivolge lo studente, ossia il valutatore delle prove INVALSI, non deve essere persuaso della validità della soluzione proposta, conoscendo la risposta corretta e i criteri di validazione. È necessario però chiarire che la richiesta di produrre un testo scritto individualmente ostacola il realizzarsi di un dialogo, ma non rappresenta un vincolo assoluto. In generale, è infatti possibile produrre un testo argomentativo rispetto a un tema di dibattito e all'interno di un dialogo implicito, immaginando e anticipando le possibili controargomentazioni di un interlocutore di cui si conoscono le convinzioni precedenti, con lo scopo di convincerlo della propria tesi. Nel caso specifico della risoluzione delle prove INVALSI, però, non risulta possibile per gli studenti immaginare un interlocutore con queste caratteristiche.
Infine, va ribadito come la scelta di etichettare come argomentativi questo tipo di quesiti da parte dell'istituto INVALSI possa avere ricadute negative sulla pratica didattica, in quanto rafforza l'idea negli insegnanti che un'argomentazione possa ricondursi alla descrizione di una procedura risolutiva e che la competenza argomentativa in matematica possa essere costruita proponendo solamente questo tipo di quesiti.

6.2 Secondo esempio: la coscienza delle ragioni

Un altro esempio di quesito tratto dalle prove INVALSI, in particolare dalla prova Mat-SNV del 2012, è il seguente (Figura 2).



D5. L'insegnante ha consegnato a Lucia e a Giada due fogli uguali di carta bianca rettangolari e due foto rettangolari uguali. Le due ragazze devono incollare le foto sul foglio bianco. Hanno eseguito il lavoro in questo modo:

Lavoro eseguito da Lucia

Lavoro eseguito da Giada

a. Chi ha lasciato più spazio bianco?

A. ☐ Lucia
B. ☐ Giada
C. ☐ Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco
D. ☐ Non si può sapere perché non si conoscono le misure

b. Giustifica la tua risposta.

....
....
....

Figura 2. Il quesito 5 della prova Mat-SNV 2012.

Si tratta di un quesito destinato ad allievi di quinta elementare che, come il precedente, è stato etichettato con i processi 600 e 610. Questo quesito richiede allo studente di giustificare la sua risposta. Come indicato nel dizionario *Il Nuovo Vocabolario di Base della lingua italiana*, di De Mauro (2016), l'atto linguistico «giustificare» assume qui il significato di «motivare con valide ragioni» le proprie scelte.

In questo caso, la richiesta di giustificare la soluzione dovrebbe incentivare l'allievo a ricercare e a esprimere verbalmente le ragioni che supportano la propria scelta. Il quesito prevede dunque il primo elemento teorico dell'argomentazione pragma-dialettica, ossia la *verbalizzazione*. In particolare, in questo caso l'atto comunicativo richiesto all'alunno è rivolto a esplicitare le ragioni a supporto della risposta scelta. È dunque presente anche il secondo degli elementi analitici definiti nel par. 5, la *coscienza delle ragioni*. La risposta corretta del quesito: «Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco», potrebbe infatti essere raggiunta in modo intuitivo, senza che le ragioni per cui ciò valga siano consce, ma la richiesta esplicita di giustificare la risposta data incentiva il ricorso al ragionamento per cercare tali ragioni. Secondo Mercier e Sperber (2018), infatti, il ragionamento rappresenta un atto cognitivo in cui la coscienza riguarda sia le conclusioni a cui si è giunti sia le ragioni che sono coinvolte in favore della conclusione. In questo quesito il ragionamento potrebbe condurre gli allievi a sostenere che "l'aver sottratto aree uguali ad aree uguali" sia una buona ragione (consapevole) per inferire che le aree ottenute siano uguali (nel lessico di Mercier e Sperber questa conclusione è detta *riflessiva*).

Ribadiamo come la coscienza delle ragioni coinvolte in un'inferenza sia un aspetto fondamentale per la costruzione di un'argomentazione; in ottica didattica, se si vuole sviluppare la competenza argomentativa, è quindi importante cercare di incentivarla tramite la richiesta esplicita di giustificare, motivare o direttamente argomentare le proprie scelte. A questo proposito ricordiamo che, sempre secondo Mercier e Sperber (2018), il pensiero umano è composto in larga parte da processi inferenziali inconsci. Come già anticipato, si ricorre invece al ragionamento quando una certa conclusione, raggiunta inconsciamente, risulta errata alla prova della realtà, oppure quando risulta inefficace di fronte a un interlocutore durante una discussione argomentativa. In ottica didattica questa considerazione ci induce a riflettere sul fatto che alla richiesta esplicita e diretta di identificare ragioni (attraverso la richiesta di giustificare o motivare) sia opportuno affiancare attività didattiche inserite all'interno di contesti argomentativi in cui risulti necessario risolvere una differenza di opinione, oppure in cui le conclusioni intuitive risultino errate.

Come per il precedente esempio (par. 6.1), inoltre, il testo del quesito e il contesto delle prove standardizzate non prevedono la presenza di un *dialogo*, nemmeno implicito. L'atto comunicativo richiesto allo studente è infatti rivolto al valutatore delle prove standardizzate, con cui non è possibile stabilire premesse condivise sui cui basare l'argomentazione. Inoltre, l'alunno non conosce le attese del valutatore, né quali ragioni potrebbero essere considerate appropriate; ciò gli impedisce di impostare il proprio atto comunicativo sulla base dell'interlocutore, come avverrebbe all'interno di un dialogo implicito.

Anche in questo caso, come nel precedente, il problema non introduce, né favorisce, una *differenza di opinione*, dato che la soluzione del problema può essere verificata in modo diretto e non vengono proposte tesi diverse da dover dibattere.

A questo aspetto si collega l'assenza di un *incentivo all'argomentazione*: in questo caso l'alunno è consapevole che l'interlocutore è in possesso della tesi corretta e di ragioni valide da un punto di vista matematico; di conseguenza viene meno l'intento persuasivo della comunicazione, che viene incentivata esclusivamente dal desiderio (eventuale) di ottenere un buon punteggio.

I contesti comunicativi associati ai due quesiti presentati in questo paragrafo e nel precedente fanno riferimento all'argomentazione come alla verbalizzazione di procedure o di ragionamenti. Tale interpretazione risulta assai diffusa nella pratica scolastica e trova riscontro anche nella letteratura sul tema in didattica della matematica, come emerge ad esempio dalla definizione fornita alla voce *Argumentation* *in Mathematics Education* nell'*Encyclopedia of Mathematics Education* (Sriraman & Umland, 2020) in cui le argomentazioni prodotte da studenti e insegnanti durante le lezioni di matematica vengono definite come

> «una sequenza di ragionamenti che intende dimostrare o spiegare perché un risultato matematico sia vero. Tale risultato può essere un enunciato generale riguardante una classe di oggetti matematici o semplicemente la soluzione di un problema che è stato posto. In questo senso, un'argomentazione matematica può essere una dimostrazione formale o informale, una spiegazione del modo in cui uno studente o un insegnante sia giunto a formulare una particolare congettura, di come abbia ragionato su un problema per arrivare a una soluzione, o semplicemente una serie di calcoli che ha portato a un risultato numerico».
>
> (Sriraman & Umland, 2020, p. 63, traduzione degli autori)

Questa definizione risulta particolarmente ampia e al tempo stesso manchevole di qualunque riferimento alla dimensione dialogica dell'argomentazione.

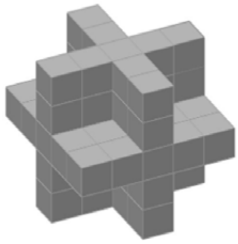
6.3 Terzo esempio: un potenziale contesto favorevole

Il terzo esempio che prendiamo in considerazione coniuga ulteriori elementi della teoria pragma-dialettica, per quanto, come vedremo, solo alcuni di questi vengano incentivati in modo diretto.
Si tratta di un quesito tratto dalle gare del Rally Matematico Transalpino (RMT), una competizione di matematica che è stata organizzata dal 2001 al 2024 dall'Associazione Rally Matematico Transalpino [ARMT] (2020) e alla quale partecipava l'intera classe. Tale competizione era destinata ad allievi dalla scuola elementare fino al primo biennio di scuola superiore. I partecipanti alla competizione provenivano dal Belgio, dalla Francia, dall'Italia, dal Lussemburgo e dalla Svizzera, componendo un gruppo internazionale di lavoro e sperimentazione di materiali didattici. La struttura della competizione prevedeva che ciascuna classe risolvesse in completa autonomia una lista di problemi matematici, senza ricevere alcun supporto da parte del docente. Gli alunni dovevano quindi organizzare internamente il proprio lavoro, distribuendosi i problemi, che venivano dunque risolti in piccoli gruppi oppure individualmente. In ciascun sottogruppo si instaurava un eventuale dibattito per arrivare a una soluzione condivisa.
L'argomentazione viene indicata da ARMT come una componente centrale nei problemi del RMT e viene identificata sia nella verbalizzazione scritta sia nella fase di discussione di gruppo durante la risoluzione (ARMT, 2009). Nel contesto delle gare del RMT, infatti, gli alunni dialogano tra di loro nel tentativo di comprendere il contesto del problema, durante l'individuazione di una strategia risolutiva e durante la fase finale, in cui si chiede di presentare la propria soluzione in forma scritta, mostrando come si sia proceduto per ottenere la soluzione. Si noti dunque quanto sia il contesto della gara stessa a facilitare l'atto argomentativo, prima che il quesito stesso.
I problemi del RMT sono anche diffusamente utilizzati nella pratica al di fuori del contesto della gara, divenendo, come auspica la stessa associazione:

> «parte integrante ("costitutiva") del programma di matematica e dei suoi obiettivi, in particolare per ciò che riguarda l'approccio allo spirito e al ragionamento scientifico: sviluppo dell'autonomia di apprendimento, organizzazione di una ricerca, rigore delle notazioni, capacità di argomentare e di comunicare i risultati».
>
> (ARMT, 2020)

Il seguente quesito è tratto dalla seconda prova del 2019 e destinato a studenti di quarta e quinta elementare e prima media (Figura 3).

6. IL FERMACARTE SVIZZERO (Cat. 4, 5, 6)
In una vetrina è esposto il fermacarte che vedete in figura, formato da tanti cubetti magnetici.



Giulia lo osserva da vicino, lo prende e lo rigira tra le mani e così si accorge che le parti che nella figura non sono visibili, sono perfettamente uguali a quelle che si vedono.
Giulia si accorge che può facilmente contare i cubetti da cui è formato senza smontarlo.
Da quanti cubetti è formato il fermacarte?
Spiegate come avete trovato la soluzione.

Figura 3. Il quesito 6 della seconda prova del RMT del 2019.

Il quesito mostra l'immagine di un fermacarte composto da un certo numero di cubetti. La risoluzione del problema presuppone di immaginare la conformazione del fermacarte per poterne contare i cubetti dai quali è formata, per poi spiegare come è stata trovata la soluzione. In particolare, rispetto a quest'ultima richiesta, i valutatori delle prove fanno riferimento al procedimento risolutivo adottato durante la risoluzione, come confermato dalla seguente griglia di valutazione delle risposte scritte consegnata ai valutatori:

> «4 punti: risposta corretta (61 cubetti) con spiegazione dettagliata della strategia adottata e di eventuali conteggi (in caso che venga detto esplicitamente che mancano da 1 a 5 cubi che non si vedono, si accetta la risposta coerente: da 56 a 60 cubi); 3 punti: risposta corretta con descrizione del procedimento seguito non del tutto chiara e dettagliata; 2 punti: risposta corretta senza spiegazione oppure risposta non corretta dovuta a un errore di calcolo, ma con spiegazione dettagliata; 1 punto: inizio di ragionamento corretto (per esempio, individuazione del numero di cubetti presenti in alcune parti della figura…); 0 punti: incomprensione del problema».
> (ARMT, 2006)

Procedendo con l'analisi del quesito alla luce degli elementi analitici della pragma-dialettica, la richiesta esplicita di spiegare come si sia ottenuta la propria soluzione presuppone una *verbalizzazione* della procedura svolta durante la risoluzione, in questo caso il significato attribuito all'atto linguistico di spiegare risulta in accordo con quello fornito nel par. 3.
Rispetto alla *coscienza delle ragioni* coinvolte, questa potrebbe emergere durante la fase di discussione tra gli studenti in ciascun gruppo, attraverso le argomentazioni volte a convincere i propri compagni, per quanto il quesito non richieda esplicitamente ragioni che giustifichino la soluzione avanzata.
Il *dialogo* viene favorito dall'organizzazione delle prove del RMT, la cui risoluzione avviene in gruppo. I problemi vengono suddivisi internamente dalla classe, è dunque possibile che un piccolo gruppo di alunni si dedichi alla risoluzione del quesito instaurando un dialogo. Il dialogo in questo caso è esplicito, il feedback costante dei compagni obbliga i membri del gruppo a calibrare i propri argomenti per giungere a una decisione comune.
Il quesito non incentiva in modo diretto una *differenza di opinione*, per quanto questa possa emergere nel caso in cui due o più studenti durante i lavori in gruppo siano in disaccordo sulla procedura da adottare. Non vi è una differenza di opinione nemmeno con il valutatore, che è già in possesso della soluzione corretta e delle strategie risolutive valide. Una differenza di opinione potrebbe invece essere incoraggiata presentando agli alunni diverse strategie di risoluzione tra cui scegliere, oppure

attraverso la proposta di un problema per cui non sia possibile stabilire una sola soluzione, in modo che gli studenti stessi formulino diverse strategie e approcci al problema.
Per quanto riguarda l'*incentivo all'argomentazione*, durante la fase di discussione tra gli studenti potrebbe manifestarsi tramite l'intento persuasivo di voler proporre la propria strategia risolutiva considerata corretta, ma nei confronti del valutatore esterno viene meno l'intento persuasivo, in quanto gli alunni possono supporre che conosca la soluzione corretta e le strategie per raggiungerla.
Come evidenzato, questo quesito si focalizza in modo esplicito esclusivamente sulla verbalizzazione di una procedura risolutiva; i restanti elementi, invece, per quanto possano eventualmente emergere attraverso la richiesta agli alunni di risolvere come classe i diversi problemi della prova del RMT, non vengono favoriti in modo diretto.
Per quanto il quesito durante la competizione sia risolto in gruppo e all'interno di un contesto dialogico, si richiede esplicitamente la verbalizzazione di un procedimento dato anche dal criterio fornito ai valutatori della prova. Dunque, la scelta di etichettare come argomentativi questo tipo di quesiti potrebbe ancora una volta rafforzare la convinzione nei docenti che questi elementi siano sufficienti alla realizzazione dell'argomentazione in classe e alla costruzione della competenza argomentativa degli studenti.

6.4 Quarto esempio: la presenza di un dialogo

I problemi che simulano un dialogo vengono solitamente classificati come argomentativi dai libri di testo. Questi problemi presentano spesso alcune tesi contrapposte, chiedendo agli allievi di sceglierne una ed eventualmente di giustificare la propria scelta. Lo studente è quindi chiamato a prendere posizione e a convincere un ipotetico interlocutore a cambiare idea.
Un esempio di questo tipo di problema, tratto dal libro di testo per le scuole medie *Tutto chiaro!* (Montemurro, 2021), è il seguente (Figura 4).

ARGOMENTARE

144. L'insegnante chiede: "Qual è la soluzione dell'equazione 6x = 0?". Rispondono quattro alunni.

Andrea → "È indeterminata". Alice → "È impossibile".
Nicole → "È zero". Riccardo → "È 6".

Tu come avresti risposto? Perché? ....

....

Figura 4. Un quesito tratto dal libro di testo *Tutto chiaro!* (Montemurro, 2021, p. 278).

Esempi di questo tipo sono presenti anche nelle prove INVALSI; riportiamo di seguito un quesito destinato ad allievi di quinta elementare (Figura 5). Il quesito è tratto dalla prova Mat-SNV del 2022 e ad esso vengono attribuite la parola chiave: «giustificazione di argomentazioni» e la dimensione «argomentare».

D24. Nel seguente distributore ci sono 80 palline colorate: 40 sono rosse, 20 sono verdi e 20 sono gialle.
Alice e Marco discutono su quale sia la percentuale di palline rosse dentro il distributore.

Alice dice: “Il 50% delle palline nel distributore è rosso”.
Marco dice: “Il 40% delle palline nel distributore è rosso”.
Chi ha ragione?
Scegli una delle due risposte e completa la frase spiegando perché ha ragione.

☐ **Alice ha ragione perché** ....
....
....

☐ **Marco ha ragione perché** ....
....
....

Figura 5. Il quesito 24 della prova Mat-SNV 2022.

Analizzando questo quesito (Figura 5) attraverso gli elementi analitici dell’argomentazione pragma-dialettica si nota come il quesito prevede la *verbalizzazione*, che viene richiesta in modo esplicito. In particolare, si domanda agli studenti di spiegare perché il personaggio scelto abbia ragione. Come indicato nel dizionario *Il Nuovo Vocabolario di Base della lingua italiana* di De Mauro (2016), la richiesta di «spiegare» assume qui il significato di esplicitare «per quale motivo» la risposta scelta sia corretta. L’attenzione alle ragioni viene incentivata anche dalla frase «Alice/Marco ha ragione perché», che l’alunno è chiamato a integrare come incipit della propria produzione scritta. Questo quesito incentiva dunque in modo diretto la *coscienza delle ragioni* coinvolte, che rappresenta il secondo degli elementi analitici presi in considerazione. La presenza di un *dialogo*, seppur simulato, permette di mettere a confronto tesi e argomentazioni contrapposte. L’argomentazione potrebbe infatti rivolgersi verso il personaggio che ha avanzato la tesi che non è stata scelta dallo studente, qualificandosi così come interlocutore immaginario con il quale argomentare. Ipotizzare le ragioni della controparte consente di argomentare organizzando il proprio atto comunicativo in modo che sia centrato sull’interlocutore, fornendo ragioni appropriate ed evidenziando implicitamente le debolezze delle ragioni dell’altra parte. In tal modo la propria argomentazione si inserisce in un dialogo implicito, in cui è possibile immaginare le ragioni o le possibili controargomentazioni del proprio interlocutore. Occorre però ammettere che la presenza di più opzioni tra cui scegliere e la richiesta di giustificare tale scelta non garantiscono che l’attività costituisca un contesto autentico per l’attività argomentativa.
L’assenza di un dialogo esplicito, infatti, impedisce di negoziare attivamente le premesse materiali e procedurali con il proprio interlocutore e di mettere in atto il processo dialettico di raggiungimento di un accordo comune che rappresenta il cuore dell’attività argomentativa.
Per quanto riguarda la necessità di dirimere una *differenza di opinione*, il quesito introduce due tesi distinte, tra le quali lo studente è chiamato a scegliere. Si configura dunque una differenza di opinione in

cui si inserisce l'atto comunicativo dell'alunno. Ciononostante, non è possibile per lo studente formulare una propria tesi e la situazione descritta non risulta essere una situazione realistica, in cui si debba prendere una decisione e per cui non sia possibile verificare in modo diretto la soluzione. In questo caso, infatti, è possibile applicare un algoritmo di calcolo per verificare in modo univoco la soluzione, mentre l'argomentazione trova usualmente impiego negli ambiti in cui più scelte valide sono possibili e in cui la migliore scelta possibile non può essere stabilita in modo assoluto. La differenza di opinione proposta risulta quindi artefatta, non emerge infatti in un contesto in cui si debba decidere tra due tesi ugualmente valide per ottenere un'opinione comune.
In ultimo, per quanto sia presente un interlocutore implicito da convincere, l'assenza di una motivazione personale per cui sia significativo sostenere una delle tesi proposte all'interno di un contesto realistico, ad esempio in cui sia necessario dirimere una differenza di opinione per prendere una decisione, ostacola il realizzarsi di un *incentivo all'argomentazione*, e in particolare di un intento persuasivo.

6.5 Quinto esempio: dirimere una differenza di opinione

Per quanto concerne la progettazione di contesti didattici in cui l'argomentazione si costituisca come mezzo per la risoluzione di un dubbio o di una differenza di opinione, alcune sperimentazioni didattiche si sono proposte di realizzare problemi per i quali non esistesse un criterio chiaro o una procedura per determinare una soluzione univoca. Riportiamo a titolo di esempio uno dei problemi tratto da Antonini (2018) proposto a studenti di seconda e terza media. Il ricercatore ha attinto dalla teoria dei giochi per elaborare problemi in cui gli alunni potessero immedesimarsi e la cui soluzione fosse incerta, mettendo gli studenti nella condizione di formulare ipotesi e argomentare nel tentativo di raggiungere una soluzione condivisa.
Durante lo svolgimento del problema gli studenti coinvolti hanno provato collettivamente a raggiungere una soluzione comune al seguente quesito:

> «Tre musicisti, Ada, Bea e Ciro, vengono contattati per suonare a una festa. Potranno esibirsi da soli, in coppia o in trio. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti: 100 euro a Ada (se suona sola), 150 euro a Bea (da sola), 180 euro a Ciro (da solo), 600 euro al trio se suonano insieme. Se suonano in coppia, i ricavi saranno i seguenti: 400 euro alla coppia Ada e Bea, 300 euro a Ada e Ciro, 420 euro a Bea e Ciro. Mettendovi nei panni dei tre musicisti, provate a discutere l'offerta e spiegate in che modo Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni».
>
> (Antonini, 2018, p. 37)

Gli alunni sono chiamati a motivare le proprie affermazioni: la *verbalizzazione* viene dunque incentivata direttamente.
Per quanto riguarda la *coscienza delle ragioni*, come indicato dal dizionario *Il Nuovo Vocabolario di Base della lingua italiana* di De Mauro (2016) l'atto linguistico di «motivare» assume qui il significato di «spiegare con appropriata motivazione o giustificazione». Inoltre, il quesito propone una situazione simile ai contesti quotidiani di applicazione del ragionamento, contesti in cui la necessità di convincere un interlocutore ci induce a cercare ragioni che possano risultare efficaci. Durante la fase di discussione, gli studenti devono dunque necessariamente prestare attenzione alle ragioni a supporto della propria soluzione e delle altrui soluzioni nel tentativo di giungere a una risposta comune.
Il problema viene risolto collettivamente: questo inserisce le argomentazioni all'interno di un *dialogo* esplicito in cui sia possibile valutare criticamente le argomentazioni altrui permettendo agli interlocutori di stabilire le premesse materiali e procedurali indispensabili all'argomentazione.
Per quanto riguarda la *differenza di opinione* nella quale si inserisce l'argomentazione, osserviamo che il problema proposto non ha soluzione certa, questo implica che durante la risoluzione gli studenti siano incentivati a formulare soluzioni personali e a dirimere il conflitto che ne consegue attraverso un

dialogo argomentativo. In questo caso, l'argomentazione risulta infatti l'unico strumento per sciogliere le differenze di opinione e decidere quale decisione prendere. In questo senso il contesto del problema si avvicina alle situazioni di realtà in cui l'argomentazione trova il suo contesto più naturale, nelle quali spesso non esiste un criterio chiaro per raggiungere o verificare la validità di una certa soluzione a un problema, rendendo l'argomentazione uno strumento inevitabile per prendere una decisione.
Infine, a proposito di un adeguato *incentivo all'argomentazione*, e in particolare dell'impegno persuasivo da parte di chi argomenta, osserviamo che questo sarà tanto più sentito quanto più chi argomenta percepisce come importante la tesi che sostiene, come accade nel contesto della vita quotidiana e dell'agire umano. Nell'esempio in questione la risoluzione del problema non ha conseguenze dirette per chi argomenta, non si tratta di prendere una decisione o di argomentare a favore di una tesi che risulti cara a chi la sostiene. La situazione proposta richiede invece uno sforzo di immedesimazione da parte degli studenti in uno scenario che potrebbe non essere loro familiare; dunque, potrebbe non esserci un incentivo sufficiente all'argomentazione.

6.6 Sesto esempio: incentivo all'argomentazione

Come abbiamo mostrato nel par. 5, l'argomentazione in senso pragma-dialettico necessita di un adeguato incentivo affinché possa realizzarsi, dato che nel contesto quotidiano l'intento persuasivo rappresenta la motivazione più comune perché si produca un'argomentazione.
A questo proposito si riporta un esempio significativo verificatosi in occasione della quarta edizione del festival *Matematicando. A spasso con la matematica per le strade di Locarno* che si è svolto nel 2024 nella città di Locarno (Svizzera).
Tale evento è un festival biennale di matematica in cui, oltre ad esserci spettacoli a tema matematico, sezioni e classi dei diversi livelli scolastici conducono laboratori matematici rivolti a coetanei e a cittadini. All'interno di tale cornice, l'argomentazione rappresenta il mezzo per convincere i propri interlocutori, giovani e adulti, della validità di ciò che si propone in ambito matematico, condizione indispensabile per il successo dell'attività stessa.
In particolare, l'esempio qui proposto scaturisce dal laboratorio *Probability* (Pezzi & Cosci, 2026), destinato a studenti di scuole elementari e medie, che è stato organizzato e gestito da classi degli stessi livelli scolastici. Durante l'anno scolastico, in preparazione al festival che si svolge nel mese di maggio, ciascuna classe ha sperimentato delle attività riguardanti la probabilità e in seguito gli allievi hanno scelto e progettato insieme quattro postazioni da proporre in modalità laboratoriale durante l'evento. I problemi proposti nelle postazioni sono stati scelti in modo da dare adito a possibili interpretazioni erronee intuitive in ambito probabilistico, emerse dalla letteratura di riferimento.
Durante il festival, il laboratorio è stato gestito dai ragazzi che accoglievano le varie classi partecipanti e le suddividevano in quattro gruppi. Ogni gruppo visitava le quattro postazioni a rotazione e aveva a disposizione, come in un gioco a premi, un certo numero di monete da giocare lungo l'intero percorso. Durante il festival, gli studenti che animavano le postazioni dovevano gestire le attività, presentando i problemi di ogni postazione, monitorando le scommesse e le vincite, e spiegando infine le soluzioni dei problemi agli studenti partecipanti.
Di seguito si riporta il contenuto di una delle quattro postazioni.
Gli allievi organizzatori mostravano ai coetanei una ruota con i numeri da 1 a 10, ne illustravano il funzionamento e invitavano i concorrenti a provare. Successivamente proponevano il seguente quesito:

> Dopo aver girato tre volte la ruota, quale tra queste sequenze di numeri <u>è più probabile che esca</u>?
>
> ☐ 10 – 10 – 10 ☐ 1 – 2 – 3
>
> ☐ 2 – 6 – 9 ☐ Nessuna delle precedenti, hanno tutte la stessa probabilità.
>
> (Pezzi & Cosci, 2026, p. 4)

Questo problema fa riferimento alla "misconcezione della rappresentatività" (Fischbein & Schnarch, 1997), che comporta la stima della probabilità di un evento in base alla rappresentatività di tale evento rispetto alla classe di eventi a cui appartiene. Ad esempio, se consideriamo due estrazioni del lotto: "1, 2, 3, 4, 5, 6" e "39, 1, 17, 33, 8, 27", la seconda sequenza di numeri formata da numeri non ordinati appare più rappresentativa rispetto alla prima di un'estrazione casuale. Sulla base di questa considerazione si potrebbe valutare che la prima sequenza abbia una probabilità minore di essere estratta, mentre entrambe hanno la stessa probabilità di esserlo. Per un approfondimento dei problemi coinvolti nel laboratorio si veda la scheda didattica *Probability* (Pezzi & Cosci, 2026).
Per scegliere la risposta corretta i concorrenti avevano la possibilità di girare la ruota e di discutere assieme l'opzione da scegliere e il quantitativo di monete da puntare. Dopo aver condiviso tali scelte, gli studenti dovevano comunicarle agli organizzatori. A questo punto gli studenti organizzatori invitavano i propri coetanei a spiegare la propria risposta e, nel caso in cui fosse errata, dovevano provare a convincerli del fatto che la loro scelta non fosse corretta (Figura 6).

Figura 6. Una fotografia scattata durante lo svolgimento del laboratorio.

L'attività didattica considerata prevede dunque la *verbalizzazione* sia da parte degli studenti organizzatori, sia da parte dei partecipanti.
La *coscienza delle ragioni* poteva emergere in diversi momenti dell'attività: le varie fasi di discussione tra gli studenti partecipanti e tra gli studenti organizzatori e quelli partecipanti prevedevano infatti il raggiungimento di una risposta condivisa e la persuasione dei propri interlocutori, affinché il gioco potesse proseguire. Come dichiarato nel par. 5, tali situazioni rappresentano il contesto più naturale di applicazione del ragionamento, dato che risulta necessario cercare ed esplicitare ragioni appropriate nel caso in cui una conclusione raggiunta intuitivamente, come prevedibile in questa circostanza, non fosse accettata dall'interlocutore. La coscienza delle ragioni coinvolte è dunque stata incentivata indirettamente durante l'attività, per quanto la produzione di ragioni non fosse richiesta esplicitamente.
In questo contesto, il *dialogo* viene incentivato in modo esplicito. Durante l'intera attività, infatti, e in tutte le fasi di discussione, gli atti comunicativi degli studenti coinvolti sono stati rivolti a interlocutori da persuadere e che avrebbero potuto esprimere i propri dubbi e le proprie controargomentazioni rispetto alle tesi presentate. Tale condizione rende possibile la strutturazione di argomentazioni sulla base dei feedback diretti degli interlocutori, realizzando la natura sociale e interazionale della pratica argomentativa.
La *differenza di opinione* tra i partecipanti alla discussione è stata incentivata dalla scelta del quesito. Il quesito selezionato è stato infatti formulato in modo che potesse far emergere risposte legate alla misconcezione della rappresentatività. L'intuizione che porta alla conclusione che una sequenza ordinata sia un caso molto speciale di un'estrazione casuale è particolarmente diffusa; questo aspetto

potrebbe generare differenze di opinione tra gli studenti organizzatori e i partecipanti, ma anche tra i partecipanti stessi. Per quanto il problema possa essere risolto attraverso l'applicazione del calcolo della probabilità, nel caso sia conosciuto dagli studenti, la presenza della misconcezione della rappresentatività e il fatto che la probabilità fosse stata affrontata poco nelle classi partecipanti al laboratorio hanno consentito di generare autentiche differenze di opinione durante l'attività.
Infine, può dirsi presente un *incentivo all'argomentazione*, ossia un intento persuasivo degli alunni convolti nell'attività didattica. In questo esempio il contesto ha giocato un ruolo fondamentale: gli studenti sia organizzatori sia partecipanti sono stati infatti coinvolti in prima persona grazie al contesto del festival e alla dinamica del gioco a premi. Tutto ciò ha contribuito a costruire un contesto in cui gli studenti si sono sentiti motivati ad argomentare le proprie tesi, sia durante la fase di discussione tra i partecipanti, incentivati a persuadere i propri compagni dalla dinamica del gioco a premi, sia durante la fase finale di spiegazione. In quest'ultima fase, infatti, l'intento persuasivo degli studenti organizzatori è stato supportato anche dal contesto e dal proprio ruolo. Dopo aver lavorato a lungo sui problemi nei mesi precedenti, e dovendo giustificare ai partecipanti il fatto che avessero vinto o perso le proprie monete, gli organizzatori hanno fatto ricorso a numerosi argomenti pur di convincere i propri interlocutori, ad esempio mostrando con una tabella tutti i casi verificabili, lasciando che i concorrenti girassero la ruota molte volte, oppure evidenziando analogie con altri giochi già risolti dai partecipanti.

7 Conclusioni

Il lavoro riportato in questo articolo, basato sulla teoria pragma-dialettica dell'argomentazione (van Eemeren, 2018), affiancata alla descrizione teorica del ragionamento di Mercier e Sperber (2018), ha consentito di identificare e caratterizzare i seguenti cinque elementi analitici: verbalizzazione, coscienza delle ragioni, dialogo, differenza di opinione e incentivo all'argomentazione. La scelta di tale prospettiva teorica consente di trattare la competenza argomentativa in modo conforme a quanto atteso dalle linee guida nazionali e internazionali in ambito educativo, dai quadri di riferimento dei programmi di valutazione internazionale e dai piani di studio dei vari Paesi. Tale approccio integra le dimensioni sociale, pragmatica e dialogica della pratica argomentativa, nell'ottica di favorire allo stesso tempo sia il processo di argomentare per imparare, sia la capacità di imparare ad argomentare; una competenza, quest'ultima, considerata fondamentale per il futuro cittadino di una società democratica.
L'analisi condotta ha permesso di validare l'efficacia dei cinque elementi analitici identificati, che risultano una buona chiave di lettura per vedere se e quanto diversi quesiti didattici tra loro eterogenei soddisfino o meno le caratteristiche dell'argomentazione pragma-dialettica.
In particolare, dall'analisi effettuata è emerso come alcuni noti quesiti presi in esame in questo articolo, che solitamente vengono considerati come quesiti volti a sviluppare la competenza argomentativa negli allievi, presentino solo alcuni degli elementi analitici considerati, concentrandosi principalmente sugli aspetti della verbalizzazione di un processo risolutivo o di un ragionamento, senza che l'atto comunicativo prodotto sia inserito in un contesto sociale e pragmatico che coinvolge il dialogo, la differenza di opinione, o l'incentivo alla persuasione. Questo tipo di interpretazione dell'argomentazione come verbalizzazione di un procedimento o di un ragionamento rappresenta un valido traguardo didattico in ottica matematica, soprattutto in vista dell'apprendimento della dimostrazione matematica, ma a nostro parere tali attività non risultano sufficientemente formative per sviluppare negli studenti competenze argomentative in linea con le competenze chiave richieste per un futuro cittadino attivo e critico di una società democratica. Dunque, la scelta di etichettare come argomentativi questo tipo

di quesiti da parte dei libri di testo, delle prove standardizzate o delle varie risorse circolanti può avere ricadute negative sulla pratica didattica, in quanto rafforza l'idea che la competenza argomentativa possa svilupparsi senza che vengano presi in considerazione ulteriori elementi pragmatici fondamentali per l'argomentazione.

L'analisi condotta su questi quesiti, effettuata tramite i cinque elementi analitici, ha inoltre permesso di chiarire il ruolo di alcuni aspetti riguardanti il quesito e il contesto nel quale si colloca, nell'ottica di stimolare negli studenti l'argomentazione in senso pragma-dialettico.

Un aspetto emerso riguarda il *tipo di problema* proposto per incentivare l'argomentazione, che spesso coinvolge una risposta univoca per la quale si vuole verificare la conoscenza da parte degli studenti. Eppure, come abbiamo evidenziato dalla letteratura (Rigotti & Greco Morasso, 2009), un problema ricco e aperto sarebbe più adatto per incentivarla, dato che si avvicinerebbe maggiormente alle situazioni quotidiane e di vita comunitaria in cui si debba prendere una decisione, senza che sia possibile verificare in modo chiaro e diretto la correttezza di una scelta rispetto a un'altra. In questo modo il problema potrebbe sollecitare la produzione di opinioni diverse, non essendo risolubile applicando una procedura risolutiva algoritmica conosciuta, consentendo così il verificarsi della funzione fondamentale dell'argomentazione di gestione razionale di una differenza di opinione nel tentativo di ottenere una convinzione comune (van Eemeren et al., 2014).

Un altro aspetto emerso riguarda l'*atto linguistico* richiesto allo studente nei quesiti di matematica, che condiziona ciò che ci si attende da loro. Il tipo di atto (descrivi, spiega, giustifica, motiva ecc.) orienta considerevolmente la risposta dello studente, e va dunque richiesto con consapevolezza. A questo proposito, abbiamo accennato al fatto che scelte differenti in questo senso, quali ad esempio le richieste di descrivere un procedimento o un ragionamento, di motivare o di giustificare, abbiano ricadute sulla verbalizzazione e sulla coscienza delle ragioni, incentivando più o meno esplicitamente l'attenzione degli studenti sulle ragioni coinvolte nelle varie situazioni proposte.

Un altro aspetto riguarda la presenza di un *interlocutore*, sia questo immaginario, oppure reale. Perché l'atto comunicativo dello studente sia rivolto verso un interlocutore immaginario, è ad esempio possibile descrivere nel quesito un dialogo simulato, fornendo valide e sufficienti ragioni per tutte le tesi presentate. In tal modo sarà possibile per lo studente formulare un'argomentazione rivolta e plasmata su un interlocutore di cui conosce la tesi, le ragioni, e di cui può immaginare le possibili controargomentazioni. In tal modo l'argomentazione sarà immersa in un dialogo implicito, nel quale colui che argomenta non reagisce direttamente a obiezioni espresse in tempo reale, ma produce un monologo in cui anticipa i possibili dubbi o le controargomentazioni di un certo interlocutore o pubblico. Un dialogo esplicito è invece possibile nel caso in cui l'interlocutore sia effettivamente reale, non sia già convinto della tesi che gli viene presentata, oppure non conosca già la soluzione del quesito, e che sia disposto a dialogare con colui che argomenta per ottenere una tesi comune. Si è infatti messo in evidenza nel quadro teorico come il dialogo sia fondamentale al fine di negoziare le premesse delle proprie argomentazioni, permettendo al contempo di comprendere le ragioni altrui e regolando di conseguenza le proprie argomentazioni, realizzando così il carattere sociale e interazionale dell'argomentazione (van Eemeren, 2018).

Infine, un ultimo importante aspetto riguarda il *contesto sociale* dell'attività, in cui lo studente possa formulare una propria tesi sentendosi motivato a sostenerla, e personalmente coinvolto. Questa dimensione sociale costituisce un aspetto determinante perché lo studente sia incentivato ad argomentare. Si è infatti mostrato come un incentivo all'argomentazione, come ad esempio un intento persuasivo, sia un ingrediente fondamentale per il costituirsi di un contesto argomentativo. La propensione a convincere grazie all'uso della ragione, e ancor di più la disposizione a lasciarsi persuadere se posti di fronte a buoni argomenti, costituiscono infatti due elementi fondamentali della competenza argomentativa.

In conclusione, si può affermare che gli elementi analitici evidenziati e gli aspetti progettuali emersi dall'analisi consentano di strutturare contesti didattici che favoriscono l'insorgere di un'argomentazione aderente alla prospettiva della pragma-dialettica, configurandosi come un approccio per promuovere lo sviluppo di quelle competenze critiche, comunicative e argomentative auspicate dai quadri di riferimento nazionali e internazionali per la formazione di un cittadino consapevole, critico e partecipe di una società democratica.

Bibliografia

Andriessen, J., Baker, M., & Suthers, D. (Eds.) (2003). *Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0781-7

Antonini, S. (2018). Giocare con la matematica: Argomentare, modellizzare e costruire significati. *Quaderni di ricerca in didattica*, *2*, 13–18. https://flore.unifi.it/handle/2158/1244500

Association Rallye Mathématique Transalpin. (2006). Il fermacarte svizzero. In *Banca di problemi del RMT.* ARMT. https://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=3d75-it&flag=1&langue=it&enonce=27rmtii_it-6&w=0

Association Rallye Mathématique Transalpin. (2009). Collezione di giornalini. In *Banca di problemi del RMT.* ARMT. https://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=nu36-it&flag=1&langue=it&w=

Association Rallye Mathématique Transalpin. (2020). *Concezione RMT.* ARMT. Consultato il 1 aprile 2025 da https://armtint.eu/concezione-rmt/

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning: Four lectures on mind and culture.* Harvard University Press.

Conferenza svizzera dei direttori cantonali della pubblica educazione. (2011a). *Competenze fondamentali per la matematica.* CDPE. https://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf

Conferenza svizzera dei direttori cantonali della pubblica educazione. (2011b). *L'accordo intercantonale sull'armonizzazione della scuola obbligatoria (concordato HarmoS) del 14 giugno 2007.* CDPE. https://edudoc.ch/record/100376/files/Harmos-konkordat_i.pdf

De Mauro, T. (2016). *Il Nuovo Vocabolario di Base della lingua italiana.* Internazionale. https://dizionario.internazionale.it

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://www.pianodistudio.ch

European Commission: Directorate-General for Education, Youth, Sport and Culture. (2019). *Key competences for lifelong learning.* Publications Office of the European Union. https://data.europa.eu/doi/10.2766/569540

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). *Brief report*: The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96–105. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.1.0096

Geisler, S., & Rolka, K. (2021). "That wasn't the math I wanted to do!" – Students' beliefs during the transition from school to university mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(3), 599–618. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10072-y

Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator*, *13*(2), 47–54. https://doi.org/10.63301/tme.v13i2.1863

Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2009). The effect of authority on the persuasiveness of mathematical arguments. *Cognition and Instruction*, *27*(1), 25–50. https://doi.org/10.1080/07370000802584513

Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2018). *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di matematica.* INVALSI. https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf

Kuhn, D. (1992). Thinking as argument. *Harvard Educational Review*, *62*(2), 155–179. https://doi.org/10.17763/haer.62.2.9r424r0113t670l1

Kuhn, D., Hemberger, L., & Khait, V. (2017). *Argue with me: Argument as a path to developing students' thinking and writing* (2nd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315692722

Means, M. L., & Voss, J. F. (1996). Who reasons well? Two studies of informal reasoning among children of different grade, ability, and knowledge levels. *Cognition and Instruction*, *14*(2), 139–178. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1402_1

Mercer, N. (2002). *Words and minds: How we use language to think together.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203464984

Mercer, N., & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the development of children's thinking.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203946657

Mercier, H., & Sperber, D. (2011). Why do humans reason? Arguments for an argumentative theory. *Behavioral and Brain Sciences*, *34*(2), 57–74. https://doi.org/10.1017/S0140525X10000968

Mercier, H., & Sperber, D. (2018). *The enigma of reason.* Harvard University Press. https://doi.org/10.4159/9780674977860

Ministero dell'Istruzione e del Merito. (2025). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.* MIM. https://www.mim.gov.it/documents/20182/10554370/curricolo_web.pdf/f91c31a0-5ed4-65f3-bfea-fb49adaba55f?version=1.0&t=1773224873548

Montemurro, A. (2021). *Tutto chiaro! Aritmetica-Geometria. Con Quaderno E Prontuario. Ediz. Tematica.* DeAgostini Scuola.

Moshman, D. (1998). Cognitive development beyond childhood. In D. Kuhn & R. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 2. Cognition, perception, and language* (5th ed., pp. 947–978). Wiley.

Muller Mirza, N., & Perret-Clermont, A.-N. (Eds.) (2009). *Argumentation and education: Theoretical foundations and practices.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3

National Education Association. (2014). *Preparing 21st century students for a global society: An educator's guide to the "Four Cs".* https://thinkcreatesharegrow.weebly.com/uploads/1/7/8/0/17807859/a-guide-to-four-cs.pdf

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023). *PISA 2025 science framework*. OECD. https://pisa-framework.oecd.org/science-2025/

Pezzi, D., & Cosci, L. (2026). Probability. In Centro competenze didattica della matematica (Eds.), *Schede didattiche*. Matematicando, SUPSI. https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/probability/

Rigotti, E., & Greco Morasso, S. (2009). Argumentation as an object of interest and as a social and cultural resource. In N. Muller Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and education: Theoretical foundations and practices* (pp. 9–66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3_2

Schwarz, B. B. (2009). Argumentation and learning. In N. Muller Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and education: Theoretical foundations and practices* (pp. 91–126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3_4

Schwarz, B. B., & Baker, M. J. (2016). *Dialogue, argumentation and education: History, theory and practice.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781316493960

Sriraman, B., & Umland, K. (2020). Argumentation in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 63–66). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_11

van Eemeren, F. H. (2015). *Reasonableness and effectiveness in argumentative discourse: Fifty contributions to the development of pragma-dialectics* (Vol. 27). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-20955-5

van Eemeren, F. H. (2018). *Argumentation theory: A pragma-dialectical perspective* (Vol. 33). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95381-6

van Eemeren, F. H., Garssen, B., Krabbe, E. C. W., Snoeck Henkemans, A. F., Verheij, B., & Wagemans, J. H. M. (Eds.) (2014). *Handbook of argumentation theory.* Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9473-5_1

van Eemeren, F. H., & Grootendorst, R. (1992). *Argumentation, Communication and Fallacies. A Pragma-dialectical Perspective.* Lawrence Erlbaum.

van Eemeren, F. H., & Grootendorst, R. (2003). *A systematic theory of argumentation: The pragma-dialectical approach.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511616389

van Eemeren, F. H., & Henkemans, A. F. S. (2016). *Argumentation: Analysis and evaluation* (2nd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315401140

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes.* Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4

Walton, D. (2005). *Fundamentals of critical argumentation.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511807039

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
2026 (19), 39–66. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.2

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

"Confrontare senza Calcolare": la ricerca del progetto ArAl sulla verifica di equivalenze tra espressioni matematiche

"Comparing without Calculating": the ArAl project's research on verifying the equivalence of mathematical expressions

Giancarlo Navarra• ed Emma Pareti°
•Responsabile scientifico del Progetto ArAl; già professore a contratto, Università di Modena e Reggio Emilia – Italia
°Scuola primaria "Galliano-Rossini", Firenze – Italia

✉ giancarlonavarra@gmail.com, paretiemma@gmail.com

Sunto / Nell'articolo si presenta il progetto di ricerca "Confrontare senza Calcolare" (CsC), nato nell'ambito del progetto ArAl con l'obiettivo di verificare quanto e come un insegnamento relazionale dell'aritmetica possa favorire l'argomentazione sulla verità di equivalenze fra rappresentazioni numeriche, superando la tendenza degli alunni a interpretarle come calcoli. Si descrivono il contesto teorico e metodologico di riferimento e le competenze promosse dalle attività di CsC. Si analizzano diversi episodi tratti da attività svolte nella scuola primaria e nella secondaria di primo grado, allo scopo di individuare strategie didattiche, e relative competenze del docente, per promuovere lo sviluppo di competenze relazionali negli allievi. I risultati riassumono tali strategie, tra le quali esaltare e favorire il colpo d'occhio, distinguere tra calcoli locali e globali, individuare premesse e conclusione in un'argomentazione, evitare la "gabbia relazionale", e mettono al contempo in luce la necessità di specifiche competenze del docente per poter adottare in modo efficace tali strategie.

Parole chiave: *early algebra*; progetto ArAl; pensiero relazionale; equivalenza fra espressioni; confronto tra espressioni.

Abstract / This article presents the research project "Comparing without Calculating" (CsC), developed within the ArAl project. Its aim is to investigate to what extent and in what ways a relational approach to teaching arithmetic can foster students' argumentation about the truth of equivalences between numerical representations, overcoming their tendency to interpret them merely as calculations. The theoretical and methodological framework of the project is outlined, together with the competencies promoted by the proposed CsC activities. Several episodes drawn from classroom activities in primary and lower secondary school are analysed with the aim of identifying teaching strategies – together with the corresponding teacher competences – capable of fostering the development of students' relational competences. The findings summarize such strategies, which include enhancing and supporting intuitive insight, distinguishing between local and global calculations, identifying premises and conclusions within an argument, and avoiding the so-called "relational cage". At the same time, the results highlight the need for specific teacher competences to implement these strategies effectively.

Keywords: early algebra; ArAl project; relational thinking; equivalence of expressions; comparison of expressions.

1 Premessa

Questo articolo illustra il progetto di ricerca e sperimentazione "Confrontare senza Calcolare", avviato nel 2022 all'interno del "Progetto ArAl: percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico"[1] nella cornice teorica dell'*early algebra*.[2] L'articolo intende mostrare come i risultati ottenuti sinora offrano contributi significativi non solo per lo sviluppo ulteriore degli studi interni al progetto stesso, ma anche in relazione ad aspetti metodologici e teorici più generali del progetto ArAl.
Il progetto "Confrontare senza Calcolare" nasce dalla constatazione che gli alunni[3] tra i 6 e i 14 anni tendono a "vedere" le scritture matematiche quasi esclusivamente come operazioni da eseguire. Questa prospettiva li porta a incontrare difficoltà quando, nel loro progressivo avvicinarsi alla generalizzazione, devono misurarsi con competenze relative non solo all'operare, ma soprattutto all'interpretare, al confrontare e al gestire rappresentazioni numeriche con numeri noti o sconosciuti.
L'ipotesi che orienta il progetto è che *un approccio relazionale possa contribuire a superare tali difficoltà.* In particolare, si ritiene che tale approccio favorisca lo sviluppo di competenze fondate sull'esplorazione delle relazioni tra i numeri coinvolti – noti o sconosciuti – e sull'uso consapevole, quando necessario, di semplici strategie di calcolo mentale e di riconoscimento delle strutture numeriche. Come scrivono Carpenter et al. (2003):

> «Molte importanti idee che favoriscono lo sviluppo del pensiero pre-algebrico coinvolgono relazioni fra rappresentazioni differenti di numeri. Le frasi in linguaggio matematico contenenti equivalenze vere o false con al loro interno numeri e numeri "da scoprire" costituiscono contesti stimolanti per esplorare tali relazioni. Gli alunni, mentre argomentano sulla verità delle equivalenze, si confrontano con concetti fondamentali dell'aritmetica e dell'algebra».
> (Carpenter et al., 2003, p. 39, traduzione degli autori)

Scritto a quattro mani, l'articolo trae origine da una tesi di laurea[4] la cui parte sperimentale è stata condotta durante l'anno scolastico 2024/2025 in cinque classi di scuola primaria[5] nella provincia di Siena.
Di seguito, viene introdotto il progetto CsC[6] tracciando i principali costrutti che costituiscono la sua base teorica.

1. Il progetto ArAl ha origine dai lavori condotti dai primi anni '80 dal GREM (Gruppo di ricerca in Educazione Matematica presso l'Università di Modena e Reggio Emilia) sotto la direzione scientifica di Nicolina A. Malara. Negli anni '90 le premesse sociali e culturali del progetto si evolvono sempre più verso la didattica dell'aritmetica e dell'algebra con alunni fra i 5 e i 14 anni, collocandosi all'interno dell'area di ricerca denominata *early algebra*. Nel 2001 vince il concorso nazionale SeT (Progetto per lo sviluppo Scientifico e Tecnologico) e inizia la collaborazione con scuole o reti di scuole di quasi tutte le regioni italiane. Ha partecipato a progetti europei ed è attivo in ambito nazionale e internazionale.
2. Principi di metodo ed esempi di situazioni problematiche relativi a "Confrontare senza Calcolare", sperimentate in classi di scuola primaria e secondaria di primo grado di istituti che collaborano con il progetto ArAl, si trovano in Navarra et al. (2024) (seconda e terza primaria, Cap. 8) e in Navarra et al. (2025) (quarta e quinta primaria, prima secondaria, Cap. 5).
3. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.
4. Lavoro di Tesi di Emma Pareti (2025), svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in Scienze della Formazione Primaria, Dipartimento di Formazione Lingue Intercultura Letterature e Psicologia, Università degli Studi di Firenze. Relatore: Samuele Antonini; correlatore: Giancarlo Navarra.
5. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.
6. Ci si riferirà d'ora in poi al progetto di ricerca "Confrontare senza Calcolare" con "ricerca" o "CsC", e alla tesi con "studio".

2 L'*early algebra*

2.1 L'*early algebra* e il curricolo di matematica

Gli studi e le attività afferenti all'*early algebra* hanno come obiettivo la promozione dello sviluppo del pensiero pre-algebrico in alunni dai 5 ai 14 anni d'età. Decenni di ricerca in questo campo di studi (tra i principali, si vedano Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1994; Sfard & Linchevski, 1994) hanno mostrato come gli ostacoli che gli studenti più grandi incontrano nello sviluppo del pensiero algebrico siano imputabili alla difficoltà nell'estendere all'algebra i processi cognitivi acquisiti in ambito aritmetico negli anni di scuola precedenti. Infatti, sebbene tra aritmetica e algebra esista una forte continuità tanto sul piano concettuale quanto su quello epistemologico, tale legame generalmente non viene né evidenziato né sviluppato nella consueta didattica della matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado.[7]

L'*early algebra* risiede silenziosamente nel curriculum di matematica di ogni livello scolare: negli argomenti, nei problemi e nei sistemi di rappresentazione; ma, come scrivono Carraher et al. (2007):

> «Per quanto riguarda gli insegnanti di scuola secondaria di primo grado […] molti ritengono che l'apprendimento algebrico debba iniziare solo a 13 anni, sottovalutando così la capacità degli studenti della scuola primaria di affrontare queste attività e discostandosi dall'approccio del movimento dell'early algebra, che cerca la continuità dell'apprendimento tra la scuola primaria e quella secondaria».
>
> (Carraher et al., 2007, p. 26, traduzione degli autori)

Si ritiene invece fondamentale che gli insegnanti contribuiscano a *rendere visibile il carattere algebrico dell'aritmetica* proponendo concetti e attività capaci di favorire lo sviluppo del *pensiero relazionale*. Tali proposte non dovrebbero essere considerate come argomenti *aggiuntivi* rispetto alla didattica quotidiana, bensì come elementi *da integrare in modo organico* al suo interno. A conferma di questa affermazione Carpenter et al. (2003) scrivono:

> «Lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti non dovrebbe essere percepito come un ulteriore argomento da insegnare. Idealmente, dovrebbe essere una parte integrante dell'insegnamento dei concetti e delle abilità aritmetiche. Una volta che gli studenti hanno imparato a riflettere sulle relazioni, allora le proposizioni vero/falso e le frasi numeriche aperte possono essere utilizzate per sostenere l'apprendimento di molti concetti e abilità aritmetiche».
>
> (Carpenter et al., 2003, p. 38, traduzione degli autori)

Una delle radici epistemologiche dell'*early algebra* è quindi la dualità *procedurale-relazionale*, ampiamente esplorata all'interno del progetto ArAl (si vedano, ad esempio, Cusi et al., 2011; Malara & Navarra, 2003, 2018; Navarra, 2019, 2022).

2.2 I fondamenti teorici dell'*early algebra*

La prima a formulare la differenza tra significato operazionale (*operational meaning*) e significato relazionale (*relational meaning*) dell'uguale è Kieran (1981, 2004, 2018; Kieran et al., 2016), che evidenzia

7. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

come la concezione operazionale sia largamente diffusa tra gli studenti e persista anche a livelli scolari avanzati. Questa impostazione è coerente con il quadro teorico proposto da Sfard (1991, 2008), che distingue tra *concezioni operazionali* e *concezioni strutturali* degli oggetti matematici e introduce la necessità di guidare gli studenti nel passaggio dai *processi* agli *oggetti*, favorendoli nell'impadronirsi dei termini specifici per designare gli oggetti attraverso il processo della *nominalizzazione*. Sfard evidenzia anche come guidare a comprendere il significato di una definizione matematica costituisca un'impresa complessa ma necessaria per costruire negli studenti una crescente consapevolezza nei confronti del pensiero matematico. Knuth et al. (2006), Carpenter et al. (2003), Mason (2013), Schliemann et al. (2003) sono fra i primi ricercatori a sottolineare come il punto di vista relazionale possa essere sviluppato fin dai primi anni della scuola primaria e sia strettamente correlato alla successiva graduale comprensione dei significati in algebra. Mason scrive molto esplicitamente che «Non è mai troppo presto [per pensare in modo algebrico]. Per imparare l'aritmetica è necessario pensare in modo algebrico» (Mason, 2013, p. 329, traduzione degli autori). Parallelamente, lavori di Carraher e Schliemann (2007) sottolineano come il pensiero algebrico emerga naturalmente quando gli studenti sono coinvolti in attività che richiedono di *analizzare relazioni tra quantità*, piuttosto che *eseguire calcoli*. La dualità *procedurale-relazionale* è stata approfondita anche da Falkner et al. (1999) e da Jacobs et al. (2007) che hanno introdotto il concetto di *pensiero relazionale* (*relational thinking*), evidenziando come gli allievi possano sviluppare strategie basate sullo studio delle relazioni tra quantità anche in assenza di un rigoroso formalismo algebrico.

L'analisi delle relazioni fra quantità porta ad uno dei temi nodali dell'*early algebra*: il segno uguale, uno dei nodi fondativi del quadro teorico del progetto ArAl. La difficoltà degli studenti di riconoscervi il significato di *uguaglianza simmetrica fra due quantità*, a fronte di una sua consolidata interpretazione come *comando che genera un calcolo*, è ampiamente documentata e analizzata, tra altri, da Carpenter et al. (2003) che, come Knuth et al. (2006), individuano nelle discussioni coinvolgenti l'intera classe o piccoli gruppi di alunni, e quindi nell'argomentazione, l'ambiente più produttivo per porre a confronto le diverse concezioni del segno. Blanton e Kaput (2011) collegano il significato dell'uguale al *pensiero funzionale*, cioè alla capacità di riconoscere, descrivere e generalizzare relazioni tra quantità che variano insieme.

Si può affermare che tutti gli studi sull'*early algebra* esaltano il ruolo dell'*argomentazione* nel lungo processo di costruzione dei saperi matematici; si fa qui riferimento in particolare a quelli fondamentali di Sfard (2008) e alle sue riflessioni sul *discorso matematico*. Pur non direttamente collegati con gli studi sull'*early algebra*, si ricordano quelli di Ferrari (2021) sulla relazione fra "lingua", "linguaggio" e apprendimento matematico e di Mariotti (2022) sull'argomentazione come *cuore* dell'attività matematica e premessa per la dimostrazione. Vi sono ampie convergenze tra molti ricercatori nell'ambiente dell'*early algebra* (Blanton & Kaput, 2011; Carpenter et al., 2003; Carraher & Schliemann, 2007) sul fatto che, se l'argomentazione nasce attraverso la riflessione su situazioni concrete, alunni anche molto giovani sono in grado di giustificare relazioni e ragionare su quantità incognite. La capacità di confrontare relazioni fra enti noti e sconosciuti è connessa alle competenze legate all'interpretazione e alla gestione delle rappresentazioni di un numero.

Il tema delle *rappresentazioni dei numeri* è strettamente intrecciato allo sviluppo del pensiero algebrico e alla capacità di cogliere *relazioni* e *strutture*. Kaput (2008) sottolinea, in merito a questo aspetto, il ruolo fondamentale del coordinamento tra rappresentazioni multiple nella costruzione di significati matematici profondi fin dai primi anni della scuola primaria. Nel loro insieme questi studi convergono nel riconoscere che la comprensione dei numeri non risiede in una singola rappresentazione, ma emerge dalla capacità di interpretare e trasformare diverse forme rappresentative, processo che costituisce uno dei fondamenti dello sviluppo del pensiero pre-algebrico. Se questo non avviene, *una concezione operativa (procedurale) dell'uguale ostacola l'apprendimento dell'algebra.*

Centrale rispetto a questi temi è quindi la *traduzione* tra linguaggi o tra diversi registri di rappresentazione, e ciò comporta la coordinazione di una pluralità di sistemi di rappresentazione. Kaput (2008)

e Blanton e Kaput (2011) sottolineano come comprendere e risolvere problemi algebrici richieda competenze che si acquisiscono nel passare attraverso modi diversi di esprimere lo stesso concetto: rappresentazioni verbali, tabulari, iconiche, grafiche, simboliche. Da queste premesse nasce, in particolare, l'importanza della traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico (e viceversa) in quanto presuppone da parte del traduttore il controllo sulle relazioni fra le loro *semantiche* e le loro *sintassi*.
Il tema del *numero sconosciuto* e delle sue diverse forme di rappresentazione – uno dei tre nodi fondativi, come si vedrà, nel progetto ArAl – è stato ampiamente studiato perché rappresenta un passaggio cruciale dall'aritmetica all'algebra. Ancora Carpenter et al. (2003) illustrano – con il supporto di una grande quantità di esempi – come alunni anche molto giovani possano essere guidati a ragionare su quantità ignote, rappresentate anche in modo informale (caselle vuote, icone di fantasia, simboli, lettere ecc.), attraverso lo studio di equivalenze tra rappresentazioni formalmente differenti.
I temi delineati sinora si intrecciano all'interno della dualità *risolvere-rappresentare* trattata, fra altri, da Kaput (2008), il quale mostra come risolvere un problema sia strettamente collegato con la costruzione e il coordinamento di rappresentazioni che rendono visibili le relazioni matematiche fra gli enti che vi compaiono. Mason (2002) analizza la struttura profonda del pensiero matematico, che presenta come una serie di passaggi dal "vedere" ("*the discipline of noticing*", traducibile con "la pratica dell'accorgersi") al rappresentare, al generalizzare, contrapponendo questa prospettiva al punto di vista del risolvere.
Il progetto ArAl nasce e matura nella cornice teorica dell'*early algebra*. Uno dei suoi principali obiettivi è la condivisione con gli insegnanti di alunni dai 5 ai 14 anni di una visione *relazionale* della matematica, contrapposta alla classica visione *procedurale*. Promuovere una visione *relazionale* significa guidare all'osservazione *complessiva* di una situazione al fine di rivelare eventuali legami tra i termini in gioco, spostando l'attenzione dalle operazioni numeriche alle relazioni fra gli enti, noti o sconosciuti. La visione *relazionale* è centrale al fine di cogliere la continuità fra aritmetica e algebra, favorire i processi mentali comuni ai due ambiti disciplinari, stimolare la riflessione sul significato dei concetti matematici osservati. Al contrario, una visione marcatamente *procedurale* della matematica – dove l'attributo *procedurale* esprime il carattere di procedura da eseguire o da analizzare in modo sequenziale rispettando regole predeterminate – tende a favorire atteggiamenti proiettati verso il *fare* (trovare operazioni, eseguire calcoli, sviluppare espressioni, risolvere equazioni ecc.) e verso un apprendimento mnemonico e acritico.

3 Il progetto di ricerca e sperimentazione "Confrontare senza Calcolare"

Il progetto CsC, a sua volta, si inserisce nella cornice teorica del progetto ArAl, sposandone i nodi fondativi (delineati nel **par. 2**) e mirando allo sviluppo di una visione relazionale nel confronto tra espressioni numeriche. La consegna tipo che si pone agli alunni chiede di argomentare se un'equivalenza sia verificata senza svolgere *calcoli globali*, bensì concentrando la propria attenzione sulle relazioni che collegano i suoi membri appoggiandosi solo a *calcoli mentali locali*. Si consideri ad esempio l'equivalenza:

$$47 + 38 \stackrel{?}{=} 40 + 30 + 7 + 8.$$

Come si vedrà nel **par. 5**, un tipo di argomentazione promossa dal progetto CsC parte dal riconoscere a colpo d'occhio come equivalenti 47 e 40 + 7 e 38 e 30 + 8: si limita ad intuitivi *calcoli mentali locali* concentrando la propria attenzione sulle relazioni esistenti tra i numeri in gioco. Diverso sarebbe il caso di un'argomentazione del tipo: «L'uguaglianza è vera perché 47 più 38 fa 85 e anche 40 più 30 più 7 più 8 fa 85» perché comporterebbe lo svolgimento di *calcoli globali*, non rispettosi della consegna, indicativi di un punto di vista *procedurale*.

Le competenze che il progetto CsC si propone di analizzare e di promuovere, all'interno dell'ampio quadro teorico delineato nel par. 2, vengono ricondotte a:

- tre *nodi fondativi*:
  1. il significato del simbolo "=" come "è", "è uguale a";
  2. il concetto che un numero può essere rappresentato in infinite forme;
  3. l'approccio al numero sconosciuto e la conquista della lettera per rappresentarlo;
- tre *temi chiave*:
  1. verbalizzare e argomentare;
  2. risolvere vs rappresentare;
  3. tradurre dal linguaggio matematico al linguaggio naturale e viceversa.

Per ognuno dei nodi e dei temi si farà riferimento ad alcuni fra i principali studi sull'*early algebra* che hanno messo in luce la loro crucialità. Data la stretta interconnessione fra temi e nodi, alcuni riferimenti compariranno più volte.

3.1 I nodi fondativi

3.1.1 Il significato relazionale del segno uguale

Il significato relazionale del segno uguale è stato ampiamente discusso in letteratura (fra i più importanti, si vedano Carpenter et al., 2003; Kaput, 2008; Kieran, 1981; Schwarzkopf et al., 2018; Sfard & Linchevski, 1994).
Nell'aritmetica "scolastica" il significato prevalente del segno uguale è quello *procedurale* di *operatore direzionale*, con una forte connotazione spazio-temporale: *prima* si fanno dei calcoli *a sinistra* e *poi* si trova un risultato *a destra*. Tale significato è supportato e veicolato dalla traduzione del simbolo uguale con il termine "fa": «Otto più tre *fa* undici», traduzione operata tanto dagli alunni quanto dagli insegnanti.
Con *significato relazionale* del segno "=" si intende attribuire al simbolo una valenza a-temporale e a-direzionale, riconoscendolo come indicatore di equivalenza fra due rappresentazioni formalmente differenti dello stesso numero. Questo porta a superare l'uso di "fare" come "verbo di risultato" e a tradurre il simbolo "=" con l'espressione "è uguale a": «Otto più tre è *uguale* a undici», esattamente come «Undici è *uguale* a otto più tre». Una visione *relazionale* del segno uguale è prerequisito fondamentale per svolgere attività in CsC: gli alunni vanno guidati a capire che quelle che si pongono a confronto non sono *operazioni* ma *rappresentazioni*.

3.1.2 La rappresentazione canonica e non canonica di un numero

Questa distinzione è un costrutto originale nel quadro teorico del progetto ArAl;[8] si sviluppa a partire dagli studi di Carpenter et al. (2003), Kieran (1981), Knuth et al. (2006).
Nell'insieme dei numeri naturali, per rappresentazione (o forma) canonica di un numero si intende la sua rappresentazione posizionale in base dieci. Ad esempio, la rappresentazione canonica del numero diciotto è il simbolo 18. Possiamo dire che la forma canonica di un numero è il suo *nome*, ed è evidente che ogni numero ne ha una sola. Le rappresentazioni non canoniche di un numero sono invece le infinite forme con cui esso può essere espresso mediante operazioni che coinvolgono altri numeri; ad esempio, nel caso del diciotto, $15 + 3$, 9×2, $54 : 3$ ecc.

8. Il costrutto di rappresentazione "canonica" e "non canonica" è stato concepito in riferimento ai numeri naturali per far sì che alunni molto giovani, di fronte a una rappresentazione come $5 - 2$, imparino a leggerla come una delle molteplici rappresentazioni possibili del numero 3. In questo modo si evita il radicarsi di quegli atteggiamenti automatici che li portano a vedere $5 - 2$ come qualcosa di incompleto, una scrittura in attesa, che acquista un'identità solo se viene completata con l'aggiunta di un "=" e l'inserimento del risultato: $5 - 2 = 3$. Poiché lo studio si sviluppa nell'ambito della scuola primaria anche nell'articolo si rimane nell'insieme dei numeri naturali. Nel momento in cui si estende l'ambito numerico si può estendere anche la definizione di forma canonica e non canonica di un numero. Per chi volesse approfondire questo aspetto si rimanda a Navarra (2022, pp. 273–274).

In attività di CsC, al fine di poter confrontare i due membri di un'equivalenza, è necessario saper riconoscere di volta in volta le sostituzioni più opportune tra la rappresentazione canonica e quelle non canoniche di un numero; ad esempio, valutare se sia opportuno *sostituire*:

– forme canoniche con forme non canoniche: 520 con 52×10; n con $n \times 1$;
– forme non canoniche con forme canoniche: $9 + 9 + 9$ con 27; $4 \times 3 + 3$ con 15;
– forme non canoniche con altre forme non canoniche: $4 \times (n + 9)$ con $4 \times n + 4 \times 9$.

3.1.3 Il numero sconosciuto e le sue rappresentazioni

L'argomento è stato trattato da diversi punti di vista in molti studi basilari sull'*early algebra*, ad esempio, Carpenter et al. (2003), Kieran (1992), Radford (2010), Sfard (1991).
È attraverso l'uso delle lettere che in algebra è possibile esprimere concetti generali e generalizzabili, pertanto comprendere il loro significato è una condizione necessaria per poter costruire ragionamenti di matrice algebrica.
Esercizi del tipo $4 + \ldots = 10$ o $4 + \square = 10$ o $4 + \_\_\_ = 10$ che si trovano nei testi sin dalla prima primaria, infatti, visti in una prospettiva *procedurale*, hanno lo scopo di far allenare gli alunni con le quattro operazioni («Quale numero aggiunto a 4 permette di ottenere 10?»): esauriscono la loro funzione in ambito aritmetico. Visti in una prospettiva *relazionale*, invece, sono delle *equazioni* e i puntini, il quadratino, i trattini bassi non sono più semplicemente uno spazio da riempire, ma assumono una dignità algebrica: sono interpretabili come rappresentazioni di un numero sconosciuto. In attività di CsC si propongono anche equivalenze contenenti delle incognite, ad esempio $15 + 3 = 5 \times 3 + a$ (che verrà analizzata nel par. 5).

3.2 I temi chiave

3.2.1 Verbalizzare e argomentare

Agli autori citati nel par. 2.2 che hanno studiato l'argomentazione in campo matematico si aggiungono qui Blanton et al. (2018), Kaput (2008), Lins & Kaput (2004) e Radford (2018).
La capacità di argomentare in ambito matematico matura lungo un percorso al quale dovrebbe essere dedicata una grande attenzione sin dalla scuola dell'infanzia. Le *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (Ministero dell'Istruzione e del Merito [MIM], 2025), come le precedenti, si riferiscono in termini generici all'argomentazione in matematica associandola in più riprese (pp. 67–71) all'analisi critica, alla giustificazione, alla capacità di formulare ipotesi e di verificarle attraverso metodi matematico-scientifici anche con l'ausilio della tecnologia. A fronte di tali affermazioni di principio, però, l'esperienza mostra come l'argomentazione non sia diffusa nelle classi durante le attività matematiche, a causa di un'attenzione concentrata da parte degli insegnanti più sugli aspetti del fare che della riflessione linguistica e metalinguistica che, come sostiene il progetto ArAl, dovrebbe diventare un *forte* valore condiviso all'interno della comunità-classe.
Abituare gli alunni a organizzare frasi pur brevi ma di senso compiuto favorisce sia colui che verbalizza sia i compagni che lo ascoltano creando le condizioni per una maturazione sociale e culturale della classe che non vede più nell'insegnante l'unico interlocutore. L'argomentazione rappresenta l'evoluzione della verbalizzazione: gli alunni, grazie a un'opportuna conduzione delle discussioni matematiche collettive, imparano a fornire ragioni a favore o contro una determinata affermazione anche intrecciando linguaggi diversi e avvicinandosi al concetto di *dimostrazione*. In questo modo il linguaggio naturale svolge il ruolo fondamentale di mediatore verso la graduale appropriazione da parte degli alunni di un linguaggio specifico come quello matematico.
Un passaggio nodale in questo senso è rappresentato dalla *contrapposizione verbale-nominale*. Guidare gli allievi verso un uso consapevole e autonomo di termini come "somma", "differenza", "doppio", "triplo", significa aiutarli a impadronirsi di un linguaggio nominale, com'è quello scientifico, caratterizzato da testi in cui si fa uso di pochi verbi per privilegiare invece nomi e aggettivi. Per esempio:

una scrittura come 2×3 viene espressa abitualmente attraverso frasi centrate su verbi come «Moltiplicare 2 per 3», «Eseguire una moltiplicazione», «Trovare il risultato della moltiplicazione fra 2 e 3». Sono frasi "operative", *procedurali*, frutto di una lettura sequenziale del testo. Imparare a definire 2×3 costruendo delle frasi *nominali* come «2×3 è il prodotto fra 2 e 3», «2×3 è il doppio di 3», «2×3 è il triplo di 2», «2×3 è un multiplo di 2 e di 3» significa saper puntare l'attenzione non soltanto sugli enti in gioco (2 e 3), ma soprattutto sulla relazione che li collega (in questo caso moltiplicativa).
Saper distinguere e gestire questi due punti di vista è uno degli aspetti centrali di CsC, in quanto educa gli alunni a superare la concezione *dominante* di scritture del tipo di $8 + 1$, $9 \times 4 \times 3$, $(3 + 2) \times 10$ come *operazioni* e a vederle come *oggetti matematici*, identificabili proprio attraverso modi specifici di usare il linguaggio, la sua semantica e la sua sintassi.

3.2.2 Risolvere vs rappresentare

Questa dualità è nodale nell'ambito della ricerca riguardante l'*early algebra* e il *problem solving*. Tra i principali autori, si ricordano Bednarz e Janvier (1996) e Kieran (1981, 1990, 2018). Essa induce una modifica radicale nel modo in cui si affronta un problema. *Risolvere* un problema significa puntare al *prodotto*, cioè all'individuazione delle operazioni che portano al risultato. *Rappresentare* un problema significa puntare al *processo*, cioè all'individuazione delle scritture che consentono di esplicitare in linguaggio matematico le relazioni fra gli elementi del problema. Nel primo caso si privilegia il punto di vista procedurale, nel secondo quello relazionale. Di seguito si chiarisce la differenza tra i due punti di vista attraverso un problema accompagnato da due consegne diverse *a* e *b* (si consideri la versione *a* come *standard* e la versione *b* come *non-standard*).

> Nel giardino della scuola stanno facendo l'intervallo tre classi: una prima, una seconda e una terza. La prima è formata da 21 alunni e la seconda da 23. In totale nel giardino ci sono 59 alunni.

a. Trova il numero degli alunni della terza.	*b.* Rappresenta in linguaggio matematico la situazione in modo che si possa trovare il numero degli alunni della terza.

La consegna *a* chiede di *risolvere* il problema: l'alunno individua i tre dati (21, 23, 59) e due operazioni su di essi (l'addizione $21 + 19 = 40$ e la sottrazione $59 - 40$) che permettono di trovare il risultato (19). Il simbolo "=" è un *operatore direzionale*. L'alunno è concentrato sull'individuazione del *prodotto*.
La consegna *b* chiede di *rappresentare* il problema: l'alunno individua: (i) quattro enti, tre *noti* (21, 23, 59) e uno *sconosciuto*, al quale dà un nome usando, per esempio, la lettera *t* per indicare il numero degli alunni della terza; (ii) due *relazioni* (quella additiva e quella di equivalenza). Raccoglie enti e relazioni nella frase espressa in linguaggio matematico:

$$21 + 23 + t = 59.$$

L'alunno si concentra sulla *rappresentazione* del *processo*, che può esprimere a parole in questo modo:

> «La somma fra il numero degli alunni della prima, quello degli alunni della seconda e quello degli alunni della terza è uguale al numero totale degli alunni che fanno l'intervallo nel giardino».

Conoscere la differenza fra i due punti di vista è un prerequisito fondamentale per lo svolgimento di attività su CsC, in cui non vi è infatti niente da "risolvere" poiché le scritture che formano l'equivalenza non vanno viste come "operazioni che portano a un risultato", ma come "rappresentazioni da confrontare".

3.2.3 Tradurre dal linguaggio matematico al linguaggio naturale e viceversa

Il tema della traduzione fra linguaggi è centrale perché, per comprendere, rappresentare e risolvere problemi, si richiede una pluralità di competenze riguardanti la capacità di esprimere lo stesso concetto attraverso parole, simboli, rappresentazioni grafiche o tabulari. Oltre a Duval (2006), si ricordano Carraher et al. (2000), Kaput (2008) e Kieran (1996).
Per allievi di 6-14 anni d'età saper tradurre una frase dal linguaggio matematico a quello naturale e viceversa costituisce l'esito di una didattica che propone l'approccio alla matematica come a un nuovo linguaggio: saper tradurre un testo significa infatti conoscere gli aspetti semantici e sintattici di entrambi i linguaggi, e questa competenza si costruisce grazie a un contratto didattico che dedichi ampio spazio alla riflessione su di essi e sulle relazioni che intercorrono fra i loro lessici e le loro grammatiche.
Ad esempio, alunni ai quali si chieda di *tradurre in linguaggio naturale* un'espressione come $10 + 7 \times 2$ propongono una grande varietà di scritture, ad esempio «10 più 7 per 2» o «Moltiplico 7 per 2 e aggiungo 10», riconoscibili come frasi procedurali in quanto spiegano *ciò che si fa*. Saper interpretare in termini *relazionali* la *struttura* di $10 + 7 \times 2$ definendola come «La somma tra 10 e il doppio di 7» comporta che gli alunni sappiano riconoscere in 7×2 «il *prodotto* fra 7 e 2» o un più evoluto «il *doppio* di 7». È necessario cioè che essi sappiano *dare un nome agli oggetti matematici*.
Saper produrre/interpretare traduzioni dal linguaggio matematico al linguaggio naturale e viceversa è un altro requisito necessario in CsC, in quanto porta al saper riconoscere rappresentazioni equivalenti (per esempio $6 + 5$, $5 + 3 \times 2$, $22 : 2$ come forme non canoniche dello stesso numero 11); saper gestire le parentesi; riconoscere proprietà; applicare principi; attribuire significato a una lettera.

4 Obiettivi di ricerca e metodologia applicata nello studio: la metodologia delle trascrizioni pluricommentate

La metodologia delle trascrizioni pluricommentate applicata nello studio riportato in questo articolo è uno strumento del progetto ArAl concepito per favorire l'auto-riflessione e lo sviluppo professionale dei docenti (Navarra, 2022).[9] L'autrice l'ha utilizzata nella parte sperimentale dello studio, condotta in cinque classi di scuola primaria, in ognuna delle quali ha partecipato per diciotto ore alla normale attività didattica avendo modo di osservare, in tale arco di tempo, le attività connesse a CsC. Ognuna delle cinque insegnanti partecipanti allo studio ha audio-registrato una lezione e ha trascritto la registrazione in un apposito template convenzionalmente denominato "diario". Dopo aver commentato il diario lo ha inviato agli autori che lo hanno commentato a loro volta prima separatamente e poi incrociando i rispettivi commenti. Ogni diario è stato infine rinviato all'insegnante, che lo ha condiviso con gli altri docenti dell'istituto. I commenti delle insegnanti sono collegati al contesto-classe, quelli degli autori pongono in relazione la prassi (ciò che è avvenuto in aula) e la teoria (gli obiettivi di CsC, i costrutti del progetto ArAl e, in generale, dell'*early algebra*).
I diari hanno permesso di analizzare i processi di insegnamento-apprendimento con l'obiettivo di:

- raccogliere informazioni sulla conduzione delle attività da parte di insegnanti che affrontano per la prima volta CsC e sugli atteggiamenti, i processi cognitivi, le difficoltà degli alunni;
- sviluppare riflessioni teoriche e di metodo sulle informazioni raccolte;
- elaborare indicazioni di carattere operativo che favoriscano l'affinamento dell'azione didattica attraverso il superamento di atteggiamenti *procedurali* e lo sviluppo di competenze *relazionali*.

9. Attualmente (dall'a.s. 2006/2007 a dicembre 2025) sono consultabili nel sito del progetto ArAl (https://www.progettoaral.it/diari-2/) quasi 400 diari (70 della scuola dell'infanzia, 240 della scuola primaria, 90 della scuola secondaria di primo grado) corredati con più di 7'000 commenti.

In particolare, le domande di ricerca che hanno guidato l'osservazione e l'analisi dei diari da parte degli autori sono le seguenti: *Quali strategie didattiche favoriscono lo sviluppo di competenze relazionali negli allievi coinvolti in attività di CsC relative alla verifica di equivalenze matematiche? Quali competenze deve possedere l'insegnante per promuovere e guidare tale sviluppo?*
Dai cinque diari, e da attività analoghe svolte nello stesso periodo dall'autore assieme a insegnanti della scuola secondaria di primo grado, sono stati estratti gli episodi che fungono da esempi per i principali temi che costituiscono gli attuali risultati del progetto di ricerca "Confrontare senza Calcolare".
Ogni episodio è contrassegnato con una sigla, ad esempio EP1 (P1), che indica il suo numero d'ordine (EP1, EP2, …), seguito da un codice tra parentesi che indica l'ordine scolastico – primaria (P) o secondaria di primo grado (S) – seguito dal numero che indica la classe.

4.1 Identificazione e analisi degli episodi

La scelta degli episodi richiede una premessa di metodo che si sintetizza attraverso il grafico della Figura 1 che illustra le relazioni all'interno del progetto ArAl tra le attività in classe, il confronto tra insegnanti ed esperti facenti parte della comunità di pratica, lo sviluppo del quadro teorico e delle competenze degli insegnanti.

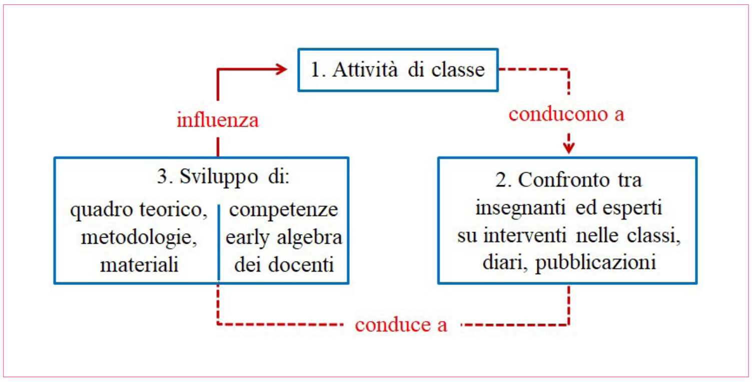


Figura 1. La circolarità delle relazioni fra teoria e prassi nel progetto ArAl.

Nello specifico del progetto CsC, durante (1) le attività di classe emergono nodi e ostacoli (difficoltà nell'analizzare le equivalenze, nel riconoscere rappresentazioni formalmente diverse dello stesso numero, nell'applicare proprietà ecc.) che (2) vengono periodicamente analizzati da docenti ed esperti con l'obiettivo di individuare scelte didattiche e strategie che (3) indirizzino le successive attività nelle classi. Il ripetersi di questo ciclo ha fatto gradualmente maturare le sei strategie che verranno illustrate di seguito.
Come già detto, l'autrice ha svolto 90 ore di effettiva presenza in cinque classi di scuola primaria; nello stesso periodo l'autore ha effettuato 130 ore in meeting con classi di scuola primaria e secondaria dello stesso istituto; ogni meeting è stato effettuato con l'utilizzo della tavoletta grafica e in tutto sono stati prodotti 55 file di lavoro .notebook. Alle attività in classe si sono aggiunte 60 ore di meeting tra docenti ed esperti – ai quali spesso partecipava anche l'autrice – in parte di gruppo, in parte bilaterali.
Diari e file di lavoro hanno fornito la fonte dalla quale sono stati selezionati gli episodi, che possiedono una duplice fisionomia: ognuno di essi esemplifica un tema chiaramente definito, *oggettivato*, che esprime il *prodotto* del progetto CsC; allo stesso tempo, rappresenta il *processo*, alla maturazione del quale ha fornito un importante contributo, che ha portato a quel prodotto.
Per esempio, il primo episodio EP1 (P1) documenta il tema "Esaltare e favorire il colpo d'occhio". Questo tema non emerge tanto da un'analisi *a posteriori* dei materiali raccolti, ma esprime la graduale, lenta *condensazione* di continue osservazioni dei comportamenti degli alunni e delle loro argomen-

tazioni che, alla fine, ha fatto maturare la convinzione che favorire il colpo d'occhio possa realmente promuovere lo sviluppo delle competenze relazionali, non solo in attività di CsC. Un microepisodio esemplifica la ricchezza del processo: l'alunna L. (intervento 11 dell'episodio) usa proprio la locuzione "a colpo d'occhio", ispirando in questo modo l'attribuzione di un "nome" a quegli atteggiamenti molto frequenti rilevati negli alunni, che hanno portato alla definizione della strategia.
Per quanto concerne le ragioni alla base della scelta degli episodi, ognuno dei cinque diari, commentato all'origine dalle docenti che l'hanno redatto, è stato analizzato e commentato separatamente dagli autori. Successivamente tutti i commenti relativi a uno stesso diario sono stati raccolti in un unico file e gli autori hanno incrociato le loro considerazioni (complessivamente, fra tutti e cinque i diari, i commenti sono 223). Gli episodi sono stati scelti quindi in base sia alla qualità dell'*impianto relazionale* dell'azione didattica sia all'interesse dei relativi commenti del diario per quanto concerne, ad esempio, l'interazione docente-alunni e alunni-alunni, la pluralità dei ruoli assunti dall'insegnante nella conduzione delle discussioni, la qualità dell'argomentazione, la consapevolezza degli alunni relativamente ai concetti in gioco.
Ai fini dell'articolo, i commenti sono stati opportunamente selezionati, intrecciati e rielaborati dagli autori al fine di collocare ogni episodio all'interno di una cornice teorica e metodologica.

5 Risultati emersi dall'analisi degli episodi

L'analisi dei dati raccolti con la metodologia descritta nel par. 4 ha condotto all'identificazione di sei strategie chiave che, se messe in atto dal docente in ambito di attività di CsC, permettono di favorire negli allievi lo sviluppo di competenze relazionali nel trattare le equivalenze matematiche.
In questo paragrafo vengono presentati e analizzati quindici episodi tratti dai diari raccolti, che permetteranno di esemplificare queste strategie. Le sei strategie individuate sono le seguenti:

1. esaltare e favorire il colpo d'occhio;
2. appoggiarsi a strategie che si rivelano efficaci per individuare numeri e relazioni: la "strategia cromatica", la verbalizzazione in forma relazionale dell'equivalenza;
3. favorire l'interpretazione complessiva di un'equivalenza distinguendo tra calcoli locali e calcoli globali;
4. distinguere premesse e conclusione in un'argomentazione;
5. appoggiare il pensiero a un supporto scritto;
6. evitare/ridurre la "gabbia relazionale".

5.1 Esaltare e favorire il colpo d'occhio

Si può definire il *colpo d'occhio* come la capacità di cogliere velocemente dettagli importanti in una situazione complessa. In questo senso, gli alunni maturano la capacità di osservare un'equivalenza nel suo insieme e di cogliere le relazioni tra i numeri e i simboli presenti nei suoi due membri. Imparano a non focalizzarsi sulla singola relazione o sulle rappresentazioni di singoli numeri e a cogliere *a colpo d'occhio* la struttura dei due membri dell'equivalenza.
Il docente può esaltare il colpo d'occhio negli allievi attraverso opportune consegne, richieste e riscontri come quelli riportati nel seguente episodio avvenuto in una classe di prima primaria. Il dialogo si sviluppa all'interno di un'attività di CsC che implica l'uso di mattoncini da costruzione uguali nelle dimensioni e diversi nel colore. L'insegnante (abbreviata in "Ins." nel dialogo che segue) dispone dei mattoncini da costruzione su due tavoli come in Figura 2 e chiede agli allievi di descrivere la situazione. Gli alunni devono verificare se sui due tavoli c'è lo stesso numero di mattoncini.

Figura 2. I due tavoli e i gruppi di mattoncini.

EP1 (P1)

1. Ins.: «Come descrivereste questa situazione?»
2. L. [dopo aver contato i mattoncini]: «Io vedo nel tavolo a sinistra un gruppo di cinque mattoncini gialli e un gruppo di nove mattoncini rossi. Poi vedo nel tavolo a destra cinque mattoncini gialli e nel secondo gruppo otto mattoncini rossi e uno blu».
3. Ins.: «Bravissima! Vieni V., vieni a scrivere in linguaggio matematico quello che ha detto L.».
4. [V. scrive 5 + 9 e accanto, 5 + 8 + 1].
5. Ins.: «È vera questa uguaglianza?»
6. V.: «Non lo so… no».
7. Ins.: «Cosa rimane uguale? Cosa cambia?»
8. V.: «8 + 1 è la forma non canonica del 9 e 9 è la forma canonica del 9».
9. Ins.: «Poi cos'altro c'è di uguale?»
10. V.: «5 è sia qui che qui in forma canonica [indica correttamente i blocchi sui due tavoli]».
11. L.: «Maestra, io avevo ragionato così: 5 è sia a destra che a sinistra e anche 9 è sia a destra che a sinistra, perché io l'ho fatto solo con la testa. Ho guardato e, *a colpo d'occhio*, ho visto che 8 più 1 è la forma non canonica di 9».

L'episodio mette in luce quanto attività di CsC possano indirizzare l'attenzione di alunni così giovani verso calcoli *locali*. L. (intervento 11), infatti, si concentra («Ho guardato a colpo d'occhio») solo su *una parte delle rappresentazioni* (9 a sinistra e 8 + 1 a destra). Coerentemente con tali premesse applica in modo intuitivo il principio di cancellazione (intervento 11: «5 è sia a destra che a sinistra») e in questo modo verifica l'equivalenza.
Gli alunni affinano il colpo d'occhio se l'insegnante sa sostenere lo sviluppo della loro *attenzione selettiva* favorendo la capacità di cogliere, quasi allo stesso tempo, sia gli aspetti salienti sia la totalità della scena. Viene da chiedersi: per esempio, in un'equivalenza da verificare come

$$30 \times 9 + 420 \stackrel{?}{=} 10 \times 42 + 270$$

cosa può aiutare a *vedere* che 30 × 9 a sinistra è una rappresentazione non canonica moltiplicativa del 270 a destra? E che 420 a sinistra è la forma canonica di 10 × 42? Che quindi sono rappresentazioni solo formalmente differenti degli stessi numeri?
In base alle verifiche condotte sia nelle cinque classi di scuola primaria sia in quelle di scuola secondaria di primo grado si è riscontrato che, per favorire il colpo d'occhio, sia importante l'intreccio fra i seguenti aspetti.

5.1.1 Praticare costantemente un calcolo mentale "di qualità"

L'insegnante dovrebbe mettere gli alunni nella condizione di ricorrere al calcolo mentale spontaneamente applicando, a seconda della convenienza, opportune strategie come, ad esempio, la scomposizione di un numero dato in forma canonica in opportune forme non canoniche; per esempio, per calcolare 34 + 75, "vedere" 34 come 30 + 4 e 75 come 70 + 5, associare 30 con 70 e 4 con 5 e trovare 109.

5.1.2 Allenare la capacità di riconoscere confronti promettenti

Si consideri il seguente episodio avvenuto in una classe di prima secondaria di primo grado.

EP2 (S1)
L'alunno A. argomenta la verità di questa equivalenza:

$$120 \times (80 + 10) \stackrel{?}{=} 240 \times 45.$$

A.: «Sostituisco a destra 240 con la rappresentazione non canonica 120 × 2:

$$120 \times (80 + 10) \stackrel{?}{=} 120 \times 2 \times 45.$$

Non considero 120 che sta nei prodotti a sinistra e a destra dell'uguale:

$$80 + 10 \stackrel{?}{=} 2 \times 45.$$

80 + 10 e 2 × 45 sono due rappresentazioni non canoniche di 90. L'equivalenza è vera:

$$120 \times (80 + 10) = 240 \times 45».$$

Un confronto "promettente" ha in realtà un valore relativo: nell'equivalenza dell'episodio l'alunno comprende che il confronto tra 120 e 240 è *più promettente* di quello tra 120 e 45. Questo significa, per esempio, in generale, insegnare a vedere le relazioni "doppio di", (riconoscere *a colpo d'occhio* che 240 è il doppio di 120) o "metà di" (riconoscere che 120 è la metà di 240).
Un altro aspetto che emerge è il fatto che attività come quelle di CsC supportano l'apprendimento di importanti concetti matematici; per esempio, quando A. dice «Non considero il fattore 120 che sta nei prodotti a sinistra e a destra dell'uguale» di fatto applica il primo principio di equivalenza.

5.1.3 Promuovere un uso consapevole delle proprietà

Questa competenza è strettamente intrecciata alla precedente, ma per costruirla è necessario far superare una conoscenza superficiale delle proprietà, viste spesso come elementi "di contorno" rispetto alle operazioni, e costruire la capacità di riconoscere l'utilità della loro applicazione in determinate situazioni. Sono significativi in questo senso i seguenti due episodi, avvenuti rispettivamente in una classe di terza e di quarta primaria.

EP3 (P3)

1. Ins. [propone l'equivalenza: $47 + 38 \stackrel{?}{=} 40 + 30 + 7 + 8$]: «Argomentate la verità di questa equivalenza».
2. G.: «L'uguaglianza è vera, perché la bilancia è in equilibrio [inizia a disegnare alla LIM una bilancia]».
3. Ins.: «Spiega a tutti noi perché pensi che sia così».
4. G.: «Perché qui c'è 47 e anche di là, perché sposto il 7 vicino a 40 e la loro somma è 47 [disegna degli archetti sul piatto a destra della bilancia della **Figura 3**]».
5. Ins.: «Quale proprietà hai applicato?»
6. G.: «Ho usato la proprietà commutativa».

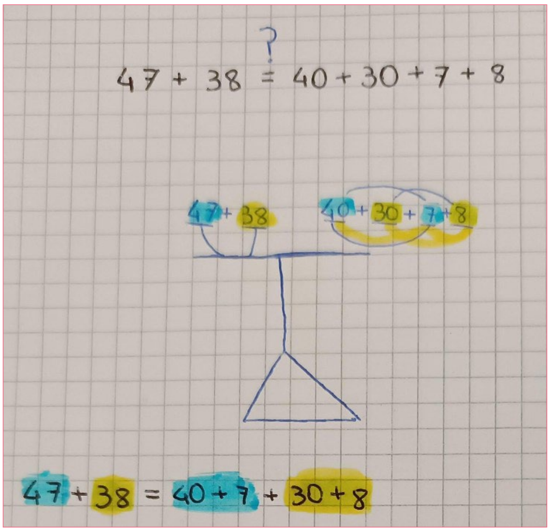


Figura 3. Disegni alla LIM di G. per "dimostrare" la verità dell'equivalenza.

Nel prossimo episodio, in una classe di quarta primaria viene proposta la seguente immagine (**Figura 4**) che rappresenta una sfida di Brioshi:[10]

$$5 \times 10 = \boxed{} = 3 \times 10 + 2 \times 10$$

Figura 4. La sfida di Brioshi.

Gli alunni devono capire quale rappresentazione, che faccia da "ponte" tra 5 × 10 e 3 × 10 + 2 × 10, si celi sotto il rettangolo verde.

EP4 (P4)

P. scrive: «Per passare da 5 × 10 a 3 × 10 + 2 × 10 faccio così. In 5 × 10 rappresento 5 in forma non canonica:

$$(3 + 2) \times 10.$$

Poi applico la proprietà distributiva [l'alunno sa che con quest'ultimo passaggio ha "dimostrato" l'equivalenza e, invece di "$\stackrel{?}{=}$", scrive "=":

$$(3 + 2) \times 10 = 3 \times 10 + 2 \times 10.]$$

Sotto il rettangolo verde Brioshi ha scritto (3 + 2) × 10».

10. Brioshi è un personaggio virtuale del progetto ArAl, un alunno giapponese che non conosce la lingua italiana (come del resto è improbabile trovare un alunno italiano che capisca gli ideogrammi giapponesi) ma sa esprimersi in un corretto linguaggio matematico, che diventa quindi *linguaggio della comunicazione*. All'interno di una strategia di lavoro abituale e condivisa, ha la funzione di mediatore didattico di fronte a questioni legate all'uso dell'incognita, alla rappresentazione e all'interpretazione di scritture in linguaggio matematico, alla traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico e viceversa e ai relativi aspetti *semantici* e *sintattici*. La sua "presenza" permette agli alunni, chiamati a confrontarsi con lui, di comprendere la necessità del *rispetto delle regole* nell'uso di un linguaggio formalizzato.

5.1.4 Favorire l'individuazione e la costruzione di rappresentazioni equivalenti

Queste competenze possono essere mobilitate attraverso attività preparatorie opportunamente costruite. Si consideri ad esempio un'attività proposta in più occasioni, e le relative risposte attese:

> Modificate 9 × 2 × 2 × 3 in modo da ottenere scritture equivalenti che contengano i numeri:
>
> A. 4 B. 18 C. 27 D. 6.
>
> Argomentate la strategia.

Nell'affrontare queste attività, gli alunni devono mostrare di saper "vedere" in 9 × 2 × 2 × 3:

- A. "4" nella forma non canonica "2 × 2", scrivendo: 9 × 4 × 3;
- B. "18" nella forma non canonica "9 × 2", scrivendo: 18 × 2 × 3;
- C. "27" nella forma non canonica "9 × 3", scrivendo: 27 × 2 × 2;
- D. "6" nella forma non canonica "2 × 3", scrivendo: 9 × 2 × 6.

Questa attività dà nelle classi gli stessi esiti, nel senso che quasi tutti gli alunni (con soddisfazione degli insegnanti) sono in grado di riscrivere, per esempio, 9 × 2 × 2 × 3 come 18 × 2 × 3. Ma è stato evidente come l'omogeneità sia solo apparente, e come solo la richiesta esplicita da parte dell'insegnante di *argomentare le proprie scelte* faccia emergere la profonda differenza tra due punti di vista: alunni che danno giustificazioni del tipo «Ho scritto 18 perché è il risultato di 9 per 2» o «Ho scritto 18 perché 9 per 2 fa 18» mostrano di interpretare la scrittura iniziale come una sequenza di *moltiplicazioni* e affrontano la prova *svolgendo operazioni*; coloro che spiegano di aver visto che «9 per 2 è la forma non canonica di 18» interpretano la scrittura iniziale come un *prodotto* (invece che come una moltiplicazione), e ragionano *confrontando rappresentazioni*.
Si configura qui una risposta alla seconda parte della domanda di ricerca: quali competenze deve possedere l'insegnante per promuovere e guidare lo sviluppo del pensiero relazionale? Un insegnante, per svolgere un ruolo efficace (anche) in CsC, dev'essere in grado di *notare*, cioè deve aver maturato quella che Mason (2002) chiama "l'arte di accorgersi": essere sensibile alle situazioni e rispondere in modo appropriato. In questo caso comprendere, promuovendo l'argomentazione come pratica quotidiana abituale, se sta guidando i suoi alunni in modo *autentico* verso il pensiero relazionale o se invece il cambiamento è solo *di facciata*, e nel profondo i suoi alunni rimangono procedurali.

5.2 Appoggiarsi a strategie che si rivelano efficaci per individuare numeri e relazioni

Si riportano nello specifico due strategie: la "strategia cromatica" e la verbalizzazione in forma relazionale dell'equivalenza da verificare prima di avviare la riflessione sul confronto fra i due membri.

5.2.1 La strategia cromatica

La strategia cromatica[11] consiste nell'evidenziare con lo stesso colore le parti che si corrispondono in un'equivalenza per favorire il confronto tra le rappresentazioni ai due lati dell'uguale alle quali venga attribuito lo stesso significato, portando così l'attenzione sia sui numeri sia sulle relazioni che li collegano. Si consideri il seguente episodio in cui una classe di terza primaria sta analizzando l'equivalenza

$$47 + 38 \stackrel{?}{=} 40 + 30 + 7 + 8.$$

11. La strategia cromatica è usata abitualmente nelle attività del progetto ArAl, in particolar modo per favorire l'evidenziazione delle parti che si corrispondono in una frase in linguaggio naturale e nella relativa traduzione in linguaggio matematico. Per esempio:

La somma fra un numero e il suo successivo è uguale alla somma fra il doppio del numero stesso e 1

↓

$n + (n + 1) = 2 \times n + 1$.

Per gli approfondimenti rimandiamo il lettore a Navarra (2022).

EP5 (P3)

1. M. [alza la mano]: «Allora io ho fatto così [viene alla LIM, **Figura 5**]».

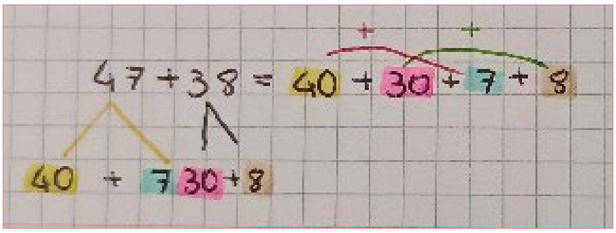


Figura 5. Disegni alla LIM di M. per “dimostrare” la verità dell’equivalenza.

2. M.: «[parla mentre costruisce la **Figura 5**] Io vedo a sinistra la somma tra 47 e 38 e di là vedo la somma tra 40 e 7, e 30 e 8. Io ho fatto così… allora: io comincio da 47 e faccio due frecce, lo smonto in 40 e 7 [disegna due linee che da 47 portano a 40 e 7, ma non mette nessun segno tra i due numeri]».
3. Ins.: «Ma tra 40 e 7 che relazione c’è?»
4. M.: «Ah, metto il segno… [aggiunge il “+” tra i due numeri] è la forma non canonica di 47. Poi prendo il 38 [traccia da 38 altre due linee verso il basso] e anche qui scrivo la somma tra 30 e 8 che è la forma non canonica di 38, sicché è 38».
5. Ins.: «Ora come fai a dimostrare che è un’uguaglianza?»
6. M.: «Vedrai, sono uguali! [colora nello stesso modo le parti uguali: in giallo i 40, in celeste i 7, in viola i 30 e in rosa gli 8]. Ecco, ora ho fatto la verifica, ho controllato che è vera!»

La strategia cromatica, promossa con costanza dall’insegnante, se fatta propria dall’allievo, come accade in questo episodio, è un importante *traghetto semantico* sia per l’alunno che la applica sia per i compagni che assistono; in quanto tale possiede una forte valenza sociale in quanto fornisce a tutti un rinforzo visivo per individuare le rappresentazioni che l’alunno pone in relazione e che supportano il suo ragionamento nello stabilire la verità dell’equivalenza.

5.2.2 La verbalizzazione in forma relazionale dell’equivalenza

Con *verbalizzazione relazionale* si intende una verbalizzazione costruita attraverso la *nominalizzazione*, cioè la sostituzione nella costruzione di una frase dell’uso dei verbi attraverso i quali l’alunno spiega *ciò che fa* (addiziono, sottraggo, moltiplico ecc.), con quello dei sostantivi, attraverso i quali l’alunno spiega *ciò che la scrittura* è (una somma, una differenza, il doppio di ecc.). In questo modo si condensano significati che, altrimenti, si dovrebbero esprimere attraverso giri di parole che, a volte, non solo non migliorano la loro comprensione ma giungono persino a comprometterla. Questo passaggio, preliminare all’elaborazione di congetture sulla verità di un’equivalenza, comporta che gli alunni, per poter assegnare loro un nome, sappiano riconoscere cosa sono gli oggetti matematici rappresentati nell’equivalenza. Fare proprio il passaggio dai *processi* agli *oggetti* e impadronirsi dei termini specifici per designarli costituiscono un’impresa complessa ma necessaria a una maturazione consapevole del pensiero matematico. A tale scopo è importante che, prima che si avvii la verbalizzazione, l’insegnante negozi con gli alunni *i termini da usare per costruire una buona argomentazione*. Si consideri il seguente episodio in cui, data l’età degli alunni (prima primaria), non si inizia da un’equivalenza ma: (i) l’insegnante propone una situazione concreta in cui si confrontano due gruppi di oggetti; (ii) gli alunni la descrivono; (iii) la rappresentano in linguaggio matematico; (iv) argomentano se i due gruppi sono numericamente uguali. In particolare, l’insegnante dispone due gruppi di mattoncini da costruzione su due banchi (**Figura 6**) e chiede di descrivere la situazione. Si concordano le parole “banco”, “destra”, “sinistra” e “mattoncini”.

Figura 6. I due tavoli e i gruppi di mattoncini.

EP6 (P1)

1. A.: «Sul banco di sinistra vedo sette mattoncini rossi a sinistra e tre mattoncini gialli a destra e sul banco di destra vedo sette mattoncini rossi a sinistra e due mattoncini blu e un arancione a destra».
2. [Ricorrendo al *mediatore linguistico* familiare agli alunni («Facciamo finta che qui con noi ci sia Brioshi») si elabora collettivamente la traduzione in linguaggio matematico della frase di A.]

$$7 + 3 = 7 + 2 + 1.$$

3. Ins.: «Secondo voi, questa uguaglianza è vera? Mi spiego meglio: dobbiamo scoprire insieme se il numero dei mattoncini sul banco a sinistra è lo stesso di quelli sul banco a destra, ma *senza fare i calcoli*».
4. A.: «Io non ho fatto calcoli! Ho visto che il 7 c’è da tutte e due le parti. Poi il 3 a sinistra è in forma canonica, il 3 a destra è in forma non canonica ed è scritto 2 più 1».
5. Ins.: «Wow! Bravissima! Prova a leggere quest’ultima scrittura come una bambina grande».
6. A.: «La somma tra 2 e 1 è la forma non canonica di 3».

Si noti come nell’ultimo intervento (intervento 6) A. conclude lo scambio con l’insegnante costruendo una verbalizzazione in forma relazionale. A. non definisce 2 + 1 come operazione, ma come *oggetto* e gli attribuisce il nome *somma*, completando il suo intervento con la precisazione che si tratta di una *forma non canonica*.

5.3 Favorire l’interpretazione complessiva di un’equivalenza distinguendo tra calcoli locali e calcoli globali

Le attività di CsC sono centrate sulla capacità di valutare se un’equivalenza sia verificata o meno senza svolgere *calcoli globali*, bensì analizzando le relazioni presenti nei membri dell’equivalenza appoggiandosi a *calcoli locali*, cioè a semplici calcoli mentali ridotti al minimo. L’alunno che senta la necessità di appoggiarsi ai *calcoli globali* esprime un retro-pensiero *procedurale*, poiché si pone l’obiettivo di verificare l’equivalenza fra i due membri puntando all’*uguaglianza dei rispettivi risultati*. Al contrario, l’alunno che si limita a svolgere *calcoli locali* mostra di maturare un atteggiamento *relazionale*, poiché si concentra sulla *struttura* dei due membri dell’equivalenza, confronta rappresentazioni canoniche e rappresentazioni non canoniche, individua analogie e differenze, applica proprietà. Di seguito si riporta un episodio significativo documentato in una classe di terza primaria.

EP7 (P3)

1. Ins.: «Quale numero mettereste al posto di "*a*" per fare in modo che l'uguaglianza sia vera?»

$$15 + 3 = 5 \times 3 + a.$$

2. S.: «[si propone, dicendo che ha già capito] Qui [indica a sinistra dell'uguale] c'è la somma tra 15 e 3… e qui la somma tra… la somma tra *a* e questo… [indica 5 × 3]… secondo me *a* deve essere uguale a 10».
3. V.: «Secondo me *a* è uguale a 3».
4. S.: «*a* è uguale a 15».
5. D.: «Ma che dici, così sarebbe 30 a destra!»
6. [Tutti dicono che è giusta solo quella di V.].
7. Ins.: «V., adesso vediamo come puoi spiegarci che *a* vale 3… usa i colori o segna come vuoi…».
8. V.: «Allora… [prende un colore ma è indecisa su cosa colorare]. Questo è uguale a questo [colora il 15 e 3 × 5]… sono il numero 15… questa [indica 3 × 5] è la forma non canonica. Sì, [con convinzione] è il 3, perché se questi due sono uguali [si riferisce a 15 e 3 × 5] allora 3 è a sinistra e *a* è 3 a destra».

L'insegnante, che cura molto la significatività delle argomentazioni, prosegue con l'obiettivo di condurre la classe a riflettere sul valore errato proposto da S. (intervento 2); approfitta di questa occasione per promuovere il confronto fra il significato dei simboli "≠" e "<".

9. Ins.: «Bene! Adesso riprendiamo la risposta di S.: aveva detto che *a* è uguale a 10…»
10. S.: «Sì… ma mi sa che ho sbagliato».
11. Ins.: «S., che succede se ci metti 10 al posto di *a*? Come mi potresti far capire che relazione c'è tra questi due? [indica 15 + 3 e 5 × 3 + *a*] C'è un simbolo adatto…»
12. S.: «Quello che "non è uguale"».
13. V.: «Io metterei il simbolo minore».
14. Ins.: «V. dimmi tutta la frase».
15. V.: «La somma tra 15 e 3 è minore del prodotto tra 5 e 3... anzi, della somma tra il prodotto di 3 e 5 e 10 [alla LIM vengono riprodotte entrambe le scritture $15 + 3 \neq 3 \times 5 + 10$ e $15 + 3 < 3 \times 5 + 10$]».
16. Ins.: «Ma secondo voi quale segno mi dà più informazioni, quale messaggio sarebbe più utile a Brioshi?»
17. L., G.: «Il secondo [intendono $15 + 3 < 3 \times 5 + 10$]».
18. L.: «Mi dice che quello a sinistra è più piccolo dell'altro a destra».
19. G.: «Il "non è uguale" non mi fa capire come sono, è meno trasparente!»
20. L.: «È opaco! A Brioshi non serve tanto... non gli fa capire molto, invece il segno minore gli fa capire chi è più grande e chi è più piccolo, Brioshi li può mettere in ordine di grandezza».

L'insegnante trova un altro spunto per arricchire ulteriormente la riflessione collettiva. Può permettersi di farlo avendo lavorato sin dalla prima primaria in modo continuativo (e competente) sui nodi fondativi (par. 3.1) e i temi chiave (par. 3.2), come si può evincere dalla sicurezza con cui anche gli allievi usano i termini "forma canonica" e "forma non canonica", scrittura "trasparente" o "opaca".

21. Ins.: «Bene, e ditemi… che valore dovrebbe avere *a* per far sì che la relazione sia con il simbolo maggiore $15 + 3 > 5 \times 3 + a$?»
22. D.: «*a* deve essere 2… anzi tutti i numeri minori di 3: 2, 1, e 0».
23. Ins.: «Posso mettere il 3?»
24. D.: «No, dovevo mettere il segno uguale, come ha detto prima V., non posso mettere il segno maggiore».

Nel prossimo episodio, gli alunni di una classe di quinta primaria devono argomentare la correttezza di questa equivalenza riducendo al minimo i calcoli:

$$26 \times 7 \stackrel{?}{=} 13 \times (10 + 5).$$

EP8 (P5)
A. scrive: «26 a sinistra è il doppio di 13 a destra e lo scrivo in forma non canonica:

$$2 \times 13 \times 7 \stackrel{?}{=} 13 \times (10 + 5).$$

13 è da tutte e due le parti e non mi interessa, rimane:

$$2 \times 7 \stackrel{?}{=} 10 + 5.$$

Il prodotto 2×7 è una forma non canonica di 14 e la somma $10 + 5$ è una forma non canonica di 15, $14 < 15$. Conclusione:

$$26 \times 7 < 13 \times (10 + 5).$$

L'equivalenza è falsa».

Guidare a ideare strategie di confronto piuttosto che a "buttarsi nei calcoli" si dimostra funzionale non solo allo sviluppo di un'ottica relazionale ma anche, allo stesso tempo, alla promozione di una costruzione sociale della conoscenza. I risultati raggiunti durante le sperimentazioni nelle classi evidenziano, infatti, quanto sia importante che gli alunni vengano abituati a condividere le proprie strategie di confronto con i compagni e a dibatterne nel corso di una discussione.
La conoscenza da parte degli alunni delle equazioni (tramite l'uso della bilancia a piatti) costituisce un prerequisito efficace (per molti aspetti *necessario*) anche per l'esplorazione delle equivalenze. L'alunno A. nell'EP8 esprime in modo ingenuo («Non mi interessa») la conoscenza del secondo principio di equivalenza; sa che se in un'equivalenza fra prodotti compaiono due fattori uguali (indipendentemente dal fatto che siano rappresentati in forma canonica o non canonica) li si può trascurare, col vantaggio che l'equivalenza diventa più semplice da esplorare.

Nel seguente episodio in una classe di prima secondaria di primo grado viene chiesto di dimostrare questa equivalenza: $37 + 56 = 39 + 54$. Tre alunni elaborano queste conclusioni:

EP9 (S1)
1. M.: «È vera perché 39 è la forma canonica di $37 + 2$ e 54 è la forma canonica di $56 - 2$ [scrive alla LIM]:

$$37 + \cancel{56} = 37 + 2 + \cancel{56} - 2 \rightarrow 37 + 56 = 37 + 56 + 2 - 2».$$

2. E.: «L'uguaglianza è giusta perché nel $39 + 54$ ci sono due numeri in più e due numeri in meno, cioè $37 + 2 = 39$ e $56 - 2 = 54$».
3. A.: «È vera perché 39 è maggiore di 37 di due unità e 56 è maggiore di 54 di due unità».

Nel prossimo estratto invece in una classe di quinta primaria l'insegnante scrive alla lavagna:

$$49 + 32 = 45 + 36.$$

EP10 (P5)

1. Md.: «Dobbiamo confrontare. Allora Brioshi stavolta ce l'ha mandata vera. Perché la differenza tra 49 e 45 è di 4 e anche tra 32 e 36 è di 4».
2. Mr.: «Il 4 dove lo trovi? Md. hai calcolato, perché se tu hai saputo che la differenza tra 49 e 45 è di 4 e anche tra 36 e 32 hai dovuto calcolare».
3. Ins.: «Che ne pensate? Md. ha fatto un calcolo?»
4. Md.: «Avevo pensato come a voce alta. Non stavo proprio calcolando… confrontavo per capire la forma non canonica che serve».

Mr. (intervento 2) non accetta la risposta/spiegazione di Md. (intervento 1) in quanto, secondo lei, Md., per trovare il numero 4, ha *calcolato* e non *confrontato*. Effettivamente la risposta di Md. è frutto di un calcolo, ma si tratta di un semplice calcolo *locale*, *necessario* per poter svolgere il confronto. Mr. avrebbe avuto ragione se Md. avesse detto «49 più 32 è uguale a 81, 45 più 36 è uguale a 81 quindi i due membri sono uguali». Nella sua risposta (intervento 4) Md. chiarisce proprio questo punto di vista: «Avevo pensato come a voce alta. *Non stavo proprio calcolando… confrontavo* per capire la forma non canonica che serve». Dunque in questo caso la riflessione, stimolata dall'insegnante, serve proprio a mettere in luce l'importanza di un calcolo mentale locale che serve per realizzare il confronto. D'altronde la strategia di calcolo verbalizzata da Md. (intervento 1) è del tutto relazionale («la differenza tra 49 e 45 è 4»).

5.4 Distinguere premesse e conclusione in un'argomentazione

Questo aspetto è molto importante quando gli alunni giustificano la verità o la non-verità di un'equivalenza perché si è notato con crescente evidenza che essi, man mano che diventano competenti nell'individuare forme equivalenti ai due lati dell'uguale, tendono a ritenere, così facendo, di aver esaurito il loro compito, e non comprendono che quelle sono solo le premesse che consentono di esprimere la verità dell'equivalenza. Il riferimento all'*investigatore* – che cerca gli indizi in quanto informazioni necessarie alla scoperta dell'autore del crimine, atto conclusivo della sua indagine – è utile per favorire la comprensione della differenza fra i due momenti. Gli alunni vanno guidati a capire che l'individuazione delle forme locali equivalenti non è fine a sé stessa ma che esse vanno inserite in un ragionamento globale che permetta di affermare la verità o meno dell'equivalenza.
Nel seguente episodio, con un'allieva di terza primaria, ciò non accade e si rimane fermi alle premesse, seppur corrette, da lei formulate. L'insegnante propone $25 : 5 \stackrel{?}{=} 250 : 50$.

EP11 (P3)

1. E.: «Tra 25 : 5 e 250 : 50 è solo per 10 quindi non cambia il numero, è solo che c'è la proprietà… [rimane un attimo incerta] c'è applicata la proprietà invariantiva».
2. Ins.: «E., puoi spiegarci cosa intendi?»
3. E.: «C'è la proprietà invariantiva perché qui [indica la parte a destra dell'uguale] 250 *diviso 10* è 25 e 50 *diviso 10* è 5».

Le argomentazioni di E., pur se deboli nella forma (intervento 1: «è solo per 10 quindi non cambia il numero»), esprimono delle intuizioni corrette. L'alunna, e la stessa insegnante, si sono però arrestate alle premesse ed E. non è stata guidata verso una conclusione; ad esempio: «Ho applicato a destra la proprietà invariantiva e ho diviso sia 250 che 50 per 10; ho scritto: 250 : 10 = 25 e 50 : 10 = 5. In questo modo a destra al posto di 250 : 50 ho scritto 25 : 5. Ho concluso che 25 : 5 = 250 : 50».

Un'argomentazione come questa avrebbe permesso di *rendere visibile* l'applicazione della proprietà invariantiva, che porta a due rappresentazioni formalmente uguali ai lati dell'uguale e quindi alla verifica dell'equivalenza. Cosa che, invece, avviene nel prossimo episodio, svoltosi in una classe di prima secondaria di primo grado, tratto da un file di lavoro.
L'insegnante propone il seguente problema:

> Brioshi ci ha mandato questa frase:
>
> $$(21 + 4) + (38 + 11) \stackrel{?}{=} (38 + 11) + (21 + 2).$$
>
> Argomentate la risposta e scrivetela in linguaggio matematico per Brioshi.

EP12 (S1)

1. M. [scrive]: «Non è vera perché 21 + 4 nella parte a destra non c'è, c'è 21 + 2. 38 + 11 c'è da tutte e due le parti».
2. Ins.: «Ma da cosa capisci che non è vera?»
3. M.: «Si vede dal 21 + 4 e dal 21 + 2 perché 21 + 4 non è uguale a 21 + 2 e 38 + 11 è uguale a 38 + 11».
4. Ins.: «Sì, ok… ma, come abbiamo detto, concentratevi sulle parti che rimangono uguali ed evidenziatele con un colore [Su indicazione di molti si scrive alla LIM]:

   $$(21 + 4) + (38 + 11) \stackrel{?}{=} (38 + 11) + (21 + 2)».$$

5. A.: «Avevamo detto che si possono togliere!»
6. T.: «Sono forme non canoniche di 48… no, di 49 [alla LIM rimane $21 + 4 \stackrel{?}{=} 21 + 2$]».
7. Ins.: «E adesso cosa potete dire?»
8. M.: «Che 21 + 4 è la forma non canonica di 25, e 21 + 2 è la forma non canonica di 23, e 25 è più grande di 23».
9. K.: «Io ho pensato in un modo diverso. 21 + 4 e 21 + 2 sono tutte e due somme, ma la prima è più grande perché a sinistra è aggiunto 4 e a destra 2».
10. Ins.: «Bene, e come potremmo tradurre per Brioshi quello che hanno detto K. e M.?»
11. T.: «Si può dire che 21 + 4 non è uguale a 21 + 2, ma è meglio che 21 + 4 è maggiore di 21 + 2 così si capisce che è più grande [alla LIM scrive $21 + 4 \neq 21 + 2$; $21 + 4 > 21 + 2$]».
12. Ins.: «T. ha detto cose corrette, ma ha finito il suo lavoro di investigatore?»
13. T.: «No… questi sono gli indizi, sì, volevo dire… le premesse».
14. Ins.: «E quindi?»
15. M.: «La conclusione! [Alla LIM scrive $(21 + 4) + (38 + 11) > (38 + 11) + (21 + 2)$]».

Gli alunni sintetizzano alla LIM il ragionamento:

> PREMESSE: $38 + 11 = 38 + 11$; $21 + 4 > 21 + 2$.
> CONCLUSIONE: $(21 + 4) + (38 + 11) > (38 + 11) + (21 + 2)$.

L'insegnante guida la classe verso la comprensione della distinzione fra premesse e conclusione appoggiandosi alla strategia cromatica (par. 5.2.1) e alla metafora dell'investigatore. Guida, attraverso un susseguirsi di argomentazioni verbali (nelle quali gli allievi evidenziano un buon controllo anche sui termini) e di traduzioni in linguaggio matematico, verso la sintesi finale. L'intervento 11 di T. sulla distinzione fra i segni "≠" e ">" mette in luce l'importanza di una didattica rivolta, innanzitutto, alla riflessione sui concetti in gioco.

5.5 Appoggiare il pensiero a un supporto scritto

Man mano che gli alunni diventano competenti nel *colpo d'occhio*, nel riconoscimento delle rappresentazioni parziali equivalenti, nell'applicazione di principi e proprietà, maturano anche le loro capacità di argomentare. Questa capacità si esprime a livelli diversi, utilizzando il linguaggio naturale e/o il linguaggio matematico. Di seguito si riportano due episodi, in cui ad allievi di seconda secondaria di primo grado è stato chiesto di verificare l'equivalenza $40 \times 8 + 560 \stackrel{?}{=} 10 \times a + 320$. Il primo episodio riporta un esempio di argomentazione prevalentemente verbale, il secondo un esempio di argomentazione prevalentemente matematica. In entrambi i casi la possibilità di poter scrivere l'argomentazione aiuta l'allievo a organizzare e strutturare il pensiero relazionale.

EP13 (S2)

G. scrive: «Il valore di *a* è uguale a 56 perché 320 è la forma canonica di 40 moltiplicato a 8. Quindi avendo la forma canonica in un lato e quella non canonica nell'altro lato e applicando il principio di cancellazione si scopre che 560 è la forma canonica di 10 moltiplicato ad *a*. Quindi *a* è uguale al quoziente tra 560 e 10, ovvero 56».

Le parti in linguaggio matematico inserite all'interno del testo "sostengono" il ragionamento. La classe di G. ha ricevuto un'educazione matematica nella prospettiva dell'*early algebra* sin dalla scuola primaria. In tale contesto ha seguito dalla quarta un percorso che, iniziato con l'uso della bilancia a piatti, ha condotto gli alunni all'incontro con le equazioni. Gli alunni che conoscono quindi il primo e il secondo principio di equivalenza e, di conseguenza, la *regola del trasporto* e il *principio di cancellazione* al quale fa riferimento G. nella sua argomentazione.

EP14 (S2)

Ga. scrive:

«$40 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$	scrivo 40 in forma non canonica:
$10 \times 4 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$	il prodotto tra 10, 4 e 8 a sinistra è uguale a 320 a destra:
$10 \times 4 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$	applico il principio di cancellazione:
$\cancel{10 \times 4 \times 8} + 560 = 10 \times a + \cancel{320}$	resta:
$560 = 10 \times a$	scrivo 560 in forma non canonica:
$56 \times 10 = 10 \times a$	applico il secondo principio e divido i due membri per 10:
$56 = a$».	

I trattamenti sintattici sono i protagonisti di questa argomentazione, e i brevi testi che accompagnano lo sviluppo del ragionamento illustrano i passaggi con il corredo della strategia cromatica (par. 5.2.1). L'aver esplorato le equazioni tramite la bilancia a due piatti permette all'alunno di gestire con sicurezza il secondo e il quinto passaggio esplicitando l'applicazione del primo e del secondo principio di equivalenza.

5.6 Evitare/ridurre la "gabbia relazionale"

Nel progetto ArAl si chiama *gabbia procedurale* l'insieme di conoscenze, convinzioni e comportamenti – generati da una didattica concentrata soprattutto sul fare, sul calcolare, sul trovare risultati – che

modellano le menti degli alunni dal momento in cui scoprono, da piccolissimi, il piacere per l'approvazione da parte degli adulti quando dicono frasi come: «Due più tre fa cinque».
In contrapposizione con questa impostazione, i cambiamenti introdotti da una didattica *relazionale* possono rivelarsi complessi da gestire da parte degli insegnanti (spesso prigionieri a loro volta di una gabbia procedurale) che li affrontano secondo schemi altrettanto rigidi.
Il rischio è che l'approccio relazionale, se non viene adeguatamente supportato sul piano della teoria e del metodo, possa diventare una *gabbia* tanto quanto quella rilevabile in un approccio procedurale, una gabbia in cui gli alunni non si sentono liberi di esplorare, di esprimersi, di sbagliare, di condividere la propria opinione ma sono vincolati da una richiesta continua di rigore che può soffocare la loro spontaneità.
A questo proposito, si riporta di seguito un episodio significativo documentato con allievi di seconda secondaria di primo grado alle prese con la verifica dell'equivalenza:

$$40 \times 8 + 560 \stackrel{?}{=} 10 \times a + 320.$$

La strategia attesa era quella riportata nell'episodio EP14, ma contrariamente alle aspettative, in una classe, in sei protocolli su otto, gli alunni hanno invece attivato lunghe sequenze di sostituzioni in sé corrette ma non necessarie.

EP15 (S2)
L. scrive: «$40 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$
$10 \times 4 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$
$10 \times 4 \times 8 + 56 \times 10 = 10 \times a + 32 \times 10$
$10 \times 4 \times 8 + 56 \times 10 = 10 \times a + 4 \times 8 \times 10$
$\cancel{10 \times 4 \times 8} + 56 \times 10 = 10 \times a + 4 \times 8 \times 10$
$a = 56$».

Viene da chiedersi perché questi alunni abbiano sentito il bisogno di organizzare così tante sostituzioni. In colloqui successivi all'attività, L. e i suoi compagni hanno affermato di aver scritto tutti quei passaggi – anche avendo capito sin dall'inizio che 40 × 8 è una forma non canonica di 320 – perché *pensavano di doverlo fare*. Questo porta a pensare che le loro scelte formali siano state condizionate da una gabbia relazionale che li ha condotti a ritenere che certi trattamenti siano *obbligatori* anche dove non sono necessari in quanto, nelle attività di CsC, essi venivano richiesti in modo pressante dall'insegnante.
Per portare gli alunni a *operare all'interno di un metodo, ma con consapevole spontaneità*, è necessario negoziare con loro, appena se ne ravveda l'opportunità, il significato della consegna "senza calcolare". A tale scopo, a nostro avviso, è di grande importanza la *condivisione dei principi teorici con gli alunni*: per arrivare a negoziare il significato della consegna "senza calcolare", infatti, essi dovranno aver fatto proprio il *senso* di CsC, imparando a gestire autonomamente e liberamente gli atteggiamenti emersi esplorando la verità delle equivalenze: il *colpo d'occhio*, il confronto tra rappresentazioni formalmente differenti di uno stesso numero, riconoscere proprietà, applicare principi, distinguere tra premesse e conclusione, elaborare argomentazioni in linguaggio naturale esprimendosi in un modo relazionale nominando gli oggetti matematici (utilizzando quindi termini come "somma", "prodotto", "doppio", "metà").

6 Considerazioni conclusive

Sulla base degli studi condotti all'interno del progetto CsC, si può concludere che le sei strategie presentate, oltre a fornire delle risposte alla prima domanda di ricerca relativamente alla verifica di equivalenze matematiche, possiedono allo stesso tempo una valenza generale. Le competenze relazionali manifestate dagli alunni nella maggior parte degli episodi analizzati nel par. 5 non valgono solo in contesti di attività CsC ma, se opportunamente coltivate e reinvestite, possono essere estese a più avanzate riflessioni in ambito aritmetico e algebrico. In particolare:

– affinare il colpo d'occhio nella ricerca della verità di un'equivalenza comporta l'individuazione di parti costanti e di parti variabili interne alle espressioni, e questa competenza sta alla base dell'individuazione della legge generale di una successione algebrica o figurale e favorisce quindi l'approccio alla modellizzazione;
– non appoggiarsi ai calcoli significa maturare la capacità di concentrarsi sulle relazioni fra gli enti di una situazione problematica e promuove la riflessione sul significato delle scritture matematiche;
– riconoscere premesse e conclusioni in un ragionamento significa imparare a decostruire problemi complessi in sotto-problemi più maneggiabili, e questa competenza è fondamentale in algebra perché prepara anche a comprendere il significato delle dimostrazioni.

Le principali competenze relazionali che le sei strategie favoriscono sono strettamente collegate a quelle connesse ai nodi fondativi (par. 3.1), e riguardano la capacità di intendere le scritture (tanto aritmetiche quanto algebriche) come rappresentazioni di numeri da interpretare, confrontare, sostituire; di vederle come oggetti dotati di un nome che si sa utilizzare per costruire argomentazioni chiare e complete; di riconoscere l'equivalenza tra scritture a una delle quali sia stata applicata una proprietà che la "allontana formalmente" dall'altra, per esempio riconoscere l'equivalenza di formule che esprimono in modi diversi il perimetro di un rettangolo, come $2 \times (a + b)$ e $2 \times a + 2 \times b$.
Queste strategie possono essere rilette, in prospettiva, in termini di interventi didattici efficaci per lo sviluppo del pensiero relazionale. Ma tale efficacia è subordinata alla didattica attuata, da cui la seconda domanda di ricerca: quali competenze deve possedere un insegnante per favorire tale sviluppo?
Oltre a possedere una solida competenza matematica concettuale, l'insegnante dovrebbe saper favorire i collegamenti e le traduzioni tra linguaggio naturale e linguaggio matematico nei loro aspetti semantici e sintattici; promuovere l'argomentazione individuale e la riflessione collettiva attraverso domande metacognitive («Cosa noti?», «Che relazione vedi fra questi numeri?», «Come spiegheresti ad un compagno quello che hai capito?»); cogliere nelle verbalizzazioni degli alunni segnali anche minimi della persistenza di un pensiero procedurale; valorizzare e confrontare strategie diverse; individuare misconcezioni, intuizioni, spunti promettenti verso la generalizzazione; progettare attività aperte e significative in cui si confrontano rappresentazioni equivalenti contenenti anche numeri sconosciuti, come nel progetto CsC.
In questa prospettiva, l'insegnante dovrebbe superare il ruolo di *trasmettitore di tecniche* per diventare *mediatore di significati*.
Per sviluppare autentiche competenze relazionali in questo senso negli insegnanti è necessario promuovere una loro graduale rilettura critica di conoscenze, concezioni, atteggiamenti, stereotipi, che spesso sono profondamente radicati. Questo processo viene avviato attraverso l'incontro con i principi dell'*early algebra* e con i nodi fondativi e i temi chiave del progetto ArAl.
Le sperimentazioni effettuate mostrano come questo sia appena il primo passo di un percorso formativo, che però non solo è insufficiente a generare i cambiamenti necessari, ma rischia anzi di produrre

un passaggio superficiale, povero nei contenuti e limitato negli sviluppi, dalla *gabbia procedurale* alla *gabbia relazionale*. Per sostenere una trasformazione reale, il progetto ArAl propone una didattica fondata su ambienti di apprendimento che supportino i docenti nell'attuare uno sviluppo efficace del pensiero relazionale (Navarra et al., 2024, 2025).[12] Anche le attività del progetto CsC, nate dalla collaborazione tra insegnanti e ricercatori (come mostrato nel ciclo in **Figura 1**), si collocano in questo quadro e richiamano la prospettiva, indicata da Sfard nella plenaria dell'ICME 10 intitolata *Cosa potrebbe essere più pratico di una buona ricerca?* (Sfard, 2004), centrata sulla necessità che ricercatori e docenti integrino saperi ed esperienze per unire in modo fecondo prassi e ricerca.

Bibliografia

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 115–136). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into Algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483–510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 27–49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669–705). Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2005). Treating the operations of arithmetic as functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*, 1.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235–272). Routledge.

Cusi, A., Malara, N. A., & Navarra, G. (2011). Theoretical issues and educational strategies for encouraging teacher to promote a linguistic and metacognitive approach to early algebra. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483–510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_25

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

12. Tra il 2003 e il 2022 le Unità della Collana ArAl (pubblicate da Pitagora Editrice Bologna) sono state concepite come modelli di processi di insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica per offrire agli insegnanti, prima ancora che percorsi didattici da attuare nelle classi, l'opportunità di riflettere sulle loro conoscenze e sul loro modus operandi.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children’s understanding of equality: A foundation for early algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(4), 232–236.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi*. UTET Università.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59–78. https://doi.org/10.1007/BF01284528

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children’s algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258–288.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96–112). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 387–419). Macmillan.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: Some pros and cons. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 157–175). PME Program Committee.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvarez, M. Niss, A. Perez, L. Rico & A. Sfard (Eds.), *Selected lectures from the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 271–290). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 79–105). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer International Publishing.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 297–312.

Lins, R., & Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 47–70). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_4

Malara, N. A., & Navarra, G. (2003). Influences of a procedural vision of arithmetics in algebra learning. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 935–944). University of Pisa and ERME.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebra thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 51–77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3

Mariotti, M. A. (2022). *Argomentare e dimostrare come problema didattico.* UTET Università.

Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing.* The Falmer Press.

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 329–350). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

Ministero dell'Istruzione e del Merito. (2025). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e delle scuole del primo ciclo di istruzione.* MIM. https://www.mim.gov.it/documents/20182/10554370/curricolo_web.pdf/f91c31a0-5ed4-65f3-bfea-fb49adaba55f?version=1.0&t=1773224873548

Navarra, G. (2019). Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebrica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 70–94. https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.3

Navarra, G. (2022). *Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante.* UTET Università.

Navarra, G., Della Picca, M. G., & Traverso, A. (2024). *Matematica e pensiero relazionale: Un percorso educativo per la scuola primaria. Classe seconda e classe terza.* Sintab Edizioni.

Navarra, G., Della Picca, M. G., & Traverso, A. (2025). *Matematica e pensiero relazionale: Un percorso educativo per la scuola primaria. Classe quarta e classe quinta, con espansioni verso la scuola secondaria.* Sintab Edizioni.

Pareti, E. (2025). *Early Algebra: uno studio di attività di classe per lo sviluppo del pensiero relazionale alla scuola primaria nell'ambito del Progetto ArAl.* Tesi di laurea magistrale. Università degli Studi di Firenze.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73–80). PME.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 3–25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 4, pp. 127–134). University of Hawaii and PME.

Schwarzkopf, R., Nührenbörger, M., & Mayer, C. (2018). Algebraic understanding of equalities in primary classes. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 195–212). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_8

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2004). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. In M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 76–92). Roskilde University. https://doi.org/10.1007/s10649-005-4818-5

Sfard, A. (2008). *Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo.* Edizioni Erickson.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 191–228. https://doi.org/10.1007/BF01273663

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 67–97. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.3

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Sviluppare il senso del numero in età prescolare attraverso la tecnologia multi-touch: il caso di *TouchCounts*

Developing number sense in preschoolers through multi-touch technology: the case of *TouchCounts*

Alessandra Raffi• e Anna Baccaglini-Frank°
•Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica, Università di Pisa – Italia
°Dipartimento di Matematica, Università di Pisa – Italia

✉ alessandra.raffi83@outlook.com, anna.baccaglinifrank@unipi.it

Sunto / L'articolo si colloca nella linea di ricerca che indaga le potenzialità della tecnologia multi-touch per sostenere lo sviluppo del senso del numero in età prescolare. In particolare, vengono analizzate le interazioni di bambine e bambini di quattro anni con l'app per iPad *TouchCounts*, progettata per favorire l'uso intenzionale delle dita nella costruzione e manipolazione di grandezze numeriche. Lo studio si concentra su specifiche componenti di senso del numero, con particolare attenzione alla gestione dell'ordinalità e del senso ricorsivo, oltre che alla gnosia digitale. Attraverso un'analisi qualitativa degli schemi adottati dai partecipanti nel rispondere a consegne progettate *ad hoc*, e un confronto con un'analisi a priori delle potenzialità delle attività, il contributo esplora in che modo determinate abilità di senso del numero vengano mobilitate nelle interazioni con l'app. I risultati suggeriscono che, in presenza di consegne intenzionalmente progettate e di una mediazione adulta competente, l'ambiente multi-touch possa costituire un contesto favorevole per sostenere lo sviluppo di specifici aspetti di senso del numero in età prescolare.

Parole chiave: senso del numero; ordinalità; gnosia digitale; tecnologia multi-touch; scuola dell'infanzia.

Abstract / This article contributes to the growing body of research investigating the potential of multi-touch technology to support the development of number sense in early childhood. The study focuses on four-year-old children's interactions with the iPad app *TouchCounts*, designed to promote the intentional use of fingers in the creation and manipulation of numerical quantities. Particular attention is paid to specific components of number sense, especially the management of ordinal and recursive structure, as well as finger gnosis.
Through a qualitative analysis of the schemes adopted by children when engaging with purposefully designed tasks, and by comparing these findings with an a priori analysis of the tasks' potential, the study explores how particular number sense abilities are mobilized during interaction with the app. The findings suggest that, when supported by carefully designed tasks and competent adult mediation, multi-touch environments may provide a meaningful context for fostering specific aspects of number sense in pre-primary education.

Keywords: number sense; ordinality; finger gnosis; multi-touch technology; pre-primary school.

1 Introduzione

Le ricerche in educazione matematica concordano nel riconoscere l'importanza di promuovere lo sviluppo di senso del numero fin dalla scuola dell'infanzia, in quanto fondamento per l'apprendimento successivo dell'aritmetica e della matematica formale. Alla luce di tali evidenze, il presente studio si propone di indagare come specifici ambienti di apprendimento digitali, con consegne appositamente progettate, possano sostenere lo sviluppo di diverse componenti di senso del numero. In particolare, l'indagine si concentra sulle potenzialità della tecnologia multi-touch e, nello specifico, sull'utilizzo dell'app per iPad *TouchCounts*, progettata come ambiente aperto che incoraggia l'uso intenzionale delle dita per creare, esplorare e trasformare grandezze numeriche.

Questo approccio si colloca in continuità con risultati provenienti dalle neuroscienze cognitive, che evidenziano un legame significativo tra l'uso delle dita e la costruzione delle rappresentazioni numeriche (Butterworth, 1999). Tuttavia, in coerenza con la letteratura in educazione matematica, tali risultati vengono qui interpretati non come indicazione di abilità isolate da potenziare, ma come base per sostenere lo sviluppo di una comprensione articolata del numero naturale, che includa non solo la gestione della cardinalità, ma anche quella dell'ordinalità e del senso ricorsivo. In questo quadro, le possibilità offerte dalla tecnologia multi-touch – quali il riconoscimento di tocchi multipli simultanei, la relazione diretta tra gesto e produzione numerica e la disponibilità di feedback immediati – risultano particolarmente promettenti per progettare esperienze che rendano esplorabili e significative le relazioni tra numeri (Baccaglini-Frank, 2026; Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

Il presente studio si inserisce all'interno di un progetto più ampio, condotto nell'ambito del lavoro di tesi della prima autrice[1] (di seguito indicata come ricercatrice), finalizzato alla progettazione e sperimentazione di un percorso didattico volto a promuovere lo sviluppo di senso del numero in bambini e bambine di 4 anni attraverso l'integrazione di artefatti fisici e digitali (Raffi, 2025). In questa sede, l'attenzione si focalizza sulle potenzialità didattiche offerte dalla tecnologia multi-touch, quindi lo studio si concentra sull'analisi dei dati relativi alle sessioni di lavoro svolte con *TouchCounts* e sull'analisi dei risultati dei disegni pre- e post-intervento richiesti alle bambine e ai bambini partecipanti. Non vengono considerati, invece, i dati raccolti durante gli incontri di gruppo svolti con artefatti fisici.

Lo studio presentato in questo articolo si situa nella linea di ricerca che indaga come la tecnologia multi-touch possa essere efficacemente impiegata in ambito educativo per favorire lo sviluppo di senso del numero nei bambini e nelle bambine in età prescolare (si vedano, ad esempio, Ferrara & Ferrari, 2023; Kortenkamp et al., 2024; Ladel & Kortenkamp, 2014; Lembrér & Meaney, 2016), esplorando, in particolare, le potenzialità dell'app per iPad *TouchCounts* (Jackiw & Sinclair, 2014, 2017; Sinclair & Jackiw, 2011; Sinclair & Pimm, 2015). Si esploreranno, nello specifico, le strategie utilizzate dai bambini e dalle bambine nel rispondere a un insieme di consegne proposte, e si inferirà l'apprendimento promosso nell'ambito di senso del numero utilizzando il costrutto di *schema* (Vergnaud, 2009).

Nel prossimo paragrafo (par. 2) viene proposta una sintesi della letteratura esistente sul senso del numero e sull'uso della tecnologia multi-touch per promuoverlo, con particolare attenzione alle caratteristiche e al funzionamento dell'app *TouchCounts*. Successivamente, viene descritta la lente teorica adottata per l'analisi (par. 3). Si passa quindi all'esplicitazione degli obiettivi e delle domande di ricerca (par. 4) e alla descrizione del metodo di ricerca (par. 5), presentando il gruppo di bambine e bambini che hanno partecipato alla sperimentazione, le modalità di documentazione e l'analisi a priori di alcune delle consegne elaborate. In seguito, nel par. 6, si riportano i risultati derivanti dall'analisi dei dati raccolti, con un focus specifico sul percorso di due bambine, per poi concludere con una discussione di tali risultati (par. 7).

1. Lavoro di Tesi di Alessandra Raffi (2025) svolto nell'ambito della Laurea magistrale a ciclo unico in Scienze della formazione primaria, presso il Dipartimento di Civiltà e Forme del Sapere, Università di Pisa. Relatori: Anna Baccaglini-Frank e Pietro Di Martino.

2 Sguardo alla letteratura: il senso del numero, la tecnologia multi-touch e l'app *TouchCounts*

2.1 Il senso del numero

Il presente studio si colloca nel quadro delle ricerche sul senso del numero, una nozione ampiamente riconosciuta come cruciale per lo sviluppo delle competenze aritmetiche precoci e successivamente per l'apprendimento della matematica formale, ma che rimane, al contempo, teoricamente complessa e non univocamente definita. In linea con la letteratura, il senso del numero può essere considerato un *oggetto di confine* (Cobb et al., 2003; Star & Griesemer, 1989), nel senso che si colloca simultaneamente nel dominio del senso comune e in quello, ancora in parte emergente, delle scienze cognitive e dell'educazione matematica. In quanto oggetto di confine, il senso del numero possiede la potenzialità di fungere da veicolo concettuale per la comunicazione e il dialogo tra comunità di ricerca differenti, pur non essendo definito in modo univoco e condiviso.

Coerentemente con questa caratterizzazione, non esiste un'interpretazione monolitica della nozione di senso del numero né tra le comunità delle scienze cognitive e dell'educazione matematica, né all'interno della stessa comunità degli educatori matematici. Tale eterogeneità concettuale è efficacemente sintetizzata da Berch (2005), secondo cui il *number sense* può essere inteso, a seconda delle prospettive, come consapevolezza, intuizione, riconoscimento, conoscenza, abilità, competenza, disposizione, aspettativa, processo, struttura concettuale o linea mentale dei numeri. Nonostante tale eterogeneità concettuale, esiste un consenso trasversale sul fatto che lo sviluppo di senso del numero costituisca una condizione necessaria per l'acquisizione di competenze aritmetiche elementari e per la successiva riuscita in matematica (Griffin et al., 1994; Lyons et al., 2014; Mulligan et al., 2018). Recenti sintesi della letteratura ribadiscono come interventi educativi mirati al potenziamento di senso del numero in età precoce producano benefici duraturi nel tempo (Elia et al., 2023).

Dal punto di vista delle abilità coinvolte, la letteratura in ambito neuroscientifico e psicologico ha individuato un insieme di competenze di base che concorrono allo sviluppo di senso del numero: il *subitizing*, la corrispondenza biunivoca, la stima approssimativa, la gnosia digitale, le abilità di motricità fine e il controllo delle dita, nonché la gestione della cardinalità e dell'ordinalità (Baccaglini-Frank et al., 2020; Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Butterworth, 1999, 2005; Noël, 2005). Tali abilità non si sviluppano in modo isolato, ma interagiscono dinamicamente nel corso dell'esperienza di bambini e bambine con le quantità, i simboli numerici e le pratiche di conteggio. In particolare, evidenze empiriche indicano che la gnosia digitale è significativamente associata alle prestazioni aritmetiche (Noël, 2005); per esempio, Gracia-Bafalluy e Noël (2008) hanno mostrato che un training specificamente orientato alla discriminazione, identificazione e controllo delle dita, indipendentemente dal conteggio verbale, conduce a miglioramenti significativi nelle prestazioni aritmetiche. Tale risultato suggerisce che il potenziamento della gnosia digitale possa sostenere in modo funzionale lo sviluppo delle competenze di calcolo.

Accanto a questa prospettiva "per componenti", contributi provenienti dall'educazione matematica hanno sottolineato l'importanza di considerare il numero naturale come portatore di diversi *sensi*, che emergono in relazione ai contesti d'uso e alle funzioni che il numero assume (Bartolini Bussi, 2008; Sabena et al., 2019). Sabena e colleghi descrivono i seguenti sensi del numero naturale: senso cardinale, ordinale, ricorsivo, di etichetta, di misura e di valore, evidenziando come tali sensi non siano alternativi ma coesistano e si intreccino nella costruzione del concetto di numero. In particolare, il senso ordinale e quello ricorsivo risultano strettamente connessi: l'ordinalità richiama l'idea di successione e di posizione relativa (non soltanto quando si usano gli aggettivi ordinali come "primo", "secondo", "terzo" ecc.), mentre la ricorsività si fonda sulla possibilità di generare l'intera successione dei numeri naturali attraverso l'operazione iterata del "+1", che è alla base sia del conteggio sia della nozione di successivo naturale. Si parlerà di *gestione dell'ordinalità* come una componente complessa di senso del numero che include il senso ricorsivo e che coinvolge diverse abilità, tra cui l'associazione corretta tra simboli numerici e le rispettive parole-numero (a volte chiamate "etichette verbali", come "uno", "sette", "cinque"), la conoscenza della sequenza dei simboli numerici e delle parole-numero, nonché la comprensione delle relazioni tra numeri, in particolare quale numero precede o segue un numero dato (Baccaglini-Frank et al., 2020).

Un ulteriore riferimento teorico rilevante per inquadrare le abilità considerate nel presente studio è rappresentato dai *principi del conteggio* individuati da Gelman e Gallistel (1978), che descrivono le condizioni logiche e concettuali che rendono il conteggio una procedura matematicamente valida. Tali principi (si veda la **Tabella 1**) non devono essere intesi come prerequisiti innati e pienamente disponibili sin dall'inizio, ma come regolarità concettuali che si costruiscono progressivamente attraverso l'esperienza con le pratiche di conteggio e con situazioni numeriche significative. In particolare, se il principio di cardinalità è tradizionalmente associato alla comprensione del numero come misura della numerosità di un insieme, il principio dell'ordine stabile e la possibilità di iterare la sequenza delle parole-numero risultano strettamente connessi alla gestione dell'ordinalità e al senso ricorsivo del numero naturale. Infatti, la consapevolezza che le etichette numeriche si susseguano secondo un ordine invariabile e che ciascun numero possa essere generato come successivo del precedente costituisce una base concettuale essenziale per interpretare il numero come elemento di una successione strutturata, e non soltanto come etichetta finale (per esempio "cinque") di una conta. Per questa ragione, nel presente studio i principi del conteggio non vengono considerati esclusivamente come indicatori della gestione della cardinalità, ma come componenti trasversali di senso del numero, che contribuiscono in modo significativo anche allo sviluppo dell'ordinalità e della ricorsività, soprattutto quando sono mobilitati in contesti che rendono visibile e significativa l'iterazione delle azioni di conteggio.

Se da un lato la letteratura riconosce la pluralità dei sensi del numero e il loro ruolo nella costruzione di una comprensione ricca e flessibile del numero naturale, dall'altro le pratiche educative e molti studi empirici continuano a privilegiare la gestione della cardinalità, spesso riducendo il lavoro sul numero a compiti di conteggio e associazione numero-quantità (Coles & Sinclair, 2018; Sabena et al., 2019). Solo più recentemente alcune ricerche hanno mostrato che la gestione dell'ordinalità (e il senso ricorsivo, inteso come conoscenza della sequenza di simboli dei numeri naturali consecutivi) rappresenta un predittore significativo del successo matematico, talvolta più forte della sola gestione della cardinalità (Lyons & Beilock, 2013), suggerendo la necessità di anticipare e rafforzare attività che promuovano la conoscenza della sequenza numerica, dei rapporti di precedente e successivo e delle relazioni tra numeri.

Nonostante ciò, rimane ancora poco esplorato il modo in cui le esperienze educative – e in particolare quelle mediate da artefatti digitali – possano sostenere in modo intenzionale e sistematico lo sviluppo del senso ordinale e ricorsivo, oltre che di quello cardinale (Baccaglini-Frank et al., 2020). In particolare, la letteratura segnala una carenza di studi che analizzino come ambienti digitali progettati ad hoc possano favorire la costruzione del numero come successione ordinata e come struttura ricorsiva, piuttosto che come mera etichetta di una quantità. È in questo spazio ancora parzialmente inesplorato che si colloca il presente contributo.

2.2 Tecnologia multi-touch e sviluppo di senso del numero

L'ipotesi alla base del presente studio è che la tecnologia multi-touch possa costituire un contesto particolarmente favorevole per sostenere lo sviluppo di senso del numero, grazie alla possibilità di integrare in modo naturale azione corporea, rappresentazioni numeriche e feedback immediato. Tale ipotesi trova un solido fondamento nei risultati delle neuroscienze cognitive, che hanno messo in evidenza un legame stretto tra l'uso delle dita e la rappresentazione dei numeri. Secondo Butterworth (1999), infatti, «senza la capacità di collegare rappresentazioni numeriche alle rappresentazioni neurali delle dita e delle mani nelle loro posizioni normali, i numeri stessi non avranno mai una rappresentazione normale nel cervello» (Butterworth, 1999, pp. 249–250).

Alcune abilità alla base dello sviluppo del significato di numero naturale, come la gnosia digitale, l'abilità motoria fine, il *subitizing* e l'utilizzo delle dita per creare numeri, possono essere efficacemente potenziate proprio grazie ad alcune caratteristiche della tecnologia multi-touch, in presenza di consegne adeguate (Baccaglini-Frank, 2013). Inoltre, tablet come gli iPad consentono interazioni individuali e collaborative a piccoli gruppi di due o tre allievi, cosa che i computer non sono in grado di offrire. Infine, le loro dimensioni ridotte (circa 12 × 19 cm e 600 g di peso) rendono questi dispositivi facilmente maneggiabili anche dai bambini e dalle bambine. Le applicazioni multi-touch, come *Touch-Counts* (TC), che sarà introdotto nel **par. 2.2.1**, con consegne adeguate, possono sfruttare in modo specifico queste potenzialità, consentendo interazioni di vario tipo. Infatti, la possibilità di riconoscere tocchi multipli simultanei, di associare gesti specifici alla generazione di numeri e di ricevere feedback immediati apre a forme di interazione che possono sostenere diverse componenti di senso del numero (Baccaglini-Frank, 2013; Baccaglini-Frank, 2026; Baccaglini-Frank et al., 2020, 2025; Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Ferrara & Savioli, 2018; Ng & Yeung, 2025; Rodney, 2019; Sinclair & Baccaglini-Frank, 2015).
Gran parte degli studi esistenti sull'uso di app educative per la prima infanzia si è però concentrata prevalentemente sul potenziamento della gestione della cardinalità (Coles & Sinclair, 2018; Elia et al., 2023). Meno attenzione è stata dedicata all'analisi di come tali ambienti possano promuovere il senso ricorsivo e la gestione dell'ordinalità. In particolare, si vedrà come ambienti multi-touch aperti come TC permettono di progettare consegne in cui chi apprende è messo o messa nelle condizioni di anticipare il numero successivo, di esplorare la relazione tra numeri consecutivi e di sperimentare il "venire dopo" come risultato di un'azione iterabile.

Nella **Tabella 1** si elencano e descrivono, coerentemente con la letteratura attuale, le principali abilità di senso del numero che saranno indagate nel contesto di consegne in TC.

ID	ASPETTI DI SENSO DEL NUMERO	DESCRIZIONE
A1	*SUBITIZING*	Rapida e accurata valutazione a colpo d'occhio del numero di elementi presenti all'interno di piccole collezioni (come •••), senza bisogno di ricorrere al conteggio. (Baccaglini-Frank, 2013; Butterworth, 1999)
A2	MOTRICITÀ FINE	Capacità di eseguire movimenti precisi e coordinati che interessano piccoli muscoli, in particolare quelli delle mani e delle dita, come ad esempio, la capacità di appoggiare in modo preciso e corretto le dita sullo schermo. (Baccaglini-Frank et al., 2020)
A3	GNOSIA DIGITALE	Abilità di rappresentare mentalmente le dita delle proprie mani. Richiede la conoscenza della posizione delle dita nel proprio corpo e il controllo della precisione del gesto. (Baccaglini-Frank et al., 2020)
A4	Gestione del *PART-WHOLE CONCEPT*	Saper riconoscere la complementarità di due numeri rispetto ad uno dato. Consente di scomporre e comporre additivamente. (Resnick et al., 1991)
A5	Gestione della CORRISPONDENZA BIUNIVOCA	Consiste nello stabilire una corrispondenza uno-a-uno tra insiemi di elementi (uno dei quali può essere un insieme di dita) o tra un insieme di elementi e un insieme di etichette verbali. (Bartolini Bussi, 2008; Brissiaud, 1992; Sabena et al., 2019)
A6	*COUNTING-ON*	Proseguire il conteggio partendo da un numero dato. (Gelman & Gallistel, 1978)

<table>
<tr><td>A7</td><td>Gestione della ORDINALITÀ e senso ricorsivo</td><td colspan="2">– Conoscere la sequenza dei simboli numerici;
– conoscere la sequenza delle parole-numero;
– conoscere precedente e successivo di un numero dato;
– comprendere che ogni numero può essere ottenuto aggiungendo un'unità al precedente (+1).
(Baccaglini-Frank et al., 2020; Sabena et al., 2019)</td></tr>
<tr><td>A8</td><td>Gestione della CARDINALITÀ</td><td colspan="2">– Stabilire una corrispondenza biunivoca tra elementi di due insiemi;
– comprendere che l'ultimo numero pronunciato durante il conteggio individua la numerosità dell'insieme;
– assegnare il corretto simbolo numerico o parola-numero alla numerosità di un insieme.
(Bartolini Bussi, 2008; Gelman & Gallistel, 1978; Sabena et al., 2019)</td></tr>
<tr><td>A9</td><td rowspan="5">Gestione dei PRINCIPI di CONTEGGIO</td><td>Principio di iniettività</td><td>Stabilire una corrispondenza biunivoca tra elementi contati ed etichette verbali, in modo che per ogni oggetto sia usato un solo numerale.
(Gelman & Gallistel, 1978)</td></tr>
<tr><td>A10</td><td>Principio dell'ordine stabile</td><td>Le etichette verbali usate durante la conta si succedono secondo un ordine invariabile e quindi ripetibile.
(Gelman & Gallistel, 1978)</td></tr>
<tr><td>A11</td><td>Principio di cardinalità</td><td>L'etichetta associata all'ultimo oggetto contato rappresenta anche la numerosità dell'insieme.
(Gelman & Gallistel, 1978)</td></tr>
<tr><td>A12</td><td>Principio di astrazione</td><td>I precedenti principi possono essere applicati a qualsiasi insieme di elementi, senza distinzione tra entità fisiche e non.
(Gelman & Gallistel, 1978)</td></tr>
<tr><td>A13</td><td>Principio di irrilevanza dell'ordine</td><td>L'ordine in cui gli oggetti vengono contati è irrilevante per l'esito del conteggio, quindi non ha importanza quale etichetta viene associata a ciascun oggetto.
(Gelman & Gallistel, 1978)</td></tr>
</table>

Tabella 1. Aspetti di senso del numero che possono essere sviluppati tramite app multi-touch come *TouchCounts*.

Alla luce di queste considerazioni, il presente studio si propone di contribuire a colmare un gap ancora presente nella letteratura, analizzando come un'app multi-touch come TC possa sostenere lo sviluppo degli aspetti di senso del numero considerati, e in particolare la gnosia digitale e la gestione dell'ordinalità (incluso il senso ricorsivo) del numero naturale, che in bambini e bambine in età prescolare correlano con le prestazioni aritmetiche nei primi anni di scuola primaria.

2.2.1 TouchCounts *(TC)*

L'applicazione per iPad TC è stata sviluppata nell'ambito di un progetto di ricerca canadese di cui è responsabile scientifica la ricercatrice in didattica della matematica Nathalie Sinclair. L'applicazione sfrutta appieno le potenzialità della tecnologia multi-touch, promuovendo l'utilizzo delle dita per creare e manipolare grandezze numeriche (Jackiw & Sinclair, 2014, 2017). L'app offre ambienti di interazione aperti in cui i bambini e le bambine possono sviluppare diverse strategie per risolvere la stessa consegna (ad esempio, far contare la voce nell'app) o inventare nuove sfide da affrontare. Presenta due sotto-ambienti di lavoro: il "Mondo dei Numeri", dedicato principalmente all'ordinalità, e il "Mondo delle Operazioni", incentrato sulla cardinalità. Nel Mondo dei Numeri ogni volta che si tocca lo schermo con un dito viene creato un numero in sequenza, rappresentato visivamente da un disco con il numero scritto al centro (Figura 1).

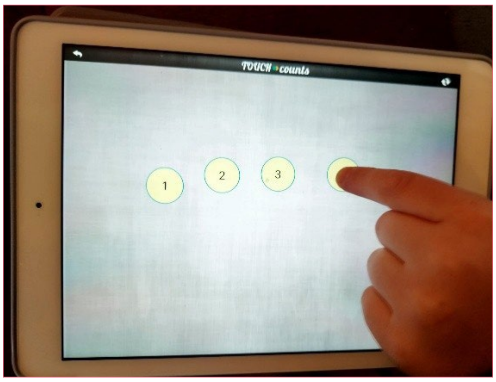


Figura 1. Creazione di una sequenza di dischi numerati, nel Mondo dei Numeri.

Nel Mondo delle Operazioni, invece, è possibile creare numeri interi arbitrari ed esplorare le operazioni matematiche, unendo i numeri per formarne di più grandi o scomponendoli in quantità più piccole. In questo ambiente i bambini e le bambine sono incoraggiati a utilizzare dita, occhi e orecchie per imparare a contare, sommare e sottrarre e, grazie a semplici gesti, possono sviluppare il senso del numero (Sinclair & Jackiw, 2011; Sinclair & SedaghatJou, 2013).
Nella schermata iniziale (**Figura 2**) è possibile impostare la lingua in cui vengono pronunciati i numeri (tra le scelte possibili c'è l'italiano) e selezionare, per il Mondo dei Numeri, la presenza o meno della "gravità" e della "mensola" durante l'interazione. La modalità di default prevede la presenza di entrambe le opzioni.

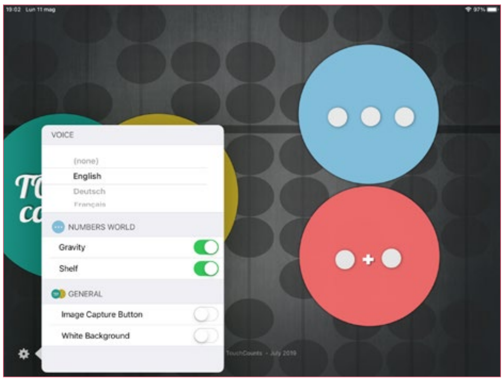


Figura 2. Schermata iniziale con impostazione lingua e gravità.

Nel Mondo dei Numeri ogni tocco del dito sullo schermo crea un piccolo disco numerato e una voce lo pronuncia nella lingua impostata, sottolineando la corrispondenza uno-a-uno dita-numeri tipica del conteggio. Nella modalità predefinita la presenza della gravità fa in modo che i dischi realizzati sotto la mensola cadano fuori dallo schermo, mentre per restare visibili devono essere creati nella parte superiore dello schermo oppure essere trascinati sulla mensola facendo scorrere il dito senza sollevarlo. Una volta sollevato il dito, infatti, non è più possibile spostare i dischi, ma toccandoli, se ne generano di nuovi proseguendo nel conteggio.

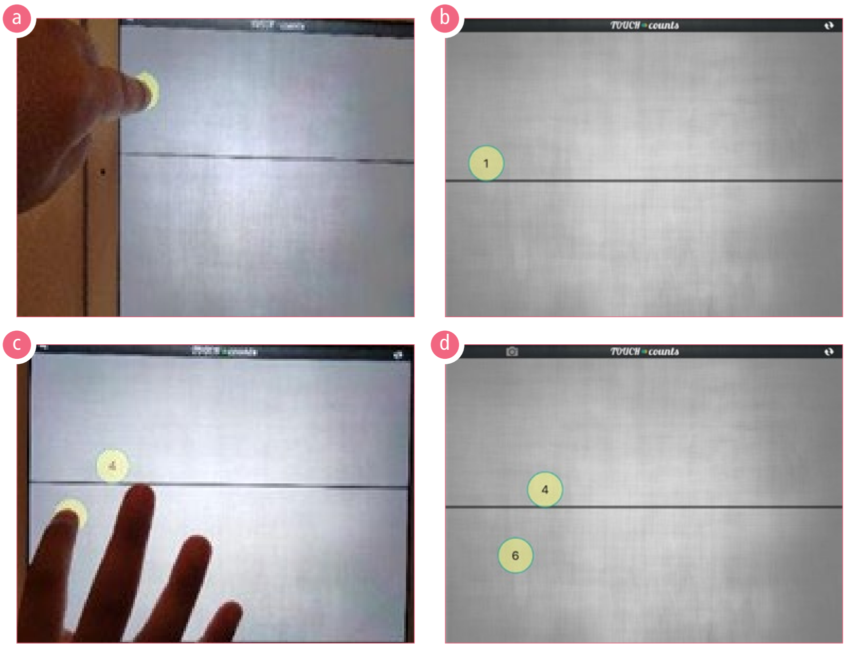


Figura 3. Effetto di tocchi sopra la mensola (**a, b**) e sotto la mensola (**c, d**) nel Mondo dei Numeri, nella modalità con gravità.

L'app è in grado di riconoscere gesti multi-touch: toccando lo schermo con più dita contemporaneamente vengono creati tanti dischi quante sono le dita utilizzate e viene pronunciato il numero maggiore. Se, ad esempio, viene iniziata la sessione appoggiando tutte le dita di una mano, compaiono cinque dischi, numerati da uno a cinque, e la voce pronuncerà "cinque" (**Figura 4a, b**). Per ciascuna sessione, conteggio e numerazione partono da uno e proseguono man mano che vengono creati nuovi dischi: ulteriori tocchi generano nuovi dischi etichettati con numeri successivi. La funzione *reset* fa ripartire il conteggio da uno.
Nella modalità senza gravità non compare la mensola e i dischi rimangono sempre visibili sullo schermo. Anche in questo caso, una volta sollevato il dito, i dischi non possono più essere spostati.

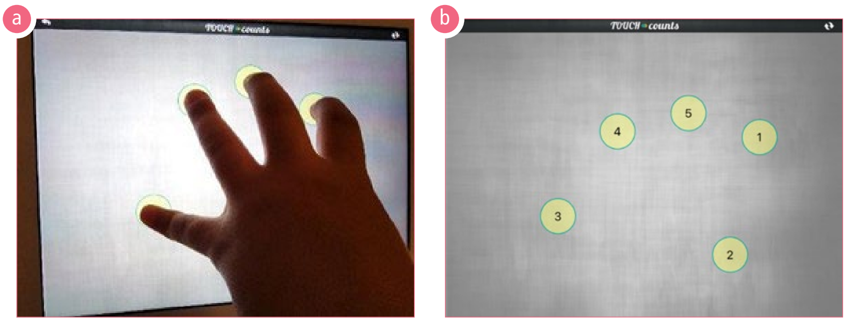


Figura 4a, b. Effetto di un gesto nel Mondo dei Numeri, nella modalità senza gravità.

Questo ambiente consente di lavorare su alcuni aspetti alla base del conteggio, in particolare favorisce lo sviluppo della corrispondenza uno-a-uno numeri-dita (principio di iniettività), la memorizzazione della corretta sequenza numerica (principio dell'ordine stabile) e, nella modalità senza gravità, la comprensione che l'ultima parola pronunciata corrisponde alla quantità di dischi presenti (principio di cardinalità). Con l'opzione gravità attiva è possibile isolare alcuni numeri, posizionandoli sulla mensola.

Nel Mondo delle Operazioni, appoggiando più dita sullo schermo (**Figura 5a, c**) viene creato un disco che contiene al suo interno, lungo la circonferenza, una serie di dischetti colorati, il cui numero corrisponde alle dita utilizzate, e al centro il numero scritto in cifre a indicare la cardinalità del gruppo. Ad esempio, toccando lo schermo con cinque dita (**Figura 5a**), si ottiene un disco contenente cinque dischetti dello stesso colore e al centro il numero cinque scritto in cifre (**Figura 5b**), accompagnato da un feedback sonoro. Se, prima di staccare le dita che stanno generando un disco, si tocca ancora lo schermo ripetutamente all'interno del disco in creazione (**Figura 5d**), questo si amplia fino a contenere il numero di dischetti corrispondenti al numero complessivo di tocchi effettuati.

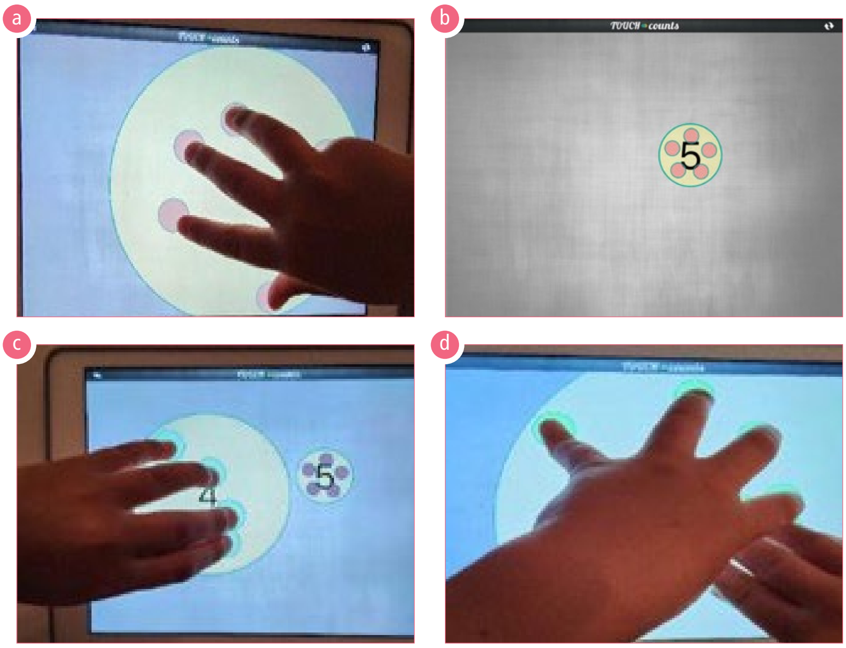


Figura 5a, b, c, d. Diversi gesti per generare numeri nel Mondo delle Operazioni.

È possibile agire sui dischi numerati attraverso i seguenti gesti:

– Possono essere spostati trascinandoli col dito (**Figura 6**).

Figura 6. Azione di trascinamento nel Mondo delle Operazioni.

– Possono essere uniti col gesto di pizzicatura appoggiando contemporaneamente le dita su due dischi e avvicinandoli (**Figura 7a, b, c**). In questo modo si ottiene il disco unione che mantiene inalterato il colore dei dischetti interni di origine, in modo da tenere traccia della sua formazione, e mostra al centro il numero corrispondente alla somma dei numeri pizzicati scritto in cifre, di cui viene fornito anche un feedback sonoro. Il gesto di pizzicatura rappresenta una sorta di metafora dell'addizione, nel senso di raccogliere insieme, e la simmetria di questo gesto è rappresentativa della proprietà commutativa.

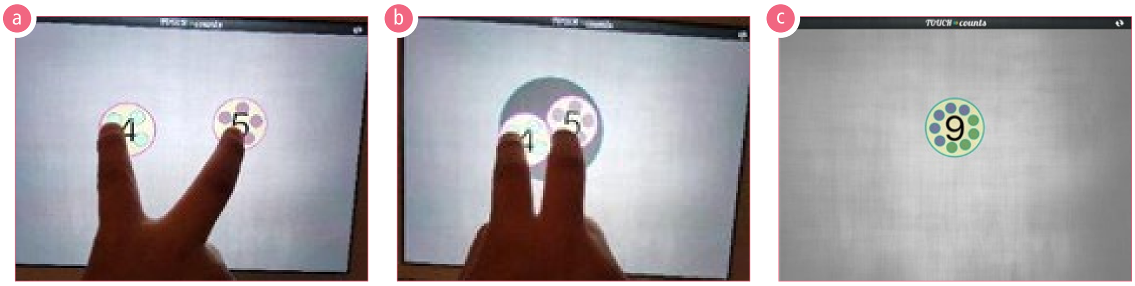


Figura 7. Gesto di pizzicatura (**a**, **b**) e suo effetto (**c**) nel Mondo delle Operazioni.

– È possibile suddividere un disco numerato in sottogruppi tenendolo fermo con un dito (Figura 8a) e selezionando con un altro dito la parte da separare. Questo gesto è rappresentativo dell'operazione di partizione/sottrazione e permette di sperimentare la complementarità tra addizione e sottrazione: il disco originario può essere scomposto in sottogruppi (Figura 8b), dalla cui pizzicatura poi si ottiene nuovamente il disco di origine.

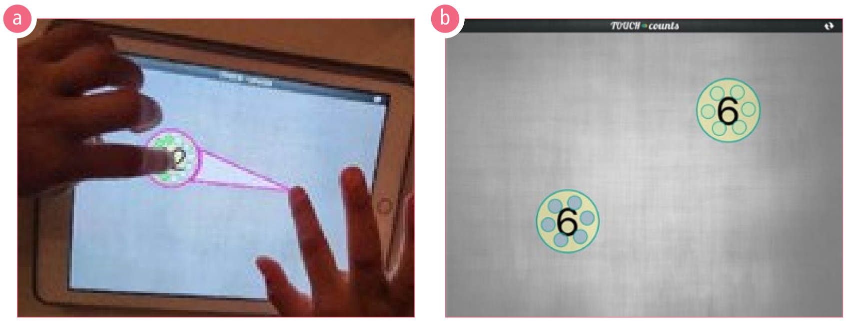


Figura 8. Gesto di partizione (**a**) e suo effetto (**b**) nel Mondo delle Operazioni.

TC quindi, si configura non come un semplice gioco (non ci sono consegne o richieste preimpostate per l'utente quando l'app viene aperta), bensì come un ambiente di esplorazione libera in cui vengono generati feedback nella forma visiva (i numeri scritti all'interno dei dischi e le palline) e vocale (la voce che pronuncia i numeri creati). L'applicazione è progettata per favorire lo sviluppo di senso del numero attraverso interazioni che coinvolgono dita, mani e gesti. Un'attenta progettazione delle attività e la partecipazione di un adulto esperto possono favorire lo sviluppo di abilità numeriche in tempi relativamente brevi (Baccaglini-Frank, 2013; Baccaglini-Frank et al., 2020; Sinclair & Baccaglini-Frank, 2015). Si presenta ora l'impostazione teorica che verrà utilizzata per esplorare le potenzialità di TC attraverso uno studio empirico.

3 Dalla nozione di "schema" al senso del numero mobilitato

Un problema ricorrente nelle ricerche educative che coinvolgono bambini e bambine molto piccoli riguarda le difficoltà nel ricostruire cosa e come apprendano quando sono visibili al ricercatore solo poche parole e gesti su cui basare le inferenze (Baccaglini-Frank et al., 2025). A tal fine in questo studio si fa riferimento alla nozione di *schema* di Vergnaud, e alla sua applicazione nell'*approccio strumentale*

(Artigue, 2002; Béguin & Rabardel, 2020). È possibile usare questo approccio teorico, perché si vuole studiare l'apprendimento (legato al senso del numero) di bambine e bambini che risolvono consegne (*task*) con le proprie mani nel contesto di un ambiente digitale (le dita e tale ambiente possono essere considerati l'artefatto). Secondo l'*approccio strumentale*, infatti, un soggetto impegnato in un'attività finalizzata al raggiungimento di un obiettivo usando un determinato artefatto può sviluppare degli *schemi di azione strumentata* per tale artefatto, che diventa così uno strumento. In sintesi, uno schema di azione strumentata descrive l'organizzazione dell'attività con lo strumento (in questo caso, dita in TC) per eseguire una determinata consegna (Baccaglini-Frank et al., 2020). Il costrutto di schema in questo approccio teorico si rifà alla nozione elaborata da Vergnaud (2009):

> «La funzione degli schemi, nella teoria attuale, è sia quella di descrivere modi ordinari di agire, per situazioni già padroneggiate, sia quella di fornire suggerimenti su come affrontare nuove situazioni. Gli schemi sono risorse adattabili: assimilano nuove situazioni adattandosi ad esse. Pertanto, la definizione degli schemi deve contenere regole, trucchi e procedure già pronti, modellati da situazioni già padroneggiate; ma queste componenti dovrebbero anche offrire la possibilità di adattarsi a nuove situazioni. Da un lato, uno schema è l'organizzazione invariante dell'attività per una certa classe di situazioni; dall'altro, la sua definizione analitica deve contenere concetti aperti e possibilità di inferenza».
>
> (Vergnaud, 2009, p. 88, traduzione delle autrici)

Secondo Vergnaud gli schemi comprendono diversi aspetti fondamentali:

– *Obiettivi e anticipazioni* degli effetti che si potranno ottenere attraverso azioni in determinate situazioni (potenzialmente visibili attraverso parole o gesti del bambino o della bambina).
– *Regole di azione* per generare sequenze di azioni e raggiungere gli obiettivi in determinate situazioni (visibili nella forma di sequenze di azioni svolte per risolvere una consegna).
– *Invarianti operazionali*, la cui «funzione principale è quella di raccogliere e selezionare le informazioni rilevanti e dedurne obiettivi e regole» (Vergnaud, 2009, p. 88, traduzione delle autrici).

Sebbene tutte le componenti di uno schema siano importanti, gli invarianti operazionali rivestono un ruolo centrale. Essi costituiscono la conoscenza implicita che organizza l'intero schema: guidano l'identificazione della situazione e dei suoi aspetti rilevanti, orientano la selezione di obiettivi adeguati e sostengono l'elaborazione di regole d'azione funzionali al loro raggiungimento. Gli invarianti operazionali non sono direttamente osservabili, ma vengono inferiti a partire dalla parte visibile dell'attività del bambino o della bambina, cioè dalle azioni compiute, dagli obiettivi e dalle anticipazioni che emergono nel corso dell'interazione con TC. In altri termini, si osserva come il soggetto agisce, quali effetti sembra attendersi, come interpreta il feedback dell'app e come modifica la propria azione. Da questi elementi si ricostruisce quali relazioni stia trattando come pertinenti nella situazione. Sono tali relazioni ricostruite che vengono interpretate come invarianti operazionali.
Operativamente, nelle analisi si descriveranno questi invarianti in termini di aspetti di senso del numero mobilitati, facendo riferimento alla Tabella 1. Con l'aggettivo *mobilitati* si intendono non soltanto aspetti potenzialmente sollecitati dalla consegna, ma aspetti che, sulla base delle azioni osservate e della ricostruzione dello schema, risultano effettivamente messi in gioco nell'attività del bambino o della bambina e, proprio per questo, suscettibili di essere rafforzati. In questo senso, non si passa direttamente dall'azione osservata a un presunto "apprendimento", ma dall'azione osservata alla ricostruzione di uno schema e dei suoi invarianti operazionali, che consentono di interpretare quali aspetti di senso del numero risultino mobilitati. Se si paragona lo schema a un iceberg, regole di azione, obiettivi e anticipazioni ne costituiscono la "punta visibile" (Baccaglini-Frank et al., 2020): è a partire da essa che si possono inferire gli invarianti operazionali e, attraverso questi, gli aspetti di senso del numero mobilitati.

4 Obiettivi e domande di ricerca

L'ipotesi alla base di questo studio è che si possano progettare consegne per TC ad alto potenziale rispetto alla possibilità di mobilitare gli aspetti introdotti di senso del numero – e in particolare alcuni relativi a ordinalità e senso ricorsivo, oltre che sviluppare la consapevolezza delle mani e delle dita – in bambine e bambini in età prescolare. Un primo obiettivo è, quindi, adattare consegne presenti in letteratura, ed eventualmente progettarne di nuove, per bambine e bambini in età prescolare, in modo che risultino ad alto potenziale rispetto all'emergere di schemi che mobilitino gli aspetti di senso del numero discussi.
Progettate tali consegne, le si analizza a priori per anticiparne il potenziale rispetto agli aspetti di senso del numero che potrebbero essere mobilitati attraverso particolari schemi di azione strumentata. Nell'analisi a posteriori, gli aspetti di senso del numero mobilitati verranno inferiti a partire dagli invarianti operazionali ricostruiti sulla base delle azioni osservate, degli obiettivi e delle anticipazioni manifestate dai bambini e dalle bambine, e delle regole d'azione messe in atto. In questo contributo, pertanto, il confronto pre- e post- sarà formulato in termini di coerenza tra gli aspetti di senso del numero anticipati nell'analisi a priori e quelli mobilitati nelle interazioni osservate.
A tal fine, le domande di ricerca che orientano lo studio sono le seguenti:

- **DR1**: Quali schemi di azione strumentata emergono nello svolgimento delle consegne progettate con *TouchCounts* e quali aspetti di senso del numero risultano mobilitati, inferendoli dai relativi invarianti operazionali?
- **DR2**: In che modo la consapevolezza delle mani e delle dita, inferibile dai disegni delle bambine e dei bambini, sembra modificarsi nel corso dell'intervento?

5 Metodo

5.1 Presentazione del gruppo sperimentale e della struttura del percorso didattico

Questo studio presenta una parte dei dati raccolti nell'ambito del progetto di tesi della prima autrice (Raffi, 2025). Il percorso si è svolto dal 9 aprile al 27 maggio 2024 coinvolgendo 17 bambini e bambine di quattro anni appartenenti alle quattro sezioni di un plesso scolastico del Centro Italia.[2]
Prima dello svolgimento delle attività con TC, al gruppo di bambine e bambini partecipanti è stata proposta una prova in ingresso composta dal proprio autoritratto, dal disegno libero della mano non dominante e da un'intervista di valutazione delle conoscenze numeriche con domande inerenti la conoscenza della corretta sequenza numerica, la rappresentazione dei numeri con le dita e in cifre, il loro riconoscimento in cifre e in formato analogico, l'ordinamento dei numeri in cifre, l'individuazione di precedente e successivo di numeri entro il 10 e l'attività di conteggio. La richiesta di disegnare la mano è stata inclusa perché la letteratura evidenzia un legame tra gnosia digitale – intesa come capacità di rappresentare, riconoscere e differenziare mentalmente le proprie dita – e sviluppo delle abilità numeriche: in particolare, Noël (2005) mostra che tale competenza predice le successive prestazioni numeriche, mentre Gracia-Bafalluy e Noël (2008) evidenziano che un training centrato sulla differenziazione delle dita può migliorare la gnosia digitale e sostenere le prestazioni numeriche. Nel presente studio, emulando lo studio di Giacopini (2014), il disegno della mano non viene quindi assunto come misura standardizzata di gnosia digitale, ma come

2. Il progetto è stato avviato dopo aver ottenuto l'approvazione della Dirigente Scolastica e il consenso informato dei genitori o tutori legali dei bambini e delle bambine coinvolti, mediante la sottoscrizione di apposite liberatorie (protocollo n. 007452/2023 del 30/05/2023 approvato dal Comitato Bioetico dell'Università di Pisa).

indicatore qualitativo della consapevolezza della struttura della propria mano e delle proprie dita, considerato in modo prudente e in relazione agli altri dati raccolti durante l'intervento. Nel presente contributo non si analizzeranno i risultati dell'intervista iniziale, ma soltanto i disegni della mano non dominante.

La fase di potenziamento ha previsto dieci incontri complessivi, quattro di gruppo da svolgere con artefatti fisici (di cui non si parlerà in questo articolo) e sei dedicati all'interazione individuale con l'app TC. Di questi ultimi, tre incontri si sono svolti nel Mondo dei Numeri, e altrettanti nel Mondo delle Operazioni (si veda il blocco centrale del diagramma nella **Figura 9**). Il rapporto uno-a-uno durante il lavoro con la app si è rivelato particolarmente efficace poiché ha consentito a ciascun bambino e bambina di interagire secondo i propri tempi e di ricevere un supporto adeguato. Ogni sessione ha avuto una durata variabile tra i 10 e i 20 minuti, in funzione del tipo di consegne e delle esigenze del bambino o della bambina, in modo da garantire tempi distesi e il rispetto delle capacità di attenzione del singolo. L'attività, infatti, veniva interrotta anticipatamente nel momento in cui il bambino o la bambina manifestava stanchezza o disinteresse, mentre veniva prolungata con domande di approfondimento qualora manifestasse particolare interesse. La ricercatrice non si è limitata a porre quesiti, ma ha assunto un ruolo attivo guidando il bambino nella costruzione del sapere. Infine, dopo l'ultimo incontro, è stata somministrata individualmente la stessa intervista iniziale insieme alla richiesta di disegnare la propria mano (senza ricalcare quella che non stava scrivendo).

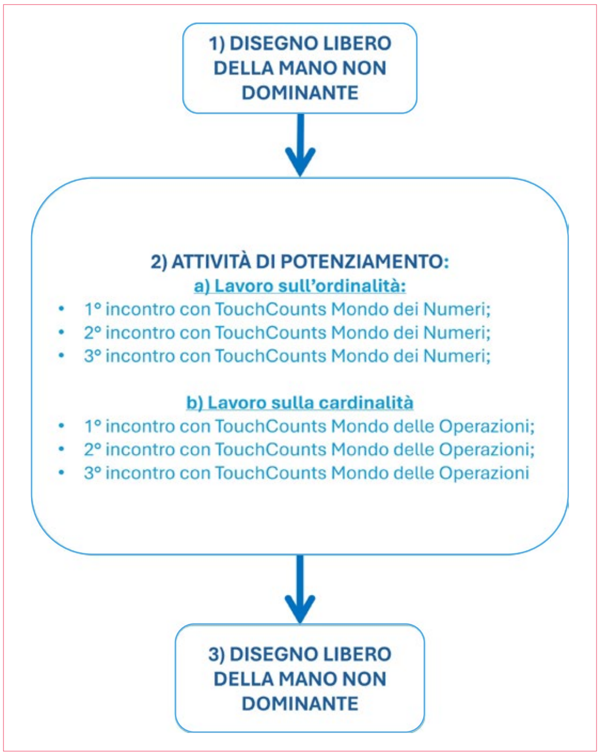


Figura 9. Diagramma che descrive le fasi dello studio oggetto di questo articolo.

Di seguito (**Tabella 2**) si riportano le consegne proposte durante il lavoro con TC in ordine cronologico, suddivise nei diversi incontri. Ai fini di una corretta lettura si precisa che le consegne sono contraddistinte dalla sigla CD (che sta per "Compiti svolti con artefatti Digitali") e da un numero progressivo. Inoltre, con i bambini e le bambine la voce dell'app TC è stata chiamata "Nadia".

Primo incontro Mondo dei Numeri	CD1	«Puoi far contare Nadia fino a 5?»
	CD2	«Puoi fare il numero 2?»
	CD3	Dopo aver ripulito lo schermo la ricercatrice chiede: «Puoi fare il numero 3?»
	CD4	«Riusciresti a farlo con una sola mossa?»
	CD5	Senza ripulire lo schermo la ricercatrice chiede: «Puoi fare il numero 5?»
	CD6	La ricercatrice gira il tablet verso di sé, fa contare Nadia da 1 a 5 e domanda: «Quanti dischi ci sono?»
	CD7	La ricercatrice gira nuovamente il tablet, aggiunge un tocco chiede: «Quanti dischi ci saranno?»
	CD8	«Puoi contare fino a 5 e mettere solo il 4 sulla mensola?»
	CD9	«Puoi mettere solo il 5 sulla mensola?»
	CD10	La ricercatrice mette il 2 sulla mensola e chiede: «Puoi metterci anche il 5?»
Secondo incontro Mondo dei Numeri	CD1	«Puoi far contare Nadia fino a 5?»
	CD11	«Puoi continuare a contare fino a 10? E fino a 20?»
	CD12	«Puoi contare fino a 5? Quanti dischi ci sono sullo schermo?»
	CD13	«Riesci a fare il numero 5 con una mossa?»
	CD14	«Partiamo con il 5 sullo schermo. Puoi fare il 6?»
	CD15	«Partiamo con il 5 sullo schermo. Puoi fare il 7?»
	CD16	«Partiamo con il 5 sullo schermo. Puoi fare il 10?»
	CD9	«Potresti contare fino a 5 e isolare il 5 sulla mensola?»
	CD17	«Puoi continuare a contare isolando anche il 10 sulla mensola?»
	CD18	«Puoi isolare il 5 sulla mensola con due mosse?»
	CD19	«Puoi continuare e fare la stessa cosa col 10?»
	CD20	La ricercatrice posiziona sulla mensola i numeri 2 e 4 e chiede: «Quali numeri sono caduti?»
	CD21	La ricercatrice aggiunge sulla mensola l'8 e chiede: «Quali numeri sono caduti?»
Terzo incontro Mondo dei Numeri	CD11	«Puoi contare fino a 10? E fino a 20?»
	CD22	La ricercatrice realizza il 2 e chiede: «Che numero ho fatto? Quanti dischi ci sono sullo schermo? Puoi arrivare fino a 5? Quanti dischi hai dovuto fare? Lo puoi fare con una mossa?»
	CD23	La ricercatrice realizza l'1 e chiede: «Che numero ho fatto? Quanti dischi ci sono? Puoi arrivare fino a 5? Quanti dischi hai dovuto fare? Lo puoi fare con una mossa?»
	CD24	La ricercatrice realizza il 3 e chiede: «Che numero ho fatto? Quanti dischi ci sono? Puoi arrivare fino a 5? Quanti dischi hai dovuto fare? Lo puoi fare con una mossa?»
	CD25	La ricercatrice realizza il 4 e chiede: «Che numero ho fatto? Quanti dischi ci sono? Puoi arrivare fino a 5? Quanti dischi hai dovuto fare? Lo puoi fare con una mossa?»

	CD26	«Puoi isolare 5 e 10 sulla mensola?»
	CD27	La ricercatrice mette il 2 sulla mensola e chiede: «Puoi continuare a contare e metterci anche il 5?»
	CD28	La ricercatrice mette il 3 sulla mensola e chiede: «Puoi continuare a contare e metterci anche il 5?»
	CD29	La ricercatrice mette il 4 sulla mensola e chiede: «Puoi continuare a contare e metterci anche il 5?»
	CD30	La ricercatrice mette l'1 sulla mensola e chiede: «Puoi continuare a contare e metterci anche il 5?»
	CD31	La ricercatrice mette il 5 sulla mensola e chiede: «Puoi continuare a contare e metterci anche il 10?»
	CD32	«Puoi isolare sulla mensola il numero corrispondente alle dita di una mano?»
	CD33	«Puoi isolare sulla mensola il numero corrispondente alle dita di due mani?»
Quarto incontro Mondo delle Operazioni	CD34	«Puoi far contare Nadia fino a 5?»
	CD35	«Puoi fare il numero 3?»
	CD36	«Puoi fare il numero 1?»
	CD37	«Puoi fare il numero 4?»
	CD38	«Puoi fare il numero 2?»
	CD39	«Puoi fare il numero 5?»
	CD40	La ricercatrice crea in ordine sparso i numeri da 1 a 5 e chiede di metterli in ordine crescente.
	CD41	La ricercatrice crea 1, 3 e 5, chiede al bambino o alla bambina di metterli in ordine crescente ed eventualmente realizzare i numeri mancanti mettendoli al posto giusto.
Quinto incontro Mondo delle Operazioni	CD42	«Puoi far contare Nadia fino a 5? Sapresti continuare fino a 10?»
	CD43	«Sai realizzare un numero grandissimo?»
	CD44	La ricercatrice crea numeri da 1 a 10 in ordine sparso e chiede al bambino o alla bambina di sistemarli in ordine crescente.
	CD45	La ricercatrice crea i numeri 2, 4, 6, 8 e chiede al bambino o alla bambina di metterli in ordine crescente.
	CD46	La ricercatrice crea i numeri 3, 5, 10 e chiede al bambino o alla bambina di individuare il più grande e il più piccolo.
	CD47	«Puoi creare un numero più grande di 3? Di 10? E uno più piccolo di 3? Di 10?»
Sesto incontro Mondo delle Operazioni	CD48	«Puoi far contare Nadia fino a 10?»
	CD49	«Cosa succede se unisco 1 e 2? Prova a verificare».
	CD50	«Cosa succede se unisco 1 e 4? Prova a verificare».
	CD51	La ricercatrice prepara diverse copie di numeri compresi tra 1 e 4 e chiede al bambino o alla bambina di unirli in modo da ottenere tanti 5.
	CD52	«Che numero ottengo unendo due 5? Verifichiamo l'ipotesi».

Tabella 2. Elenco delle consegne progettate per le attività di potenziamento svolte con TC.

5.2 Modalità di documentazione

Il lavoro è stato accuratamente documentato al fine di consentire un'analisi precisa e approfondita dei dati raccolti. Le interazioni con l'applicazione sono state documentate attraverso la registrazione

dell'audio e della schermata del software utilizzando la funzione "cattura schermo". Per migliorare la qualità e l'efficacia della documentazione, è stata aggiunta la registrazione tramite altro dispositivo esterno di schermo e mani dei bambini e delle bambine durante l'interazione, in modo da facilitare la ricostruzione delle sessioni durante la successiva fase di analisi. Nel rispetto delle normative sulla privacy, le riprese hanno interessato esclusivamente le risposte dei bambini e delle bambine alle consegne proposte, senza inquadrare i loro volti. In questo modo è stata assicurata una documentazione efficace, completa e sempre disponibile delle attività svolte, utile sia nell'immediato per ricostruire gli eventi ed annotare i fatti salienti, sia a posteriori per l'analisi dei dati, affinché i dati raccolti risultassero il più fedele possibile a quanto realmente accaduto durante gli incontri.
Durante la sperimentazione a ciascun bambino e bambina è stato attribuito un numero di riconoscimento per anonimizzare i dati archiviati e cercare di evitare possibili alterazioni dell'analisi, contribuendo a renderla più oggettiva.
Questo articolo si concentra sui dati di due dei partecipanti, selezionati perché hanno mostrato particolare interesse e disponibilità all'interazione, e, inoltre, perché i loro disegni prodotti prima e dopo la sperimentazione mostravano differenze interessanti. Questa scelta ha casualmente coinvolto due bambine.

5.3 Modalità di analisi

Per la parte di analisi dei dati raccolti che viene presentata in questo contributo è stata adottata una metodologia di tipo qualitativo, volta a esaminare le interazioni dei bambini e delle bambine con TC. L'analisi mira a individuare l'emergere di schemi per risolvere le consegne proposte (alcune erano ripetute uguali in diversi incontri) e le relative componenti di senso del numero mobilitate (DR1).
Il quadro teorico descritto nel par. 2 è stato impiegato per determinare l'apprendimento atteso dalle attività progettate. In questo articolo, a titolo esemplificativo, viene presentata l'analisi a priori di due consegne a nostro avviso particolarmente interessanti. Nell'analisi a priori si individuano schemi possibili che ci si aspetta possano essere adottati dai bambini e dalle bambine. Tale analisi ha consentito, poi, nelle analisi a posteriori, di confrontare gli schemi e gli aspetti di senso del numero effettivamente mobilitati con quelli previsti. I disegni della mano, invece, sono stati utilizzati per raccogliere informazioni pre- e post-intervento sulla consapevolezza delle proprie mani e delle dita dei bambini e delle bambine, e su eventuali sue variazioni.

5.4 Analisi a priori

In questo paragrafo si propone l'analisi a priori di due consegne progettate per il Mondo dei Numeri, selezionate in quanto ritenute particolarmente significative per favorire lo sviluppo dell'ordinalità. A tal fine, si farà riferimento al quadro teorico esposto nel par. 3. Procederemo all'individuazione degli schemi che i bambini e le bambine potrebbero adottare per eseguire ciascuna consegna. I nomi degli schemi corrispondono al numero della consegna seguito da una lettera che indica possibili varianti. Per ogni schema, in accordo con il costrutto di Vergnaud, verranno descritti gli obiettivi e anticipazioni, le regole di azione e gli invarianti operazionali (descritti in termini di aspetti di senso del numero mobilitati). È importante sottolineare che le abilità effettivamente stimolate da ciascuna consegna dipendono strettamente dallo schema adottato dal bambino durante l'esecuzione del compito: quindi non sarebbe accurato associare direttamente aspetti di senso del numero a singole consegne, senza esplicitare il possibile schema adottato.

5.4.1 CD1: «Puoi far contare Nadia fino a 5?»

Schema 1a: tocchi con dito singolo, senza attendere feedback di TC

Obiettivi e anticipazioni: cinque dischi sullo schermo numerati da 1 a 5 (Figura 10) e la voce di Nadia che pronuncia i numeri corrispondenti.

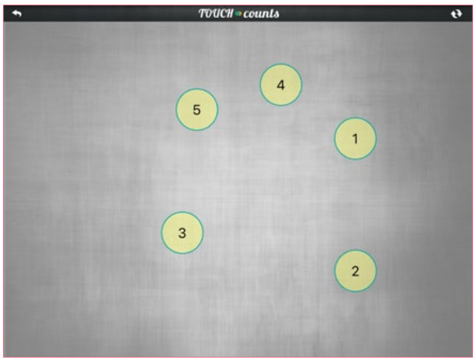


Figura 10. Anticipazione relativa alla consegna CD1.

Regole di azione: preparare un dito (tipicamente l'indice della mano dominante), toccare cinque volte lo schermo fino a vedere comparire il disco contrassegnato dal numero 5 e sentire la voce di Nadia pronunciare questo numero.
Aspetti di senso del numero mobilitati: conoscenza delle parole-numero che compongono la corretta sequenza numerica (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo) e consapevolezza che ad ogni tocco corrisponde un disco numerato (gestione della corrispondenza biunivoca). Poiché sul tablet si devono realizzare tocchi "puliti" perché siano riconosciuti correttamente dal dispositivo, vengono mobilitate la gnosia digitale (soprattutto se non si usa sempre lo stesso dito per effettuare i tocchi) e la motricità fine.

Schema 1b: tocchi con dito singolo, attendendo feedback di TC

Questo schema potrebbe essere adottato da una bambina o un bambino meno esperto della sequenza dei numeri.
Obiettivi e anticipazioni: vedere comparire il disco "5" e/o sentire la voce di Nadia che pronuncia "cinque".
Regole di azione: preparare un dito e toccare cinque volte lo schermo, fermandosi ogni volta in attesa di ricevere il feedback dall'app. Interrompere la procedura quando compare il disco numero 5 o si sente la voce di Nadia pronunciare questo numero.
Aspetti di senso del numero mobilitati: consapevolezza che ad ogni tocco corrisponde un disco numerato (gestione della corrispondenza biunivoca); riconoscimento della parola-numero "cinque" o del segno arabico "5". Poiché sul tablet si devono realizzare tocchi "puliti", vengono mobilitate la gnosia digitale e la motricità fine. In questo schema il feedback visivo e sonoro può rafforzare la conoscenza della corretta sequenza numerica da uno a cinque, la familiarizzazione con i numeri scritti in cifre e la loro associazione alle parole-numero pronunciate dalla voce di Nadia (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo).

5.4.2 CD8: «Puoi isolare il 4 sulla mensola?»

Schema 8a: con un dito tre tocchi sotto e uno sopra la mensola

Obiettivi e anticipazioni: vedere solo il disco numero 4 sopra la mensola e nessun altro disco numerato sullo schermo (**Figura 11**).

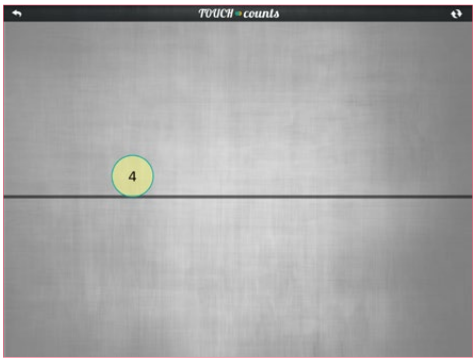


Figura 11. Anticipazione visiva relativa alla consegna CD8.

Regole di azione: preparare un dito (tipicamente l'indice della mano dominante) ed eseguire tre tocchi nella parte inferiore dello schermo (sotto la mensola), poi toccare un'ultima volta sopra la mensola.
Aspetti di senso del numero mobilitati: consapevolezza che ad ogni tocco viene creato un disco numerato (corrispondenza biunivoca), conoscenza delle parole-numero nella corretta sequenza numerica e in particolare che "tre" è il precedente di "quattro" (o di "4") (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo). Inoltre, per completare la consegna le dita selezionate devono essere appoggiate in modo preciso sullo schermo (gnosia digitale e motricità fine).

Schema 8b: due mosse
Obiettivi e anticipazioni: vedere solo il disco numero 4 sopra la mensola e nessun altro disco numerato sullo schermo.
Regole d'azione: Individuare tre dita e appoggiarle simultaneamente sotto la mensola, poi sollevare un dito ed eseguire l'ultimo tocco sopra la mensola.
Aspetti di senso del numero mobilitati: consapevolezza che ad ogni tocco viene creato un disco numerato (corrispondenza biunivoca), conoscenza delle parole-numero nella corretta sequenza numerica e in particolare che tre è il precedente di quattro (o di 4) (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo). Per individuare le dita da utilizzare per il tocco sotto la mensola, può fare riferimento alla rappresentazione del numero memorizzata (*subitizing* e gnosia digitale) oppure ricorrere al conteggio (principio dell'ordine stabile, principio di iniettività, principio di irrilevanza dell'ordine, principio di cardinalità). Per completare la consegna le dita selezionate devono essere appoggiate contemporaneamente e in modo preciso sullo schermo (motricità fine e gnosia digitale) coinvolgendo più di un dito.

Non sono stati descritti a priori schemi che non risolvono la consegna, ma questo non significa che l'aspettativa fosse che tutti i bambini e le bambine sviluppassero subito o in autonomia gli schemi attesi. Nel caso di ripetuti fallimenti, la ricercatrice era pronta a supportare lo sviluppo di uno degli schemi attesi.

6 Risultati delle analisi dei dati raccolti

In questo paragrafo si analizzano alcuni dei dati raccolti, facendo riferimento a due bambine del gruppo sperimentale, scelte in quanto hanno dimostrato particolare interesse e disponibilità all'interazione, e perché il confronto tra i disegni realizzati prima e dopo la sperimentazione ha suggerito che avessero acquisito una maggiore consapevolezza delle proprie mani e dita.

6.1 I disegni

Come prima attività della sperimentazione, ogni bambino o bambina è stato invitato o invitata a realizzare il proprio autoritratto, con l'obiettivo di verificare l'eventuale presenza delle mani e il dettaglio delle dita. Inoltre, all'inizio e al termine del percorso è stato chiesto ai bambini e alle bambine di realizzare il disegno libero della propria mano non dominante. Si riportano nella Tabella 3 i disegni realizzati dalle due bambine sulle quali è messo il focus di questo contributo. Nello studio più ampio, per ciascun bambino o bambina è stata compilata una scheda descrittiva che riassume le caratteristiche dei disegni realizzati, evidenziando la presenza o assenza delle mani negli autoritratti e il numero di dita rappresentate in ciascuna immagine. Per le due bambine in focus, gli estratti di tali schede descrittive sono riportati in descrizione sotto ciascuna immagine in Tabella 3. Per le schede descrittive di tutti i disegni si veda Raffi (2025).

	Autoritratto	Disegno iniziale della mano	Disegno finale della mano
Bambina 10	 Il ritratto presenta una grossa faccia molto dettagliata mentre il resto del corpo è accennato e non ci sono braccia né mani.	 Il disegno è ben proporzionato nelle sue parti: si distingue il palmo da cui partono 3 dita.	 È disegnata la sagoma della mano in cui si distinguono chiaramente il palmo e 5 dita.
Bambina 11	 Il volto è dettagliato mentre il busto è un grande triangolo che arriva fino in fondo al foglio. A metà busto partono le braccia: due segmenti un po' troppo corti che si diramano in 3 direzioni, le mani con 3 dita.	 Nel disegno si distingue il palmo della mano che termina con 4 punte che rappresentano le dita.	 Si distingue un braccio da cui parte il palmo della mano che termina con 5 dita.

Tabella 3. Disegni realizzati dalle due bambine in focus e relative descrizioni della ricercatrice.

Per dare un'idea più generale dei risultati relativi a questa parte dello studio, e per meglio contestualizzare le prestazioni delle bambine in focus (Tabella 3), si riportano di seguito i dati aggregati di tutto il gruppo sperimentale.

6.1.1 Sguardo d'insieme delle prestazioni dell'intero gruppo

Si osserva prima la presenza delle mani negli autoritratti prodotti prima dell'inizio della sperimentazione (Figura 12).

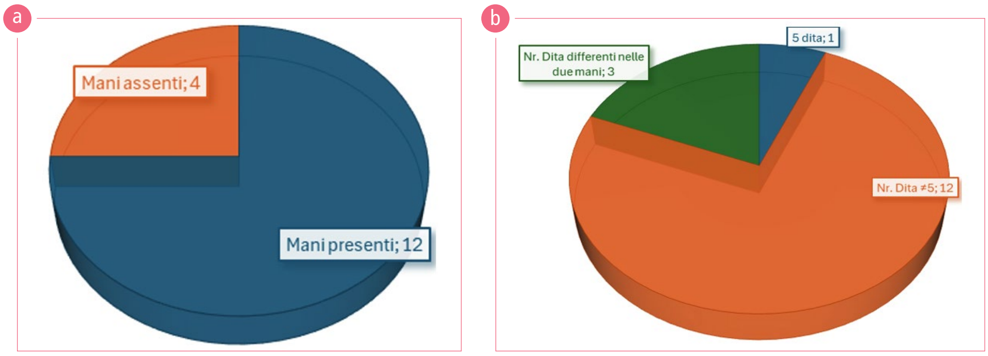


Figura 12. Disegni pre-intervento: a) Frequenza della presenza/assenza di mani negli autoritratti; b) Frequenze del numero di dita rappresentate negli autoritratti.

La maggior parte dei bambini e delle bambine (12) nel ritratto ha incluso le mani, che però, in generale, non risultano dettagliate: sono disegnate come piccoli cerchi rosa spesso privi di dita o come delle croci (si vedano, per esempio, i disegni delle bambine 10 e 11 in focus nella Tabella 3).
Soltanto un bambino ha rappresentato correttamente il numero delle dita, mentre 3 bambine hanno disegnato quantità diverse nelle due mani, di cui solo una corretta. I restanti (12), 9 bambine e 3 bambini, hanno rappresentato una quantità maggiore o minore in entrambe le mani. Questi risultati suggeriscono che, di fronte alla richiesta di realizzare il proprio autoritratto, i bambini e le bambine partecipanti tendevano a soffermarsi su alcuni dettagli, trascurandone altri, e spesso arricchivano il disegno con elementi accessori, trascurando quelli specificamente richiesti (Figura 12a, b).
Si passa ora all'analisi dei disegni della mano non dominante pre- e post-intervento (Figura 13a, b).

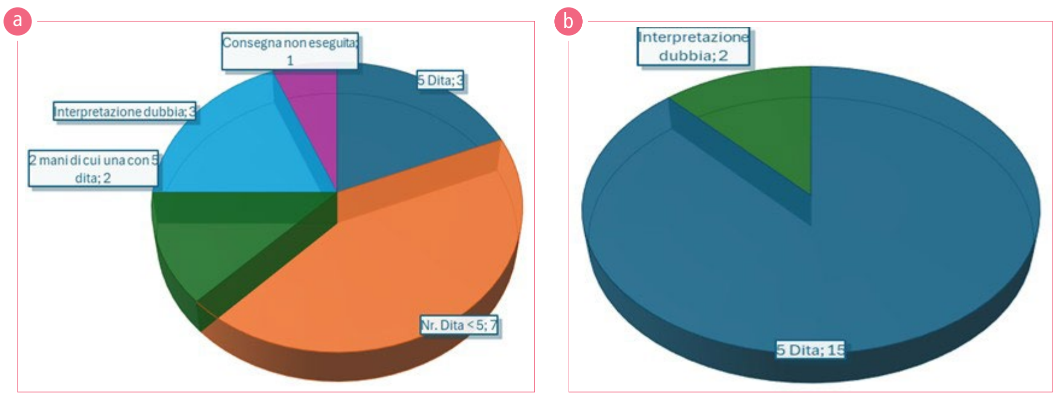


Figura 13. a) Frequenze del numero di dita rappresentate nei disegni pre-intervento; b) Frequenze del numero di dita rappresentate nei disegni post-intervento.

Inizialmente, quando ai bambini e alle bambine è stato esplicitamente richiesto di rappresentare la propria mano, tutti ad eccezione di un bambino hanno disegnato le dita, anche se non sempre nella quantità corretta (Figura 13a; si vedano, per esempio, i disegni delle bambine 10 e 11 in focus nella Tabella 3) e in numero uguale in entrambe le mani. Dei 16 bambini e bambine che hanno svolto la con-

segna, la maggior parte (6, di cui 4 bambine e 2 bambini) ha raffigurato 4 dita. Una bambina ha rappresentato 3 dita, mentre 2 bambine hanno disegnato entrambe le mani, di cui solo una con il corretto numero di dita. Soltanto 2 bambini e 1 bambina hanno disegnato chiaramente 5 dita. Due disegni risultano poco chiari, rendendo difficile determinare con precisione il numero di dita rappresentate.
Al termine del percorso sperimentale, quando è stato nuovamente richiesto di rappresentare la mano non dominante, la maggioranza (15) delle bambine e dei bambini coinvolti (in totale 17) ha disegnato correttamente 5 dita. Solo un bambino e una bambina hanno rappresentato un numero di dita non identificabile con precisione (**Figura 13b**).
Dall'analisi complessiva, quindi, emerge chiaramente che, quando è stato esplicitamente richiesto di disegnare la propria mano, la maggior parte dei bambini e delle bambine ha rappresentato le dita, anche se non sempre nel numero corretto. Inizialmente, nella maggior parte dei casi le dita sono state rappresentate omogenee per dimensioni e lunghezza, senza distinguerle una dall'altra, nemmeno il pollice. In molti casi, inoltre, non è stato rappresentato il palmo della mano. Al termine del percorso 15 dei 17 partecipanti hanno disegnato la mano dotata del corretto numero di dita, indicando un miglioramento nella precisione della rappresentazione della propria mano da parte della maggioranza dei partecipanti. Inoltre, la maggioranza dei bambini e delle bambine ha distinto il palmo e, sebbene in oltre la metà dei disegni le dita conservino dimensioni uguali, in alcuni casi sono state anche differenziate, in particolare il pollice. Questi risultati suggeriscono un impatto positivo del percorso sulla consapevolezza che i bambini hanno riguardo la struttura della propria mano e delle sue dita.

6.2 Consegne *TouchCounts*

In questo paragrafo si riportano alcuni estratti relativi allo svolgimento da parte della bambina 10 delle due consegne presentate nell'analisi a priori (**par. 5.4.1** e **5.4.2**), esemplificando il tipo di analisi a posteriori condotto per arrivare a tabelle riassuntive per ogni partecipante, come quelle allegate per le bambine in focus (Allegati 1-2).
Di seguito sono riportati gli scambi intercorsi tra la bambina 10 (B10) e la ricercatrice (R) nell'incontro 1, durante lo svolgimento delle consegne selezionate.

6.2.1 Esempio di interazione con la consegna CD1

La prima interazione analizzata (incontro 1, min. 6:05-7:17) è con la consegna CD1: «Puoi far contare Nadia fino a 5?».

1. R: «Puoi far contare Nadia fino a cinque? Voglio sentire tutti i numerini da uno a cinque».
2. B10: [Prepara il dito indice e tocca ripetutamente lo schermo superando di molto il numero 5, **Figura 14**].

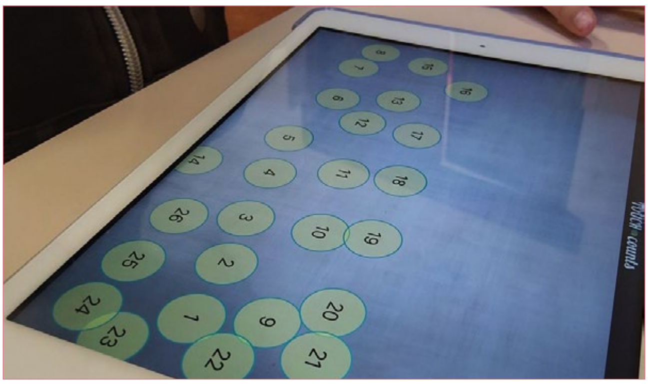


Figura 14. Primo tentativo di interazione della bambina 10 con la consegna CD1.

Questo primo tentativo risolutivo della bambina 10 (intervento 2) risulta diverso dagli schemi previsti nell'analisi a priori. Nello specifico, il tentativo è caratterizzato da:

– *Obiettivi e anticipazioni*: sentire Nadia contare.
– *Regole di azione*: toccare lo schermo con un dito per far dire numeri a Nadia.
– *Aspetti di senso del numero mobilitati*: consapevolezza che ad ogni tocco corrisponde un disco numerato (gestione della corrispondenza biunivoca).

La ricercatrice la interrompe pulendo lo schermo: questa azione sancisce il fallimento del primo tentativo. Poi rinnova la consegna, modificando la richiesta per porre l'accento sul «fermarsi» a «cinque» (intervento 3).

3. R: «Se ti chiedo di fermarti a cinque, lo sai fare? Riesci a fermarti quando arrivi a cinque?»
4. B10: [Riprova toccando lo schermo con un dito] «Uno [Nadia dice: «Uno, due»], due [Nadia dice: «Tre»], tre [Nadia dice: «Quattro»], quattro [Nadia dice: «Cinque»; B10 involontariamente appoggia anche il palmo].

Anche il secondo tentativo risolutivo è diverso dagli schemi previsti ed è caratterizzato da:

– *Obiettivi e anticipazioni*: sentire Nadia contare fino a «Cinque».
– *Regole di azione*: toccare lo schermo con un dito per far dire numeri a Nadia e fermarsi a «Cinque».
– *Aspetti di senso del numero mobilitati*: consapevolezza che ad ogni tocco corrisponde un disco numerato (gestione della corrispondenza biunivoca); conoscenza delle parole-numero nella corretta sequenza numerica (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo).

L'anticipazione viene disattesa, perché la bambina tocca involontariamente il tablet con il palmo (intervento 4). La ricercatrice allora media per migliorare l'interazione di B10 con TC (intervento 5).

5. R: «Hai toccato anche con la mano e il tablet sente il tocco anche se tu non te ne accorgi e crea altri numerini».
4. B10: [Prepara il dito indice e prova nuovamente: tocca lo schermo cinque volte, questa volta più lentamente, probabilmente per prestare attenzione al feedback ricevuto e quando raggiunge il numero cinque solleva il dito e si ferma].
5. R: «Ci siamo arrivati, vero?»
6. B10: [Sorridendo fa cenno di sì col capo].

Il terzo tentativo risolutivo è coerente con lo schema 1b, caratterizzato da:

– *Obiettivi e anticipazioni*: sentire Nadia pronunciare i numeri «Uno, due, tre, quattro, cinque» (e fermarsi).
– *Regole di azione*: toccare lo schermo con un singolo dito e sentire i numeri in sequenza; fermarsi quando si sente «Cinque».
– *Aspetti di senso del numero mobilitati*: consapevolezza che ad ogni tocco corrisponde una particolare parola-numero in sequenza (gestione ordinalità e senso ricorsivo). Al quinto tocco si sente «Cinque» (gestione ordinalità e cardinalità); appoggio preciso delle dita sullo schermo (gnosia digitale e motricità fine).

Nel corso dei tentativi analizzati, il superamento delle difficoltà iniziali della bambina 10 appare strettamente legato all'interazione tra i feedback restituiti da TC e la mediazione della ricercatrice. Nel primo tentativo, lo schema adottato dalla bambina sembra avere come obiettivo semplicemente quello di far contare Nadia, e la regola di azione consiste nel toccare ripetutamente lo schermo con un dito, senza utilizzare il feedback dell'app per controllare il momento in cui arrestare l'azione. Nel secondo tentativo si osserva un primo cambiamento nello schema: grazie al rinnovo della consegna da parte della ricercatrice, l'obiettivo si precisa e diventa quello di far contare Nadia fino a cinque, fermandosi al momento opportuno. Tuttavia, questo schema non è ancora stabile, perché la bambina non controlla pienamente il gesto e non interpreta correttamente il feedback prodotto dall'app, dal momento che anche un contatto involontario del palmo viene registrato come input valido. La ricercatrice interviene allora in modo decisivo, chiarendo sia il punto centrale della consegna sia il funzionamento dello strumento: richiama l'attenzione sul fatto che il tablet "sente" tutti i tocchi e aiuta la bambina a comprendere che i numeri pronunciati da Nadia possono essere usati come riferimento per monitorare l'azione. Solo nel terzo tentativo si osserva uno schema coerente con quello atteso: la bambina tocca più lentamente con un solo dito, presta attenzione al feedback sonoro e visivo dell'app e interrompe l'azione quando sente pronunciare «Cinque». Il cambiamento tra i tentativi, quindi, non riguarda soltanto l'esito finale, ma la progressiva riorganizzazione dello schema d'azione, resa possibile proprio dal fatto che la mediazione della ricercatrice permette alla bambina di attribuire significato ai feedback dell'app e di usarli per regolare in modo sempre più adeguato la propria azione.

6.2.2 Esempio di interazione con la consegna CD8

La seconda interazione analizzata (incontro 1, min. 13:31-15:13) è con la consegna CD8: «Puoi contare fino a 5 e isolare il 4 sulla mensola?».

1. R: «Puoi contare fino a 5 e mettere solo il 4 sulla mensola? Devi fare cadere gli altri numeri e mettere solo il 4 qua sopra».
2. B10: [Prepara il dito indice ed esegue un tocco sopra la mensola. Ottiene il disco "1" in evidenza sulla mensola, **Figura 15a**].
3. R: «Eh!»
4. B10: [Prosegue, eseguendo altri quattro tocchi consecutivi sopra la mensola. Si ferma a 5 (**Figura 15b**), poi col dito solleva la mensola facendo cadere tutti i dischi numerati e lasciando lo schermo vuoto (**Figura 15c**)].

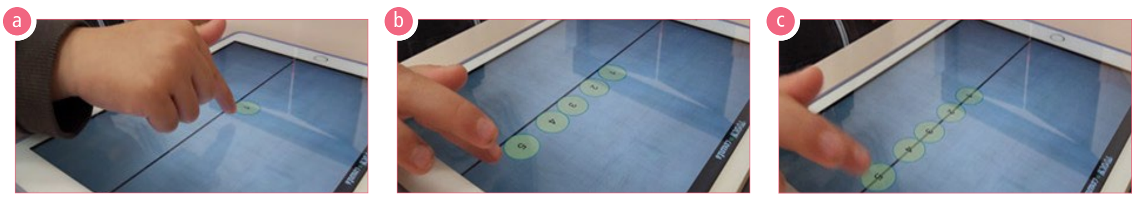


Figura 15a, b, c. Primo tentativo di interazione della bambina 10 con la consegna CD8.

Il primo tentativo risolutivo risulta diverso dagli schemi previsti e si caratterizza per:

– *Obiettivi e anticipazioni*: sentire Nadia pronunciare i numeri «Uno, due, tre, quattro, cinque» e finire con 4 sulla mensola.
– *Regole di azione*: toccare lo schermo con un dito per far pronunciare i numeri desiderati a Nadia e (forse) successivamente togliere i numeri diversi da 4.
– *Aspetti di senso del numero mobilitati*: consapevolezza che ad ogni tocco viene creato un disco numerato (corrispondenza biunivoca), conoscenza delle parole-numero nella corretta sequenza numerica fino a 5.

A questo punto la ricercatrice media per migliorare l'interazione di B10 con TC. Nello specifico, richiama aspetti del funzionamento dell'app (intervento 5).

5. R: «Cosa avevamo visto? Quando tocchi qua [sotto alla mensola], cosa succede ai numeri? Te lo ricordi?»
6. B10: «Non si vedono più».
7. R: «E invece se tocchi sopra [alla mensola]?»
8. B10: [Tocca una volta col dito sopra alla mensola].
9. R: «Rimangono, vero? Io che cosa ti avevo chiesto? Mi puoi far cadere giù tutti i numerini e mi metti qua sopra solo il 4? Proviamo?»
10. B10: [Prepara il dito indice ed esegue quattro tocchi sopra la mensola, poi si ferma. In questo modo si ottengono i dischi numero 1, 2, 3 e 4 in evidenza sopra la mensola (**Figura 16**)].

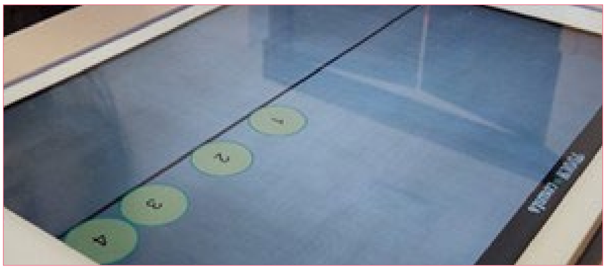


Figura 16. Secondo tentativo di interazione della bambina 10 con la consegna CD8.

La bambina pare cercare conferma visiva del feedback atteso dopo il gesto tocco (intervento 8). La ricercatrice rinnova la richiesta da parte in forma variata (intervento 9), sottolineando che deve rimanere sulla mensola esclusivamente il numero 4, mentre gli altri numeri devono cadere.
Il secondo tentativo risolutivo, anch'esso diverso dagli schemi previsti, si caratterizza per gli stessi obiettivi e aspetti di senso del numero mobilitati rispetto al primo tentativo; le *regole di azione* comprendono il toccare lo schermo con un dito sopra la mensola per far pronunciare i numeri desiderati a Nadia, ma l'anticipazione è disattesa (si ferma prima di arrivare a «Cinque»).
La ricercatrice media nuovamente per migliorare l'interazione di B10 con TC, supportando lo sviluppo di uno schema atteso (intervento 11).

11. R: «Però io questi [indica i numeri 1, 2 e 3] non li volevo sopra, li volevo lasciare andare giù. Quindi dove li dovevi fare per farli cadere giù?»
12. B10: [Indica la parte dello schermo sotto la mensola].
13. R: «Allora proviamo».
14. B10: [Prepara l'indice e tocca quattro volte sotto la mensola lasciando cadere anche il numero 4. Lo schermo non presenta alcun disco numerato].

Il terzo tentativo risolutivo, ancora diverso dagli schemi previsti, affina le *regole di azione*: toccare lo schermo con un dito sotto la mensola per far pronunciare a Nadia i numeri desiderati e far cadere quelli precedenti a "quattro", e tra gli aspetti di senso del numero mobilitati, oltre a quelli precedenti, vi è anche il rafforzamento della consapevolezza che "tre" è il precedente di "quattro" (o di "4") (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo). L'anticipazione, tuttavia, è nuovamente disattesa: cade il "quattro" (intervento 14). La ricercatrice esplicita verbalmente il motivo del fallimento del tentativo (intervento 15).

15. R: «Il 4 però sopra».
16. B10: [Continua e tocca col dito sopra la mensola isolando il disco numero cinque (**Figura 17**)].

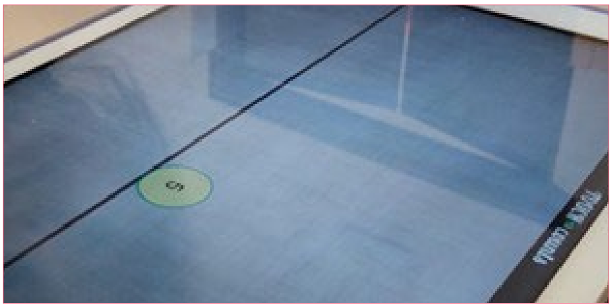


Figura 17. Terzo tentativo di interazione della bambina 10 con la consegna CD8.

Il quarto tentativo risolutivo si avvicina allo schema 8a, caratterizzandosi per le seguenti regole di azione: toccare lo schermo con un dito sotto la mensola per far pronunciare a Nadia i numeri fino a «Quattro» e farli cadere, poi farle pronunciare «Cinque». Gli aspetti di senso del numero mobilitati sono quelli precedenti con un rafforzamento della consapevolezza che "quattro" è il precedente di "cinque" (o di "5") (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo). La ricercatrice interviene sancendo il fallimento della quarta istanziazione e rinnova la richiesta invitando la bambina a riprovare (intervento 17).

17. R: «Ora viene il 5. Riproviamo!».
16. B10: [Esegue correttamente tre tocchi col dito sotto la mensola e l'ultimo sopra. Sullo schermo è visibile il disco numero quattro sopra la mensola (**Figura 18**)].
18. R: «Bravissima!»

Figura 18. Quarto tentativo di interazione della bambina 10 con la consegna CD8.

Il quarto tentativo risolutivo coincide con lo schema 8a, ovvero si caratterizza per:

– *Obiettivi e anticipazioni*: sentire Nadia pronunciare i numeri «Uno, due, tre, quattro, …». Vedere cadere verso il basso i numeri 1, 2, 3 e 5 mentre il numero quattro rimane visibile sopra la mensola.
– *Regole di azione*: toccare lo schermo con un dito per far pronunciare i numeri desiderati a Nadia. Eseguire i primi tre tocchi sotto la mensola, spostare il quarto sopra la mensola, fare l'ultimo tocco nuovamente sotto la mensola.
– *Invarianti operazionali*: ad ogni tocco corrisponde un'etichetta verbale in sequenza (gestione ordinalità). Al terzo tocco Nadia pronuncia la parola «tre» (gestione ordinalità e cardinalità); il numero "tre" precede "quattro" (gestione ordinalità), quindi una volta arrivati a "tre" il tocco successivo deve essere spostato sopra la mensola.

– *Aspetti di senso del numero mobilitati*: consapevolezza che ad ogni tocco viene creato un disco numerato (corrispondenza biunivoca), conoscenza delle parole-numero nella corretta sequenza numerica e in particolare che "tre" è il precedente di "quattro" (o di "4") (gestione dell'ordinalità e senso ricorsivo). Inoltre, per completare la consegna le dita selezionate devono essere appoggiate in modo preciso sullo schermo (gnosia digitale e motricità fine).

Nel corso dei tentativi analizzati, le difficoltà iniziali della bambina vengono progressivamente superate attraverso un'interazione fortemente mediata. In un primo momento, B10 sembra attivare uno schema centrato soprattutto sull'idea che toccare lo schermo faccia avanzare la conta e produca i numeri desiderati, senza però coordinare in modo adeguato tale azione con i diversi effetti determinati dalle due aree dello schermo. Il feedback del software, sia visivo sia sonoro, costituisce in questa fase una risorsa importante ma non ancora sufficiente. La ricercatrice interviene allora con domande mirate, finalizzate a rendere espliciti sia il funzionamento dell'applicazione sia gli elementi centrali del compito. In particolare, richiama l'attenzione della bambina su ciò che accade ai numeri quando i tocchi vengono effettuati sopra oppure sotto la mensola, chiarendo la relazione tra gesto e feedback restituito dal sistema. Parallelamente, riformula più volte la consegna, esplicitando lo scenario atteso: alcuni numeri devono cadere, mentre solo il "quattro" deve restare visibile sulla mensola. In questo modo, la mediazione della ricercatrice orienta progressivamente B10 a coordinare la sequenza numerica, la posizione del tocco e il risultato visibile sullo schermo.
Si osserva così una trasformazione graduale dello schema adottato. Dopo i primi tentativi, in cui la bambina produce i numeri senza controllare adeguatamente quali debbano rimanere e quali cadere, emerge un avanzamento importante: a un tentativo successivo B10 implementa uno schema quasi corretto, perché riesce a coordinare il lasciar cadere i numeri precedenti e il mantenere sulla mensola un solo numero, ma individua come esito finale il 5 anziché il 4. In altre parole, resta solo da regolare con precisione il punto della sequenza numerica in cui modificare l'azione. Nell'ultimo tentativo, infatti, la bambina deve soprattutto gestire l'ordinalità e mobilitare il senso ricorsivo nella relazione tra "tre" e "quattro": è proprio il riconoscimento che, dopo il "tre", il tocco successivo produrrà il "quattro" a consentirle di collocare correttamente l'azione sopra la mensola nel momento opportuno.
Infine, con il supporto della ricercatrice, B10 sviluppa uno schema 8a che si fonda anche sullo schema 1b emerso nella consegna CD1, in cui la bambina aveva imparato a usare la sequenza pronunciata da Nadia per monitorare l'azione. In questo senso, il feedback sonoro del software e la mediazione verbale della ricercatrice agiscono in modo complementare: il primo rende percepibile la struttura sequenziale del numero, la seconda aiuta la bambina a interpretarla in funzione del compito. Possiamo quindi affermare che vengono mobilitati, e verosimilmente rafforzati, gli aspetti di senso del numero attesi, in particolare la corrispondenza biunivoca, la gestione dell'ordinalità e il senso ricorsivo, insieme alla gnosia digitale e alla motricità fine richieste dall'esecuzione precisa dei tocchi.

6.2.3 Analisi delle consegne svolte dalle due bambine in focus
Negli Allegati 1-2 sono riportate le tabelle che documentano le interazioni con TC rispettivamente della bambina 10 e della bambina 11. Alcune consegne sono state proposte più volte nel corso degli incontri e ogni volta sono stati documentati gli aspetti di senso del numero mobilitati (Tabella 1), i *prompt* aggiuntivi forniti dalla ricercatrice e il grado di sicurezza manifestato dalle bambine durante l'esecuzione del compito.
La lettura congiunta di queste tabelle consente di mettere in evidenza sia alcuni elementi comuni sia alcune differenze rilevanti tra i percorsi di B10 e B11. Per entrambe le bambine, il compito di far contare Nadia fino a un numero dato risulta relativamente più accessibile e mobilita la corrispondenza biunivoca tra tocco e numero prodotto, la necessità di un appoggio preciso delle dita sullo schermo, quindi motricità fine e gnosia digitale, e soprattutto la gestione della sequenza numerica, sostenuta dal feedback sonoro del software. Quando invece viene introdotta la mensola, oppure quando il

compito richiede di proseguire il conteggio a partire da un numero già raggiunto, l'attività risulta più complessa per entrambe: in questi casi risultano particolarmente sollecitati, ma anche meno stabilmente consolidati, gli aspetti legati alla gestione dell'ordinalità e del senso ricorsivo, cioè la capacità di coordinare la sequenza numerica con l'anticipazione del numero successivo e con il controllo dell'effetto prodotto dai tocchi nelle diverse aree dello schermo.
Una differenza saliente riguarda il grado di mediazione necessario. B10 mostra un andamento più oscillante: nelle consegne con la mensola, in particolare CD8 e CD9, e ancora in CD26, ha bisogno di più tentativi e di *prompt* espliciti da parte della ricercatrice per coordinare il funzionamento dell'applicazione con l'obiettivo del compito; la sua sicurezza aumenta progressivamente solo nel corso delle ripetizioni. B11, pur necessitando anche lei di un supporto significativo in CD8 e mostrando alcuni punti di fragilità in CD11 e CD26, appare nel complesso più rapida nel raggiungere una modalità esecutiva efficace e nel mantenere un grado di sicurezza alto in più consegne, come si osserva per esempio in CD1 e CD9. Un'altra differenza riguarda il rapporto tra sicurezza e correttezza: nel caso di B11 la tabella mostra bene che un'elevata sicurezza non coincide necessariamente con una strategia corretta, come accade nel primo svolgimento di CD11; nel caso di B10, invece, l'incertezza appare più visibile.

7 Discussione e conclusioni

La presente ricerca si è proposta di indagare il potenziale della tecnologia multi-touch, e in particolare dell'app *TouchCounts*, nel mobilitare specifici aspetti di senso del numero in bambine e bambini di quattro anni, con un'attenzione particolare alla gestione dell'ordinalità e al senso ricorsivo, dimensioni ancora poco esplorate nella letteratura rispetto alla più tradizionale focalizzazione sulla cardinalità.
L'analisi a priori delle consegne ha mostrato che è possibile progettare attività in *TouchCounts* ad alto potenziale rispetto alla mobilitazione di specifici aspetti di senso del numero. In particolare, le consegne selezionate risultano idonee a promuovere la gestione dell'ordinalità, attraverso il lavoro sulla sequenza stabile delle parole-numero; il senso ricorsivo, attraverso l'esperienza iterata del "+1" resa visibile e udibile dall'app; la consapevolezza della relazione di precedente e successivo; la corrispondenza biunivoca tra gesto e produzione numerica; la gnosia digitale e la motricità fine.
Per quanto riguarda la DR1, l'analisi a posteriori delle interazioni osservate indica una sostanziale coerenza tra gli aspetti di senso del numero anticipati nell'analisi a priori e quelli effettivamente mobilitati dai bambini e dalle bambine nello svolgimento delle consegne. Nella maggior parte dei casi, i partecipanti hanno messo in atto schemi coerenti con quelli anticipati, oppure schemi parzialmente diversi ma comunque tali da mobilitare gli stessi aspetti di senso del numero individuati a priori. Particolarmente rilevante è risultata l'evoluzione degli schemi nel corso delle sessioni: da modalità inizialmente centrate soprattutto sull'esecuzione del gesto o sull'ascolto del feedback, si è progressivamente osservata una maggiore capacità di coordinare azione, feedback e anticipazione del risultato. Tale evoluzione suggerisce una crescente organizzazione dell'attività attorno a invarianti operazionali pertinenti, in particolare rispetto alla gestione dell'ordinalità e al senso ricorsivo.
In relazione alla DR2, l'analisi dei disegni della mano non dominante pre- e post-intervento evidenzia un rafforzamento significativo della consapevolezza della struttura della propria mano nella maggior parte dei partecipanti. Se inizialmente le dita risultavano spesso omogenee, incomplete o in numero non corretto, al termine del percorso 15 bambini e bambine su 17 hanno rappresentato chiaramente cinque dita distinguendo il palmo. Tali evidenze suggeriscono un consolidamento della gnosia digitale, intesa come rappresentazione mentale e controllo delle proprie dita, competenza che la letteratura indica come correlata allo sviluppo numerico (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Questo risultato appare

coerente con la natura *embodied* delle interazioni proposte, nelle quali la produzione numerica avviene attraverso l'azione intenzionale delle dita.

Un elemento cruciale emerso dall'analisi, e visibile per esempio nelle interazioni analizzate di B10, riguarda il ruolo della ricercatrice nello sviluppo e nella stabilizzazione degli schemi osservati. Alla luce del costrutto di schema adottato (Vergnaud, 2009), l'interesse analitico non coincide con la mera esecuzione corretta della consegna, ma con la progressiva organizzazione dell'attività e con la possibilità di inferire invarianti operazionali pertinenti, descritti nel nostro studio in termini di aspetti di senso del numero mobilitati. In diverse situazioni, i bambini e le bambine hanno inizialmente adottato strategie non coerenti con gli schemi anticipati o hanno mostrato difficoltà a risolvere alcune consegne. L'intervento della ricercatrice ha svolto allora una funzione regolativa fondamentale: l'artefatto digitale, infatti, non garantisce di per sé che vengano mobilitati gli aspetti di senso del numero su cui la consegna è progettata. Attraverso richiami mirati, riformulazioni della consegna, domande orientate e l'esplicitazione degli effetti delle azioni, la ricercatrice ha sostenuto la ristrutturazione delle regole d'azione e ha guidato l'attenzione verso le informazioni rilevanti della situazione. In questa prospettiva, la sua mediazione ha offerto più di un semplice supporto esecutivo: ha favorito l'emergere e il consolidamento di schemi fondati su aspetti importanti di senso del numero, in particolare relativi alla gestione dell'ordinalità, al senso ricorsivo, alla cardinalità, alla motricità fine e alla gnosia digitale. L'andamento talvolta non lineare delle prestazioni suggerisce che tali aspetti fossero, per diversi partecipanti, in fase di consolidamento. Tali oscillazioni possono essere interpretate come indicatori di processi di riorganizzazione cognitiva in atto, nei quali la riproposizione delle consegne e la guida della ricercatrice hanno svolto una funzione di progressiva stabilizzazione degli schemi.

Nel complesso, le evidenze raccolte suggeriscono che un'app multi-touch come *TouchCounts*, se integrato in un percorso didattico intenzionale e mediato, possa costituire un ambiente particolarmente favorevole per sostenere non solo la cardinalità, ma anche la costruzione del numero come successione ordinata e struttura ricorsiva. Questo contributo appare rilevante rispetto a una parte della letteratura che tende a privilegiare il lavoro sulla numerosità come quantità, mostrando invece come sia possibile lavorare precocemente anche sulla gestione dell'ordinalità e sul senso ricorsivo.

Infine, emerge la necessità di concepire tali interventi non come esperienze isolate o di breve durata, ma come parte di una pratica didattica più ampia e continuativa, in cui artefatti digitali, corporeità, manipolazione di oggetti fisici e discussione guidata si integrino in modo coerente. Un'esposizione graduale e sistematica a esperienze di questo tipo può favorire uno sviluppo armonico delle componenti cardinali e ordinali del senso del numero, sostenendo la costruzione di schemi sempre più stabili e flessibili fin dalla scuola dell'infanzia.

Bibliografia

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Baccaglini-Frank, A. (2013). Analisi delle potenzialità di applicazioni multi touch per la costruzione del significato di numero naturale. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *36*(3A), 237–262.

Baccaglini-Frank, A. (2026). Number sense, fingers and multi-touch apps in preschool. In T. Meaney, C. Benz, A. Montone, B. Di Paola & M. G. Fiorentino (Eds.), *Engaging with Mathematics in the Early Years. Results from the POEM6 conference* (pp. 9–24). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-032-16065-2_2

Baccaglini-Frank, A., Carotenuto, G., Funghi, S., Lisarelli, G., & Miragliotta, E. (2025). Digital artifacts in mathematics education: how can we study the learning processes they promote? *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, *18*, 17–48. https://doi.org/10.1007/s40574-024-00439-2

Baccaglini-Frank, A., & Maracci, M. (2015). Multi-touch technology and preschoolers' development of number-sense. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *1*(1), 7–27. https://doi.org/10.1007/s40751-015-0002-4

Baccaglini-Frank, A., Carotenuto, G., & Sinclair, N. (2020). Eliciting preschoolers' number abilities using open, multi-touch environments. *ZDM - Mathematics Education*, *52*(4), 779–791. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01144-y

Bartolini Bussi, M. G. (2008). *Matematica. I numeri e lo spazio.* Edizioni Junior.

Béguin, P., & Rabardel, P. (2000). Designing for instrument-mediated activity. *Scandinavian Journal of Information Systems*, *12*, 173–190. https://aisel.aisnet.org/sjis/vol12/iss1/1

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 333–339.

Brissiaud, R. (1992). A tool for number construction: Finger symbol sets. In J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 41–65). Lawrence Erlbaum Associates.

Butterworth, B. (1999). *Intelligenza matematica. Vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente.* Rizzoli.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *46*, 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Cobb, P., McClain, K., de Silva Lamberg, T., & Dean, C. (2003). Situating teachers' instructional practices in the institutional setting of the school and district. *Educational Researcher*, *32*(6), 13–24. https://doi.org/10.3102/0013189X032006013

Coles, A., & Sinclair, N. (2018). Re-thinking "normal" development in the early learning of number. *Journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 136–158. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.101

Elia, I., Baccaglini-Frank, A., Levenson, E., Matsuo, N., Feza, N., & Lisarelli, G. (2023). Early childhood mathematics education research: Overview of latest developments and looking ahead. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *28*, 75–129. https://doi.org/10.4000/adsc.3113

Ferrara, F., & Ferrari, G. (2023). Kindergarten children and early learning of number: Embodied and material encounters within the classroom. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *9*, 401–419. https://doi.org/10.1007/s40751-022-00117-y

Ferrara, F., & Savioli, K. (2018). Touching numbers and feeling quantities: Methodological dimensions of working with *TouchCounts*. In N. Calder, K. Larkin & N. Sinclair (Eds.), *Using mobile technologies in the learning of mathematics* (pp. 231–245). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-90179-4_13

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Harvard University Press.

Giacopini, G. (2014). *iPad per contare a quattro anni*. Tesi di laurea magistrale (non pubblicata). Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia.

Gracia-Bafalluy, M. G., & Noël, M. P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance? *Cortex*, *44*, 368–375. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.020

Griffin, S. A., Case, R., & Siegler, R. S. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. In K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp. 25–49). The MIT Press.

Jackiw, N., & Sinclair, N. (2014). *TouchCounts* [iPad application]. Simon Fraser University. http://touchcounts.ca

Jackiw, N., & Sinclair, N. (2017). TouchCounts and gesture design. In T. Hammond, A. Adler & M. Prasad (Eds.), *Frontiers in pen and touch: Impact of pen and touch technology on education* (pp. 51–62). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-64239-0_4

Kortenkamp, U., Ladel, S., & Larkin, K. (2024). Understanding children's learning of part-whole relations using Fingu. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *11*, 287–306. https://doi.org/10.1007/s40751-024-00160-x

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2014). Number concepts—processes of internalization and externalization by the use of multi-touch technology. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Eds.), *Early mathematics learning: Selected papers of the POEM 2012 Conference* (pp. 237–253). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4678-1_15

Lembrér, D., & Meaney, T. (2016). Preschool children learning mathematical thinking on interactive tables. In T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Eds.), *Mathematics education in the early years: Results from the POEM2 Conference, 2014* (pp. 235–254). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_13

Lyons, I., & Beilock, S. (2013). Ordinality and the nature of symbolic numbers. *The Journal of Neuroscience*, *33*(43), 17052–17061. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.1775-13.2013

Lyons, I. M., Price, G. R., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1-6. *Developmental science*, *17*(5), 714–726. https://doi.org/10.1111/desc.12152

Mulligan, J., Verschaffel, L., Baccaglini-Frank, A., Coles, A., Gould, P., He, S., Ma, Y., Milinković, J., Obersteiner, A., Roberts, N., Sinclair, N., Wang, Y., Xie, S., & Yang, D.-C. (2018). Whole number thinking, learning and development: Neuro-cognitive, cognitive and developmental approaches. In M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (Eds.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades. New ICMI study series* (pp. 137–167). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_7

Ng, O.-L., & Yeung, W.-L. (2025). Making tens with four hands: Touchscreen-based classroom activity for early number learning. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *11*, 333–346. https://doi.org/10.1007/s40751-025-00171-2

Noël, M. P. (2005). Finger gnosia: A predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, *11*(5), 413–430. https://doi.org/10.1080/09297040590951550

Raffi, A. (2025). *Progettazione e sperimentazione di un percorso didattico volto a favorire lo sviluppo del senso del numero nei bambini di quattro anni mediante l'utilizzo di artefatti fisici e digitali.* Tesi di laurea magistrale. Dipartimento di Civiltà e Forme del Sapere, Università di Pisa. https://etd.adm.unipi.it/t/etd-05212025-151439

Resnick, L. B., Bill, V., Lesgold, S., & Leer, M. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer & M. S. Knapp (Eds.), *Teaching advanced skills to at-risk students: Views from research and practice* (pp. 27–53). Jossey-Bass.

Rodney, S. (2019). "The other ten": Order irrelevance and Auden's sense of number. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *5*(2), 166–177. https://doi.org/10.1007/s40751-019-0049-8

Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere la matematica nella scuola dell'infanzia e primaria.* Mondadori Università.

Sinclair, N., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 662–686). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203448946

Sinclair, N., & Jackiw, N. (2011). *TouchCounts* [iPad application]. Simon Fraser University. http://touchcounts.ca

Sinclair, N., & Pimm, D. J. (2015). Mathematics using multiple senses: Developing finger gnosis with three-and four-year-olds in an era of multi-touch technologies. *Asia-Pacific Journal of Research in Early Childhood Education*, *9*(3), 99–109. https://doi.org/10.17206/apjrece.2015.9.3.99

Sinclair, N., & SedaghatJou, M. (2013). Finger counting and adding with Touch-Counts. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2198–2207). Middle East Technical University and ERME.

Star, S. L., & Griesemer, J. R. (1989). Institutional ecology, "translations" and boundary objects: amateurs and professionals in Berkley's museum of vertebrate zoology, 1907–1939. *Social Studies of Science*, *19*, 387–420. http://www.jstor.org/stable/285080

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 99–137. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.4

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Tra analogie e rappresentazioni grafiche: un percorso esplorativo per promuovere il pensiero strategico nei problemi di logica matematica

Between analogies and graphic representations: an exploratory pathway to foster strategic thinking in mathematical logic problems

Nina Dagani
Scuola elementare di Sorengo, scuola elementare di Croglio – Svizzera

nina.dagani@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo presenta un percorso didattico esplorativo rivolto a una classe di quinta elementare, finalizzato a promuovere il pensiero strategico nella risoluzione di problemi e giochi di matematica. Il percorso è nato dall'osservazione di alcune difficoltà degli allievi nell'organizzazione dei processi risolutivi e nell'uso di rappresentazioni grafiche, a fronte di un elevato coinvolgimento dei bambini nella risoluzione di giochi e indovinelli logici. Attraverso problemi e giochi, gli allievi sono stati guidati a riconoscere, sviluppare e riutilizzare strategie risolutive efficaci, valorizzando in particolare il ricorso a rappresentazioni grafiche e al ragionamento per analogia. L'analisi dei protocolli di risoluzione evidenzia un progressivo affinamento delle strategie adottate e una maggiore capacità di riflessione sull'errore.

Parole chiave: risoluzione di problemi; giochi di strategia; strategie risolutive; analogia; rappresentazioni grafiche.

Abstract / The article presents a teaching experience aimed at a fifth-grade class, designed to promote strategic thinking in mathematical problem-solving and games. The teaching experience arose from the observation of certain difficulties experienced by pupils facing organizing problem-solving processes and using graphic representations, despite the children's high level of engagement in solving logic puzzles and riddles. Through problems and games, pupils were guided to recognize, develop, and reuse effective problem-solving strategies, with particular emphasis on the use of graphic representations and reasoning by analogy. Analysis of the problem-solving protocols highlights a gradual refinement of the strategies adopted and a greater ability to reflect on mistakes.

Keywords: problem-solving; strategy games; problem-solving strategies; analogical reasoning; graphical representations.

1 Introduzione

Il percorso didattico descritto in questo articolo è stato proposto a una quinta elementare ticinese ed è stato ideato sulla base delle necessità e delle caratteristiche del gruppo classe. Da un lato, durante l'osservazione dello svolgimento degli esercizi e dei problemi matematici affrontati nella prima parte dell'anno scolastico, erano emerse negli allievi[1] alcune difficoltà nell'organizzazione del processo risolutivo e nell'uso delle rappresentazioni grafiche. D'altro canto, era stato individuato un grande coinvolgimento e interesse degli allievi nei momenti in cui venivano proposti loro indovinelli e piccoli problemi di logica. Nella seconda parte dell'anno scolastico, si è quindi deciso di proporre agli allievi un percorso didattico che, da una parte, potesse essere coinvolgente creando un clima di lavoro favorevole al loro apprendimento e, dall'altra, potesse promuovere la capacità di trasferire nella risoluzione di un problema dato le strategie e i procedimenti appresi in situazioni analoghe affrontate in precedenza, valorizzando in particolare le possibili rappresentazioni grafiche in linea con quanto promosso dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022). Si è colta quindi l'opportunità delle iniziative organizzate dall'istituto scolastico legate alla Giornata Mondiale della Logica[2] per introdurre il percorso didattico qui descritto costituito da attività di risoluzione di problemi e giochi di logica. Al termine degli interventi sono stati poi analizzati i protocolli di risoluzione degli allievi per valutare l'emergere e lo svilupparsi delle diverse strategie risolutive adottate dagli allievi. Per maggiori dettagli si rimanda al lavoro di tesi,[3] da cui è tratto il presente contributo.

2 La risoluzione di problemi

Quotidianamente ogni individuo, consapevolmente o inconsapevolmente, si confronta con una o più situazioni che richiedono di affrontare problemi di diverso genere. Si definisce *problema*, infatti,

> «Ogni quesito di cui si richieda ad altri o a sé stessi la soluzione, partendo di solito da elementi noti. […] Qualsiasi situazione, caso, fatto che, nell'ambito della vita pubblica o privata, presenti difficoltà, ostacoli, dubbî, inconvenienti più o meno gravi da affrontare e da risolvere».
>
> (Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, 2023b)

Il problema risulta essere distinto dalla situazione problematica che viene invece descritta come «il sistema di competenze reali nelle quali si può immaginare quanto descritto da un testo e dal suo significato, all'interno delle esperienze del singolo» (D'Amore & Marazzani, 2003, p. 4). Vi sono diverse proposte e puntualizzazioni in letteratura rispetto a questa differenza ma tutte sono accomunate dal fatto che «non c'è problema se non c'è una situazione problematica che crea una domanda, rispondere alla quale sia per qualche motivo causa di difficoltà» (D'Amore & Marazzani, 2003, p. 5). Risolvere un problema significa quindi «trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile». E, proprio dovuto alla natura dei

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.
2. La Giornata Mondiale della Logica (*World Logic Day*), proclamata dall'UNESCO nel 2019, si celebra ogni anno il 14 gennaio per valorizzare il ruolo fondamentale della logica nella promozione della conoscenza, nell'avanzamento scientifico e nella formazione del pensiero critico (https://www.unesco.org/en/days/world-logic).
3. Lavoro di Tesi di Nina Dagani (2025) svolto nell'ambito del Bachelor of Arts in Insegnamento per il livello elementare (anni scolastici 3-7), presso il Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrice: Marta Barbero.

problemi e alla frequenza con cui si affrontano, «risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano» (Polya, 1945, citato da D'Amore & Marazzani, 2003, pp. 4–5). Guardando alla didattica della matematica, risulta difficile definire in modo univoco un problema per il fatto che lo stesso compito può risultare un ostacolo per alcuni mentre per altri no; l'essere un problema o meno non è infatti legato a proprietà intrinseche del compito proposto quanto alla relazione tra l'allievo e il compito che «rende il compito un problema per quella persona» (Schoenfeld, 1985, p. 74, traduzione dell'autrice). È utile quindi sottolineare ai fini didattici la differenza tra un "esercizio" e un "problema" che spesso vengono utilizzati come sinonimi. «Entrambi concernono situazioni problematiche causate da vari fattori: una proposta dell'insegnante (più o meno motivata), test o quiz, effettiva e reale nella quale l'alunno o la classe si ritrova» (D'Amore & Marazzani, 2003, p. 2), ma vi è una sostanziale differenza tra le due tipologie. Un esercizio può essere risolto dall'allievo applicando conoscenze e competenze già acquisite in precedenza o in via di consolidamento, attivando quindi un comportamento automatico esecutivo e riproduttivo di strategie e regole. In questo caso le conoscenze e le competenze dell'allievo sono sufficienti al fine di trovare la soluzione al compito, e l'errore, quando presente, è sintomo di una lacuna legata ad esse o alla loro applicazione. Contrariamente, nella risoluzione di un problema, l'allievo si confronta con la messa in campo di conoscenze e competenze che non sono ancora all'interno del suo bagaglio cognitivo. In un problema, infatti, l'allievo, attingendo alle sue risorse, è tenuto ad applicare anche scelte strategiche e creative al fine di identificare la strada risolutiva del compito più rapida ed efficace. Non si tratta quindi di un consolidamento o un'applicazione di conoscenze e competenze, come nel caso degli esercizi, ma di uno strumento di acquisizione di conoscenza che avviene tramite la combinazione inedita di esperienze pregresse, la scoperta di nuove strategie risolutive, il confronto con i possibili errori o ostacoli incontrati e superati ecc. (D'Amore & Marazzani, 2003). Ogni individuo che si confronta con un problema matematico dovrà probabilmente cambiare il suo punto di vista numerose volte; in alcune occasioni, ad esempio, si tende a precipitarsi verso una soluzione apparentemente semplice e immediata, comprendendo in seguito che questa non è applicabile o risulta errata (Polya, 1967).
Al fine di procedere in maniera efficace nella risoluzione di un problema sono state identificate da diversi autori alcune fasi caratteristiche del processo di risoluzione, in questo lavoro si farà riferimento alle fasi di risoluzione identificate da Polya (1967):

1. *Comprensione del problema.* Questa prima fase è di fondamentale importanza per identificare le informazioni principali, le incognite e le condizioni presentate nel problema. Se vi è una figura legata al testo, che risulti quindi essere fondamentale per la sua risoluzione, allora la sua rappresentazione diventa una parte importante della comprensione del problema stesso.
2. *Compilazione o elaborazione di un piano.* In questa fase, si tratta di passare dalla comprensione del problema alla progettazione di azioni e strategie da operare per procedere alla sua risoluzione. È la più complessa poiché vi sono numerose strategie possibili per la risoluzione di un problema, e non è facile a volte trovare «un'idea luminosa» (Polya, 1967, p. 28) quando non si conosce in maniera precisa il tema trattato.
3. *Sviluppo del piano.* La terza fase prevede la messa in pratica del piano e delle strategie sviluppate nella fase precedente per proseguire verso la risoluzione del problema. In questa fase sono presenti dei momenti di controllo dell'efficacia delle strategie applicate che permettono di rendersi conto se la scelta è stata efficace o se non porterà a una soluzione corretta; nel secondo caso sarà necessario tornare alla fase precedente (compilazione o elaborazione di un piano) per studiare una nuova strategia differente e per applicarla successivamente nello sviluppo del nuovo piano.
4. *Verifica.* La fase conclusiva è importante per verificare la correttezza della soluzione e l'efficacia del processo di risoluzione adottato. Grazie a quest'ultima fase si analizza l'intero operato e, in caso di errore, si ripercorrono le quattro fasi al fine di procedere verso una risoluzione differente.

Scelto efficacemente un problema, in modo che sia motivante e accessibile agli allievi, il docente può supportare gli allievi lungo le quattro fasi di risoluzione quando necessario. Ma non solo, anche al termine della risoluzione, la messa in comune delle strategie adottate, la riflessione sulla loro applicazione e sulle soluzioni trovate permette di portare avanti un lavoro metacognitivo efficace per le risoluzioni future.

> «Un bravo insegnante dovrebbe riuscire a far comprendere, ed inculcare ai suoi allievi la consapevolezza, che nessun problema di matematica può essere considerato definitivamente chiuso. Resta sempre qualcosa da dire ancora sopra di esso […], si può sempre giungere ad una più profonda comprensione del risultato».
>
> (Polya, 1967, p. 33)

2.1 I giochi di strategia e l'analogia con la risoluzione di problemi

I giochi di strategia, siano essi da tavolo o digitali, per uno o più giocatori, si basano su determinate regole e obiettivi per i giocatori coinvolti. Per conseguire i diversi obiettivi, i giocatori scelgono autonomamente il percorso da seguire, elaborando tattiche e strategie fondate sulle informazioni disponibili e sulle proprie competenze. Lo scopo è individuare una strategia vincente che permetta loro di prevalere, e in cui la fortuna abbia un ruolo minimo o sia totalmente assente (Barbero, 2020).
Diversamente da altre tipologie di giochi risulta rilevante nella loro risoluzione lo sviluppo del pensiero strategico e la capacità di pianificazione e organizzazione di un pensiero logico. Risolvere un gioco di strategia richiede infatti la comprensione della situazione iniziale e l'analisi dei vincoli posti dal problema che avvengono generalmente nelle fasi iniziali di familiarizzazione con il gioco, l'elaborazione di un piano d'azione e la scelta di strategie al fine di poterle applicare per giungere all'obiettivo. La struttura stessa del gioco inoltre consente un riscontro quasi immediato sull'efficacia o meno della strategia messa in atto. Successivamente, la riflessione sulle strategie sviluppate e sul percorso seguito permette al giocatore di affinare e generalizzare la strategia vincente per poterla applicare in partite successive o in giochi analoghi. In questo senso, la dinamica dei giochi di strategia è analoga a quella dei problemi matematici: entrambi richiedono di selezionare e combinare delle conoscenze pregresse, portano a sviluppare un ragionamento strategico e creativo e favoriscono riflessioni sui risultati ottenuti. Le fasi di risoluzione di problemi e giochi sono infatti analoghe e analoghe sono anche le tipologie di strategie che si possono applicare in entrambi i contesti; si pensi ad esempio alle strategie che si applicano facendo riferimento alla simmetria del gioco o del problema, al supporre il gioco o il problema risolto, all'uso di rappresentazioni grafiche come supporto alla risoluzione, all'applicazione di analogie ecc. I giochi di strategia offrono un contesto ideale per lavorare sulla risoluzione dei problemi e sulle strategie ad essa associate (Barbero, 2015). I giochi di logica rappresentano una forma particolare di giochi di strategia. Problemi classici come "Il lupo, la capra e i cavoli", ad esempio, mostrano chiaramente come ogni scelta comporta delle conseguenze immediate, rendendo evidente la necessità di pianificare e verificare le varie mosse effettuate. Guardando al problema "Il lupo, la capra e i cavoli":

> «Un contadino deve attraversare un fiume con un lupo, una capra e dei cavoli. La barca è così piccola che può trasportare solo il contadino e con lui solamente il lupo, o la capra, o i cavoli. Se il contadino lasciasse il lupo solo con la capra, il lupo si mangerebbe la capra; se lasciasse la capra sola con i cavoli, la capra si mangerebbe i cavoli. Come riesce il contadino ad attraversare il fiume con il suo carico?»
>
> (Ignátiev, 1978, p. 25, traduzione dell'autrice)

Esso si può risolvere con strategie differenti. Si possono usare degli oggetti a rappresentare i diversi elementi per poi spostarli da un lato all'altro del "fiume" rappresentato dallo spazio tra due tavoli, si può procedere per tentativi ed errori, si può rappresentare il problema algebricamente, graficamente, tramite tabelle e diagrammi ecc. Ad esempio, rappresentando graficamente la situazione, si potrebbe ottenere una risoluzione che coinvolge simboli e frecce e mostra i diversi spostamenti della barca per trasportare i tre oggetti sulla sponda opposta del fiume senza che la capra rimanga mai da sola con il lupo o con i cavoli (**Figura 1**).

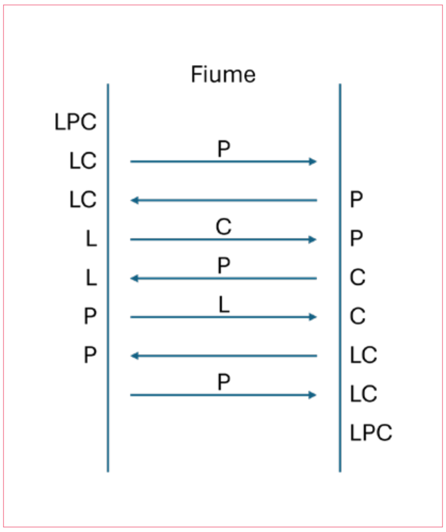


Figura 1. Possibile diagramma risolutivo del problema "Il lupo, la capra e i cavoli" dove L sta per lupo, P sta per capra e C sta per cavoli e le frecce indicano i viaggi della barca da una sponda all'altra del fiume.

I giochi di strategia e i giochi di logica rientrano nel campo più ampio della matematica ricreativa, che, oltre a questi, comprende diversi altri giochi come enigmi, rompicapi, puzzle, indovinelli ecc. Queste attività generalmente vengono affrontate per piacere personale soprattutto in ambito non scolastico. La pratica di tali attività anche in classe consente agli alunni di affrontare problemi di diversa natura in modo coinvolgente e stimolante, affinando le loro capacità di ragionamento e promuovendo un approccio strategico sempre più consapevole, offrendo agli allievi la possibilità di vedere concretamente un legame tra pianificazione, azione e conseguenza e di imparare a riflettere sulle proprie strategie risolutive (Peres & Sbaragli, 2021).

2.2 Strategie di risoluzione

Insieme alle fasi di risoluzione di problemi si è cominciato ad approfondire anche lo sviluppo delle strategie risolutive messe in atto nel processo di risoluzione, ovvero di quella che viene chiamata *euristica*, il cui scopo è «lo studio dei metodi e delle leggi di invenzione e di scoperta» (Polya, 1967, p. 119) di compiti come i problemi che stimolano la mente e la cui risoluzione è possibile solo attraverso indagini e riflessioni (Schoenfeld, 1985). Nel corso del tempo sono state proposte diverse descrizioni e classificazioni delle tecniche che vengono utilizzate singolarmente o in combinazione tra loro per compiere progressi nella risoluzione, in questo paragrafo verranno presentate quelle maggiormente implicate e osservate nel percorso didattico proposto alla classe (Barbero, 2015; Polya, 1967; Schoenfeld, 1985).

2.2.1 Le rappresentazioni nella risoluzione di problemi

Nella risoluzione di problemi risulta efficace al ragionamento rappresentare il problema ovvero adottare «un conveniente sistema di notazioni facilmente riconoscibile e particolarmente utile a tradurre il nostro pensiero» (Polya, 1967, p. 141) che può essere grafico, verbale, simbolico, numerico ecc. a seconda della tipologia di problema e delle competenze e abilità del solutore. L'utilizzo di elementi a

supporto delle considerazioni e dei ragionamenti nella risoluzione risulta efficace solo se strutturato in maniera pertinente, ovvero «quando l'ordine e la connessione dei simboli riflettono l'ordine e la connessione degli enti a cui si riferiscono» (Polya, 1967, p. 141).
Tra le diverse rappresentazioni, può facilitare il processo di risoluzione la rappresentazione grafica del problema, che sia essa una figura geometrica, un disegno, una tabella, un grafico, un diagramma ecc. La rappresentazione grafica è infatti «un elemento ausiliario fondamentale in ogni problema» (Polya, 1967, pp. 111–112), sia quando è lei stessa parte del problema, sia quando la si costruisce come supporto ausiliare al ragionamento. In entrambi i casi può essere usata per analizzare al meglio la situazione, ovvero per studiare le caratteristiche e la configurazione delle informazioni iniziali, e per esaminarne i dettagli, ovvero per focalizzare l'attenzione sulle diverse parti del problema e sulle possibili connessioni tra esse. La rappresentazione grafica oltre ad essere un passaggio essenziale per lo sviluppo di ragionamenti e riflessioni logiche matematiche, per organizzare e rappresentare sinteticamente le informazioni e per cogliere relazioni tra esse, può facilitare il trasferimento di conoscenze e competenze ad altre situazioni. È una strategia che per poter essere usata ha alla base la «capacità di trasferimento da un contesto all'altro, da un linguaggio verbale a un linguaggio iconico […] e di porre in relazione in modo flessibile, non legato a una sola formulazione o a una modalità» (Pontecorvo & Pontecorvo, 1985, p. 310). Questa abilità, però, non si acquisisce se non esercitandola. Durante la risoluzione del problema ogni allievo è libero di rappresentarlo in modo diverso e personale, cercando di raffigurare al meglio e secondo le proprie esigenze quanto necessario al raggiungimento della soluzione. La scelta di inserire i particolari nelle rappresentazioni grafiche varia per ciascun allievo, ma rimane costante il legame con gli elementi in gioco. L'utilizzo di colori, ad esempio, può aiutare l'allievo a mettere in risalto alcuni elementi ritenuti più importanti o che necessitano di maggiore attenzione. Tra le rappresentazioni grafiche citate dagli autori vi sono i diagrammi. Questa tipologia, tra le altre cose, permette di produrre uno «schema grafico che ha lo scopo di rappresentare sinteticamente l'andamento di un determinato fenomeno […], di una successione di fatti o manifestazioni […]» (Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, 2023a); risulta essere molto importante in riferimento alla risoluzione di problemi, in quanto permette di rappresentare, osservare e analizzare anche eventuali relazioni, movimenti e variazioni nel tempo dell'organizzazione spaziale degli elementi caratteristici e degli oggetti coinvolti nel problema. Oltre ai diagrammi, gli allievi utilizzano altre rappresentazioni nel processo risolutivo come disegni, segni, lettere e numeri. Al fine di poter analizzare le rappresentazioni prodotte dagli allievi durante la risoluzione del problema e valutare il tipo di supporto al processo di risoluzione scelto, vengono utilizzate per queste rappresentazioni le definizioni proposte da Sbaragli et al. (2021c, p. 2) – che riprendono quelle di Hughes (1982), in particolare per problemi aritmetici – distinguendo tra rappresentazione pittorica, iconica (entrambe rappresentazioni grafiche), linguistica e simbolica:

- *Pittografica o pittorica*: gli allievi riproducono fedelmente uno o più elementi descritti dal problema. Prendendo come esempio il problema "Il lupo, la capra e i cavoli" (par. 2.1) l'allievo si troverebbe a raffigurare con dei disegni realistici gli animali, il pastore e/o la barca che attraversa il fiume.
- *Iconica*: gli allievi non riproducono fedelmente gli elementi presentati dal problema, ma utilizzano altri segni grafici per distinguerli. Nel caso del problema de "Il lupo, la capra e i cavoli" potrebbero utilizzare segni grafici come un cerchio, un quadrato, un triangolo, una croce, o in generale un segno per distinguere i vari personaggi.
- *Linguistica*: gli allievi non utilizzano disegni specifici o segni grafici per raffigurare il problema, ma scrivono vere e proprie frasi di senso per descrivere quanto avviene nella situazione proposta.
- *Simbolica*: gli allievi utilizzano numerali indo-arabi, segni relativi alle operazioni o una notazione simbolica. La notazione simbolica viene intesa sia in modo convenzionale, quando si usano le lettere per indicare gli elementi del problema che vengono trattati come variabili all'interno di formule, sia in modo non convenzionale, quando si utilizzano lettere specifiche per indicare oggetti o elementi del problema.

2.2.2 Analogia

L'analogia è «una specie di somiglianza fra cose distinte. Oggetti simiglianti concordano fra loro sotto qualche aspetto, oggetti analoghi concordano per determinate relazioni che intercedono fra le loro parti corrispondenti» (Polya, 1967, p. 57). Guardando alla risoluzione di problemi, usare l'analogia come strategia risolutiva consiste nell'individuare tra i problemi affrontati in precedenza un problema simile a quello che si sta risolvendo, così da poter utilizzare le conoscenze pregresse, acquisite nella risoluzione del problema già affrontato, per facilitare la risoluzione. Conoscendo già un problema simile, infatti, gli allievi possono fare riferimento alle strategie adottate in precedenza per riprodurle nel nuovo problema. Spesso non si riesce ad individuarne uno esattamente uguale a quello su cui si lavora, ma si tratta di trovare degli elementi comuni che possano essere fonte di ispirazione o aiuto nel processo di ricerca della soluzione. Il «modello da seguire» (Polya, 1967, p. 60) potrebbe riguardare il metodo applicato nella risoluzione, i passaggi effettuati, il risultato ottenuto o una combinazione di questi aspetti; infatti, che sia la struttura del testo, l'immagine proposta, la richiesta o il modello risolutivo «ogni aspetto del problema attuale che abbia avuto una parte essenziale nella risoluzione di qualche altro problema può rivelarsi di nuovo importante» (Polya, 1967, p. 118).
L'analogia ha un ruolo molto importante nella seconda fase di risoluzione di un problema, la compilazione o l'elaborazione di un piano: facendo riferimento a problemi già noti e alle loro esperienze pregresse, gli allievi sono in grado di selezionare alcune possibili strategie risolutive; la ricerca di problemi analoghi può essere di notevole aiuto nella risoluzione, tuttavia, non è sempre facile individuare e dichiarare delle analogie tra problemi noti. Infatti, spesso gli allievi utilizzano l'analogia in maniera totalmente inconsapevole senza riferirsi esplicitamente alle loro conoscenze pregresse. In questa fase l'insegnante può essere di supporto agli alunni con «un'assistenza discreta» (Polya, 1967, p. 28), cercando di fornire loro dei suggerimenti che li portino a pensare a situazioni vissute in precedenza e che possano essere di supporto. L'analogia può anche essere utilizzata esplicitamente come «strumento didattico per ragionare, pensare, sperimentare, porsi domande intelligenti ed acute» (Sbaragli et al., 2008, p. 5), proponendo attività specifiche in successione, e discutendo delle strategie adottate nelle diverse situazioni, favorendo così una messa in comune dei processi risolutivi e una riflessione metacognitiva sugli approcci utilizzati. In questo modo, gli allievi hanno l'opportunità di riconoscere elementi ricorrenti tra problemi diversi e di comprendere come una stessa strategia possa essere utilizzata e adattata a contesti differenti. Un uso più consapevole dell'analogia contribuisce pertanto a superare una risoluzione basata unicamente su tentativi casuali, orientando l'azione dei bambini verso scelte intenzionali e motivate. All'interno di un percorso didattico strutturato, l'analogia diventa uno strumento per promuovere il pensiero strategico sostenendo gli alunni nella costruzione di procedimenti risolutivi sempre più autonomi e consapevoli.

3 Metodologia

Il percorso didattico che viene descritto in questo articolo è stato proposto a una classe quinta elementare ticinese, composta da 18 allievi durante i mesi primaverili dell'anno scolastico.

3.1 Struttura e giustificazione delle scelte del percorso proposto

Il percorso è costituito da tre parti: la prima dedicata ai problemi di attraversamento, la seconda ai problemi con i fiammiferi e l'ultima ad attività di risoluzione della torre di Hanoi. È stata presa questa decisione in quanto tutte e tre le tipologie di problemi e giochi permettono di proporre problemi analoghi, diversi tra loro per difficoltà e configurazione iniziale ma sempre appartenenti alla stessa "famiglia". Inoltre, si tratta di tipologie di problemi che permettono di raffigurare la soluzione tramite una rappresentazione grafica, così da poter osservare se, nelle diverse risoluzioni, vi sono dei pattern ricorrenti indicatori dell'emergere di analogie. Sono tutti problemi di logica che non richiedono calcoli matematici specifici, ma puntano alla ricerca di strategie e ragionamenti per procedere nella risoluzione. Infine, queste tre tipologie differiscono nella presentazione dei contenuti, i primi sono espressi in forma scritta (*word problems*), i secondi presentano sempre un'immagine di partenza che deve essere modificata, mentre gli ultimi riguardano un gioco strategico fisico che gli allievi creano e utilizzano nella risoluzione. Durante il percorso, gli allievi si sono confrontati settimanalmente con due problemi o giochi di logica e un momento di condivisione delle strategie utilizzate nella risoluzione e delle eventuali difficoltà incontrate. Un primo approccio ai problemi del percorso è avvenuto il 14 gennaio in vista della Giornata Mondiale della Logica, in cui si è colta l'occasione per introdurre il tema in classe presentando sinteticamente l'origine della logica e le sue molteplici applicazioni, e proponendo agli allievi alcuni giochi di logica, sudoku e quadrati magici, e alcuni problemi, indovinelli più semplici e il classico problema di attraversamento "Il lupo, la capra e i cavoli" (par. 2.1) che è stato proposto come incipit della prima fase del percorso.

3.1.1 Fase 1: problemi di attraversamento

Questa tipologia di problemi ha avuto una grande diffusione nel Medioevo, proprio grazie al problema "Il lupo, la capra e i cavoli" molto conosciuto anche oggi (par. 2.1). Vi sono moltissime versioni del problema, alcune semplificate ed altre più complesse, tutte però presentano delle caratteristiche molto simili. Generalmente si tratta di problemi in cui dei personaggi devono attraversare un fiume (con una barca) o un ponte per muoversi da un punto A a un punto B. Ad avere un forte impatto sulla risoluzione sono le condizioni poste nelle diverse varianti, come il numero di individui che possono stare contemporaneamente sulla barca o sul ponte e le limitazioni riguardanti l'attesa in entrambe le sponde del fiume (o estremi del ponte).
In alcuni casi vengono presentati ulteriori vincoli per facilitare o complicare la risoluzione del problema stesso. Per esempio, riprendendo il problema "Il lupo, la capra e i cavoli" vi sono varianti che aggiungono uno o più elementi che è necessario far attraversare, ad esempio questa, che risulta impossibile:

> Il pastore Raimondo torna dal suo amico per fare altri acquisti. Questa volta compra un cane, un lupo, una pecora e dei cavoli. Sulla strada del ritorno c'è un fiume e quindi Raimondo deve traghettare, al di là del fiume, il cane, il lupo, la pecora e i cavoli. Per farlo, Raimondo ha a disposizione una piccola barca, che riesce a portare – oltre a lui – solo uno fra cane, lupo, pecora e cavoli. Purtroppo, in assenza del pastore, il cane si azzuffa col lupo, il lupo mangia la pecora, la pecora mangia i cavoli. D'altra parte, il lupo e i cavoli possono essere lasciati soli senza che accada nulla, così come il cane può essere lasciato solo sia con la pecora sia con i cavoli.
> Come fa Raimondo a traghettare sull'altra sponda tutti sani e salvi?[4]

Oppure varianti che modificano oltre al numero di elementi da far attraversare la quantità di elementi che possono stare all'interno della barca, come questa variante che risulta avere più soluzioni:

> Il pastore Raimondo torna dal suo amico per fare altri acquisti. Questa volta compra un gatto, un cane, un lupo, una pecora e della lattuga. Sulla strada del ritorno c'è un fiume e quindi Raimondo deve traghettare, al di là del fiume, il gatto, il cane, il lupo, la pecora e la lattuga. Data la sua precedente esperienza negativa, Raimondo si procura una barca più grande: oltre a lui, la barca riesce a portare due fra gatto, cane, lupo, pecora e lattuga. Purtroppo, in assenza del pastore: il gatto litiga col cane, il cane si azzuffa col lupo, il lupo mangia la pecora, la pecora mangia la lattuga.
> Come fa Raimondo a traghettare sull'altra sponda tutti sani e salvi?[5]

4. Tratto da https://it.oiler.education/scuola/materiali/primaria/lullo/248/lupo-capra-e-cavoli.
5. Tratto da https://it.oiler.education/scuola/materiali/primaria/lullo/248/lupo-capra-e-cavoli.

In questo percorso sono stati proposti dei problemi di attraversamento modificando il numero di elementi da trasportare, la quantità di elementi possibili da trasportare contemporaneamente e, nell'ultimo problema, inserendo un vincolo riguardante il tempo massimo da impiegare per far attraversare ciascun elemento.

3.1.2 Fase 2: problemi con i fiammiferi

A differenza dei problemi di attraversamento, quelli con i fiammiferi presentano delle immagini in cui vengono proposte delle configurazioni di fiammiferi che risultano essere molto significative sia per essere osservate e analizzate, sia per essere riprodotte con materiale concreto. Vi sono numerosi problemi, diversi tra loro, che vedono l'utilizzo di fiammiferi (o stuzzichini). Alcuni richiedono di analizzare la configurazione statica e di contare il numero di figure presenti (Figura 2).

Osserva con attenzione questa griglia e tocca una e una sola volta ogni quadrato che riesci a vedere. Attento, i quadrati possono anche essere formati da più quadrati piccoli messi insieme!

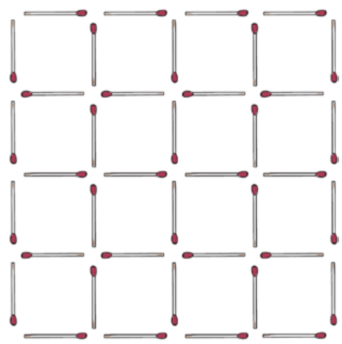


Figura 2. Problema con i fiammiferi tratto da Sbaragli et al. (2021b), immagine elaborata da Sbaragli et al. (2023).

Altri chiedono di spostare dei fiammiferi per ottenere una determinata configurazione (Figura 3).

Silvia propone una nuova sfida a Daniele: provare a togliere otto fiammiferi da questa figura, in modo da ottenere al suo interno due quadrati oltre ad altre forme. Prova anche tu a risolvere questa nuova sfida. Se necessario, aiutati con il materiale presente in aula.

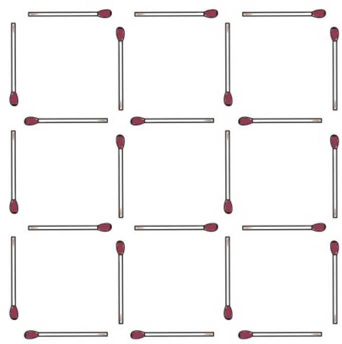


Figura 3. Problema con i fiammiferi tratto da Sbaragli et al. (2023).

Altri ancora sono problemi di generalizzazione come ad esempio (**Figura 4**).

Osserva le tre figure create con i fiammiferi. Ipotizzando che da una figura alla sua successiva si aggiungano dei fiammiferi mantenendo sempre la stessa logica, quanti fiammiferi saranno necessari per creare l'ottava figura? Motiva la tua risposta.

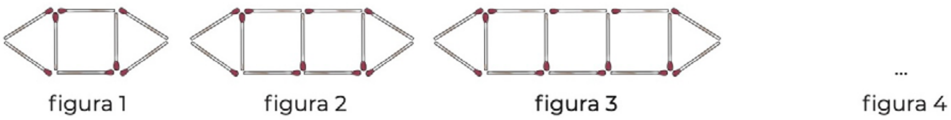


Figura 4. Problema con i fiammiferi tratto da Sbaragli et al. (2021a).

Quelli che sono stati proposti in questo percorso prevedono l'aggiunta, l'omissione o lo spostamento di un numero definito di fiammiferi per modificare la disposizione iniziale. Le indicazioni proposte nel testo riguardano il numero di pezzi che devono essere tolti/spostati e la rappresentazione finale che si intende ottenere.

3.1.3 Fase 3: torre di Hanoi

La torre di Hanoi (**Figura 5**), gioco venduto per la prima volta in Francia da N. Claus de Siam nel 1883, è un rompicapo matematico formato da tre paletti e una serie di dischi di diversa grandezza impilati in maniera decrescente (Castellani, 2013).

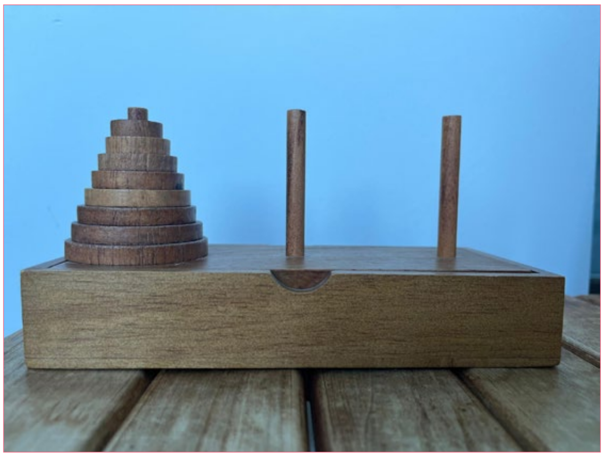


Figura 5. La torre di Hanoi.

Lo scopo del gioco è quello di trasportare la torre di dischi (impilati in maniera decrescente come a formare un cono) da un paletto iniziale a uno qualsiasi degli altri due a disposizione. Vi sono due uniche regole da seguire nel processo risolutivo: è possibile muovere un solo disco alla volta, in nessun caso si può posizionare un disco con diametro maggiore sopra a un disco con diametro minore.
Vi sono diverse possibili strategie da adottare nella risoluzione del rompicapo, così come vi è una formula matematica volta a indicare il minor numero di mosse da effettuare per poter spostare la torre da un paletto ad un altro. In questa proposta è stato importante osservare e verificare in che

maniera gli allievi muovevano i dischi in diverse situazioni senza arrivare alla formula matematica. Il rompicapo è stato proposto inizialmente con tre dischi, questi sono stati poi aumentati gradualmente al fine di indagare e osservare delle analogie negli spostamenti e nella risoluzione andando verso una generalizzazione della strategia risolutiva.

3.2 Modalità di raccolta e analisi dei dati

Durante la risoluzione dei vari problemi è stato importante osservare e comprendere le strategie applicate dagli allievi, per poter lavorare assieme a loro nei momenti di discussione e favorire la costruzione di una nuova conoscenza per poterla applicare in situazioni analoghe successive.
Come strumenti per la raccolta dati sono stati utilizzati i protocolli risolutivi dei problemi svolti dai singoli allievi. In tutti i problemi ogni allievo ha lavorato individualmente su una scheda: nella prima parte veniva esplicitato il testo del problema da risolvere, e la relativa figura qualora presente, sotto al quale vi era dello spazio che gli allievi potevano usare come meglio credevano per mostrare la risoluzione, tenendo traccia di tutti i tentativi svolti; sul retro del foglio invece venivano poste alcune domande di approfondimento per indagare le strategie utilizzate, le difficoltà affrontate e la conoscenza o meno di problemi analoghi. Durante le discussioni a grande gruppo sono state osservate le strategie adottate per la risoluzione. Inoltre, in diversi momenti della settimana sono state svolte delle interviste individuali che hanno permesso di approfondire e chiarire le strategie utilizzate dagli allievi nella risoluzione, e di indagare le modalità di lavoro e la trasposizione di esse nei problemi analoghi.
Successivamente, in fase di analisi, sono stati creati dei grafici per poter rappresentare al meglio quanto emerso dalla classe e per facilitare il confronto tra le strategie utilizzate e l'osservazione di analogie nei protocolli risolutivi. L'analisi ha visto una prima parte più generale sull'intera classe e successivamente una selezione su alcuni allievi in particolare per osservare nel dettaglio l'evoluzione delle risoluzioni del singolo allievo e la presenza di analogie nelle sue risoluzioni individuali. A conclusione dell'analisi relativa all'analogia, per ogni fase è stato approfondito uno studio di caso riguardante due allievi T. e N. osservando l'evoluzione delle loro strategie nelle diverse risoluzioni. T. e N. sono stati scelti perché nelle diverse risoluzioni è possibile osservare delle analogie evidenti e significative seppur diverse tra loro. Inoltre, i due allievi presentano differenti conoscenze e capacità a livello matematico, il secondo riscontra maggiori difficoltà rispetto al primo nella risoluzione dei problemi e più in generale nelle attività di matematica. È stato interessante osservare le risoluzioni di due alunni con competenze differenti al fine di comprendere le loro riflessioni e ragionamenti nella risoluzione dei problemi proposti.
Attraverso i problemi di logica proposti nell'itinerario si è voluta osservare ed analizzare una doppia relazione: da una parte, come l'uso delle rappresentazioni – grafiche e non – possa rivelare l'emergere di strategie e processi analoghi nella risoluzione del problema; dall'altra, come l'emergere dell'analogia permetta l'osservazione di un'evoluzione delle rappresentazioni grafiche a supporto della risoluzione del problema.

4 Il percorso e le analisi

La successione dei problemi, proposta nella **Tabella 1**, ha accompagnato gli allievi lungo un percorso graduale di difficoltà, valorizzando l'analogia tra situazioni diverse e incoraggiando l'utilizzo di molteplici strategie risolutive.

Intervento	Attività	Durata
Introduzione	Introduzione sul tema della logica e proposta di problemi e giochi di logica tra cui "Il lupo, la capra e i cavoli".	2 UD
Fase 1: problemi di attraversamento		
Problema 1	"Agenti e detenuti".	2 UD
Problema 2	"Una gita in famiglia".	2 UD
Problema 3	"Il ponte".	2 UD
Condivisione	Discussione sui problemi di attraversamento.	1 UD
Fase 2: problemi con i fiammiferi		
Problema 4	"Cinque quadrati congruenti".	2 UD
Problema 5	"Otto quadrati congruenti".	2 UD
Problema 6	"Il pesce".	2 UD
Problema 7	"Il granchio".	2 UD
Condivisione	Discussione sui problemi con i fiammiferi.	1 UD
Fase 3: torre di Hanoi		
Creazione del gioco	Spiegazione delle regole e del funzionamento della torre di Hanoi e creazione dei vari pezzi del gioco.	3 UD
Problema 8	Torre di Hanoi con tre dischi.	2 UD
Problema 9	Torre di Hanoi con quattro dischi.	2 UD
Problema 10	Torre di Hanoi con cinque dischi.	2 UD
Condivisione	Discussione sulla torre di Hanoi.	1 UD

Tabella 1. Articolazione operativa del percorso.

Le attività proposte si sono articolate in tre momenti principali. Nel primo, gli allievi hanno affrontato individualmente il problema proposto, cercando di applicare strategie risolutive e di esplorare possibili percorsi in maniera autonoma; qualora fosse necessario, dopo una prima parte individuale, gli allievi in difficoltà hanno potuto collaborare con un compagno al fine di condividere le proprie idee e strategie nella risoluzione del problema. Successivamente, nel secondo, le soluzioni e le procedure adottate sono state condivise all'interno del gruppo classe: in questo momento di discussione collettiva gli allievi hanno proposto alla lavagna le strategie utilizzate, condiviso le difficoltà riscontrate e sottolineato le analogie con problemi affrontati in precedenza. Infine, nel terzo momento, si è promosso un confronto metacognitivo sulle strategie più efficaci, sulle possibili alternative e sulle procedure da consolidare per poter affrontare con maggiore sicurezza i problemi successivi, favorendo così

l'acquisizione di competenze di pensiero strategico e di riflessione sul processo risolutivo. Alla fine di ogni attività sono state svolte delle interviste individuali con alcuni allievi per andare ad approfondire alcuni elementi significativi emersi durante i vari momenti di risoluzione e condivisione.
Per ciascun problema si è prestata particolare attenzione alle modalità di rappresentazione dei dati e delle risoluzioni degli allievi. Riguardo ad ogni risoluzione individuale del problema si è identificato il tipo di rappresentazione scelto per elaborare le informazioni e pianificare una soluzione, ad esempio con rappresentazioni iconiche, linguistiche ecc., ma anche tabelle, schemi ecc. Separatamente, si è osservato l'utilizzo di diagrammi efficaci alla rappresentazione del movimento degli elementi nei diversi problemi. Questa osservazione ha permesso di comprendere gli strumenti utilizzati dagli allievi nell'organizzazione dei dati, il modo in cui li mettono in relazione e la misura in cui le rappresentazioni grafiche fanno parte della pianificazione strategica per la risoluzione, diventando un supporto concreto al pensiero strategico che consente di rendere esplicite le scelte, valutare delle alternative e monitorare l'evoluzione e la progressione della risoluzione del problema.

4.1 Fase 1: problemi di attraversamento

Nei problemi di attraversamento, nessun allievo ha proceduto attraverso la manipolazione di oggetti concreti; tutti hanno deciso di lavorare direttamente sulla scheda raffigurando la situazione descritta dal problema e spiegando le proprie strategie risolutive.

4.1.1 Problema 1: "Agenti e detenuti"

> Il direttore di un carcere vuole far spostare 3 detenuti da una zona ad un'altra dell'area di detenzione incaricando del trasporto 4 agenti penitenziari.
> Durante il viaggio è necessario oltrepassare un fiume con una barca che può contenere al massimo 3 uomini. Il direttore prende la precauzione che gli agenti siano in ogni momento almeno pari al numero dei detenuti, vista la loro pericolosità. Come organizza gli spostamenti in barca?[6]

Nonostante il primo problema non presenti nessuna immagine, tutti gli allievi hanno proceduto tramite una rappresentazione grafica della risoluzione. La maggioranza ha realizzato una raffigurazione pittorica accompagnata da una linguistica. Due allievi hanno risolto il problema tramite una spiegazione a parole accompagnata da una rappresentazione iconica, mentre i restanti hanno optato per una rappresentazione grafica (pittorica o iconica) senza una rappresentazione linguistica (Figura 6). Tutti gli allievi hanno usato un diagramma a frecce per indicare l'attraversamento del fiume.

Figura 6. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Agenti e detenuti".

6. Tratto da: https://www.nienteperniente.it/lm3_12_gennaio/4agenti_3detenuti_s.html.

Guardando qualitativamente ai protocolli di risoluzione, indipendentemente dalla rappresentazione grafica utilizzata, gli allievi hanno evidenziato la distinzione tra agenti e detenuti attraverso degli escamotage pittorici (ad esempio, l'uso dei cappelli per le guardie, **Figura 7**) o iconici (con l'uso di × e ○ per differenziare agenti e detenuti, **Figura 8**) e hanno utilizzato delle frecce come diagramma per simboleggiare i vari viaggi effettuati.

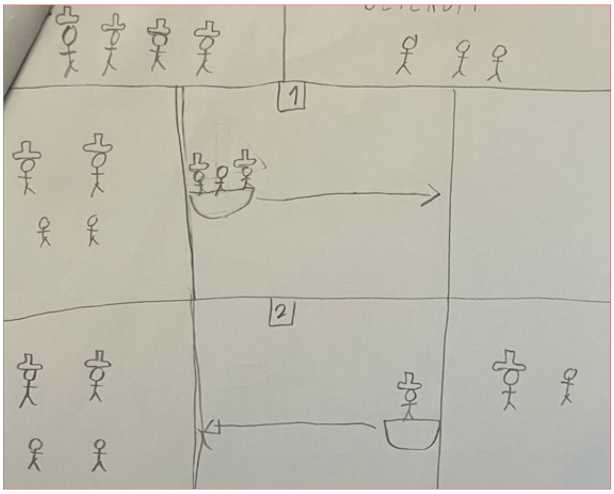


Figura 7. Protocollo di C., rappresentazione pittorica con diagramma a frecce.

Alcuni allievi hanno sentito la necessità di rappresentare le diverse situazioni che si presentano ad ogni viaggio della barca, come nel protocollo in **Figura 7**, mentre altri hanno rappresentato i diversi movimenti della barca in modo "condensato", individuando solamente quali e quanti viaggi svolgono i diversi personaggi del problema attraverso delle frecce senza esplicitare le diverse configurazioni in ogni viaggio (**Figura 8**).

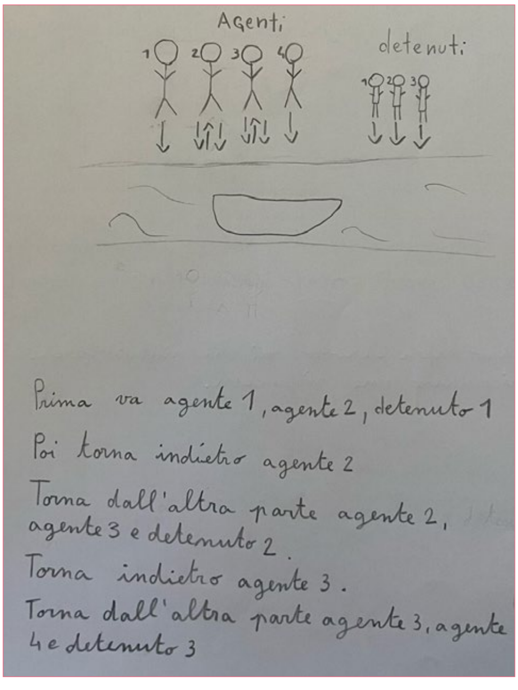


Figura 8. Protocollo di L., rappresentazione pittorica e linguistica con diagramma a frecce "condensato".

Vi è inoltre un'allieva che ha utilizzato una rappresentazione iconica molto semplice ma efficace, come si può osservare in **Figura 9**. In questo caso G. ha differenziato agenti e detenuti con i simboli × e ○ indicando poi sia i vari viaggi effettuati (**Figura 9b**), mostrando quali individui si trovano sulla barca e indicando con un diagramma a frecce se il viaggio è di andata o di ritorno, sia esplicitando qual è lo stato delle due sponde del fiume ad ogni passaggio (**Figura 9a**).

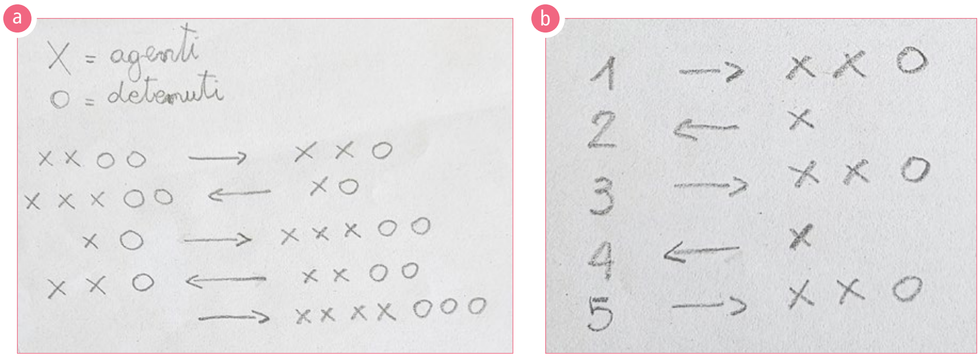


Figura 9a, b. Protocollo di G., rappresentazione iconica con diagramma a frecce.

Nei momenti di verifica ed eventuale modifica della propria strategia, la diversità delle rappresentazioni è risultata essere un valore aggiunto e un supporto alla variazione del ragionamento. Guardando alla globalità del gruppo, quattro allievi hanno necessitato di due o più tentativi di applicazione delle strategie per ottenere la soluzione. Alcuni perché inizialmente non avevano rispettato i vincoli posti dal problema, mentre altri perché la rappresentazione utilizzata in un primo momento non era efficace per la risoluzione. Per esempio, N. (**Figura 10**) ha iniziato con una rappresentazione pittorica con l'utilizzo di frecce per rappresentare i movimenti, ha poi tentato con una rappresentazione simbolica indicando ogni personaggio con una "P" (poliziotto) o con una "d" (detenuto) (sempre utilizzando delle frecce per indicare i viaggi) e ha infine proceduto con una rappresentazione linguistica. Nel primo tentativo la rappresentazione non gli permetteva di distinguere chiaramente i viaggi effettuati e gli individui che si trovavano nelle varie sponde del fiume creando confusione. Ha successivamente interrotto il secondo tentativo di rappresentazione simbolica in quanto ha riscontrato la medesima difficoltà. Nel terzo ha deciso di utilizzare una rappresentazione linguistica descrivendo a parole i viaggi effettuati.

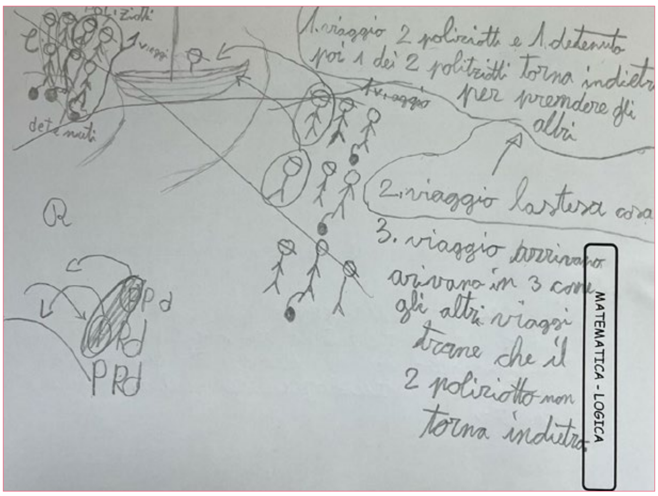


Figura 10. Protocollo di N.

4.1.2 Problema 2: "Una gita in famiglia"

> Mamma, papà e due bambini devono attraversare un fiume con una barchetta che può trasportare al massimo un adulto o in alternativa uno o due bambini. Quanti viaggi di attraversamento dovranno fare prima di arrivare tutti dall'altra parte del fiume? Quanti sono i viaggi minimi necessari per attraversare il fiume?[7]

Nel secondo problema si osserva che quattro allievi hanno proceduto alla risoluzione tramite una rappresentazione linguistica. Questi allievi, che anche nel problema precedente avevano utilizzato la spiegazione a parole dei movimenti effettuati dalla barca accompagnata dai disegni, hanno motivato la loro scelta dicendo che «descrivere a parole è più veloce e crea meno confusione». Molti hanno comunque utilizzato delle rappresentazioni grafiche (pittoriche o iconiche) a supporto dello scritto o hanno unicamente rappresentato graficamente la risoluzione. Anche in questo caso tutti gli allievi che hanno optato per una rappresentazione iconica o pittorica, hanno accompagnato i disegni con un diagramma a frecce per indicare il movimento della barca o gli spostamenti effettuati (Figura 11).

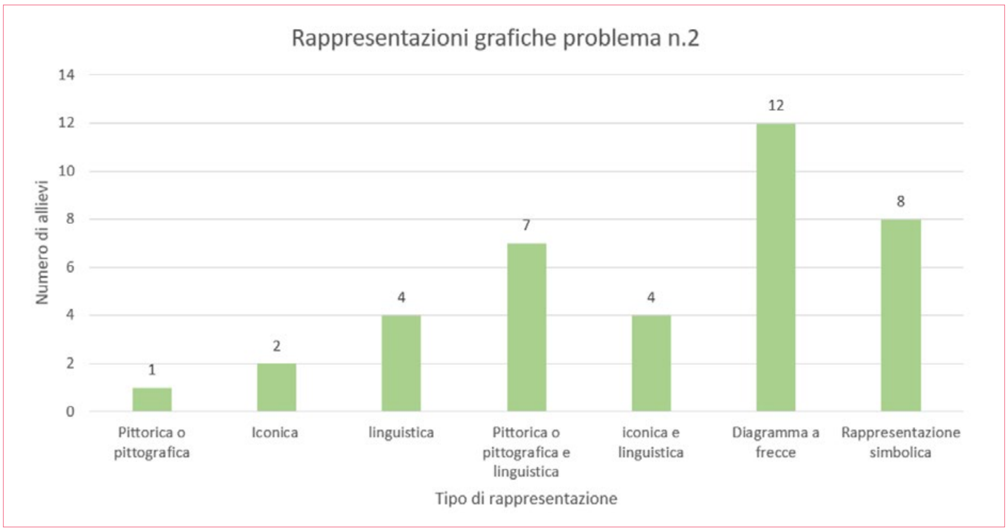


Figura 11. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Una gita in famiglia".

In questo problema sei allievi hanno necessitato di più tentativi per ottenere la soluzione.
Dall'intervista con L., ad esempio, è emerso che l'allieva ha sfruttato al meglio il primo tentativo errato (la rappresentazione pittorica con frecce ad indicare gli attraversamenti del fiume con la barca) comprendendo che, traghettando prima un adulto, necessariamente questo doveva ritornare per portare la barca, trovandosi così al punto di partenza. Si riporta di seguito un estratto dell'intervista ("Ins." sta per insegnante).

Ins.: «Cosa non ha funzionato nella prima prova di risoluzione del problema?»
L.: «Ho iniziato spostando la mamma dall'altro lato del fiume. Poi ho spostato il papà però ho capito che non funzionava».
Ins.: «Cosa non funzionava?»
L.: «Ho portato la mamma e poi il papà però in realtà il papà non aveva la barca perché era ancora dalla mamma e poi se sposto prima la mamma o il papà per forza devono tornare indietro con la barca e mi ritrovo al punto di partenza. Quindi se porto i due bambini assieme posso lasciarne là uno e portare indietro l'altro».

7. Tratto da https://www.youtube.com/watch?v=pQWrxhrbuqA.

La scelta migliore per lei è stata quindi quella di iniziare trasportando i due bambini. Per risolvere il problema ha quindi utilizzato una rappresentazione linguistica accompagnata da un diagramma con le frecce ad indicare gli spostamenti (**Figura 12**).

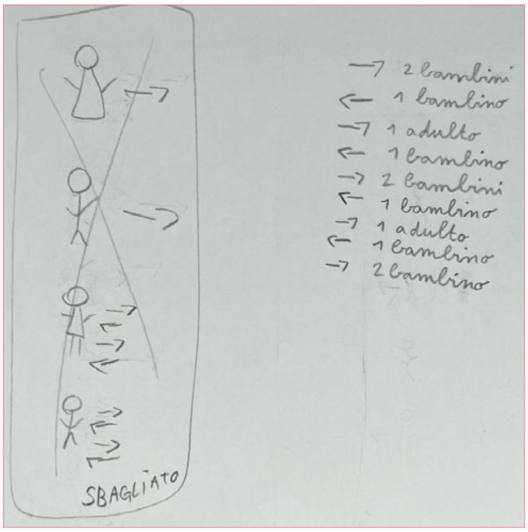


Figura 12. Protocollo di L., rappresentazione pittorica con diagramma poi abbandonata per una rappresentazione linguistica con diagramma.

4.1.3 Problema 3: "Il ponte"

> Un atleta, un giovane, un bambino ed un anziano sono davanti ad un ponte e devono andare dall'altra parte. È notte, il ponte è vecchio e parzialmente rotto e pertanto è bene che ad attraversarlo non siano più di due persone alla volta. Durante l'attraversamento occorre una torcia per vedere la strada da percorrere.
> I tempi di attraversamento sono i seguenti:
> – atleta: 1 minuto
> – giovane: 2 minuti
> – bambino: 5 minuti
> – anziano: 10 minuti
> La batteria della torcia ha una durata massima di 17 minuti.
> Come possono procedere per trasferirsi tutti dall'altra parte del ponte?[8]

Nell'ultimo problema di attraversamento si può notare che, a differenza dei precedenti, nessun allievo ha unito una rappresentazione pittorica o iconica a una linguistica. Una sola allieva ha deciso di descrivere a parole il proprio procedimento. La maggior parte della classe ha proceduto tramite una rappresentazione iconica con un diagramma a frecce per indicare gli spostamenti dei personaggi. Molti hanno inoltre deciso di aggiungere le tempistiche di percorrenza di ogni individuo, utilizzando una rappresentazione simbolica con l'utilizzo di numerali indo-arabi, così da avere più controllo sulla durata della batteria (**Figura 13**).

8. Tratto da https://www.7ecnologie.it/01-problem-solving/02-problemi-di-logica/02-attraversamento-del-ponte.

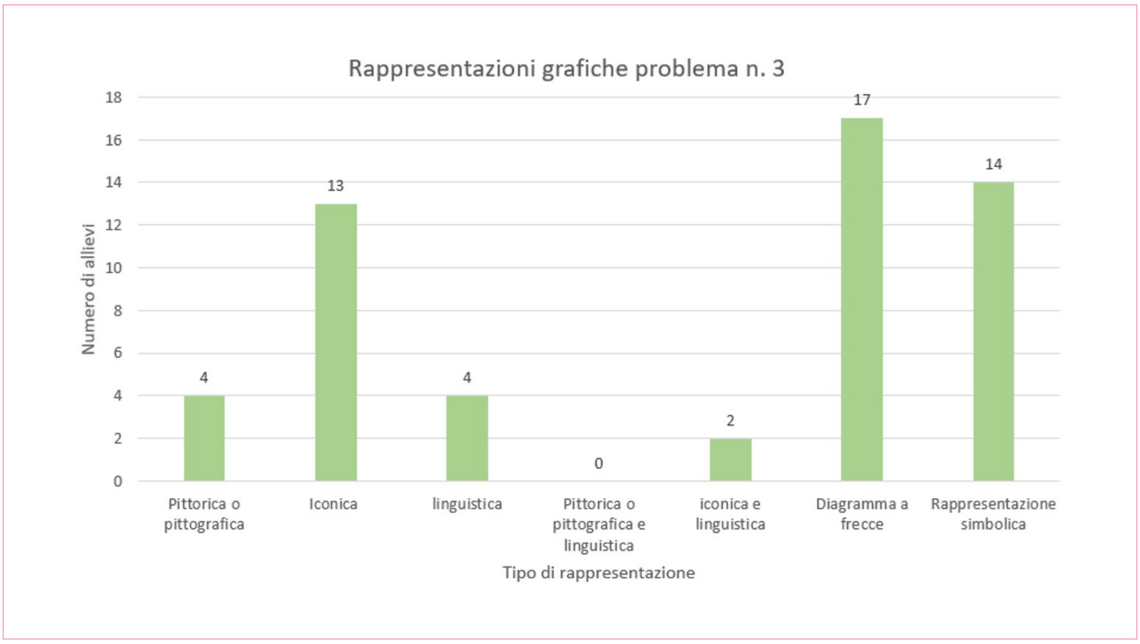


Figura 13. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Il ponte".

Si può notare in questo problema un'inversione dei risultati rispetto al problema precedente: sono ora 12 gli allievi che hanno necessitato di più tentativi per ottenere il risultato. In fase di condivisione è emerso che quasi tutti hanno iniziato la risoluzione spostando il bambino e l'anziano. Così facendo però uno dei due era costretto a tornare indietro impiegando 5 o 10 minuti, allungando notevolmente le tempistiche di completamento degli attraversamenti, oltre il limite massimo di 17 minuti. Procedendo in questa maniera, infatti, non si riesce in nessun caso a trasferire tutti i personaggi dall'altro lato del ponte senza scaricare la batteria della torcia.

4.1.4 Analogie nei problemi di attraversamento

Per quanto riguarda l'analogia, in riferimento ai tre problemi di attraversamento, si nota che nonostante siano molto simili tra loro, alla domanda: «Conoscevi già un problema analogo a questo?», circa metà della classe ha risposto di no (Figura 14).

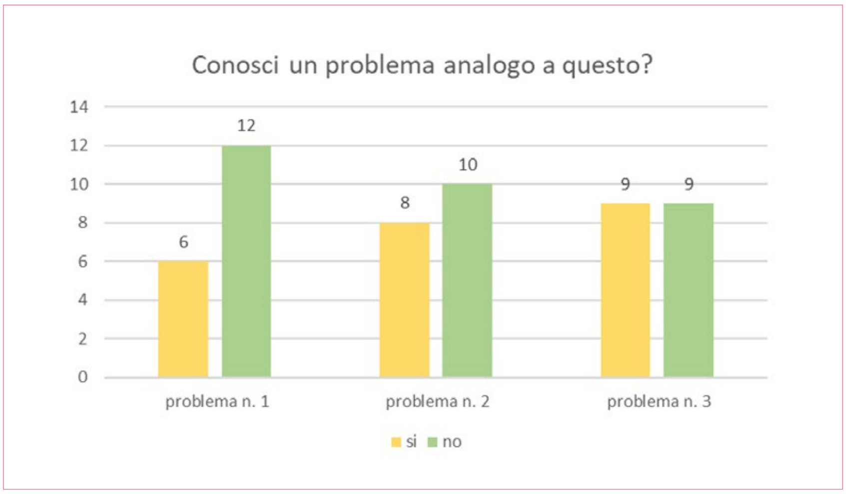


Figura 14. Risposte alla domanda del questionario riguardante l'analogia per i problemi di attraversamento.

Quanto emerso può essere spiegato dal fatto che, molto spesso, gli allievi utilizzano l'analogia in maniera inconsapevole riproducendo disegni o strategie simili a quelle già effettuate in problemi analoghi, senza essere però coscienti di sfruttare le proprie conoscenze pregresse.

Evoluzione delle strategie di T.

Analizzando nello specifico le risposte alla domanda dell'allievo T. nei primi tre problemi, nella prima risoluzione afferma di conoscere già un problema simile riferendosi a "Il lupo, la capra e i cavoli", mentre nei due problemi successivi afferma di non conoscerne di analoghi. Dalle risposte si evince che T. non è realmente consapevole dell'analogia, analizzando le sue risoluzioni è però possibile osservare delle analogie nelle rappresentazioni e nelle strategie adottate (**Figura 15a, b, c**).

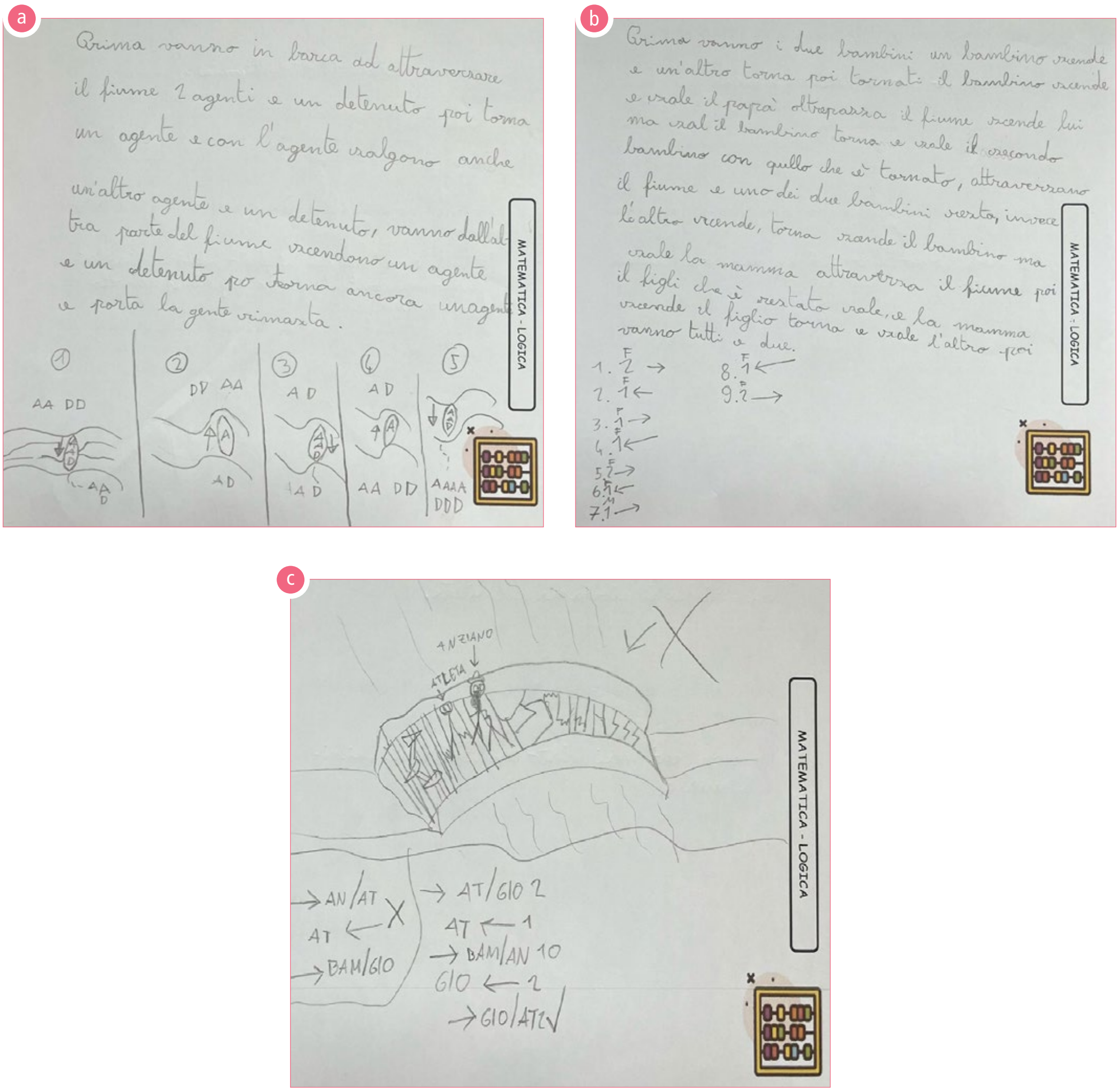


Figura 15a, b, c. Protocolli di T. dei problemi di attraversamento.

Nei primi due problemi T. inizia con una rappresentazione linguistica. Nel primo aggiunge in seguito una rappresentazione pittorica e simbolica accompagnata da un diagramma a frecce, mentre nel secondo si limita a una rappresentazione simbolica con un diagramma. Nel terzo problema invece abbandona la rappresentazione linguistica ma mantiene una rappresentazione pittorica, e una simbolica accompagnata da un diagramma a frecce.

Per quanto riguarda la scelta delle rappresentazioni simboliche, T. ha sempre deciso di utilizzare delle lettere per distinguere i vari attori in gioco: A/D per il primo problema, F/M/P per il secondo (aggiungendo 1 o 2 per indicare quando i due figli viaggiano separati o insieme) e AT/GIO/BAM/AN per il terzo problema. A differenza di alcuni suoi compagni che li hanno numerati o segnalati utilizzando simboli differenti, T. non ha fatto distinzione tra i quattro agenti, i tre detenuti o tra i due figli; avendo capito che per i diversi elementi valevano le stesse condizioni all'interno del problema.
Si possono inoltre notare delle evoluzioni nelle risoluzioni: nella prima T. ha aggiunto il fiume e le sue sponde, mostrando chi si trovava sulla barca e chi ai lati, avvicinandosi ancora a una rappresentazione pittorica. Nella seconda ha omesso i dettagli grafici indicando unicamente i numeri dei viaggi e chi si trovava sulla barca specificando con un diagramma a frecce se lo spostamento era di andata o di ritorno. Per il terzo problema invece ha omesso totalmente la rappresentazione linguistica, probabilmente perché aveva già affinato delle strategie nelle risoluzioni precedenti. In questo ultimo problema T. ha però iniziato con un primo tentativo di rappresentazione pittorica, che gli è servita per capire la configurazione generale degli elementi del problema, abbandonandola subito per procedere con due nuovi tentativi di rappresentazione simbolica accompagnata da un diagramma a frecce. In fase di colloquio T. ha riportato che la rappresentazione pittorica è stata abbandonata perché non sarebbe stata efficace ai fini della risoluzione, afferma infatti che «con il ponte disegnato non riuscivo a mettere tutti i viaggi, avrei dovuto disegnare altri mille ponti e diventava troppo lungo». Ha quindi proceduto utilizzando la stessa strategia che era risultata efficace nella precedente risoluzione.

Evoluzione delle strategie di N.

Prendendo ora le risoluzioni di un altro allievo, N., si possono osservare strategie e analogie differenti (Figura 16a, b, c).

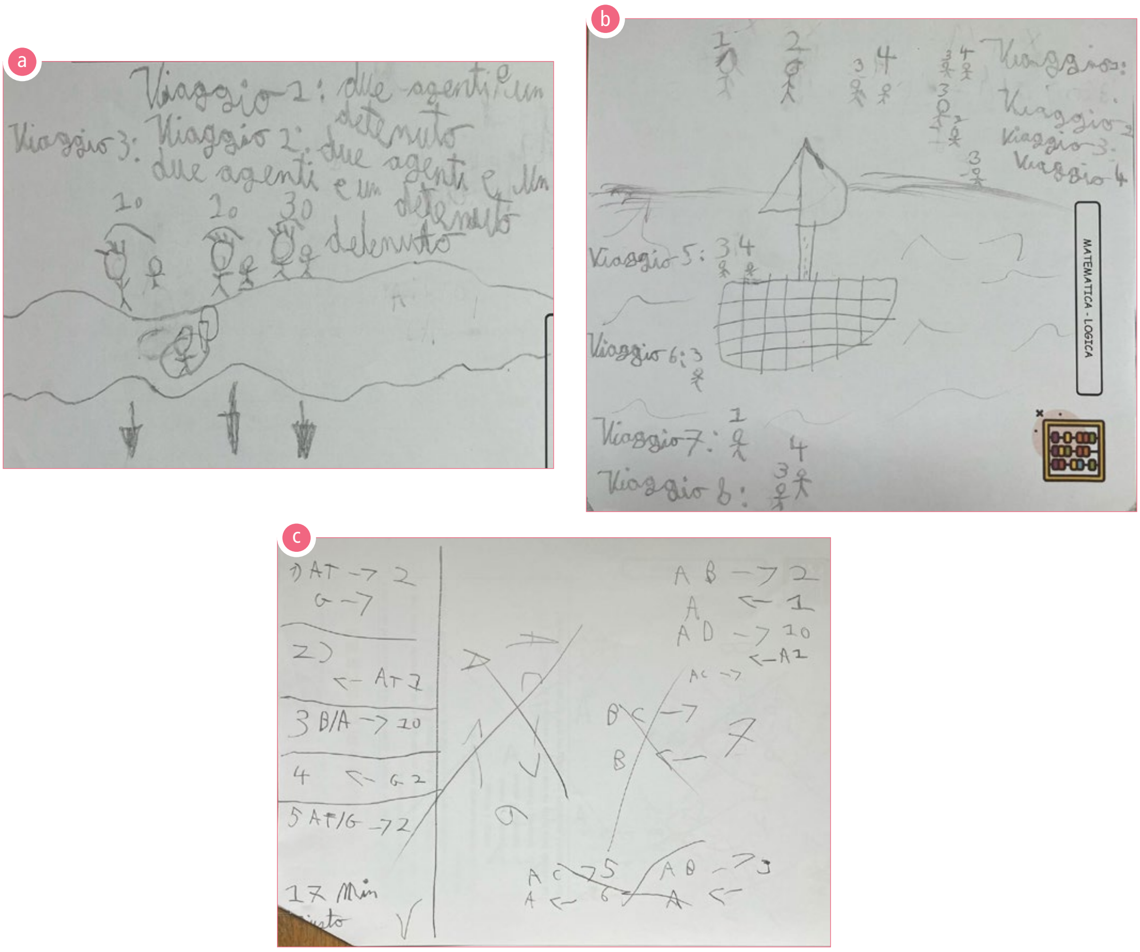


Figura 16a, b, c. Protocolli di N. dei problemi di attraversamento.

N. ha proceduto in maniera simile nei primi due problemi, inserendo una rappresentazione pittorica e iconica seguita da una linguistica molto sintetica. La sua rappresentazione iconica risulta essere più incompleta e meno comprensibile rispetto a quella di T. Nella seconda risoluzione si nota un'evoluzione: invece di scrivere chi si spostava in ogni viaggio, ha rappresentato gli individui con un disegno specificando con un numero di chi si trattasse.
Dalle immagini si può osservare come il metodo di N. cambia radicalmente nel terzo problema, questa variazione può essere dovuta all'osservazione dei protocolli dei compagni o a una necessità di essere più sintetico in quanto il problema risulta essere più complesso. Osservando i tentativi effettuati nel terzo problema si vede che non sono casuali, infatti N. ha più volte interrotto la risoluzione senza arrivare al termine accorgendosi di aver impiegato già troppo del tempo a disposizione senza riuscire quindi ad arrivare alla fine degli spostamenti con la torcia ancora funzionante. N. ha rappresentato i viaggi tramite una sintetizzazione del nome degli individui, accompagnandoli con un diagramma a frecce per indicare il tragitto di andata/ritorno inserendo anche i tempi di percorrenza. Così facendo ha avuto un controllo sulle tempistiche di utilizzo della torcia che gli ha permesso di individuare i vari attori in gioco e di modificare la propria strategia sulla base dei tentativi errati effettuati in precedenza facilitando la risoluzione nei tentativi successivi.

4.2 Fase 2: problemi con i fiammiferi

Lavorando su questi problemi molti allievi hanno avuto la necessità di sperimentare manualmente con matite o pennarelli a rappresentare i fiammiferi presenti nell'immagine di partenza (Figura 17).

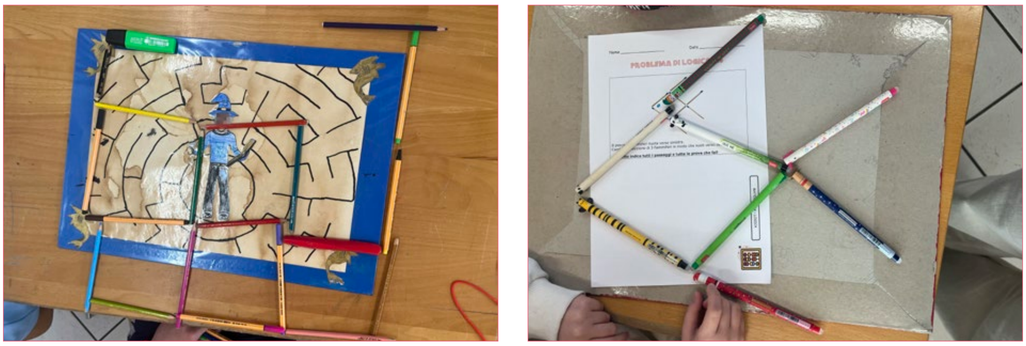
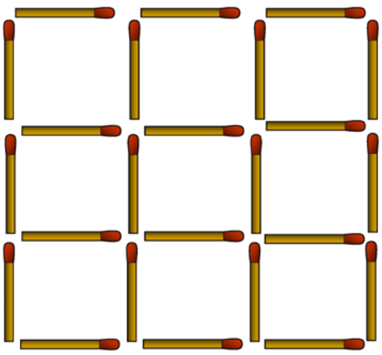


Figura 17. Esempi di manipolazione nei problemi con i fiammiferi.

4.2.1 Problema 4: "Cinque quadrati congruenti"

Rimuovi esattamente 4 fiammiferi per ottenere 5 quadrati congruenti.[9]



9. Tratto da https://www.fantasiaweb.it/v_progetto_scomescuola_2013/files/TUTTI-FIAMMIFERI.pdf.

Nel primo problema con i fiammiferi si può notare che tutti gli allievi eccetto uno hanno proceduto tramite una rappresentazione iconica raffigurando i fiammiferi con dei tratti rettilinei. L'immagine di partenza ha probabilmente influenzato gli allievi a procedere tramite una rappresentazione grafica, nonostante non fosse richiesto dal problema. Due allievi hanno usato un diagramma a frecce per mostrare i fiammiferi tolti, mentre cinque allievi hanno numerato i fiammiferi tolti, usando quindi una rappresentazione simbolica (**Figura 18**).

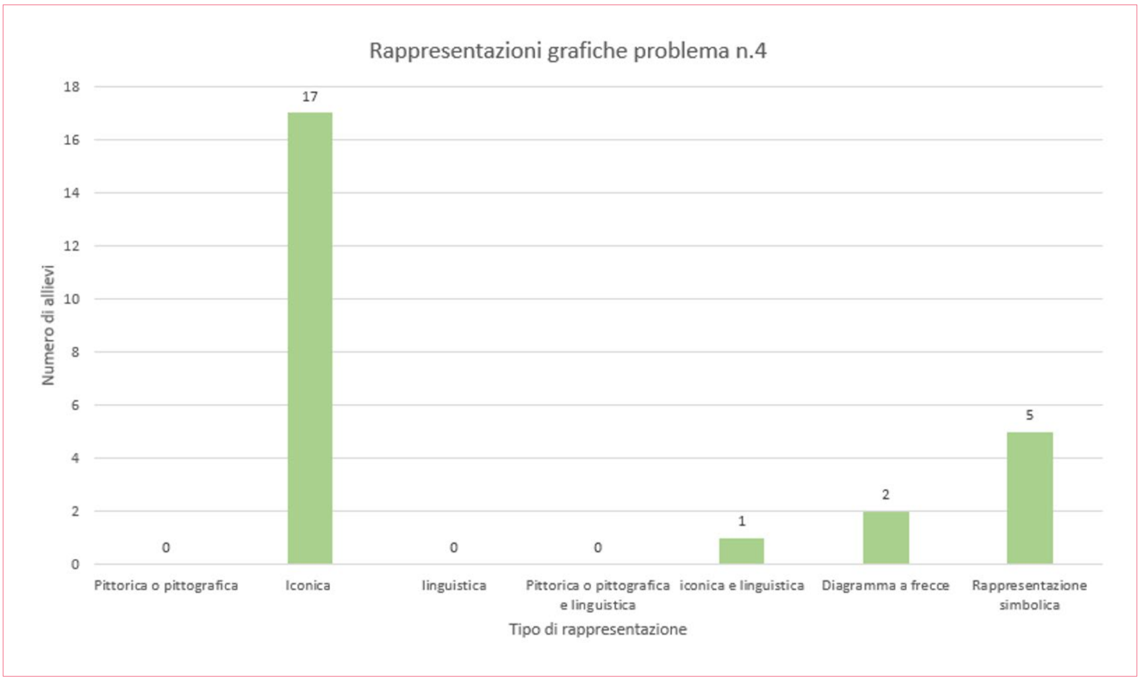


Figura 18. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Cinque quadrati congruenti".

Tra le varie risoluzioni si possono notare delle differenze: alcuni allievi hanno lavorato direttamente sull'immagine di partenza, altri hanno riprodotto lo schema marcando successivamente con una linea o una croce i fiammiferi da togliere (**Figura 19a, b, c, d**).

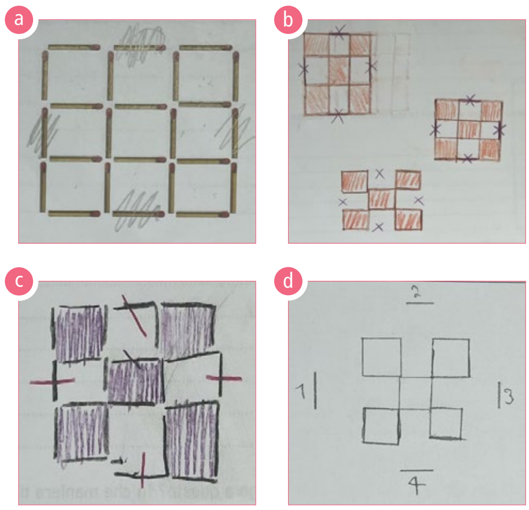
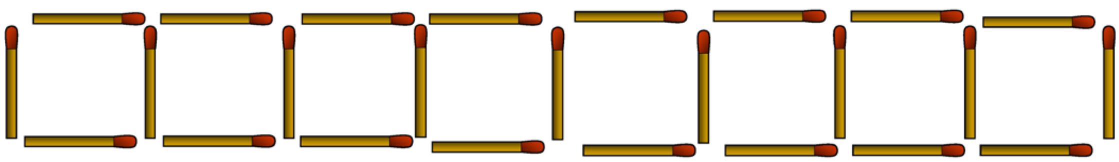


Figura 19a, b, c, d. Alcuni protocolli risolutivi del problema "Cinque quadrati congruenti".

In alcuni casi (**Figura 19a, b, c**) è stato ricreato lo schema rimuovendo i fiammiferi superflui. Nel protocollo in **Figura 19d** si può osservare un movimento più evidente, sembra che l'allievo in questione abbia cercato di mostrare effettivamente di aver rimosso i fiammiferi appoggiandoli di lato. In questo caso l'allievo ha utilizzato una rappresentazione simbolica numerando i 4 fiammiferi estratti dallo schema, questo metodo è stato molto efficace per rispettare i vincoli posti dal problema, difficoltà che hanno invece riscontrato molti altri compagni. In fase di discussione è emerso che molti provavano inizialmente a "cancellare" dei quadrati interi, eliminando ogni fiammifero che costituiva il lato di un quadrato venivano però già tolti quattro fiammiferi ogni volta che veniva eliminato il primo quadrato, non rispettando i vincoli del problema. Si è poi riflettuto sul fatto che bastasse rimuovere un fiammifero al centro di un lato esterno per "cancellare" un unico quadrato lasciando intatti quelli adiacenti, strategia che è risultata adatta per conseguire la risoluzione del problema.

4.2.2 Problema 5: "Otto quadrati congruenti"

> Questi 8 quadrati congruenti sono stati costruiti utilizzando 25 fiammiferi.
> In che modo puoi ottenere 8 quadrati congruenti utilizzando solo 22 fiammiferi?[10]



Nel secondo problema sui fiammiferi si osserva un'analogia rispetto al primo. Anche in questo caso la maggioranza degli allievi ha proceduto tramite una rappresentazione iconica, vi sono però due allievi che hanno aggiunto al disegno una spiegazione linguistica della risoluzione.
Come in precedenza gli allievi hanno risolto il problema in modalità differenti, alcuni utilizzando dei colori per mostrare le modifiche effettuate all'immagine di partenza, altri hanno raffigurato il prodotto finale e alcuni hanno utilizzato un diagramma a frecce per mostrare quali fiammiferi erano stati spostati. Chi ha usato una rappresentazione simbolica ha numerato i quadrati ottenuti muovendo i fiammiferi (**Figura 20**).

10. Tratto da https://www.fantasiaweb.it/v_progetto_scomescuola_2013/files/TUTTI-FIAMMIFERI.pdf.

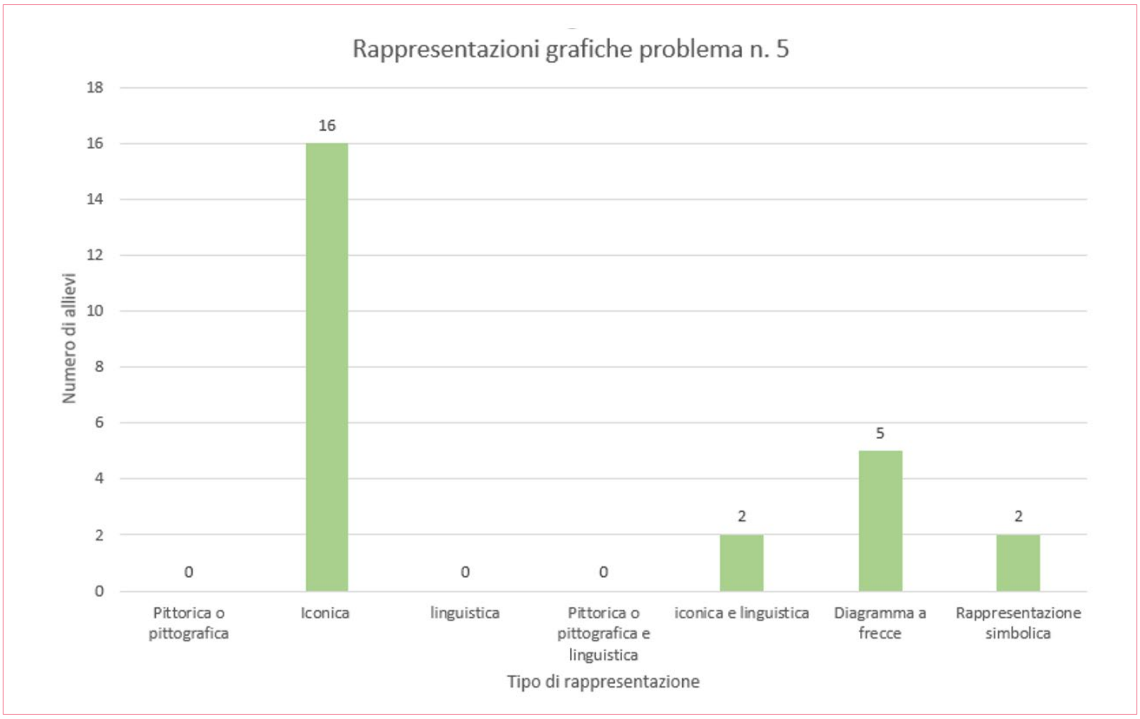


Figura 20. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Otto quadrati congruenti".

Come nel problema precedente, tra le risoluzioni si possono notare analogie e differenze. Alcuni allievi hanno lavorato direttamente sull'immagine di partenza eliminando 3 fiammiferi più a destra nella configurazione, rendendosi poi conto che rimangono solamente 7 quadrati costituiti da 22 fiammiferi (**Figura 21a**). Altri sono arrivati alla stessa conclusione provando però a disporre i 22 fiammiferi uno dopo l'altro a formare una fila di quadrati seguendo una configurazione analoga a quella proposta in partenza. Altri hanno provato a costruire gli 8 quadrati della configurazione finale partendo dalla configurazione del problema precedente: togliendo due fiammiferi da un vertice della configurazione si ottengono 8 quadrati, costituiti da 22 fiammiferi (**Figura 21b**). Altri ancora hanno disposto gli 8 quadrati in una configurazione in due file e hanno contato da quanti fiammiferi fosse composta, trovando quindi una soluzione accettabile al problema (**Figura 21c**).

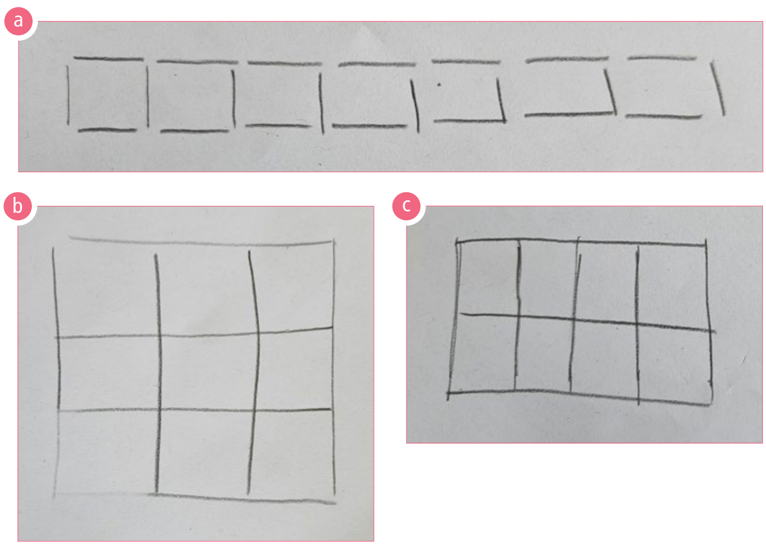
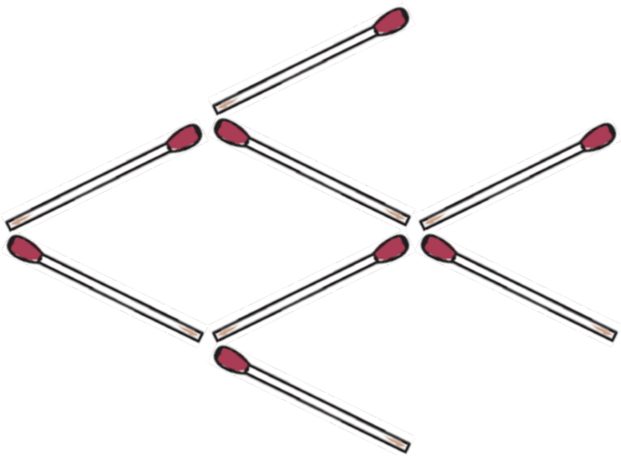


Figura 21a, b, c. Alcuni protocolli risolutivi del problema "Otto quadrati congruenti".

4.2.3 Problema 6: "Il pesce"

> Il pesce di fiammiferi nuota verso sinistra.
> Cambia la posizione di 3 fiammiferi in modo che nuoti verso destra.[11]



Si passa ora a problemi nei quali non vi è più la richiesta di rimuovere dei fiammiferi, ma di spostarne alcuni per capovolgere l'immagine di partenza. Dal grafico si evince che tutta la classe ha proceduto tramite la realizzazione di una rappresentazione iconica della soluzione e la maggior parte di loro ha usato delle frecce per rappresentare gli spostamenti dei fiammiferi nella configurazione (Figura 22).

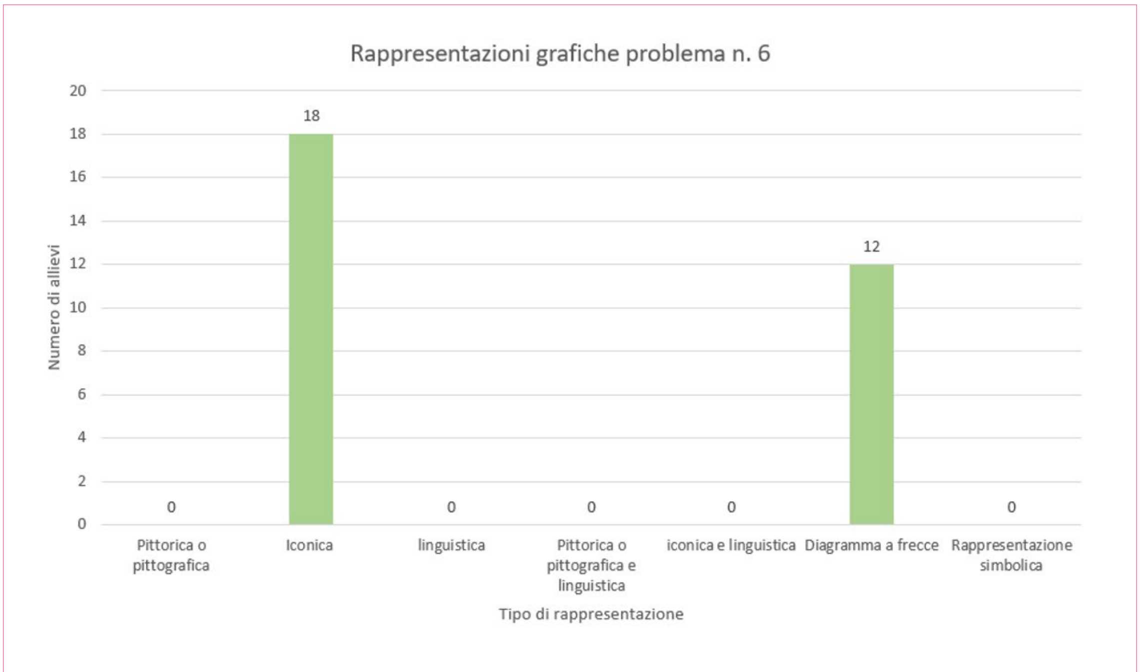


Figura 22. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Il pesce".

11. Riformulazione del problema "Il granchio" tratto da Ignátiev (1978, p. 12). Immagine elaborata da Sbaragli et al. (2021a).

Anche in questo caso, nonostante sia stato utilizzato lo stesso tipo di rappresentazione, all'interno della classe vi sono numerose differenze. Alcuni allievi hanno utilizzato dei colori per mettere in evidenza i diversi fiammiferi e facilitare l'osservazione degli spostamenti (Figura 23a). Altri hanno invece proceduto disegnando il pesce di partenza e accanto il risultato finale che si intendeva ottenere, paragonando poi le due immagini hanno spostato i fiammiferi per farle combaciare (Figura 23b). Infine, molti bambini hanno spostato (sfruttando delle frecce) i fiammiferi all'interno della configurazione (Figura 23a, c). In tutti i casi si può osservare l'intenzione di mostrare il movimento compiuto dai fiammiferi.

a b c

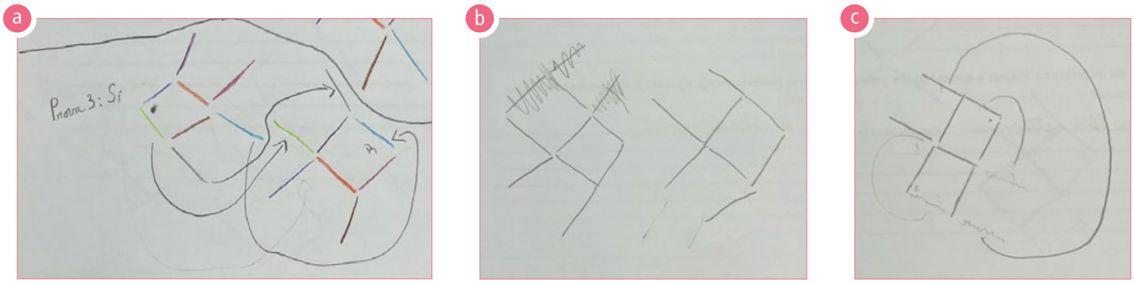
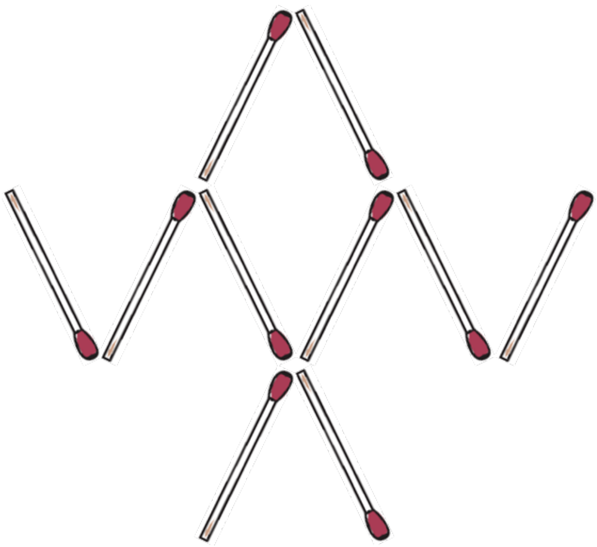


Figura 23a, b, c. Alcuni protocolli risolutivi del problema "Il pesce".

La maggior parte degli allievi ha necessitato di diversi tentativi per la risoluzione di questo problema. La più grande difficoltà è stata quella di comprendere che il pesce, nonostante debba essere capovolto da sinistra verso destra, compiuti gli spostamenti non si troverà esattamente nella medesima posizione, bensì risulterà essere traslato leggermente verso l'alto o verso il basso rispetto alla posizione di partenza.

4.2.4 Problema 7: "Il granchio"

> Il granchio di fiammiferi cammina verso l'alto.
> Cambia la posizione di 3 fiammiferi in modo che cammini verso il basso.[12]



12. Tratto da Ignátiev (1978, p. 12). Immagine elaborata da Sbaragli et al. (2021a).

Nelle risoluzioni dell'ultimo problema con i fiammiferi si può notare un'analogia nelle rappresentazioni grafiche utilizzate rispetto al problema precedente. Ancora una volta tutti gli allievi hanno risolto il problema usando rappresentazioni iconiche. In questo problema, analogo al problema "Il pesce", gli allievi hanno utilizzato nuovamente i colori per evidenziare i vari fiammiferi, così da rendere più evidente la posizione di ognuno di loro e gli spostamenti, arricchendo le illustrazioni con dei diagrammi a frecce per mostrare i movimenti dei fiammiferi (**Figura 24**). Rispetto al problema precedente vi sono stati meno studenti in difficoltà probabilmente perché consapevoli che anche in questo caso la configurazione finale risulta essere leggermente traslata rispetto all'originale.

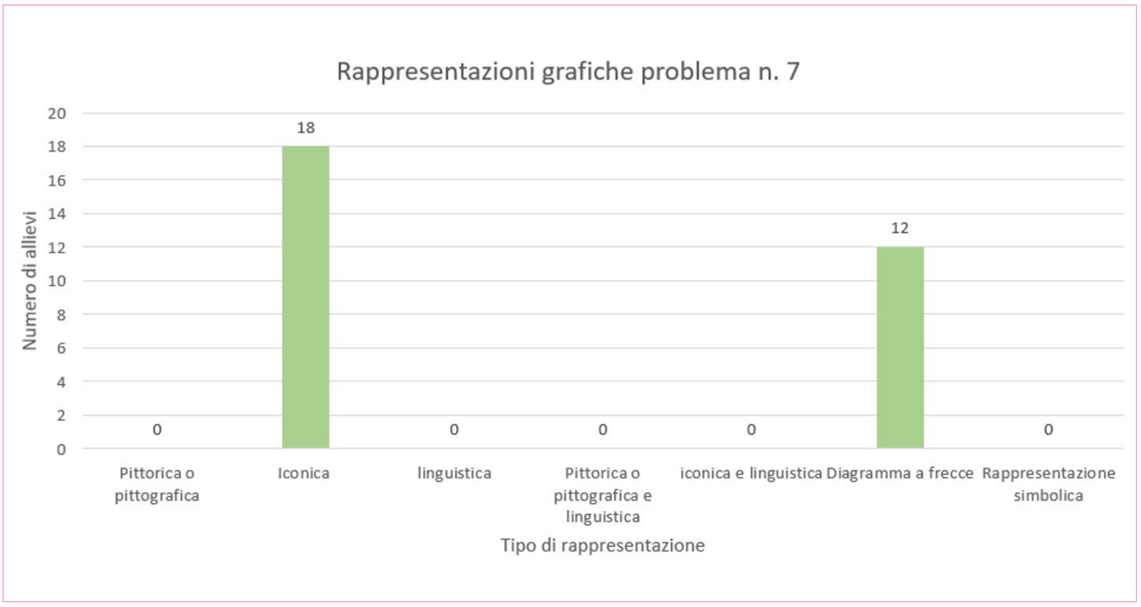


Figura 24. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Il granchio".

4.2.5 Analogie nei problemi con i fiammiferi

Come per i problemi di attraversamento, anche per quelli con i fiammiferi è sempre stato chiesto agli allievi se conoscessero dei problemi analoghi. Per ogni problema, più della metà della classe ha affermato di non conoscere nessun problema simile (**Figura 25**).

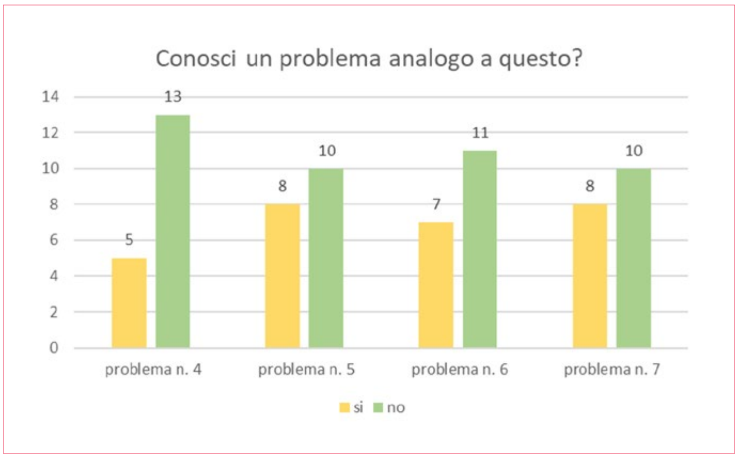


Figura 25. Analogie tra i problemi con i fiammiferi.

In riferimento al problema 4, gli allievi che hanno dichiarato di conoscere problemi analoghi hanno fatto riferimento a problemi di spostamento di monete o altri problemi con i fiammiferi visti su libri di enigmi e indovinelli. Per gli altri tre problemi, spesso gli allievi che hanno risposto di sì hanno però specificato che conoscere un problema analogo non è stato di aiuto per la nuova risoluzione, anche se, in fase di colloquio individuale, hanno poi dichiarato il contrario. Si può quindi pensare che non sia chiaro per gli allievi il significato di problema analogo, in ogni caso si possono osservare numerose analogie e similitudini nella risoluzione dei problemi, sia globalmente, sia considerando i singoli individui.

Evoluzione delle strategie di T.

Come per i problemi di attraversamento, si prendono ora in considerazione le quattro risoluzioni di un singolo allievo per analizzarle nello specifico. Nelle quattro risoluzioni di T. relative ai problemi con i fiammiferi si possono notare dei pattern ricorrenti. T. ha sempre raffigurato in modo iconico la soluzione. Nei problemi 4 e 5 l'allievo ha utilizzato delle linee per indicare quali fossero i fiammiferi da rimuovere (**Figura 26a, b**), mentre nei problemi 6 e 7 ha introdotto l'utilizzo di colori per distinguere i fiammiferi (**Figura 26c, d**). Nel primo tentativo del problema 4 (**Figura 26a**, indicato con "P. 1" che sta per "prova 1") T. ha proceduto eliminando i quattro fiammiferi centrali e un quinto al centro a destra, si è accorto che questa risoluzione era errata in quanto non rispettava i vincoli e non permetteva l'ottenimento di cinque quadrati congruenti. Nel secondo tentativo (indicato con "P. 2") ha correttamente rimosso i fiammiferi (**Figura 26a**). T. ha inoltre affermato: «Quando ho provato la prima volta mi sono accorto che togliendo quei fiammiferi lasciavo dei quadrati aperti con solo tre lati e non quattro».

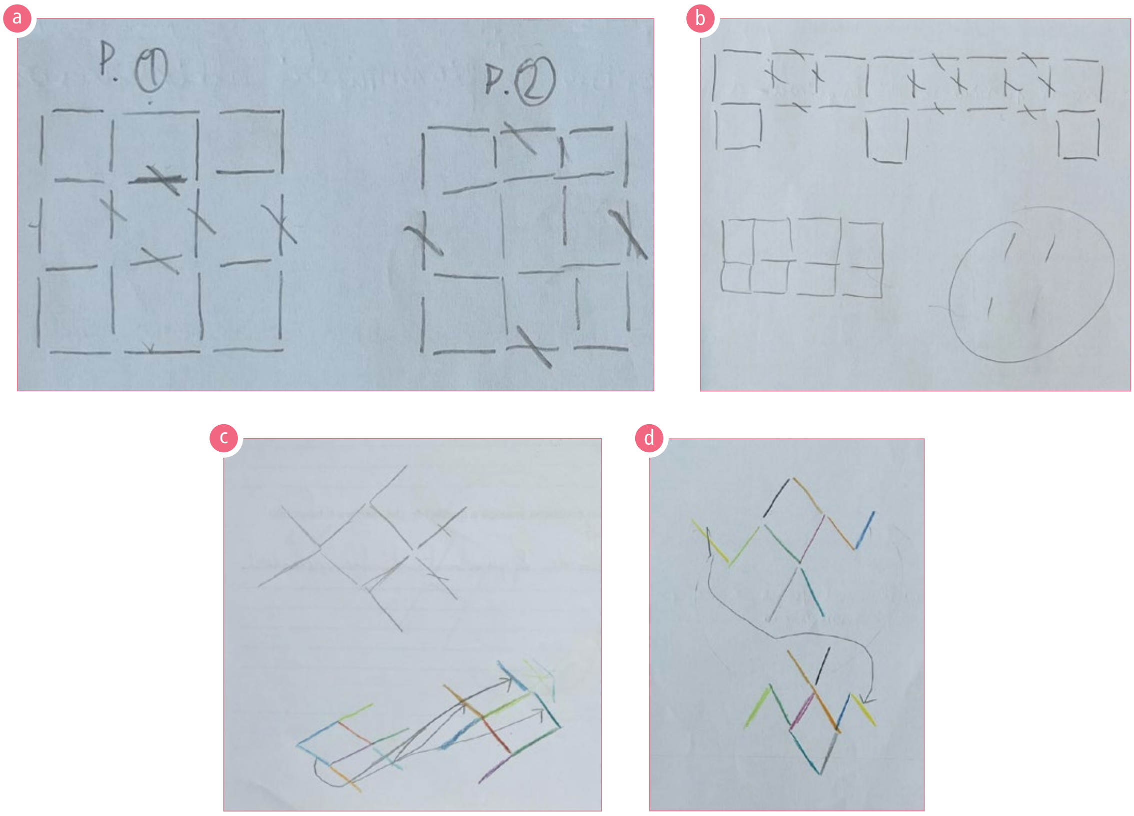


Figura 26a, b, c, d. Protocolli di T. nei problemi con i fiammiferi.

La stessa difficoltà si è ripresentata nel problema successivo, dove l'allievo, ancora tramite una rappresentazione iconica, ha rimosso dei fiammiferi lasciando dei «quadrati aperti». Dal primo tentativo (**Figura 26b** in alto) si può osservare che T. aveva compreso di non dover solamente cancellare dei fiammiferi ma anche di spostarne altri al fine di utilizzare uno stesso fiammifero come lato di più quadrati. Nel secondo tentativo (**Figura 26b** in basso) si può notare un'analogia, anche in questo caso T. ha utilizzato la strategia di sfruttare un fiammifero per più quadrati giungendo alla risoluzione del problema. Nel problema 6 si nota un'evoluzione: nel primo tentativo (**Figura 26c** in alto) T. ha ripetuto la strategia dei problemi precedenti, tracciando una linea sui fiammiferi da spostare cambiando il loro posizionamento. Nel secondo tentativo (**Figura 26c** in basso) ha invece introdotto l'utilizzo dei colori per identificare ogni singolo fiammifero accompagnando la rappresentazione iconica con un diagramma a frecce per mostrare quali fiammiferi sono stati spostati. Ottenendo buoni risultati, T. ha utilizzato la stessa strategia anche nel problema 7 (**Figura 26d**), questa volta però ha indicato con una freccia lo spostamento di un unico fiammifero.

Evoluzione delle strategie di N.

Considerando ora le risoluzioni di N., si evince che, tranne nel problema 5 (**Figura 27b**), l'allievo ha sempre necessitato di più tentativi per l'ottenimento della soluzione e ha sempre utilizzato una rappresentazione iconica.

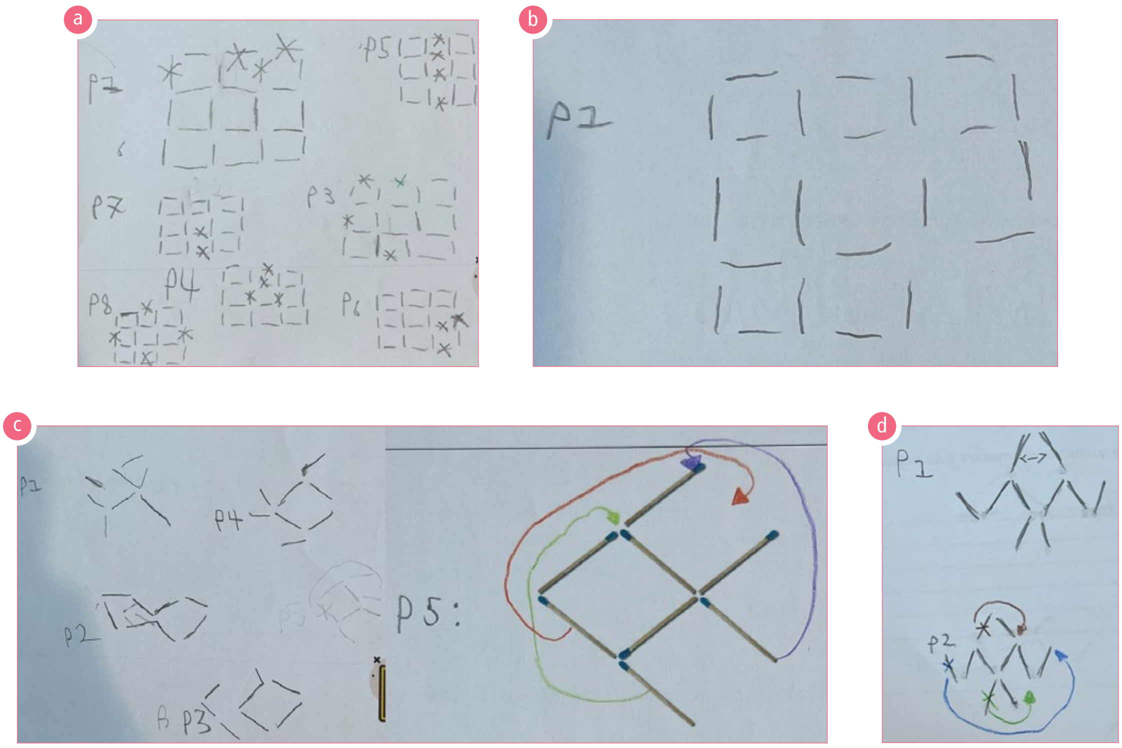


Figura 27a, b, c, d. Protocolli di N. nei problemi con i fiammiferi.

Nel problema 4 il bambino ha effettuato sette tentativi prima di ottenere la soluzione (**Figura 27a**). In tutti i tentativi si può notare una difficoltà ricorrente: la rimozione di fiammiferi lasciando dei quadrati incompleti. Nella sesta e settima risoluzione l'allievo si è interrotto togliendo solo tre e rispettivamente due fiammiferi. Si può ipotizzare che N. abbia fatto un confronto con i tentativi precedenti comprendendo di ripetere un errore. Per quanto riguarda il problema successivo (svolto l'ora successiva) N. ha affermato: «Questo è stato facilissimo, avevo disegnato così tante volte il primo problema che sapevo

fossero 9 quadrati con 24 fiammiferi. Ora devo disegnare 8 quadrati con 22 fiammiferi, quindi mi basta togliere questi due in basso» (Figura 27b). Sembra che l'allievo non abbia fatto riferimento all'immagine del problema 5, avendo ancora in mente quello precedente.
Nel problema 6 si possono notare delle difficoltà nel comprendere quali fiammiferi spostare per poter raffigurare il pesce (Figura 27c). N. ha inizialmente utilizzato una rappresentazione iconica disegnando i fiammiferi, mentre nella risoluzione finale (indicata con "P5") ha utilizzato delle frecce colorate direttamente sull'immagine di partenza per mostrare gli spostamenti. La stessa situazione, con minori difficoltà, si è riproposta nell'ultimo problema, in un primo tentativo (Figura 27d, indicato con "P1") N. ha raffigurato in modo iconico il granchio inserendo una freccia ad indicare che nella configurazione finale i due fiammiferi in alto avrebbero dovuto avere orientamenti opposti; ha poi proceduto con un secondo tentativo finale (Figura 27d, indicato con "P2") mostrando con dei colori gli spostamenti da effettuare (diagramma a frecce). In entrambi i problemi riguardanti gli animali l'allievo, a differenza dei suoi compagni, non ha mai rappresentato l'immagine finale del pesce o del granchio capovolto.

4.3 Fase 3: torre di Hanoi

Per la risoluzione della torre di Hanoi ogni allievo ha lavorato con una versione fisica del gioco creata in aula (Figura 28). Rispetto alla versione classica, vengono utilizzati dischi di cartone colorati (uguali per tutti i bambini) e una griglia con tre quadrati (A, B e C) in sostituzione ai tre pioli, dunque il gioco risulta come la torre di Hanoi classica ma vista dall'alto.

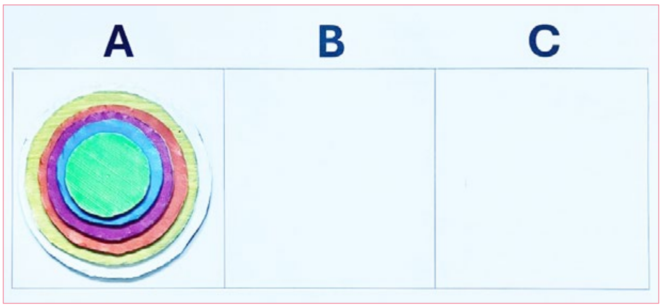


Figura 28. Torre di Hanoi realizzata in classe.

4.3.1 Problema 8: "Torre di Hanoi con 3 dischi"

Come si evince dal grafico (Figura 29) le rappresentazioni utilizzate dalla classe sono di tipo pittorico o iconico. In tutte le risoluzioni si può osservare una rappresentazione simbolica legata al numero di mosse effettuate dagli alunni. Quasi tutti hanno infatti inserito sulla sinistra o sulla destra un numero legato ai passaggi svolti. Alcuni hanno inserito la mossa «0» che rappresenta lo stato iniziale della risoluzione, con la torre impilata sulla sinistra, mentre altri hanno iniziato dalla «1» inserendo già il primo spostamento.

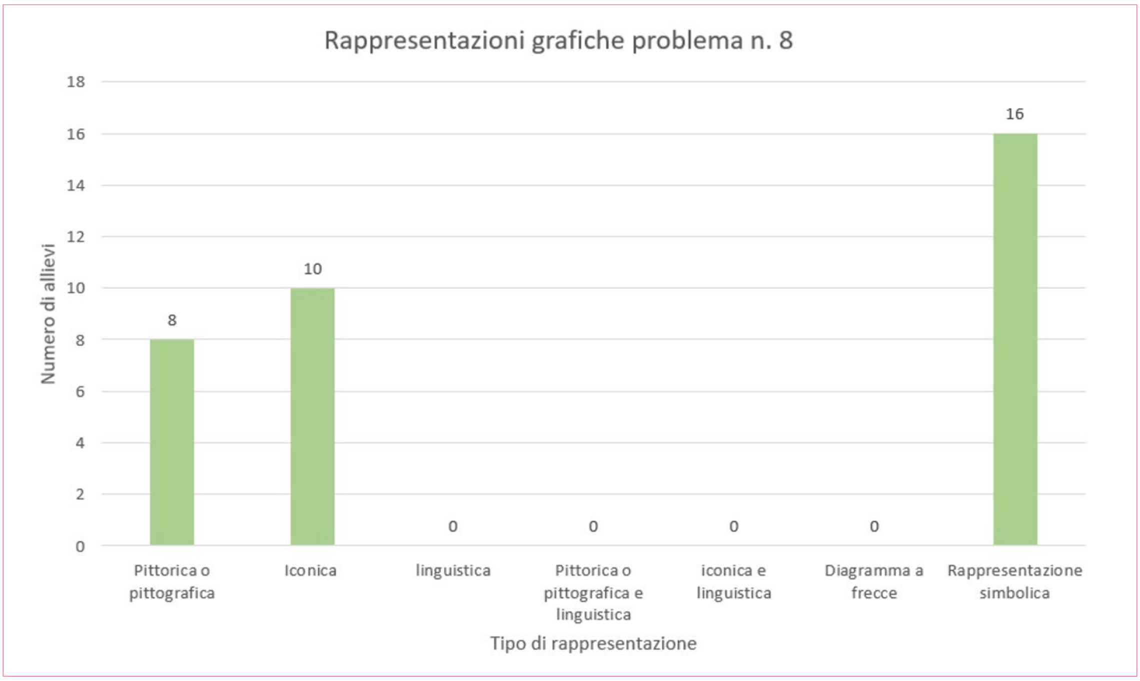


Figura 29. Modalità di rappresentazione nella risoluzione della "Torre di Hanoi con 3 dischi".

A differenza dei problemi precedenti, tutte le rappresentazioni proposte dai bambini sono iconiche o pittoriche, simili agli esempi riportati in **Figura 30a, b**. Tutti hanno disegnato la griglia mostrando gli spostamenti ad ogni mossa. Nel primo protocollo (pittorico, **Figura 30a**) l'allieva ha riprodotto fedelmente la griglia e i tre dischi iniziali, disponendoli in ordine uno sopra l'altro. Nel secondo (iconico, **Figura 30b**), invece, l'allieva ha stilizzato i dischi utilizzando delle linee colorate, posizionandole anche in questo caso in ordine crescente una sull'altra. Tutti gli allievi hanno manipolato la torre di Hanoi reale, ma solo alcuni hanno riportato sulla scheda anche i tentativi errati. La maggior parte degli allievi ha unicamente rappresentato la risoluzione corretta.

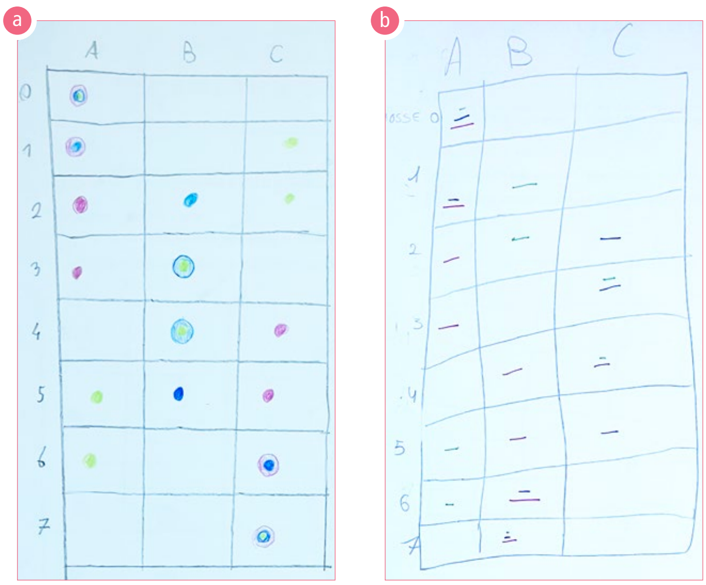


Figura 30. Esempi di rappresentazione del problema 8: **a)** Risoluzione pittorica; **b)** Risoluzione iconica.

4.3.2 Problema 9: "Torre di Hanoi con 4 dischi"

Anche in questo caso gli allievi hanno optato per una rappresentazione pittorica o iconica (Figura 31). Questa volta però risultano essere notevolmente più numerose quelle iconiche, probabilmente perché il numero di mosse da effettuare è aumentato e risulta più immediato stilizzare la raffigurazione dei vari dischi della torre. Così come per il problema 8 le rappresentazioni degli allievi sono molto simili tra loro, differiscono unicamente per le mosse effettuate: alcuni sono riusciti a spostare l'intera torre compiendo il numero minimo di mosse possibili, ovvero 15, altri invece hanno ottenuto la soluzione utilizzando delle mosse in più.

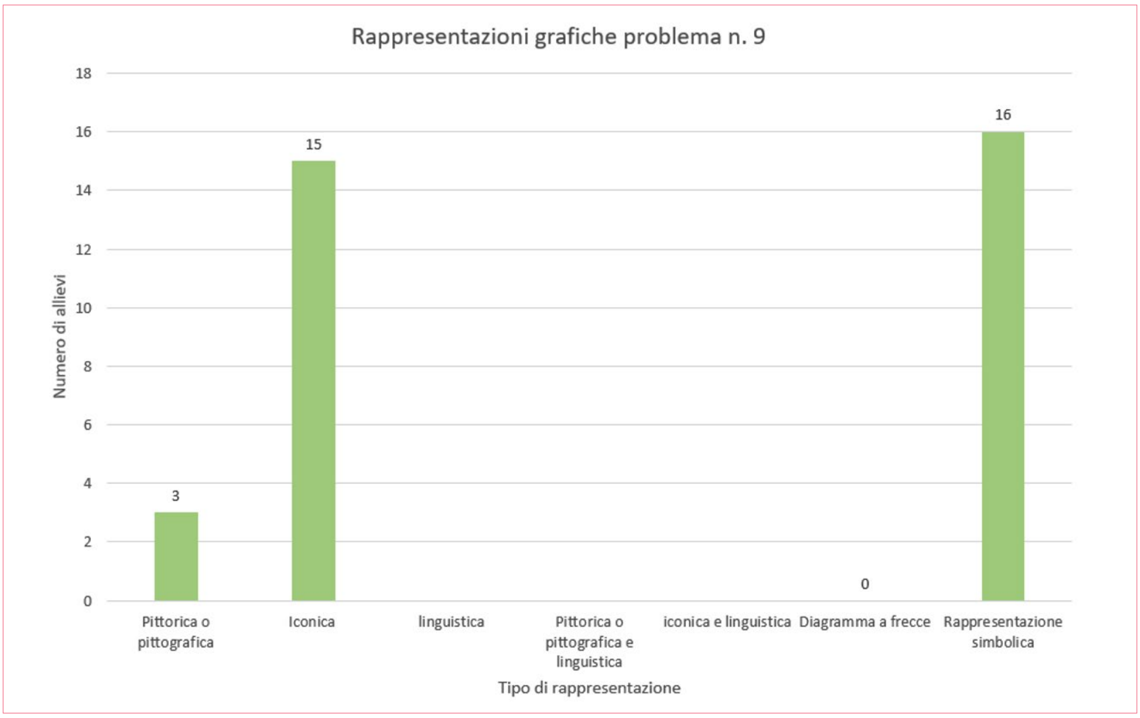


Figura 31. Modalità di rappresentazione nella risoluzione della "Torre di Hanoi con 4 dischi".

4.3.3 Problema 10: "Torre di Hanoi con 5 dischi"

Anche nell'ultimo problema quasi la totalità della classe ha proceduto tramite una rappresentazione iconica degli spostamenti (Figura 32).

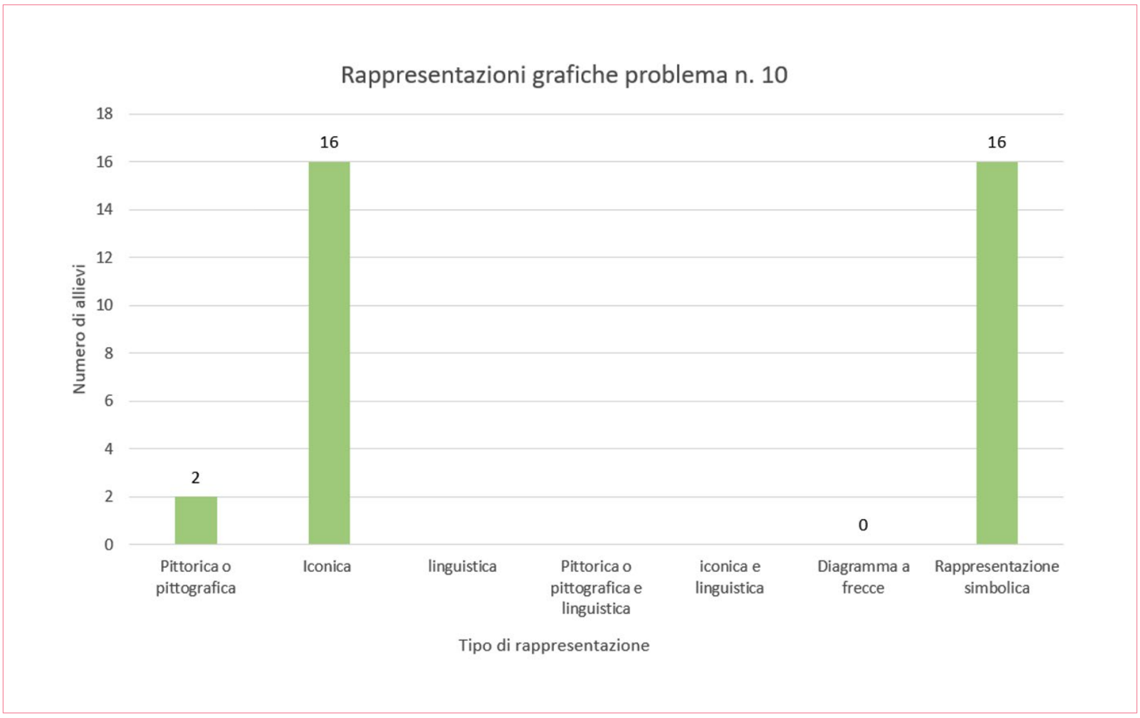


Figura 32. Modalità di rappresentazione nella risoluzione della "Torre di Hanoi con 5 dischi".

Oltre ai modelli riportati in Figura 30, in questo caso un allievo (S.) ha utilizzato una rappresentazione differente e più efficace disegnando in una tabella con le celle molto strette (che non gli permettono di raffigurare i dischi uno sopra l'altro come nella realtà) dei cerchietti a rappresentare i dischi, posizionando in ogni cella a sinistra il disco che si trova più in basso e in ordine alla sua destra gli altri (Figura 33).

Figura 33. Protocollo di S., rappresentazione iconica.

Molti bambini hanno identificato nel corso della risoluzione dei tre problemi la sequenza di spostamenti che permette di risolvere la torre di Hanoi indipendentemente dal numero di dischi utilizzati. Ripetendo sempre determinati movimenti (mettere il cerchio più piccolo avanti di una posizione, poi eseguire l'unica altra mossa possibile), si riesce infatti a procedere allo spostamento completo della torre. Scoprire questa strategia vincente ha permesso ai bambini di raffigurare in maniera iconica o pittorica la soluzione senza più sperimentare manualmente con i materiali concreti a disposizione, risolvendo il gioco strategico al primo tentativo. Ha inoltre permesso loro di generalizzare il problema, gli allievi che hanno individuato la strategia vincente saranno sempre in grado di completare lo spostamento della torre indipendentemente dal numero di dischi presenti.

4.3.4 Analogie nei problemi della torre di Hanoi

Nel primo problema sulla torre di Hanoi solo un bambino ha dichiarato di conoscere il gioco e di averci già giocato senza però aver riflettuto sulle regole e sulle strategie risolutive (Figura 34). Nonostante si trattasse esattamente della stessa torre, nei problemi 9 e 10, vi sono alcuni allievi che hanno dichiarato di non conoscere problemi analoghi. Si può ipotizzare che gli allievi abbiano interpretato la domanda pensando ad altri giochi analoghi ma diversi dalla torre di Hanoi.

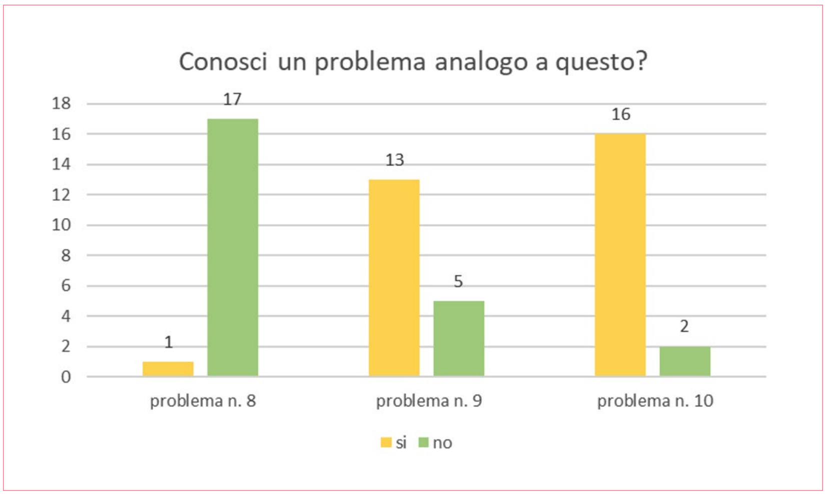


Figura 34. Analogie nella risoluzione della torre di Hanoi.

Vi è un'analogia evidente nelle tipologie di rappresentazioni pittoriche e iconiche raffigurate dagli allievi. In alcuni casi è possibile osservare delle analogie anche nella sequenza di spostamenti, come l'uso del meccanismo risolutivo che lo stesso allievo utilizza nella risoluzione di problemi successivi. In altri casi invece i movimenti non seguono una logica ricorrente, ma rispettano i vincoli posti dal problema.

Evoluzione delle strategie di T.

Osservando le risoluzioni di T., si può notare che nella risoluzione con tre dischi l'allievo ha proceduto tramite una rappresentazione pittorica (Figura 35a), mentre in quelle successive è passato ad una iconica (Figura 35b, c). Questo cambiamento può essere dovuto all'aumento dei dischi e di conseguenza delle mosse da raffigurare, la rappresentazione iconica risulta essere più stilizzata e di conseguenza più veloce.

Figura 35a, b, c. Protocolli di T. nella risoluzione della torre di Hanoi.

Osservando nello specifico le mosse effettuate si può vedere che, nel problema 8 non vi è ancora l'utilizzo di una sequenza ricorrente di movimenti (**Figura 35a**). L'allievo riesce comunque a trovare la soluzione con sette spostamenti (mosse minime per risolvere la torre con tre dischi). Nel problema 9 si nota un'evoluzione: T. ha individuato la sequenza risolutiva (**Figura 35b**). Si osserva infatti che il bambino ripete sempre le seguenti mosse: sposta il cerchio più piccolo in avanti di una cella e successivamente esegue l'unica mossa possibile. Una volta arrivato con il cerchio più piccolo nella casella più a destra lo riporta in quella a sinistra continuando ad applicare l'algoritmo. Nel problema 10 T. ripete lo stesso algoritmo trovando la soluzione con facilità (**Figura 35c**).

Evoluzione delle strategie di N.

N., d'altro canto, ha proceduto in tutti e tre i problemi utilizzando una rappresentazione iconica della soluzione (**Figura 36a, b, c**).

Figura 36a, b, c. Protocolli di N. nella risoluzione della torre di Hanoi.

A differenza del compagno, N. non ha mai indicato il numero di mosse di fianco alla griglia, questo lo ha obbligato quindi in un secondo momento a dover ricontare le mosse effettuate. La risoluzione del problema 8 è avvenuta al primo tentativo (**Figura 36a**), anche N. non ha utilizzato la sequenza risolutiva

come il compagno T. Il problema 9 è risultato per lui più complesso, necessitando di tre tentativi (Figura 36b). Nel primo l'allievo si è interrotto a metà della quinta mossa, in quanto ha compreso di essere tornato nella stessa posizione della terza mossa. Nel secondo ha interrotto il processo all'ottava mossa, mentre il terzo tentativo si è concluso in 17 spostamenti. In quest'ultima risoluzione N. ha riprodotto le prime quattro mosse uguali ai tentativi precedenti, apportando però delle modifiche nel quinto spostamento. Si può notare una ciclicità nei suoi movimenti, l'allievo ha sempre iniziato spostando il primo disco verso destra di due caselle, il secondo nella casella al centro spostandoci poi sopra il più piccolo. Lo stesso processo è stato poi ripetuto con terzo disco, aggiustando e modificando le mosse successive al fine di rispettare i vincoli posti dal problema.
Anche nella risoluzione del problema 10, che vede la torre formata da cinque dischi, N. riporta le prime 8 mosse in maniera analoga al problema 9 (Figura 36c). Apporta poi delle modifiche in quanto si trova a dover spostare un disco in più. La torre viene spostata in 34 mosse finali, l'allievo non ha scoperto la sequenza risolutiva più efficace; è però riuscito a trovare la propria strategia per risolvere la torre.

5 Riflessioni sul percorso

5.1 Rappresentazioni grafiche, evoluzione verso l'efficacia

Uno degli aspetti più rilevanti riscontrati nelle analisi del percorso è l'evoluzione nell'uso delle rappresentazioni da parte degli allievi. Inizialmente, molti allievi realizzavano rappresentazioni pittoriche dettagliate, ma non sempre efficaci. In alcuni casi, soprattutto nei problemi di attraversamento, gli allievi accompagnavano i disegni a descrizioni linguistiche, questo porterebbe alla conferma che le rappresentazioni iniziali non erano sufficientemente esemplificative e necessitavano di un'ulteriore spiegazione. Proseguendo nell'analisi dei problemi nelle diverse fasi si può osservare un passaggio verso le rappresentazioni iconiche e simboliche, che risultano essere più essenziali, più chiare e comode nella risoluzione del problema. I diagrammi a frecce, usati da quasi tutti gli allievi in accompagnamento alle diverse rappresentazioni, non solo indicano lo spostamento dei personaggi, ma rappresentano la comprensione della dinamicità dei vari problemi affrontati. Questa rappresentazione risulta infatti essere molto efficace sia in fase di pianificazione che di sviluppo del piano (Polya, 1967).
Dai protocolli degli allievi si può notare che le rappresentazioni sono diventate progressivamente più sintetiche e schematiche, suggerendo una maggiore consapevolezza degli allievi sull'utilizzo dei disegni per comunicare e rappresentare la risoluzione. Alcuni di loro hanno infatti sviluppato un proprio stile personale di rappresentazione che si è riprodotto nelle varie tipologie di problemi.

5.2 Dalla sperimentazione all'ottimizzazione

Un altro aspetto centrale del percorso è stato l'approccio alla risoluzione con diverse strategie risolutive. Inizialmente è evidente che molti allievi cercassero la soluzione "a caso" con più tentativi, utilizzando la stessa rappresentazione o rappresentazioni diverse fino ad ottenere quella corretta ma senza avere un piano risolutivo preciso. Anche in questo caso si è vista una notevole evoluzione con la progressione del percorso, caratterizzata da una diminuzione del numero di tentativi necessari a incontrare la soluzione. Come già ipotizzato in precedenza, molti allievi manipolando e sperimentando manualmente materiali nelle fasi 2 e 3, non hanno riportato sulla scheda tutti i tentativi realmente effettuati, quelli che lo hanno fatto però hanno dimostrato di avere maggiore consapevolezza nello sfruttamento dei tentativi precedenti. In più casi, infatti, si può osservare come i bambini abbiano più volte interrotto le strategie a metà grazie all'osservazione e al confronto con quelle già attivate. Le nuove prove non sono più casuali ma orientate, dimostrando come gli allievi abbiano maggiore consapevolezza e controllo sull'efficacia delle loro risoluzioni. In molti casi l'errore diventa l'occasione per tornare a ripensare alla strategia applicata, al fine di verificarne l'efficacia, modificarla o addirittura cambiarla. Questa evoluzione porta l'allievo a considerare l'errore come un passo verso la soluzione e non un fallimento. Si osserva quindi una reale connessione alle fasi della risoluzione di un problema proposte da Polya (1967).

5.3 Analogia e transfer, connessioni che nascono spontaneamente

Relativamente al ruolo dell'analogia, dai dati emerge che, nonostante siano pochi gli allievi ad aver dichiarato di riconoscere le somiglianze tra i problemi proposti, molti hanno inconsapevolmente portato a termine la risoluzione utilizzando strategie già applicate nelle risoluzioni precedenti. La capacità di trasferire quanto già svolto in un problema a un altro è emersa da un lato a livello grafico, con l'utilizzo ripetuto delle stesse rappresentazioni pittoriche o iconiche, con l'inserimento di diagrammi a frecce per indicare un movimento o con l'uso di colori per evidenziare alcuni particolari; dall'altro a livello procedurale, con sequenze di mosse simili o identiche; e infine a livello cognitivo, come ad esempio nell'identificazione dell'algoritmo risolutivo della torre di Hanoi che ha permesso di generalizzare la risoluzione indipendentemente dal numero di dischi utilizzati. Anche se utilizzata in maniera inconsapevole, l'analogia permette agli allievi di affrontare il problema recuperando informazioni e conoscenze pregresse utili nella risoluzione.

6 Conclusioni

Il percorso didattico presentato in questo articolo, costituito da problemi e giochi motivanti per gli allievi, ha permesso di lavorare in modo efficace sulle loro competenze relative alle rappresentazioni grafiche e alle analogie nella risoluzione di problemi. L'analisi dei dati raccolti durante la sua realizzazione, infatti, permette di osservare la doppia relazione descritta in precedenza tra l'uso e l'evoluzione delle strategie di rappresentazione grafica e l'emergere dei processi di analogia nella risoluzione di problemi.
Le diverse rappresentazioni e in particolare quelle grafiche emerse nella sperimentazione rivelano molto del modo di pensare e affrontare i problemi logici in ambito matematico degli allievi. Sono diverse le analogie nelle risoluzioni dei bambini, nelle quali è possibile osservare un'evoluzione che indica una maggiore consapevolezza degli alunni. Grazie alle rappresentazioni pittoriche, iconiche, linguistiche e simboliche, arricchite da diagrammi a frecce (che indicano i movimenti effettuati), gli allievi dimostrano di aver compreso il problema esplicitando i ragionamenti effettuati per ottenere la soluzione. In molti casi gli allievi ripetono, consapevolmente o inconsapevolmente, strategie simili in problemi diversi. L'utilizzo di forme, colori, diagrammi o parole analoghe indica lo sfruttamento di conoscenze pregresse nell'affrontare nuovi problemi, facendo diventare le strategie gradualmente più funzionali, basando la loro scelta su riflessioni, confronti e miglioramenti delle strategie applicate precedentemente. Di fronte all'errore gli allievi si interrogano sugli elementi o i passaggi scorretti al fine di identificare un piano risolutivo differente che possa portarli all'ottenimento del risultato.
Grazie all'osservazione delle rappresentazioni grafiche e dei tentativi effettuati emerge chiaramente che, anche in modo a volte inconsapevole, gli allievi hanno gradualmente sviluppato e riutilizzato delle strategie analoghe in tutte le tipologie di problemi affrontati.
A questo proposito, proporre agli allievi ulteriori problemi (dello stesso tipo e/o differenti) e a un campione di riferimento maggiore (eventualmente esteso ad altre scuole dove si attuano quotidianamente metodologie didattiche differenti) potrebbe sicuramente permettere di avvalorare i risultati ottenuti e osservarne eventualmente di differenti approfondendo i diversi aspetti di questo studio. Risulterebbe inoltre interessante proseguire il percorso facendo creare agli allievi dei problemi simili a

un problema dato, così da poter riflettere sulle analogie e le differenze evidenziate e valutare l'appartenenza o meno alla medesima categoria di problemi. In seguito, i problemi creati potrebbero essere risolti dai compagni per approfondire le strategie relative all'analogia nelle diverse risoluzioni e nelle modalità di rappresentazione della soluzione.

Bibliografia

Barbero, M. (2015). *Giochi di strategia e risoluzione di problemi: l'uso della strategia del ragionamento regressivo.* Tesi Master. Università degli Studi di Torino.

Barbero, M. (2020). *Backward Reasoning in problem-solving situations: a multidimensional model.* Tesi di Dottorato di Ricerca. Università degli Studi di Torino & Universidad Complutense de Madrid.

Castellani, T. (2013). *Risolvere i problemi difficili. Sudoku, commessi viaggiatori e altre storie.* Zanichelli.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria.* Pitagora Editrice.

Dagani, N. (2025). *Tra analogie e rappresentazioni grafiche. Un percorso esplorativo per promuovere il pensiero strategico nei problemi di logica matematica.* Tesi Bachelor. Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://doi.org/10.71910/supsi.12356

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://pianodistudio.edu.ti.ch/

Hughes, M. (1982). Rappresentazione grafica spontanea del numero nei bambini. *Età Evolutiva*, *12*, 5–10.

Ignátiev, E. I. (1978). *En el reino del ingenio.* Editorial MIR. (Prima edizione pubblicata nel 1908).

Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani. (2023a). Diagramma. In *Vocabolario Treccani on line.* Consultato il 4 dicembre 2025, da https://www.treccani.it/vocabolario/diagramma/

Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani. (2023b). Problema. In *Vocabolario Treccani on line.* Consultato il 29 aprile 2025, da https://www.treccani.it/vocabolario/problema/

Peres, E., & Sbaragli, S. (2021). Gioco e matematica: un connubio per la mente. *Scuola ticinese*, *4*(2), 29–36.

Polya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico.* Feltrinelli Editore.

Pontecorvo, C., & Pontecorvo, M. (1985). *Psicologia dell'educazione: Conoscere a scuola.* il Mulino.

Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023). Sfide quadrate. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1153

Sbaragli, S., Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., & Ricci, M. (2008). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in ambito geometrico.* Armando Editore.

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021a). Figure di fiammiferi. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=607

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021b). Quanti quadrati. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=75

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021c). Rappresentazioni spontanee di problemi. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=343

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic press.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 138–156. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.5

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

«Come disegnare forme strane in modo da vederle dritte utilizzando uno specchio particolare»: anamorfosi e laboratorio al museo

«How to draw strange shapes so that they appear straight using a special mirror»: anamorphoses and workshop at the museum

Anita Lugli e Michela Maschietto
Laboratorio delle macchine matematiche, Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia – Italia

anita.lugli@unimore.it, michela.maschietto@unimore.it

Sunto / Questo articolo presenta un laboratorio svolto al museo sulle anamorfosi catottriche a specchio cilindrico, realizzato a partire da modelli della *Collezione Macchine Matematiche* del Sistema dei Musei e Orto Botanico dell'Università di Modena e Reggio Emilia e rivolto a studenti della scuola secondaria di primo grado. Dopo aver descritto il contesto storico alla base dello sviluppo delle anamorfosi e i modelli della collezione usati, viene illustrato il quadro teorico che ha guidato la progettazione del laboratorio e vengono dettagliate le attività proposte. Le risposte date nelle schede del laboratorio e i dati raccolti tramite un questionario valutativo dell'esperienza mostrano come gli studenti siano rimasti stupiti dalle attività proposte, che hanno consentito loro di imparare in modo pratico come realizzare un'immagine anamorfica. Questo laboratorio si può configurare come un caso di educazione matematica informale in cui gli studenti apprendono la matematica in un contesto museale attraverso la collaborazione con i compagni e mediante sperimentazioni inaspettate.

Parole chiave: anamorfosi; laboratorio; macchine matematiche; museo; scuola secondaria di primo grado.

Abstract / This article presents a workshop carried out in a museum context on catoptric anamorphoses with a cylindrical mirror, designed on the basis of models from the *Collezione Macchine Matematiche* within the *Sistema dei Musei e Orto Botanico* of the University of Modena and Reggio Emilia and aimed at lower secondary school students (grades 6-8). After outlining the historical context underlying the development of anamorphoses and describing the used models of the collection, the article introduces the theoretical framework that guided the design of the workshop and details the proposed activities. The answers given in the workshop worksheets and the data collected through an evaluation questionnaire on the experience show how students were surprised by the proposed activities, which allowed them to learn in a hands-on way how to create an anamorphic image. This workshop can be regarded as a case of informal mathematics education, in which students learn mathematics in a museum context through collaboration with peers and unexpected explorations.

Keywords: anamorphoses; workshop; mathematical machines; museum; lower secondary school.

1 Introduzione

Questo articolo presenta il laboratorio *Scherzi con la luce: sorprese e bizzarrie tra fisica e matematica* sulle anamorfosi per specchi svolto con studenti[1] di scuola secondaria di primo grado[2] nell'ambito delle iniziative del Mese della Scienza 2025 gestito dal centro MEMO del Comune di Modena in collaborazione con il Sistema dei Musei e Orto Botanico dell'Università di Modena e Reggio Emilia (MuseOmoRE).[3]

Il termine *anamorfosi*, dal greco "ana" (all'insù, all'indietro, ritorno verso) e "morphe" (forma), compare per la prima volta nel trattato pubblicato da Gaspard Schott (1608-1666) intorno al 1657 (Baltrušaitis, 1978/2004). Esso si riferisce principalmente a immagini distorte quando viste frontalmente, ma che si rivelano quando codificate mediante un cambio di punto di vista o uno specchio (**Figura 1**). La produzione delle anamorfosi si sviluppò soprattutto a seguito degli studi sulla prospettiva artificiale, che aveva come oggetto la rappresentazione dello spazio mediante disegni su superfici piane o curve.

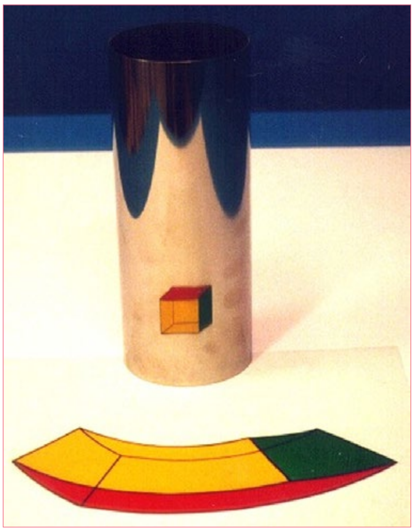


Figura 1. Anamorfosi cilindrica[4] dalla mostra *Perspectiva Artificialis*.

La nascita della prospettiva artificiale nel Quattrocento è legata da una parte a una trasformazione nel modo di considerare lo spazio, dall'altra ai problemi pratici sorti durante l'attività concreta di pittori, scenografi, intarsiatori, architetti ecc. Per questi elementi, il suo sviluppo si presenta come un intreccio indissolubile di riflessioni rigorose e di pratiche empiriche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006). Nella proiezione di corpi tridimensionali sulla superficie piana si dovevano determinare le dimensioni che essi dovevano avere sul quadro in modo da apparire nelle giuste proporzioni quando lo si guardava (con un solo occhio da un punto fisso, secondo il modello di piramide visiva di Leon Battista Alberti). Numerosi trattati contenevano norme precise affinché chi osservava un quadro o una decorazione guardando "liberamente" (con entrambi gli occhi, da una posizione qualsiasi) percepisse in modo pienamente armonico le profondità spaziali e le proporzioni dei singoli oggetti (Baltrušaitis, 1978/2004). Tuttavia, all'interno dei metodi elaborati per produrre immagini in prospettiva era contenuta la possibilità di

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.
2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.
3. https://www.polomuseale.unimore.it/site/home.html.
4. Dal catalogo della mostra: http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis/4.-anamorfosi/pa-sez-anamorfosi/articolo16051829.html.

anamorfosi, cioè è possibile ottenere figure distorte rispettando le norme, quali ad esempio il mantenimento del punto di vista durante l'esecuzione del disegno e i raggi visivi rettilinei. Nel corso del XVII secolo, si diffusero sempre più le anamorfosi ottiche, ma furono anche introdotte riflessioni per deformare le immagini mediante l'utilizzo di specchi di varie forme realizzando così anamorfosi catottriche.
La *Collezione Macchine Matematiche*[5] di MuseOmoRE contiene numerosi modelli (detti "macchine matematiche") costruiti per testimoniare il percorso di sviluppo della prospettiva artificiale dalle pratiche di bottega alla formalizzazione degli invarianti geometrici. Una parte di questi modelli si riferisce proprio alle anamorfosi.
L'Università di Modena e Reggio Emilia possiede inoltre una serie di acquerelli anamorfici per specchio cilindrico facenti parte della strumentazione fisica storica[6] e recentemente esposti nella mostra *Tesori modenesi ritrovati*[7] (Beggi Miani et al., 2025). Nell'ambito dei laboratori didattici dedicati alle scuole e collegati alla mostra si è proposto un laboratorio sulle anamorfosi catottriche a partire da modelli della *Collezione Macchine Matematiche*. Il laboratorio si è configurato come laboratorio al museo, in quanto è stato svolto nella sala espositiva della collezione.
Sulla base dello sviluppo delle anamorfosi sopra riportato, la progettazione del laboratorio ha avuto tre obiettivi principali. Il primo obiettivo era quello di far vivere agli studenti un'esperienza positiva e di meraviglia in ambito matematico. Le ricerche in didattica della matematica mettono in evidenza quanto siano rilevanti le convinzioni e le emozioni nel processo di apprendimento (Di Martino & Zan, 2011). Il secondo obiettivo era quello di fornire loro alcuni elementi per comprendere come storicamente nascono e si sviluppano le anamorfosi. Il terzo obiettivo era quello di far scoprire agli studenti alcune caratteristiche invarianti dei disegni anamorfici per specchi cilindrici facendo sperimentare quell'intreccio sopra citato tra riflessioni matematiche e pratiche empiriche, per andare oltre lo stupore e imparare in modo pratico a realizzare un'immagine anamorfica o, per dirlo con le parole di uno studente riportate nel titolo dell'articolo, per imparare «come disegnare forme strane in modo da vederle dritte utilizzando uno specchio particolare».
L'articolo si compone di due parti. Nella prima parte si riprendono le linee generali della mostra *Perspectiva Artificialis* contenente le macchine matematiche per la prospettiva (par. 2). In questa parte ci si sofferma principalmente sulla sezione della mostra dedicata alle anamorfosi per descrivere i modelli utilizzati nel laboratorio (par. 3). Nella seconda parte (par. 4) si inquadra il lavoro nell'ambito della ricerca in didattica della matematica, poi si presentano la struttura del laboratorio sulle anamorfosi catottriche con specchio cilindrico e le attività proposte agli studenti discutendo i dati raccolti. Questa parte termina con un commento sulle risposte date dagli studenti al questionario valutativo somministrato al termine del laboratorio ed è seguita da un bilancio dell'esperienza (par. 5).

2 La mostra *Perspectiva Artificialis*

La *Collezione Macchine Matematiche* di MuseOmoRE contiene i modelli della mostra *Perspectiva Artificialis*,[8] costituita da alcune macchine matematiche già appartenenti al Laboratorio delle macchine matematiche e arricchita nel quadro del progetto europeo *Maths Alive* (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006). La prospettiva artificiale, chiamata così in contrapposizione alla teoria della visione (prospettiva naturale), ha origine nel Quattrocento e si sviluppa nei due secoli successivi.

5. http://www.mmlab.unimore.it.
6. https://www.strumentazionestorica.unimore.it.
7. https://www.strumentazionestorica.unimore.it/tesori-modenesi-ritrovati.
8. Catalogo della mostra *Perspectiva Artificialis*: http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis.html.

I modelli della mostra, anche quando riproducono strumenti che hanno avuto in passato notevole importanza in numerose attività, artistiche ma non solo, sono stati realizzati per sostenere un discorso storico sulla prospettiva e sulla matematica delle proiezioni centrali. A questo scopo, nella loro costruzione sono state rispettate le caratteristiche descritte nei trattati dell'epoca di artisti e matematici, come ad esempio Leon Battista Alberti (1404-1472), Iacomo Barozzi (1507-1573), Ignazio Danti (1536-1586) e Albrecht Dürer (1471-1528). La mostra si articolava in 5 sezioni: Misurare con la vista, Prospettografi, Ombre e prospettiva, Anamorfosi, Prospettiva e trasformazioni (Maschietto, 2009).
Alcune delle macchine della *Perspectiva Artificialis*, oltre a essere esposte in mostre, sono state usate in esperimenti didattici a scuola (Maschietto & Bartolini Bussi, 2005) e proposte in un percorso laboratoriale sulla prospettiva in un contesto extra-scolastico (Maschietto, 2009).

3 Anamorfosi

Come sopra precisato, una sezione della mostra era riservata alle anamorfosi.
La diffusione delle anamorfosi e l'interesse per le illusioni ottiche si accompagnavano a modifiche complesse nello spazio culturale. Esse erano legate a ragioni di ordine filosofico e religioso; ma anche di ordine pratico e scientifico per suscitare meraviglia e ammirazione attraverso effetti scenografici, e allo stesso tempo per mostrare la potenza della magia naturale; infine, di ordine estetico.
È sui modelli di questa sezione della mostra che è stato progettato e sperimentato il laboratorio presentato in questo articolo.

3.1 Le anamorfosi ottiche

Si chiamano ottiche le anamorfosi tracciate su una superficie bidimensionale e osservabili direttamente, a occhio nudo. Nella loro costruzione si seguono le medesime leggi geometriche utilizzate per una prospettiva normale, ma si trasgredisce, rovesciandole completamente, alle norme del codice prospettico, basato su criteri di naturalità, armonia e verosimiglianza (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006). Secondo Baltrušaitis (1978/2004), le prime incisioni di anamorfosi risalgono al 1531; è attribuita a Leonardo l'anamorfosi più antica, contenuta nel *Codice Atlantico*. All'inizio le procedure per realizzare correttamente i disegni erano tenute segrete; fu nel Seicento che i procedimenti geometrici furono integralmente svelati, soprattutto grazie all'opera *La perspective curieuse* pubblicata nel 1638 da Jean-François Niceron (1613-1646): si passa dai metodi empirici, come quelli descritti nel trattato *Le due regole della prospettiva prattica* di Barozzi-Danti (1583/1682), a «una scienza fondata sulla geometria dei raggi visivi e su calcoli precisi» (Baltrušaitis, 1978/2004, p. 53). Lo stesso Baltrušaitis sostiene che «l'anamorfosi non è l'aberrazione in cui la realtà è assoggettata a una visione della mente, ma un sotterfugio ottico nel quale l'apparenza eclissa la realtà» (Baltrušaitis, 1978/2004, p. 15). Comar aggiunge che i pittori di tali disegni «conducono così la prospettiva ai margini delle scienze occulte, come una dimostrazione del dubbio cartesiano e delle vanità di questo mondo» (Comar, 1992, p. 50, traduzione delle autrici).
Le "buone regole" su cui molto insistevano i primi teorici, ma anche gli artisti più aperti a sperimentazioni, prevedevano che:

– l'osservatore fosse in posizione frontale, cioè collocato su un piano parallelo al quadro (Figura 2a), in modo che almeno uno dei raggi visuali incidesse sul quadro stesso in direzione perpendicolare; in altri termini, quasi nella stessa posizione dell'artista che aveva realizzato il quadro;
– l'altezza dell'orizzonte corrispondesse alla statura media di un osservatore.

Quando l'osservatore non colloca il proprio occhio nel punto di vista che il pittore ha tenuto durante l'esecuzione del disegno, le figure risultano deformi e quindi difficilmente riconoscibili. Infatti, nella rappresentazione anamorfica (**Figura 2b**):

- la posizione del punto di vista era fortemente laterale, in modo che tutti i raggi visuali colpissero l'oggetto molto obliquamente;
- l'osservatore doveva porre l'occhio al filo del quadro per riuscire a ricostruire otticamente, in conformità al verosimile, la figura rappresentata;
- si poteva anche aumentare in modo esagerato l'altezza dell'orizzonte.

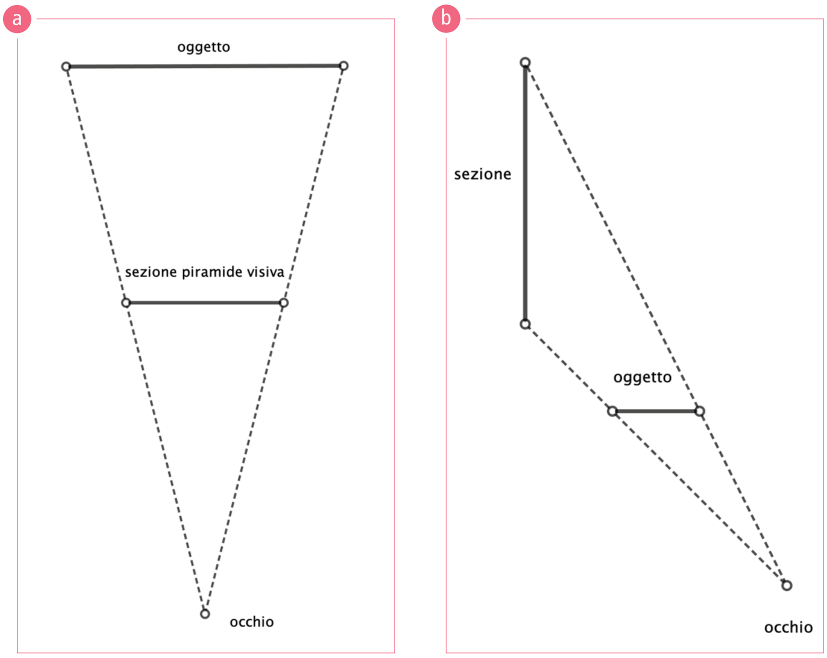


Figura 2. **a)** Schema per la prospettiva; **b)** Schema per l'anamorfosi.

Nella mostra *Perspectiva Artificialis* si trova l'anamorfosi ottica di un cubo (**Figura 3**): essa è stata costruita (a partire da una prospettiva "normale") non con operazioni geometriche, né con sorgenti luminose, ma usando fili tesi secondo le istruzioni fornite da Niceron (1638/1663). Nella **Figura 3** a sinistra si vede il disegno adottando un punto di vista frontale, come in generale per tutti i quadri (con lo schema in **Figura 2a**), mentre a destra si vede lo stesso disegno ponendo l'occhio nel punto di vista scelto dal pittore per la sua realizzazione (con lo schema in **Figura 2b**).

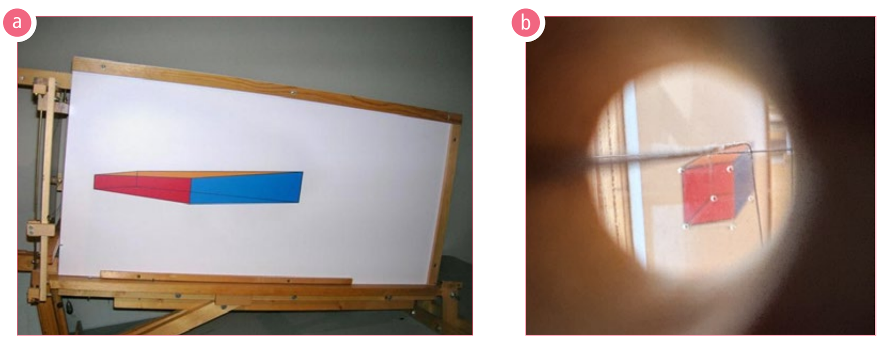


Figura 3. Anamorfosi ottica: **a)** Vista frontale; **b)** Vista laterale dall'oculare.

Anamorfosi ottiche furono realizzate su intere pareti, come nel convento di Trinità dei Monti a Roma (Niceron, 1638/1663), ma anche in quadri come in *Gli Ambasciatori* di Holbein (Baltrušaitis, 1978/2004).

3.2 Anamorfosi catottriche

Tra il 1615 e il 1625 comparve un nuovo strumento anamorfico, lo specchio, che sostituì l'immagine riflessa alla visione diretta (Baltrušaitis, 1978/2004). Furono così realizzate anamorfosi catottriche con l'uso di specchi di varie forme, ispirate anche dai dipinti cinesi diffusi all'epoca.
Nella mostra *Perspectiva Artificialis* sono presenti modelli che mettono in gioco specchi conici con punto di vista sull'asse del cono (**Figura 4**) e punto di vista non appartenente all'asse (**Figura 5**), specchio piramidale (**Figura 6**), specchio sferico e cilindrico (**Figura 1**).

Figura 4. Anamorfosi conica con punto di vista sull'asse del cono.

Figura 5. Anamorfosi conica con punto di vista non sull'asse del cono.

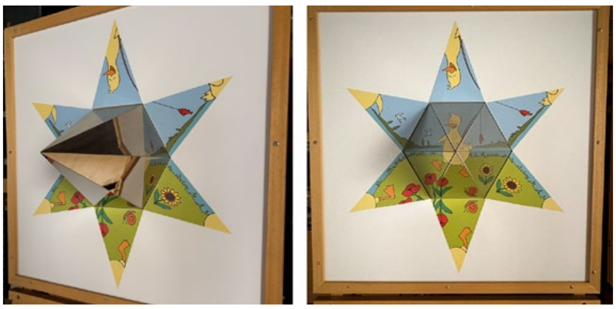


Figura 6. Anamorfosi con specchio piramidale con punto di vista sull'asse della piramide.

3.2.1 Anamorfosi catottriche con specchio cilindrico

Tra i vari tipi di anamorfosi, il laboratorio presentato in questo articolo mette in gioco quelle catottriche con specchio cilindrico (di cui un esempio è già stato mostrato in **Figura 1**).
Il primo a interessarsi a questo tipo di anamorfosi fu il matematico Jean-Louis Vaulezard che affrontò,

su richiesta dei suoi studenti, il problema di come disegnare una griglia che appaia come una griglia di quadrati quando riflessa in uno specchio, in particolare cilindrico e conico (Andersen, 1996). La soluzione fu pubblicata nel testo *Perspective cilindrique et conique* nel 1630. Vaulezard diede una costruzione precisa, ma non identificò le linee che costituiscono la griglia in quanto non erano tra quelle note all'epoca e non aveva a disposizione gli strumenti della geometria analitica per determinarne l'equazione (Andersen, 1996). Andersen sottolinea che la storia delle anamorfosi è un esempio di come problemi pratici abbiano dato origine a problemi matematici; è anche un esempio di come sia difficile colmare il divario tra tradizioni pratiche e formulazioni matematiche. Al termine della descrizione del suo metodo, Vaulezard riporta un altro metodo consistente in semirette radiali con origine nel centro del cerchio di base del cilindro e in circonferenze concentriche. Tuttavia, egli scrisse di non approvare tale metodo.
Come già detto, lo studio e la realizzazione di anamorfosi furono centrali nel lavoro di Niceron, ispirato a sua volta da quello di Vaulezard. Ne *La perspective curieuse* (Niceron, 1638/1663), le anamorfosi erano disegnate a partire da griglie: si proponeva la divisione del disegno originale in una griglia di caselle quadrate e la loro riproduzione in una griglia dove le caselle quadrate erano deformate in porzioni di corone circolari; lo specchio cilindrico per decodificare l'immagine doveva avere diametro uguale al lato orizzontale del disegno originale; infine, l'osservatore doveva trovare il punto di vista frontale dal quale il disegno riflesso appariva nelle proporzioni corrette (Di Lazzaro et al., 2019). Un esempio celebre è il ritratto di San Francesco da Paola presente ne *La perspective curieuse*. Tuttavia, anche se il metodo fu molto usato nelle realizzazioni anamorfiche, la costruzione che si otteneva era approssimata. Come già sostenuto da Vaulezard, Niceron scriveva:

> «Questa costruzione sembra essere fatta senza osservazione degli angoli di incidenza e di riflessione, e senza distanza e determinata altezza dell'occhio: così non pretendo che essa sia una dimostrazione perfetta [...], poiché ho voluto dare un metodo familiare e comprensibile a coloro che sono poco propensi ai principi della matematica».
>
> (Niceron, 1638/1663, p. 160, traduzione delle autrici)

Per quanto riguarda gli strumenti per questo tipo di anamorfosi, si ricorda quello ideato da Jacob Leupold (1674-1727) di cui una riproduzione è conservata al Museo Galileo di Firenze.[9]

3.2.2 Trasformazione realizzata da uno specchio cilindrico e proprietà

Per la progettazione del lavoro di gruppo sulle anamorfosi catottriche a specchio cilindrico (par. 4.2.2) è stata considerata la costruzione precisa della griglia curva, come appena discusso (in generale si è seguita la tradizione di Niceron con griglia costituita da circonferenze).[10] Inoltre, sono state individuate quali proprietà della trasformazione realizzata dallo specchio cilindrico possono essere scoperte svolgendo compiti pratici e utilizzate per realizzare in modo empirico una griglia curva il cui riflesso è un reticolo.
Si consideri un cilindro riflettente posto su un piano π (Figura 7), un punto di vista P_V (dove si pone l'occhio dell'osservatore) e il piano γ' passante per l'asse del cilindro e perpendicolare al segmento OV (segmento che congiunge il centro del cerchio di base del cilindro e la proiezione ortogonale di P_V sul piano π). La trasformazione realizzata dallo specchio cilindrico[11] è la corrispondenza tra i punti P di γ' e i punti Q di π.

9. https://redi.imss.fi.it/invenzioni/index.php/Strumento_per_anamorfosi_cilindriche.
10. Come esempio, si veda https://www.museogalileo.it/images/pdf/didattica/da_casa/fai_da_te_strumenti/anamorfosi.pdf.
11. Riportata in https://www.macchinematematiche.org/mm/images/approfondimenti/anamorfosi%20cilindro.pdf dove P_V e V vengono rispettivamente indicati con O e O'.

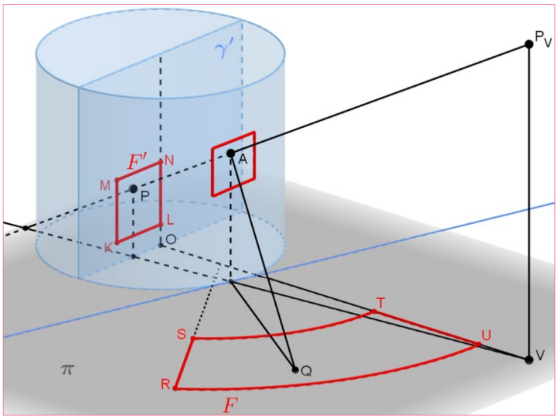


Figura 7. Trasformazione individuata dallo specchio cilindrico.

Il punto A è il riflesso del punto Q sullo specchio visto ponendo l'occhio su P_V (**Figura 7**): siccome i punti P, A e P_V sono allineati, l'osservatore non distingue i punti P e A. Sul piano γ' viene costruito il reticolo, mentre sul piano π la corrispondente griglia curva. È quindi possibile determinare quale figura F (immagine anamorfica) deve essere disegnata sulla griglia curva affinché l'osservatore veda sullo specchio una figura F' prefissata sul reticolo ponendo l'occhio in P_V. Le proprietà invarianti di questa trasformazione messe in gioco durante il laboratorio sono le seguenti:

1. un qualsiasi segmento appartenente al segmento OV sul piano π corrisponde a un segmento del piano γ' che appartiene all'asse del cilindro (ad esempio i segmenti TU e LN in **Figura 7**);
2. un segmento sul piano π che, opportunamente prolungato, forma con OV un determinato angolo acuto[12] corrisponde a un segmento sul piano γ' parallelo all'asse del cilindro (ad esempio i segmenti SR e KM in **Figura 7**);
3. particolari linee curve[13] sul piano π corrispondono a segmenti sul piano γ' perpendicolari all'asse del cilindro (ad esempio la linea curva di estremi UR e il segmento NM in **Figura 7**);
4. segmenti sul piano π paralleli a OV e non appartenenti a OV corrispondono a linee curve sul piano γ';
5. segmenti sul piano π perpendicolari a OV corrispondono a linee curve sul piano γ'.

Le proprietà 1 e 2 possono anche essere riassunte come segue: a segmenti sul piano γ' paralleli o appartenenti all'asse del cilindro corrispondono segmenti sul piano π. Inoltre, tali segmenti sul piano γ' sono gli unici segmenti la cui immagine anamorfica è ancora un segmento. Infine, si può osservare che più aumenta la distanza, sul piano γ', del segmento dall'asse del cilindro più aumenta l'ampiezza dell'angolo compreso tra l'immagine anamorfica (opportunamente prolungata) e il segmento OV.

4 Il laboratorio sulle anamorfosi catottriche con specchio cilindrico

Il quadro di riferimento per la progettazione delle attività è il laboratorio di matematica così come delineato in *Matematica 2003* (Anichini et al., 2004), con la presenza di artefatti culturali che sono usati per costruire significati matematici. L'idea di laboratorio con le macchine matematiche è stata alla base

12. L'ampiezza dell'angolo dipende dalle caratteristiche geometriche del cilindro e dalle posizioni dei punti P_V e S. La determinazione di tale angolo non viene esplicitata in quanto non rientra tra gli obiettivi del laboratorio.
13. Individuate con l'utilizzo del software di geometria dinamica GeoGebra, la cui definizione e formula analitica non vengono esplicitate in quanto non rientrano tra gli obiettivi del laboratorio.

di sperimentazioni in classe nel quadro teorico della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), ma anche implementata in contesti extrascolastici (Maschietto & Martignone, 2008). Nello specifico delle macchine matematiche, laboratori su sezioni coniche e trasformazioni geometriche sono proposti nella sala espositiva della collezione permettendo di accostare al laboratorio vero e proprio la visita alla mostra *Macchine, meccanica e matematica* attualmente allestita (Maschietto, 2024).
Accanto alla discussione generale sulle varie forme di apprendimento/educazione formale, non formale e informale, negli ultimi anni alcuni ricercatori hanno delineato un nuovo filone di ricerca riguardante l'educazione matematica informale (Nemirovsky, 2018; Nemirovsky et al., 2017). Gli ambienti dell'educazione matematica informale differiscono da quelli scolastici principalmente per i seguenti motivi: le proposte non hanno rigidi confini disciplinari in quanto le attività possono spaziare dalla matematica all'arte, alla storia, alle scienze, al gioco; le attività non sono accompagnate dalle tradizionali forme di valutazione scolastica; nella maggior parte dei casi i partecipanti sono più o meno liberi di prendere parte alle attività proposte. Tuttavia, essi sono intenzionalmente progettati per favorire l'apprendimento della matematica e coinvolgono animatori esperti e strumenti di vario tipo ad uso dei partecipanti. Nemirovsky et al. (2017) sottolineano che

> «Le possibilità rilevate dalla ricerca sull'educazione matematica informale indicano un tipo di apprendimento in cui chi apprende si impegna in questioni per lui significative, amplia la percezione delle proprie capacità, raggiunge la padronanza nell'apprendere attraverso la collaborazione e intraprende sperimentazioni inaspettate. Proponiamo che rendere possibile questo tipo di apprendimento sia l'obiettivo principale dell'educazione matematica informale».
>
> (Nemirovsky et al., 2017, p. 970, traduzione delle autrici)

In quest'ottica, le mostre e i laboratori di matematica nei musei si possono configurare come ambienti di educazione matematica informale. Questo aspetto sarà discusso in relazione al laboratorio sulle anamorfosi.
Nel seguito di questo paragrafo viene dettagliato il laboratorio sulle anamorfosi che è stato costruito a partire da modelli sulla prospettiva presenti nella *Collezione Macchine Matematiche*, descrivendo la struttura del laboratorio e le attività proposte.

4.1 Struttura del laboratorio

Il laboratorio sulle anamorfosi catottriche con specchio cilindrico è stato progettato per far scoprire a studenti della scuola secondaria di primo grado le anamorfosi come trasformazioni di figure.
Il percorso laboratoriale, della durata di un'ora e mezza, è suddiviso in tre parti: introduzione, lavoro di gruppo e conclusione.
Nella parte introduttiva (par. 4.2.1) viene mostrata una copia degli acquerelli esposti alla mostra *Tesori modenesi ritrovati* (Beggi Miani et al., 2025) e viene presentato il quadro storico sulle anamorfosi attraverso l'interazione con alcune macchine matematiche: il vetro di Dürer (che verrà presentato in Figura 10), l'anamorfosi ottica del cubo (Figura 3) e l'anamorfosi catottrica con specchio cilindrico (Figura 1). Gli obiettivi specifici di questa parte sono stupire gli studenti e fornire alcuni elementi per comprendere come storicamente nascono e si sviluppano le anamorfosi.
Nella seconda parte (par. 4.2.2) gli studenti sono coinvolti in un lavoro a piccolo gruppo (due/tre componenti per gruppo) in cui viene richiesto loro di realizzare anamorfosi catottriche a specchio cilindrico, giocando su ciò che si vede nel foglio e l'immagine riflessa sullo specchio. L'obiettivo specifico è far scoprire alcuni invarianti della trasformazione che porta a un disegno anamorfico (par. 3.2.2). Per accompagnare gli studenti in questa attività viene fornita una scheda guida con le consegne da svolgere, un cilindro riflettente, un oculare e delle schede ausiliarie per svolgere le varie richieste (Figura 8), oltre a matite e pennarelli per disegnare. Per la costruzione della griglia curva si è seguito quanto riportato nei par. 3.2.1 e 3.2.2.

Figura 8. Materiale per il lavoro di gruppo.

Nella parte conclusiva (par. 4.2.3) sono mostrati altri modelli della mostra: l'anamorfosi catottrica con specchio piramidale (Figura 6), le due anamorfosi catottriche con specchio conico (Figura 4 e Figura 5) e il pantografo di Parré.[14] Infine, gli studenti hanno la possibilità di ricostruire le immagini degli acquerelli utilizzando specchi cilindrici di diverse dimensioni.
Al termine del percorso laboratoriale si è chiesto agli studenti di compilare un questionario valutativo dell'esperienza in forma anonima (par. 4.3).

4.2 Le attività per la classe

In questo paragrafo verranno illustrate più nel dettaglio le diverse attività proposte nel percorso didattico sulle anamorfosi, con un focus particolare sul lavoro di gruppo.

4.2.1 Momento introduttivo

Gli studenti vengono accolti mostrando loro delle strane immagini (un esempio è riportato in Figura 9), copie di alcuni degli acquerelli esposti alla mostra *Tesori modenesi ritrovati* (Beggi Miani et al., 2025). Le immagini appaiono deformate e non è chiaro cosa raffigurino, ma sono proposte proprio per incuriosire. Viene spiegato loro che questi acquerelli, così come tanti altri dipinti, sono stati realizzati da pittori con l'intento di stupire l'osservatore o nascondere messaggi segreti e che attraverso il laboratorio scopriranno come sono stati realizzati, come possono essere visti per capire cosa rappresentano e persino diventare loro stessi autori di immagini sorprendenti che suscitano meraviglia in chi le osserva.

Figura 9. Tav I[15] dalla collezione di anamorfosi della mostra *Tesori modenesi ritrovati*.

Si inizia poi con un po' di storia sulla prospettiva rendendo il discorso interattivo grazie all'utilizzo di macchine matematiche. Dapprima viene mostrato il vetro di Dürer (la vista dall'oculare in Figura 10b)

14. http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis/4.-anamorfosi/pa-sez-anamorfosi/articolo16051832.html.
15. https://www.strumentazionestorica.unimore.it/collezione-di-anamorfosi-2.

per spiegare come i pittori del Quattrocento realizzavano i loro dipinti in prospettiva, anche senza essere a conoscenza delle varie regole geometriche dietro la costruzione delle immagini prospettiche. Gli studenti guardando attraverso l'oculare osservano che l'immagine del quadro si sovrappone perfettamente all'oggetto reale e possono imitare i gesti compiuti dal pittore per realizzare il dipinto. Poi si presentano le regole seguite dal pittore: dal punto di vista parte una piramide visiva i cui raggi rettilinei attraversano il piano del quadro e toccano l'oggetto reale; l'intersezione tra questi raggi visivi con il piano del quadro genera l'immagine prospettica.

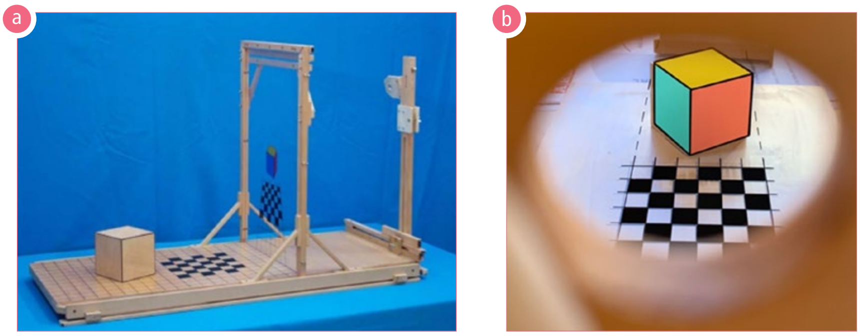


Figura 10. a) Vetro di A. Dürer[16] dalla mostra *Perspectiva Artificialis*; **b)** Vista dall'oculare.

Si passa poi all'anamorfosi ottica del cubo, che gli studenti osservano dapprima ponendosi di fronte al quadro (**Figura 3a**) e solo dopo aver formulato ipotesi su ciò che secondo loro è stato raffigurato, collocano l'occhio nel punto di vista scelto dal pittore (**Figura 3b**) e rimangono stupiti nel vedere l'immagine. Per suscitare ancor più stupore, si passa all'anamorfosi catottrica a specchio cilindrico (**Figura 1**): agli studenti viene mostrata prima solo l'immagine anamorfica, poi viene opportunamente posizionato lo specchio cilindrico così da vedere nel riflesso l'immagine dell'oggetto.

4.2.2 Lavoro di gruppo

Nel momento centrale del laboratorio gli studenti sono divisi in binomi di lavoro e coinvolti in attività pratiche che li invitano a confrontare ciò che si vede sul foglio con l'immagine riflessa sullo specchio per poi arrivare a realizzare delle anamorfosi catottriche a specchio cilindrico.
All'inizio delle attività, dopo aver distribuito il materiale necessario, vengono date le indicazioni su come posizionare lo specchio cilindrico e l'oculare (**Figura 11a, b**): il cilindro va sempre posizionato sul cerchio di centro O e l'oculare sul punto V. Inoltre, viene specificato che il riflesso sul cilindro va sempre guardato attraverso l'oculare.
La scheda guida prevede cinque consegne. I compiti delle prime quattro consegne hanno lo scopo di aiutare gli studenti a individuare gli invarianti della trasformazione dell'immagine sul foglio nell'immagine riflessa sullo specchio cilindrico. La quinta consegna invece richiede di realizzare l'anamorfosi cilindrica di figure geometriche piane: per svolgere questo compito gli studenti devono reinvestire le conoscenze che hanno sui reticoli e combinarle opportunamente con le proprietà sulle anamorfosi scoperte fino a quel momento.

Prima consegna

Per svolgere il primo compito viene consegnato un foglio in cui è stampato, oltre al cerchio di base del cilindro e il segmento OV, un reticolo (**Figura 11a**); viene chiesto agli studenti di osservare il riflesso

16. Catalogo della mostra http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis/2.-prospettografi/pa-sez-prospettografi/articolo16051759.html.

del reticolo sullo specchio attraverso l'oculare (**Figura 11b**) per poi descrivere quello che notano. Grazie a questa prima richiesta gli studenti scoprono che tutti i segmenti del reticolo vengono riflessi in linee curve, tranne il segmento *OV* il cui riflesso rimane sempre un segmento, come evidenziato da alcune risposte scritte sulla scheda:

1. «Il reticolo dal punto di vista, si vede deformato. Sembra arrotondato e diverso da come si mostra sul foglio»;
2. «Noto che la linea nera rimane dritta, invece le altre linee diventano curve»;
3. «I segmenti blu si curvano verso il basso, i segmenti rossi curvano verso il centro. Invece la retta *VO* rimane dritta e non si curva».

Gli studenti, come ben riassume la risposta 3, individuano empiricamente le prime caratteristiche geometriche della trasformazione realizzata dallo specchio cilindrico, ovvero le proprietà 1, 4 e 5 riportate nel **par. 3.2.2**.

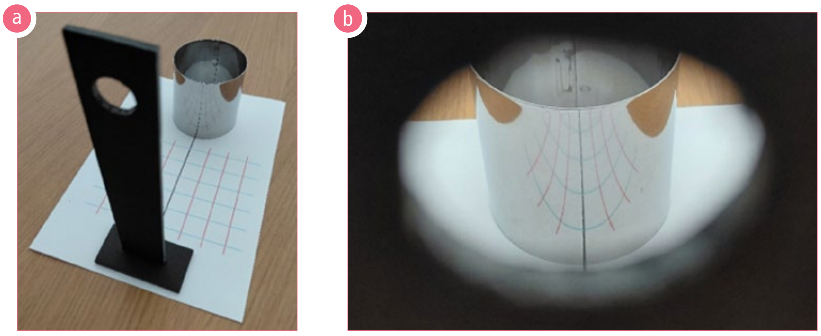


Figura 11. a) Posizionamento dello specchio cilindrico e dell'oculare; **b)** Vista dall'oculare.

Per affrontare le tre consegne successive viene dato un foglio su cui sono stampati dei punti rossi e gialli allineati perpendicolarmente al segmento *OV* e un punto blu sul segmento *OV* (**Figura 12a**).

Seconda consegna

Dapprima viene chiesto agli studenti di osservare il riflesso dei punti rossi e gialli attraverso l'oculare (**Figura 12b**) e di descrivere quello che notano. Con questo secondo compito gli studenti scoprono che punti allineati perpendicolarmente al segmento *OV* vengono riflessi in punti disposti su una linea curva simile ad un arco di circonferenza, come confermato dalle loro risposte:

1. «Notiamo che i punti gialli e rossi, invece che con disposizione a linea retta sono disposti a linea curva»;
2. «Notiamo che i punti gialli e rossi formano una semicirconferenza»;
3. «I punti riflessi sul cilindro sembrano formare una semicirconferenza».

In particolare, la risposta 1 evidenzia che l'allineamento dei punti sul foglio non viene conservato nel riflesso sullo specchio. Così gli studenti possono ritrovare la proprietà 5 del **par. 3.2.2**, già incontrata svolgendo la prima richiesta della scheda, ma questa volta ponendo l'attenzione su come cambia la disposizione dei punti passando dal disegno sul foglio (punti allineati perpendicolarmente al segmento *OV*) al riflesso sullo specchio (punti non allineati).

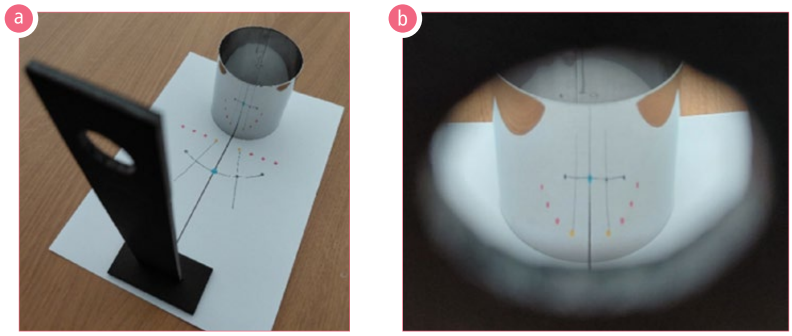


Figura 12. **a)** Posizionamento dello specchio cilindrico e dell'oculare; **b)** Vista dall'oculare.

Terza consegna

Con la terza consegna gli studenti iniziano a disegnare e viene chiesto loro, mentre guardano il cilindro attraverso l'oculare, di tracciare sul foglio, partendo dai punti gialli, dei segmenti i cui riflessi risultino verticali. Dopodiché, devono descrivere cosa osservano confrontando il disegno realizzato sul foglio con il riflesso sullo specchio. Nonostante alcuni studenti manifestino qualche difficoltà nel disegnare guardando lo specchio e non direttamente la mano (come emerge anche dalle risposte al questionario riportate nel **par. 4.3**), in tutti i gruppi vengono realizzati disegni (alcuni esempi sono riportati in **Figura 13**) che danno la possibilità di notare che per ottenere un segmento verticale sullo specchio bisogna disegnarlo sul foglio non parallelo al segmento *OV* (**Figura 12**). Ecco alcune risposte scritte degli studenti in cui emerge una regola scoperta:

1. «Notiamo che le linee appaiono verticali nel riflesso, ma nel foglio in realtà sono inclinate»;
2. «Notiamo che i segmenti tracciati nella realtà sono obliqui mentre quelli sul cilindro sono verticali»;
3. «Sul cilindro le linee sono parallele alla linea nera, invece sul foglio le linee sono oblique alla linea nera».

In particolare, come evidenzia la risposta 3, gli studenti notano che il parallelismo sullo specchio (tra il riflesso del segmento disegnato e il riflesso di *OV*) non si conserva sul foglio (tra il segmento disegnato e *OV*). Gli studenti possono quindi individuare in modo pratico, la proprietà 2 (**par. 3.2.2**).
Inoltre, alcuni gruppi ripetono la richiesta della consegna anche per i punti rossi ottenendo più segmenti il cui riflesso è un segmento verticale (**Figura 13c**). In questo caso hanno la possibilità di notare che più ci si allontana da *OV* più il segmento disegnato sul foglio deve essere inclinato affinché il suo riflesso nello specchio cilindrico risulti ancora verticale (**par 3.2.2**), come conferma la risposta scritta di un gruppo: «Le linee sul cilindro sono dritte però sul foglio vanno verso l'esterno e sempre più che si va in orizzontale vanno in obliquo».

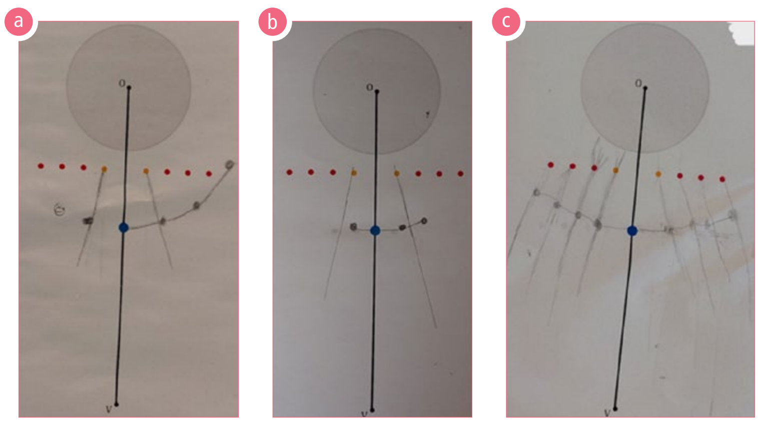


Figura 13a, b, c. Alcuni disegni realizzati per la terza e quarta consegna.

Quarta consegna

La quarta consegna è stata progettata per portare gli studenti a scoprire che per ottenere un segmento orizzontale sullo specchio cilindrico bisogna disegnare una determinata linea curva sul foglio (ossia quella presentata in Figura 12). Perciò, dapprima viene chiesto loro, mentre guardano il cilindro attraverso l'oculare, di disegnare sul foglio tre punti il cui riflesso si trovi alla stessa altezza del riflesso del punto blu; e poi, guardando direttamente sul foglio, di tracciare la curva che collega il punto blu con quelli appena tracciati. In analogia alle consegne precedenti, la quarta consegna si conclude con la richiesta di confrontare la curva disegnata sul foglio con il suo riflesso sullo specchio cilindrico e descrivere ciò che si nota. Ecco alcune loro conclusioni:

1. «Dal riflesso del cilindro riusciamo a vedere che la curva fatta sul foglio, guardando dall'oculare risulta dritta»;
2. «I punti disegnati non sono in linea perpendicolare rispetto alla linea *OV* mentre nel riflesso sì. E la linea curva sul foglio è dritta nel riflesso»;
3. «Notiamo che la curva che avevamo disegnato per collegare tutti i punti, nel riflesso del cilindro si è trasformata in una linea retta anche se sul foglio abbiamo disegnato una curva».

Svolgendo questo compito gli studenti possono scoprire in modo pratico la proprietà 3 (par 3.2.2), come sottolinea la risposta 2.
Grazie alle prime quattro consegne gli studenti hanno modo di scoprire alcune regole per realizzare un'anamorfosi cilindrica. In particolare, combinando quanto appreso svolgendo la terza e la quarta consegna potrebbero immaginare un metodo empirico che consente di tracciare una griglia curva sul foglio il cui riflesso sullo specchio è un reticolo.

Quinta consegna

Gli studenti affrontano infine l'ultima consegna della scheda guida: realizzare l'anamorfosi cilindrica di figure geometriche piane. Per svolgere questo compito viene fornito loro un reticolo con alcune figure geometriche e la rispettiva griglia curva (Figura 14a). Quando viene consegnato il materiale agli studenti, viene spiegato che la griglia curva è analoga a quella che avrebbero potuto costruire empiricamente con le regole appena scoperte. Per svolgere questo compito, gli studenti non devono guardare il cilindro attraverso l'oculare (Figura 14b), ma disegnare direttamente l'anamorfosi sul foglio. Man mano che disegnano, gli studenti possono controllare guardando lo specchio dopo averlo opportunamente posizionato (Figura 14a).

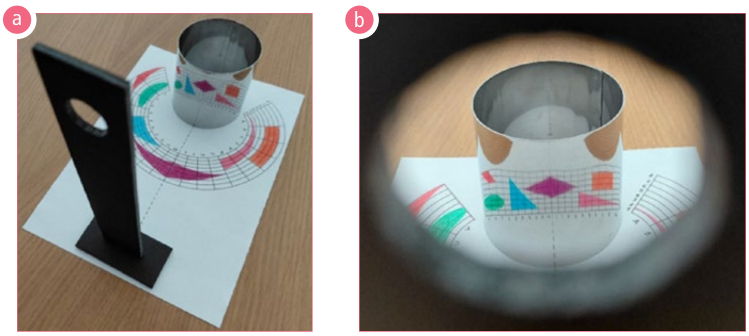


Figura 14. **a)** Posizionamento dello specchio cilindrico e dell'oculare; **b)** Vista dall'oculare.

Le figure geometriche sono state scelte in modo che il reticolo fornisca delle informazioni precise per agevolare la loro riproduzione sulla griglia curva e la realizzazione dell'immagine anamorfica, che presenta gradi di difficoltà differenti a seconda della figura proposta.

Una volta terminato il disegno sulla griglia curva, viene consegnata agli studenti la scheda di verifica relativa al loro reticolo (in cui è riportata l'immagine simmetrica del reticolo e delle figure piane) e viene chiesto loro di controllare, guardando sul cilindro attraverso l'oculare, che l'immagine riflessa corrisponda con l'immagine della scheda di verifica.
Per consentire a tutti di completare l'ultimo compito è stata proposta un'attività aggiuntiva: man mano che gli studenti terminano viene dato loro un reticolo privo di disegni e una nuova griglia curva per poter realizzare la loro anamorfosi. Per svolgere questo compito gli studenti dapprima disegnano sul reticolo un'immagine, poi ne tracciano l'immagine anamorfica sulla griglia curva. Infine, una volta terminato di disegnare, verificano con lo specchio cilindrico e l'oculare. Con questo compito aggiuntivo alcuni studenti notano che l'immagine riflessa sullo specchio cilindrico è sempre simmetrica rispetto a quella disegnata sul reticolo. In particolare, questa proprietà viene individuata dai gruppi che decidono di realizzare un'immagine anamorfica di figure non simmetriche, ad esempio disegni contenenti numeri o lettere non simmetriche (**Figura 15a, b**).

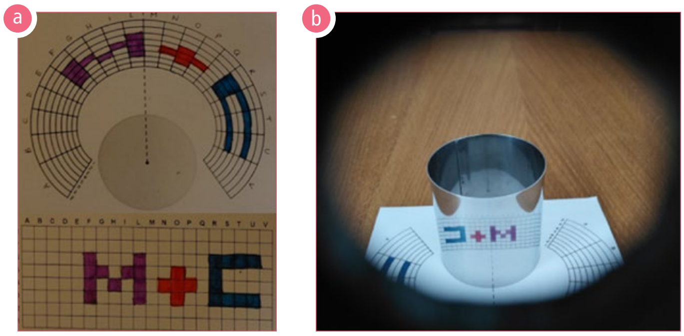


Figura 15. **a)** Anamorfosi inventata durante il lavoro di gruppo; **b)** Vista dall'oculare.

4.2.3 Momento conclusivo

Nell'ultima parte del laboratorio sono mostrate le altre anamorfosi della mostra (descritte precedentemente nelle **Figure 4**, **5** e **6**). Come nell'introduzione al laboratorio, gli studenti prima formulano ipotesi sull'immagine che si potrebbe vedere sullo specchio e poi guardano attraverso l'oculare. Viene infine mostrato il pantografo di Parré presente nella mostra e spiegato agli studenti come utilizzarlo.
Il laboratorio si conclude svelando che gli acquerelli visti nell'introduzione al laboratorio sono immagini anamorfiche rispetto a un'anamorfosi catottrica a specchio cilindrico e fornendo specchi cilindrici di diverse dimensioni per poterli vedere. Gli studenti liberamente posizionano i vari cilindri sulle copie degli acquerelli ritrovati e cercano la giusta angolazione da dove guardare lo specchio, per poi sorprendersi quando scoprono l'immagine nascosta dietro l'anamorfosi.

4.3 Questionario di valutazione

Al termine del laboratorio, è stato chiesto agli studenti di compilare un questionario valutativo dell'esperienza, in forma anonima. L'effettivo dei questionari raccolti è 77. Il questionario era composto di 7 domande (da 1 a 7) valutate mediante scala Likert a 5 livelli (1. Molto; 2. Sì; 3. Così così; 4. No; 5. Per niente); 3 domande (8, 9 e 11) aperte e una domanda (la decima) di valutazione del laboratorio con una scala da 1 a 10. Due domande (precisamente la prima e la terza) chiedevano anche di dettagliare l'opzione scelta: in particolare, per la Domanda 1 si chiedeva di indicare cosa si riteneva di aver imparato nel laboratorio.
Le risposte alla Domanda 1 «Credi di aver imparato cose nuove durante il laboratorio?» (**Figura 16**) hanno dato un riscontro positivo al laboratorio. Le risposte degli studenti mostrano quanto di inaspettato ci

fosse per loro nelle attività del laboratorio. Oltre alla risposta riportata nel titolo del presente articolo, se ne presentano altre qui di seguito:

- «Facendo una forma curva non pensavo che da un'angolazione si vedesse dritta»;
- «Non sapevo che c'erano dei metodi per vedere dei disegni tramite uno specchio»;
- «C'è un mondo nuovo da scoprire»;
- «Che il riflesso si trasforma e dà vita a un'immagine»;
- «Caratteristiche della prospettiva e nuove regole della geometria»;
- «Come nasce la prospettiva».

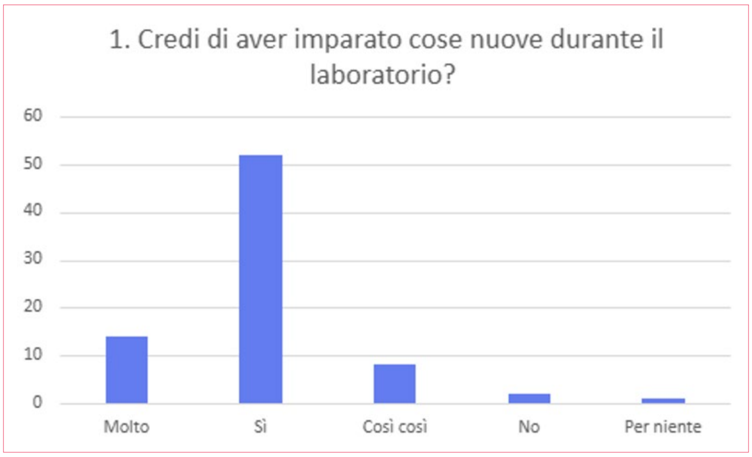


Figura 16. Distribuzione delle risposte alla Domanda 1.

Altre domande intendevano raccogliere opinioni sulla metodologia laboratoriale, sul lavoro di gruppo e sulla collaborazione tra studenti. Il laboratorio è stato ritenuto interessante dall'80% degli studenti, mentre non è proprio piaciuto solo al 5% (**Figura 17**).

Figura 17. Distribuzione delle risposte alla Domanda 7.

Anche il voto dato al laboratorio, in risposta alla Domanda 10, conferma il successo della proposta (**Figura 18**). Il voto 1 è stato assegnato da uno studente che ha dichiarato poco interesse per le cose pratiche e scarsa collaborazione nel lavoro di gruppo e da uno studente che, al contrario, avrebbe preferito lavorare da solo.

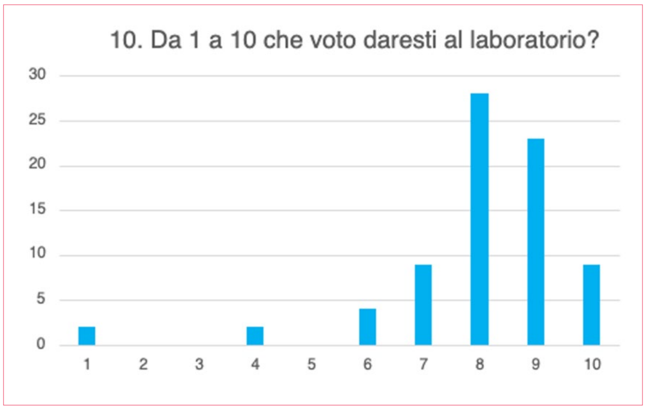


Figura 18. Distribuzione dei voti attribuiti al laboratorio, con media 8 (77 risposte).

Alla domanda su eventuali difficoltà incontrate durante le attività, 45 studenti hanno risposto di non averne avute, mentre quelle indicate riguardavano disegnare guardando lo specchio e non la mano sul foglio.
L'ultima domanda chiedeva di scrivere qualche commento sull'esperienza. Circa i tre quarti degli studenti hanno aggiunto commenti che confermano quanto il laboratorio abbia proposto esperienze nuove e inaspettate. Si riportano alcuni di questi:

- «Mi è piaciuto molto perché era interessante vedere come sono storte le figure quando le disegni per farle combaciare allo specchio»;
- «L'esperienza mi è piaciuta molto, e quando riuscivo a creare le illusioni mi sentivo come se fossi veramente un matematico»;
- «Bellissima la vorrei rifare: mi è piaciuto disegnare cose curve e rivelar il vero disegno»;
- «A me è piaciuta molto, un'esperienza alternativa e interessante, non mi sono mai annoiata e fatto sta che mi sono molto divertita»;
- «Mi è piaciuta molto perché oltre a spiegarci cose nuove ci hanno anche fatto provare come si disegnava in quel modo (difficile) ma bello comunque».

5 Bilancio dell'esperienza

In questo articolo è stato presentato un laboratorio sulle anamorfosi progettato per studenti di scuola secondaria di primo grado a partire da modelli presenti nella *Collezione Macchine Matematiche*. I dati raccolti durante lo svolgimento delle attività e i riscontri forniti dagli studenti mediante il questionario valutativo dell'esperienza mostrano che gli obiettivi prefissati in fase di sperimentazione sono stati complessivamente raggiunti.
Per quanto riguarda il primo obiettivo, si può affermare che gli studenti sono rimasti stupiti dalle attività svolte. I ragazzi si sono recati presso la sede della collezione sapendo di dover svolgere un laboratorio di matematica e probabilmente pensando ad attività più o meno simili a quelle proposte comunemente a scuola. Tuttavia, già dal momento introduttivo hanno potuto intuire che le attività al museo avrebbero permesso loro di incontrare la matematica in una forma diversa da quella a cui erano abituati, in quanto sono stati accolti con oggetti "inaspettati" (macchine matematiche e immagini anamorfiche). Come emerge dalle risposte al questionario, in particolare alla Domanda 11, le attività

del laboratorio sono state percepite dagli studenti come innovative, sorprendenti e divertenti. Inoltre, il contesto informale del museo e gli strumenti coinvolti sembrano aver favorito un atteggiamento aperto, curioso e disponibile alla sperimentazione durante il lavoro di gruppo: in generale, gli studenti hanno partecipato con interesse e senza timore di sbagliare, impegnandosi nonostante alcune difficoltà a portare a termine le richieste delle consegne.

Il secondo obiettivo di fornire alcuni elementi per comprendere come nascono e si sviluppano le anamorfosi è stato raggiunto: manipolando e osservando i modelli esposti, gli studenti si sono messi nei panni degli artisti imitandone i gesti compiuti per realizzare un quadro in prospettiva, nei panni dei matematici individuando alcune regolarità geometriche utilizzate dal pittore per realizzare un'immagine prospettica e infine nei panni di chi osserva le immagini anamorfiche e ne rimane meravigliato quando scopre come guardarle per capire cosa rappresentano. Come evidenziano anche alcune risposte al questionario finale, gli studenti hanno scoperto che la storia delle anamorfosi è il risultato di un'alternanza tra le pratiche empiriche elaborate dai pittori per realizzare immagini "sorprendenti" e le riflessioni teoriche dei matematici, che hanno progressivamente formalizzato le regole emerse dall'esperienza degli artisti.

Il terzo obiettivo è stato raggiunto grazie al lavoro di gruppo. Svolgendo compiti pratici appositamente progettati, gli studenti hanno scoperto invarianti delle anamorfosi (**par. 3.2.2**) e li hanno messi in gioco nella realizzazione delle proprie immagini anamorfiche. Gli studenti hanno così potuto sperimentare l'intreccio tra il lavoro del pittore e quello del matematico e sono andati oltre il semplice stupore suscitato dalla rivelazione dell'immagine nascosta, perché hanno imparato in modo pratico come realizzare un'immagine anamorfica.

Il laboratorio sulle anamorfosi è stato appositamente pensato per essere svolto al museo, non solo per mostrare i modelli descritti nell'articolo ma anche per sostenere il discorso storico sullo sviluppo della prospettiva. Il target della scuola secondaria di primo grado è stato determinato dall'iniziativa in cui il laboratorio è stato inserito; un suo adattamento per classi di scuola secondaria di secondo grado potrebbe permettere di approfondire maggiormente la matematica coinvolta.

In riferimento alla ricerca di Nemirovsky et al. (2017), il laboratorio sulle anamorfosi propone un argomento che non compare esplicitamente nel curricolo scolastico, ma che ha comunque suscitato l'interesse in diversi docenti (probabilmente per il fatto che spazia dalla matematica alla storia e all'arte) spingendoli a proporlo alle loro classi. Le attività sulle anamorfosi sono state progettate e condotte da animatrici esperte per favorire l'apprendimento della matematica nel contesto informale del museo, attraverso l'utilizzo di macchine matematiche e il coinvolgimento dei partecipanti in attività che non presentano la connotazione formale tipica dei percorsi legati a contenuti curricolari. È possibile quindi concludere che il laboratorio sulle anamorfosi al museo presentato in questo articolo si può configurare come un caso di educazione matematica informale, in cui gli studenti apprendono la matematica attraverso la collaborazione con i compagni e mediante sperimentazioni inaspettate.

Bibliografia

Andersen, K. (1996). The mathematical treatment of anamorphoses from Piero della Francesca to Niceron. In J. W. Dauben, M. Folkerts, E. Knobloch & H. Wussing (Eds.), *History of Mathematics: States of the Art* (pp. 3–28). Academic Press.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario.* Matteoni Stampatore.

Baltrušaitis, J. (2004). *Anamorfosi o Thaumaturgus opticus. Edizione riveduta e ampliata.* Adelphi. (Prima edizione pubblicata nel 1978).

Barozzi, I., & Danti, E. (1682). *Le due regole della prospettiva prattica di M. Iacomo Barozzi da Vignola, con i commentari del Reuerendo Padre Maestro Egnatio Danti dell'Ordine de' Predicatori Mattematico dello Studio di Bologna*. (Prima edizione pubblicata nel 1583). https://archive.org/details/hin-wel-all-00001766-001/mode/2up

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: Dalla storia alla scuola*. Collana Convergenze. Springer.

Beggi Miani, L., Brunetti, R., & Morelli, S. (2025). *Tesori modenesi ritrovati*. Franco Cosimo Panini.

Comar, P. (1992). *La perspective en jeu. Les dessous de l'image*. Gallimard.

Di Lazzaro, P., Murra, D., & Vitelli, P. (2019). *Le immagini anamorfiche in un viaggio interdisciplinare tra arte, storia, geometria e attualità*. ENEA.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. Z*DM - Mathematics Education*, *43*(4), 471–482. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6

Maschietto, M. (2009). Strumenti per la prospettiva dal Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena. In R. Sinisgalli (Ed.), *Atti del convegno "L'Arte della Matematica nella prospettiva"* (pp. 65–85). Casa Editrice Cartei & Bianchi.

Maschietto, M. (2024). Ma come hanno fatto [i matematici] a pensare a queste cose? Mostre e laboratori con le macchine matematiche. *Matematica, Cultura e Società*, *9*(2-3), 253–269.

Maschietto, M., & Bartolini Bussi, M. G. (2005). Meaning construction through semiotic means: The case of the visual pyramid. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the IGPME* (Vol. 3, pp. 313–320). PME.

Maschietto, M., & Martignone, F. (2008). Activities with the mathematical machines: Pantographs and curve drawers. In E. Barbin, N. Stehlikova & C. Tzanakis (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 5th European Summer University* (pp. 285–296). Vydavatelsky Press.

Nemirovsky, R. (2018). Pedagogies of Emergent Learning. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (pp. 401–421). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_23

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Civil, M. (2017). Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics Education* (pp. 968–979). National Council of Teachers of Mathematics.

Niceron, J. F. (1663). *La perspective curieuse*. (Prima edizione pubblicata nel 1638). https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62737370/f9.item.texteImage

Vaulezard, I.-L. (1630). *Perspective cylindrique et conique*. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5818739z/

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 157–178. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.6

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Scoprire le radici quadrate: un viaggio tra forme e numeri

Discovering square roots: a journey through shapes and numbers

Paola Morando e Maria Luisa Spreafico
Dipartimento di Scienze Agrarie e Ambientali, Università degli Studi di Milano – Italia

paola.morando@unimi.it, maria.spreafico@unimi.it

Sunto / L'introduzione della radice quadrata può rappresentare una sfida complessa nello studio della matematica, generando difficoltà sia cognitive che emotive e mettendo in discussione intuizioni consolidate. Talvolta l'argomento viene proposto in modo meccanico, senza fornire rappresentazioni concrete e senza lasciare spazio a domande, dubbi o curiosità. Questo contributo descrive un percorso laboratoriale, svolto in classi seconde della scuola secondaria di primo grado italiana, ispirato alla teoria dell'apprendimento significativo di Ausubel, che favorisce l'integrazione tra nuovi concetti e conoscenze pregresse in un ambiente motivante e collaborativo. Attraverso la piegatura di modelli origami e giochi didattici, gli studenti possono costruire una comprensione solida delle radici quadrate e delle loro proprietà. Il laboratorio, sperimentato anche in presenza di una studentessa cieca, stimola l'apprendimento attivo, la costruzione condivisa del sapere e la riflessione metacognitiva.

Parole chiave: radice quadrata; origami; giochi didattici; apprendimento significativo; disabilità visive.

Abstract / Introducing square roots might be a complex challenge in learning mathematics, bringing both cognitive and emotional difficulties and challenging established beliefs. Sometimes, the topic is taught mechanically, without providing models or leaving room for questions, doubts, or curiosity.
This contribution describes a hands-on workshop carried out in seventh grade classes of Italian lower secondary school, inspired by Ausubel's theory of meaningful learning, which promotes the integration of new concepts with prior knowledge in a motivating and collaborative environment. Through the folding of origami models and didactical games, students can build a solid understanding of square roots and their properties. The workshop, which was also tested with a blind student, fosters active learning, shared knowledge construction, and metacognitive reflection.

Keywords: square root; origami; didactical game; meaningful learning; visual impairments.

1 Introduzione

Nella scuola secondaria di primo grado italiana,[1] il concetto di radice quadrata viene generalmente introdotto nel secondo anno, in linea con gli obiettivi specifici di apprendimento delle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (Ministero dell'Istruzione e del Merito [MIM], 2025).

Secondo quanto riferito da alcuni insegnanti,[2] molti studenti percepiscono questo argomento come particolarmente difficile e poco chiaro; gli insegnanti riferiscono inoltre che non di rado subentrano timori alimentati dai racconti allarmanti dei compagni più grandi.

Queste narrazioni riflettono, in realtà, le difficoltà autentiche che molti studenti incontrano, sia sul piano cognitivo che su quello emotivo. Dal punto di vista cognitivo, infatti, la radice quadrata è un concetto che richiede un livello di pensiero astratto non ancora pienamente sviluppato in molti studenti di questa fascia d'età. A 12-13 anni, la capacità di ragionare in modo astratto sugli oggetti matematici, come numeri irrazionali o operazioni inverse, è ancora in fase di maturazione (Susac et al., 2014), e questo rende l'accesso al significato profondo del concetto particolarmente impegnativo. Sul piano emotivo, invece, l'argomento può generare ansia o disinteresse, soprattutto quando viene proposto in modo meccanico, senza connessioni con l'esperienza e senza valorizzare la curiosità e il senso di scoperta degli studenti (Kanefke & Schukajlow, 2024).

La radice quadrata viene solitamente introdotta come operazione inversa dell'elevamento al quadrato. In questo approccio, l'attenzione si concentra principalmente sull'aspetto procedurale del concetto, cioè sul calcolo del valore della radice. Di conseguenza, l'insegnamento tende a privilegiare tecniche operative – come l'uso delle tavole, degli algoritmi di estrazione o della calcolatrice – piuttosto che guidare gli studenti alla comprensione del significato concettuale della radice e del contesto matematico in cui essa si colloca.

In aggiunta, un'impostazione centrata principalmente sul calcolo approssimato della radice quadrata, rischia di ridurre l'argomento a una mera questione operativa. In questo modo, si perde l'occasione di mostrare come l'introduzione della radice consenta di ampliare l'insieme dei numeri noti agli studenti, portandoli a confrontarsi con un nuovo insieme di numeri: gli irrazionali. Questi numeri presentano proprietà del tutto nuove rispetto ai razionali, come la scrittura decimale infinita e non periodica, e la loro esplorazione potrebbe rappresentare un'importante occasione per ampliare la visione degli studenti sul sistema numerico, facilitando anche l'introduzione successiva di altri irrazionali significativi, come il numero π.

Inoltre, al di fuori dei casi più semplici – come quello dei quadrati perfetti – risulta spesso difficile proporre rappresentazioni concrete o modelli visivi della radice quadrata, e questo fatto ostacola il passaggio da una comprensione intuitiva a una più astratta e consapevole del concetto.

Il percorso didattico proposto in queste pagine nasce dall'esigenza di introdurre, in modo graduale e significativo, i "nuovi" numeri che emergono dall'uso delle radici, distinguendoli da quelli già noti agli studenti – numeri naturali e razionali. L'obiettivo è guidare la scoperta di alcune delle loro proprietà fondamentali, offrendo strumenti per stimarne e approssimarne i valori e riducendo, al tempo stesso, timori e difficoltà iniziali attraverso attività che favoriscono la costruzione del significato, anche mediante la creazione e la manipolazione di modelli concreti, capaci di rendere il concetto più accessibile e meno astratto.

Il percorso presentato in questo contributo è stato organizzato in diverse fasi, durante le quali gli studenti sono stati guidati nella costruzione concreta, mediante l'uso della carta, di rappresentazioni di alcune radici quadrate di numeri naturali, e sono stati coinvolti in attività di approssimazione attraverso un gioco didattico progettato per stimolare il ragionamento e la partecipazione attiva.

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.
2. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

Partendo dalla manipolazione di quadrati di carta, dei quali i valori delle aree sono quadrati perfetti, sono stati poi realizzati modelli origami che hanno reso tangibili alcune radici di numeri interi. Questi modelli sono stati collocati su una linea dei numeri opportunamente costruita permettendo agli studenti di confrontare le radici tra loro e con altri numeri noti attraverso la relazione d'ordine, e di sviluppare strategie per stimarne il valore in modo intuitivo e significativo.
La fase conclusiva del percorso ha previsto un gioco didattico che ha offerto agli studenti l'opportunità di confrontarsi con la stima di radici quadrate e con la risoluzione di semplici espressioni che le coinvolgono, all'interno di un contesto ludico e motivante, favorendo il consolidamento delle competenze in un clima disteso e collaborativo. Questo gioco si è rivelato anche uno strumento utile per valutare i risultati della prima fase del laboratorio proposto, in quanto ha permesso di verificare le competenze acquisite dagli studenti.
Il laboratorio è stato sperimentato in numerose classi e presentato in corsi di formazione in Italia e in Portogallo (presso l'Università di Aveiro) e ha ricevuto ottimi riscontri sia da parte degli studenti che da parte degli insegnanti. Il laboratorio è stato anche proposto in una classe nella quale era presente una studentessa cieca. Questa sperimentazione è stata resa possibile dalla collaborazione con l'Istituto dei Ciechi di Milano, sotto la guida della tiflologa Dott.ssa Tiziana Angilletta.
Oltre a descrivere in dettaglio il laboratorio, perchè questo possa essere riproposto dai docenti interessati, questo lavoro è arricchito da commenti di carattere didattico e da osservazioni raccolte in aula durante le diverse fasi di sperimentazione, con l'obiettivo di presentare una riflessione critica sulle attività proposte e sul loro impatto sul processo di apprendimento.

2 Breve inquadramento teorico

L'impostazione del percorso proposto si fonda su un insieme coerente di riferimenti teorici provenienti dalla didattica della matematica e dalle scienze dell'educazione, che attribuiscono un ruolo centrale all'azione, alla manipolazione e alla pluralità delle modalità di accesso ai concetti matematici. In particolare, il lavoro si colloca nel quadro della teoria dell'apprendimento significativo di Ausubel (1963, 1968), secondo la quale l'apprendimento risulta efficace quando i nuovi contenuti possono essere messi in relazione con le conoscenze già presenti nelle strutture cognitive dello studente. In questa prospettiva, risulta centrale la progettazione di esperienze che favoriscano connessioni concettuali, immagini mentali e processi di rielaborazione personale, tenendo conto anche della dimensione emotiva e relazionale dell'apprendimento (Capuano et al., 2018).
Un primo riferimento riguarda il ruolo delle rappresentazioni multiple nella costruzione del significato matematico. Studi classici, come quelli di Behr et al. (1980), hanno mostrato come la comprensione dei concetti numerici e operativi si sviluppi attraverso il coordinamento di diverse rappresentazioni. In una prospettiva ausubeliana, tale coordinamento favorisce l'integrazione dei nuovi concetti nelle strutture cognitive preesistenti, sostenendo una comprensione profonda e non meramente procedurale. In particolare, per concetti astratti come quello di radice quadrata, l'ancoraggio a rappresentazioni geometriche e spaziali può costituire un supporto essenziale per superare una visione puramente procedurale. Nello specifico, il percorso si colloca in sintonia con i principi del *Universal Design for Learning* (UDL, Meyer et al., 2013), che promuove la progettazione di ambienti di apprendimento accessibili e inclusivi fin dalla fase iniziale. L'UDL sottolinea proprio l'importanza di offrire molteplici modalità di rappresentazione dei contenuti, di azione ed espressione e di coinvolgimento, al fine di valorizzare la variabilità degli studenti. Questo approccio favorisce l'accesso a concetti matematici attraverso canali diversi e complementari, senza vincolarlo a un'unica modalità espressiva o cognitiva.

In questa prospettiva si colloca anche l'uso di artefatti manipolabili, intesi non come semplici supporti materiali, ma come mediatori cognitivi capaci di sostenere l'emergere di significati matematici. Come evidenziato dalla letteratura sulla mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009), la manipolazione di artefatti consente agli studenti di esplorare proprietà e relazioni, favorendo il passaggio dall'esperienza concreta alla formalizzazione concettuale. Gli origami, in particolare, presentano un notevole potenziale didattico: essi permettono di integrare azione, percezione visiva e ragionamento spaziale, offrendo un contesto in cui grandezze geometriche, relazioni metriche e strutture numeriche possono essere esplorate in modo intuitivo ma rigoroso.
Il ricorso agli origami si inserisce inoltre nel quadro della didattica laboratoriale, intesa come ambiente di apprendimento in cui gli studenti sono attivamente coinvolti nella costruzione della conoscenza attraverso l'esplorazione, la formulazione di ipotesi, il confronto e la discussione. In tale contesto, il sapere matematico non viene trasmesso in forma conclusa, ma emerge progressivamente dall'interazione tra studenti, materiali e problemi proposti, in linea con una visione costruttivista dell'apprendimento.

> «La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività».
>
> (Anichini et al., 2004, p. 26)

Da questa breve citazione, si evince l'importanza dell'apprendimento collaborativo nel laboratorio di matematica. Numerosi studi mostrano come il lavoro in piccoli gruppi favorisca la verbalizzazione dei ragionamenti, il confronto di strategie e la negoziazione di significati (si veda, ad esempio, Bartolini Bussi et al., 1995), aspetti particolarmente importanti per l'apprendimento della matematica. Se il lavoro nel gruppo viene strutturato dal docente in un certo modo, ciascun partecipante può contribuire alla costruzione di significati matematici mettendo in gioco competenze, conoscenze ed esperienze diverse, creando una situazione di interdipendenza positiva in cui l'apprendimento individuale è sostenuto dal contributo degli altri.
La dimensione sociale dell'apprendimento contribuisce non solo allo sviluppo cognitivo, ma anche alla costruzione di un clima emotivo più sicuro, che può ridurre l'ansia matematica e sostenere la partecipazione attiva degli studenti (Zan, 2007). In quest'ottica, una metodologia didattica efficace è rappresentata dal gioco, inteso come contesto strutturato che favorisca l'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze. La letteratura sul *game-based learning* evidenzia come il gioco possa favorire il coinvolgimento e la motivazione degli studenti, sostenendo al contempo l'attivazione di processi cognitivi rilevanti per l'apprendimento disciplinare (Plass et al., 2015). In ambito matematico, contesti ludici opportunamente progettati possono offrire occasioni per formulare ipotesi, confrontare strategie e sviluppare forme di controllo e riflessione sul proprio operato. Il gioco può inoltre contribuire a creare un clima emotivo meno esposto rispetto alle situazioni valutative tradizionali, facilitando la partecipazione attiva e l'interazione tra pari. In questo senso, esso si configura come uno spazio che favorisce la rielaborazione e il consolidamento delle conoscenze, integrandosi in modo coerente con approcci che valorizzano l'apprendimento attivo e collaborativo (Naik, 2014).
Nel loro insieme, questi riferimenti delineano un quadro teorico che giustifica l'adozione di un approccio centrato sull'esperienza, sulla manipolazione e sulla pluralità delle rappresentazioni, ponendo le basi concettuali su cui si innesta il percorso didattico descritto nelle sezioni successive.

3 Contesto, obiettivi e metodi

3.1 Contesto della sperimentazione

Il percorso descritto in questo lavoro è stato sperimentato direttamente dalle autrici sia in undici classi seconde della scuola secondaria di primo grado, situate nelle provincie di Asti, Milano, Alessandria, sia nell'ambito di numerosi corsi di formazione rivolti a insegnanti. Tali corsi, organizzati anche nell'ambito di progetti Piano Lauree Scientifiche e di percorsi abilitanti all'insegnamento di matematica e scienze nella scuola secondaria di primo grado, si sono svolti in varie sedi italiane e presso l'Università di Aveiro, in Portogallo. I docenti partecipanti hanno successivamente implementato il laboratorio nelle proprie classi, restituendo feedback e osservazioni significative che hanno contribuito al perfezionamento della proposta.
In questo articolo ci concentreremo sulle sperimentazioni condotte nelle classi seconde della scuola secondaria di primo grado.

3.2 Obiettivi e metodi

Come anticipato, l'introduzione del concetto di radice quadrata nella scuola secondaria di primo grado presenta diverse criticità, dovute soprattutto alla distanza che spesso si crea tra il significato intuitivo del concetto e la sua immediata formalizzazione simbolica. La radice viene spesso presentata agli studenti come un'operazione puramente procedurale, senza che essi possano ancorare il pensiero astratto a una rappresentazione tangibile o a un'idea geometrica legata ad aree e lunghezze. Ciò può generare difficoltà ricorrenti, come la tendenza a considerare l'estrazione della radice come un semplice "procedimento da memorizzare", la scarsa capacità di collocare i valori di radici di quadrati non perfetti sulla linea dei numeri, posizionandoli ad esempio tra due numeri interi consecutivi, e la difficoltà di collegare rappresentazioni differenti dello stesso numero razionale.
Il percorso proposto in questo contributo nasce dall'esigenza di affrontare tali difficoltà attraverso un ambiente didattico che favorisca processi di costruzione del significato. Dal punto di vista disciplinare, esso si colloca pienamente nel quadro delle *Indicazioni nazionali* (MIM, 2025), che individuano come obiettivi: (i) «Riconoscere e utilizzare la radice come operatore inverso dell'elevamento a potenza. Fornire stime di radici utilizzando solo la moltiplicazione», e (ii) «Comprendere che non esiste alcuna frazione o numero decimale finito o periodico il cui quadrato sia uguale a 2 (o ad altri numeri interi non quadrati), riconoscendo così l'esistenza e la natura dei numeri irrazionali» (p. 71).
Il percorso è stato progettato per accompagnare progressivamente gli studenti verso tali obiettivi, favorendo una comprensione concettualmente fondata del significato di radice quadrata e delle sue implicazioni sul piano numerico e geometrico. In particolare, si è inteso offrire agli studenti occasioni per esplorare il concetto attraverso rappresentazioni geometriche e confronti tra grandezze, sostenendo lo sviluppo di strategie di stima e di controllo del risultato anche in assenza di procedure algoritmiche formalizzate.
Accanto agli obiettivi disciplinari, il percorso ne abbraccia anche di trasversali, sempre in linea con le *Indicazioni nazionali*, con l'intento di sviluppare negli studenti il pensiero critico, la flessibilità strategica e la capacità di lavorare in gruppo.
In Tabella 1 sono riportati nel dettaglio tutti gli obiettivi del percorso proposto.

Obiettivi disciplinari	
D1	Introdurre il concetto di radice quadrata di un numero naturale attraverso un approccio geometrico.
D2	Favorire la riflessione sulla non unicità della rappresentazione dei numeri.
D3	Introdurre il concetto di numero irrazionale.
D4	Sviluppare capacità di confronto e ordinamento tra radici quadrate di numeri naturali.
D5	Promuovere strategie di stima del valore approssimato delle radici.
Obiettivi trasversali	
T1	Stimolare l'elaborazione di strategie personali nella risoluzione di situazioni problematiche.
T2	Favorire il lavoro di gruppo e la collaborazione tra pari.

Tabella 1. Obiettivi disciplinari e trasversali del percorso.

Il percorso, articolato in due momenti distinti ma tra loro connessi, si apre con un laboratorio che prende spunto dall'idea illustrata nel *II Libro* degli *Elementi* di Euclide, che consiste nella rappresentazione di numeri reali attraverso grandezze geometriche (ad esempio mediante segmenti e aree). Il concetto di radice quadrata di un numero naturale viene quindi introdotto in varie fasi attraverso l'impiego di modelli tangibili per giungere, in modo graduale e motivato, alla corrispondente formalizzazione aritmetica.
Gli studenti, tramite la costruzione di artefatti cognitivi in carta, sono guidati a dare forma concreta a un'idea astratta come quella di numero reale.
Il lavoro in classe è stato organizzato in piccoli gruppi, favorendo dinamiche di apprendimento collaborativo e proponendo attività di tipo manipolativo, che si sono dimostrate efficaci e inclusive. Questo approccio ha permesso di valorizzare le diverse modalità di apprendimento degli studenti, offrendo a ciascuno l'opportunità di partecipare attivamente e di costruire significati attraverso l'uso di materiali e l'interazione con i pari.
La fase conclusiva del percorso, di carattere ludico, consente agli studenti di mettere alla prova e raffinare le intuizioni sviluppate nella manipolazione, favorendo il passaggio da ragionamenti locali a forme di controllo più generalizzate. In tal modo, il percorso si configura come un'occasione per sostenere simultaneamente lo sviluppo concettuale e quello strategico-relazionale, offrendo un ambiente di apprendimento coerente con gli obiettivi curricolari e capace di valorizzare la diversità delle risorse cognitive degli studenti.
La combinazione tra manipolazione, discussione collettiva e gioco favorisce infatti il confronto di idee, la negoziazione di strategie e la verbalizzazione dei ragionamenti: elementi indispensabili per consolidare pratiche argomentative e collaborative.
Come descritto nella prossima sezione, il ruolo del docente nel percorso proposto, oltre a essere centrale nella progettazione dell'ambiente di lavoro e dei problemi da esplorare, si rivela cruciale nel

mediare l'interazione tra studenti e artefatti, fornendo un supporto che non anticipa le soluzioni ma orienta la ricerca. La sua presenza è importante anche sul piano osservativo e cognitivo, perché consente di riconoscere e valorizzare le strategie spontanee messe in atto dagli allievi, trasformandole in occasioni per costruire significato.
Infine, la capacità del docente di orchestrare la discussione collettiva, selezionando e mettendo in dialogo i diversi contributi proposti, permette di far emergere e consolidare i concetti matematici chiave. La sua azione risulta pertanto decisiva nel trasformare l'esplorazione inizialmente spontanea in un apprendimento matematico strutturato, consapevole e profondamente significativo.

4 Descrizione del percorso didattico

In questa sezione vengono presentate le diverse fasi del laboratorio, ciascuna accompagnata da una descrizione operativa, dalle note di campo commentate e dall'indicazione degli obiettivi disciplinari e trasversali a cui fa riferimento. Nel laboratorio gli studenti interagiscono con artefatti in carta che permettono di esplorare relazioni geometriche e numeriche, rendendo visibili proprietà che saranno successivamente formalizzate. Si è scelto di sintetizzare in una unica narrazione quanto osservato nelle undici esperienze fatte.
I prerequisiti richiesti sono minimi: è sufficiente che gli studenti conoscano il concetto di area del quadrato e le modalità del suo calcolo, il principio di equiscomponibilità delle figure piane e i numeri decimali, sia limitati sia periodici.
La durata totale è di circa due ore per lo svolgimento del laboratorio e ulteriori due ore per il gioco didattico e la successiva discussione collettiva. Nella **Tabella 2** sono riassunte le caratteristiche organizzative della sperimentazione: sono riportate le cinque fasi del percorso, con le indicazioni sui tempi, le attività, gli obiettivi, i materiali e l'organizzazione della classe. Nei tempi si è tenuto conto anche di alcuni minuti di pausa tra una fase e l'altra.

Fasi	Tempi	Attività	Obiettivi	Materiali	Organizzazione
1	20 min	Le unità di misura		1 foglio carta origami (15 cm × 15 cm) × *N* 1 striscia di carta (21 cm × 5 cm) × *N* nastro adesivo	Gruppi da 4 studenti
2	25 min	Quadrati perfetti	D1; D2; D4	Scheda di **Figura 2** × *N*	Gruppi da 4 studenti
3	45 min	$\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$	D1; D2; D3; D4; D5; T1; T2	2 fogli carta origami (15 cm × 15 cm) × *N* 1 calcolatrice (non scientifica) per gruppo	Gruppi da 4 studenti
4	20 min	$\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$	D1; D4; D5; T1	2 fogli carta origami (15 cm × 15 cm) × *N*	Gruppi da 4 studenti
5	100 min	Gioco: radici in scatola	D4; D5; T1; T2	5 scatole di cartone contrassegnate con un intervallo numerico: [0,3), [3,6), [6,9), [9,12), [12,15] 80 *carte radice* con espressioni numeriche contenenti radici quadrate di numeri naturali 4 cappelli (uno per squadra) 5 fogli con le soluzioni (radici/intervallo) 5 schede per i punteggi	4 squadre da 6 studenti

Tabella 2. Quadro riassuntivo delle fasi del percorso (*N* indica il numero degli alunni).

4.1 Fase 1: le unità di misura

La lezione sulle radici era molto attesa: gli studenti avevano già notato il simbolo della radice quadrata sulle calcolatrici e ne avevano sentito parlare dai compagni più grandi come di un argomento "difficile". C'era quindi un misto di curiosità e timore sull'argomento.
I banchi sono stati disposti in modo che gli studenti potessero lavorare in gruppi da quattro (o da cinque quando la numerosità lo richiedeva) e sono stati distribuiti i materiali.
Ad ogni studente è stato chiesto di dividere il foglio origami in dotazione in sedici quadretti congruenti. Questa divisione è standard ed è usata spesso in altri laboratori di matematica che utilizzano l'origami. Gli alunni sono stati guidati nella realizzazione fornendo le seguenti istruzioni: portare un lato del quadrato sul lato opposto, piegare e riaprire; portare ora entrambi i lati paralleli a coincidere con la piega appena fatta, piegare e riaprire. Ripetere poi il processo usando gli altri due lati paralleli.
Successivamente, si sono stabilite le unità di misura: 1 u corrisponde al lato di ogni quadretto e 1 u^2 corrisponde all'area di ogni quadretto. Il foglio quadrettato è stato chiamato *misurometro*.[3]
Ogni studente ha attacco la striscia di carta sul banco usando il nastro adesivo, appoggiando sopra ad essa il *misurometro* e riportando le unità da 1 a 4 (**Figura 1**). Si è costruito uno strumento, chiamato dai ragazzi *righello*, che permette di confrontare tra loro diversi numeri.

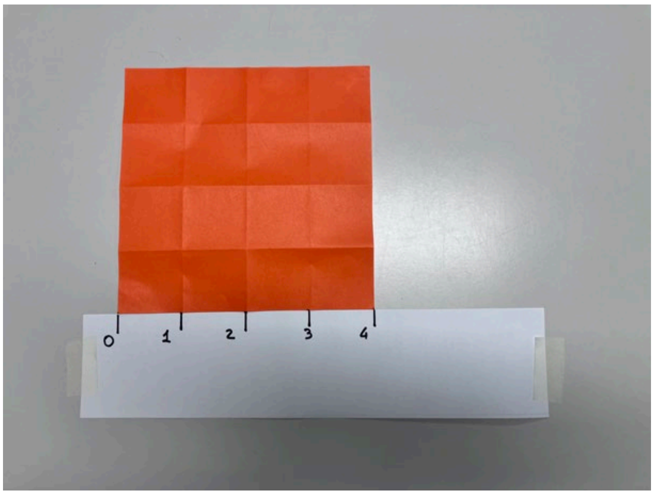


Figura 1. *Misurometro* e *righello*.

4.2 Fase 2: quadrati perfetti

Dopo aver distribuito ad ogni studente la scheda in **Figura 2**, per raccogliere i dati, si è richiamata con l'aiuto degli studenti la formula per il calcolo dell'area del quadrato: $A = l^2$. A partire da questa relazione, è stata definita la radice quadrata di A come la lunghezza del lato del quadrato di area A, sottolineando che si tratta di un numero che, elevato al quadrato, restituisce A. In questa occasione è stato anche introdotto il simbolo della radice quadrata.
Successivamente gli studenti sono stati invitati a identificare sul *misurometro* quadrati con i lati di varie dimensioni, costruiti raggruppando quadratini di area unitaria. La classe ha individuato quadrati di area 1, 4, 9 e 16. Per ciascuno di essi, gli studenti hanno annotato sulla scheda sia l'area sia la lunghezza del lato, espressa attraverso il simbolo appena introdotto ($l = \sqrt{A}$).

3. Per semplicità espositiva, durante la lezione in classe si sono richiamate oralmente le unità di misura, concentrando l'attenzione sul valore numerico di aree e segmenti. Anche nella presente descrizione scritta si è scelto di omettere le unità, al fine di rendere il discorso più fluido, facendo affidamento sul contesto per distinguere se una determinata quantità si riferisce a una misura lineare o di superficie.

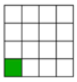
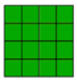
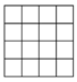
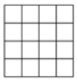
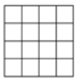
Figura	Area A	Lunghezza lato $l = \sqrt{A}$
		
		
		
		
		
		
		

Figura 2. Scheda per raccogliere i dati.

Dopo aver osservato la corrispondenza tra il valore della radice quadrata di A e la lunghezza l del lato ottenuta con il *misurometro*, è stato chiesto agli studenti di aggiornare il *righello* costruito in precedenza, riportando la nuova scrittura (mediante radice) per alcuni numeri naturali già segnati (Figura 3).

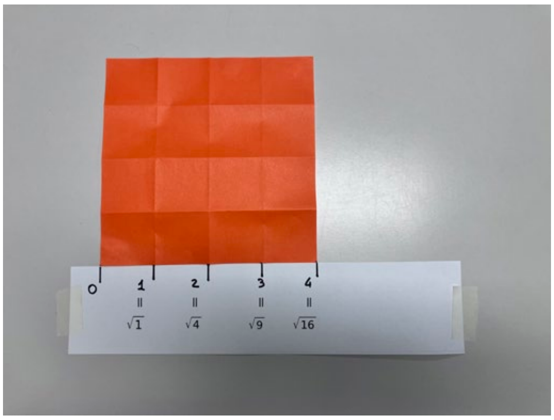


Figura 3. *Righello* con radici di quadrati perfetti.

L'aggiornamento del *righello* con le scritture in forma di radice, pur essendo un'azione apparentemente semplice, ha attivato processi concettuali significativi. Gli studenti hanno infatti riflettuto sulla possibilità che un numero possa avere rappresentazioni diverse – ad esempio 2 o $\sqrt{4}$ (o una frazione equivalente) – mostrando di rinegoziare il significato dell'uguaglianza come relazione bidirezionale tra espressioni che condividono lo stesso valore. Tale consapevolezza è rilevante, poiché la ricerca didattica (Behr et al., 1980) documenta come molti fraintendimenti derivino proprio da un'interpretazione unidirezionale dell'uguaglianza come "calcolo da eseguire".

Il *righello* si è così configurato come un efficace mediatore visivo: collocare $\sqrt{4}$ nello stesso punto di 2 ha reso tangibile il legame tra area del quadrato, lunghezza del lato e radice quadrata, sostenendo gli obiettivi disciplinari D1 e D2 e facilitando la comprensione della relazione d'ordine fra alcune radici (obiettivo D4). Questa fase iniziale si è rivelata molto più ricca di quanto previsto, contribuendo a consolidare basi concettuali indispensabili per le attività successive.

4.3 Fase 3: $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$

Dopo aver distribuito altri due fogli origami per ogni studente, si è spiegato alla classe come realizzare un semplice modello di origami modulare che è una rivisitazione della tradizionale tessera *menko*, o "cuscino giapponese". In **Figura 4** è riportato il diagramma di piegatura riadattato rispetto alla versione tradizionale. La presenza di una studentessa cieca nella fase iniziale della sperimentazione ha reso necessario rivedere le istruzioni di piegatura del modello tradizionale, al fine di permetterne la realizzazione anche in assenza di feedback visivi. In linea con i principi dell'*Universal Design for Learning* (Meyer et al., 2013), tale riformulazione – più chiara, esplicita e accessibile – si è successivamente rivelata vantaggiosa per l'intero gruppo classe, contribuendo a ridurre le barriere operative e a rendere il compito più gestibile per tutti gli studenti.

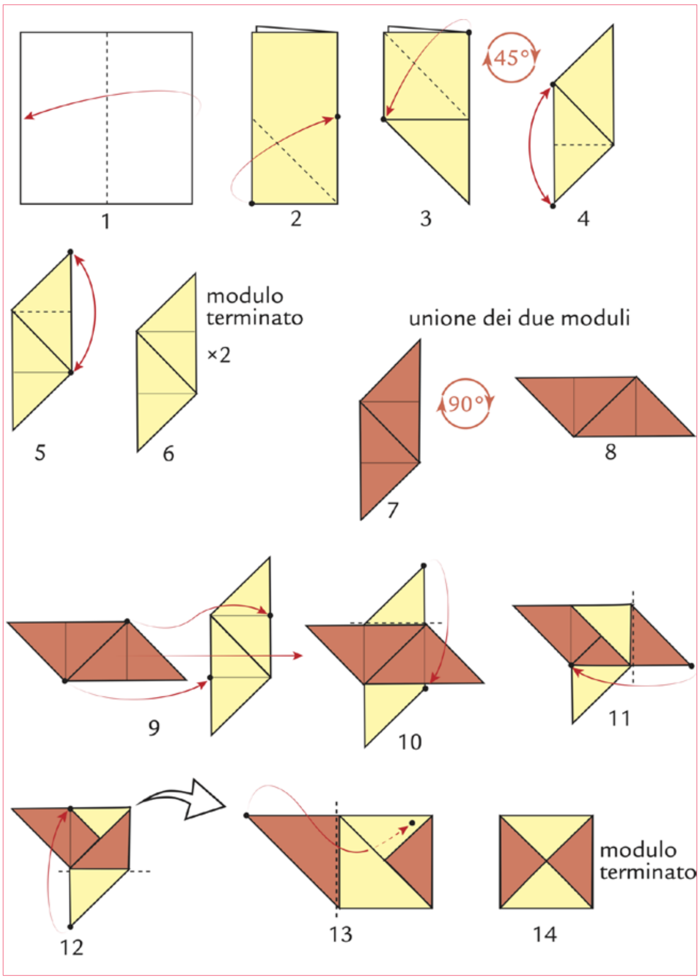


Figura 4. Diagramma di piegatura della tessera *menko*.[4]

4. https://blog.matematica.deascuola.it/articoli/attivita-matematica-origami-menko.

Ecco le istruzioni che abbiamo dato:

1. Portare un lato sul lato opposto.
2. Tenendo il rettangolo ottenuto poggiato sul lato corto (come mostrato nel passaggio 2 di Figura 4), portare il lato corto più basso su quello lungo alla sua destra.
3. Portare il lato corto in alto sul lato a sinistra; si ottiene un parallelogramma, diviso in due triangoli rettangoli, come mostra la Figura 4 nel passaggio 4.
4. Considerato il lato lungo del parallelogramma a sinistra, portare un suo vertice sull'altro e riaprire.
5. Ripetere sul lato lungo a destra.
6. Ripetere la costruzione con un altro foglio di carta (che è disegnato in arancione nel passaggio 7). Attenzione a eseguire le pieghe nella stessa direzione del passaggio 2.

7-8. Ruotare il secondo modulo di 90°, arrivando a posizionarlo come mostra l'immagine esemplificativa presente nel passaggio 8 della Figura 4.

9. Far scivolare il modulo arancione su quello giallo.
10. Considerare l'aletta gialla che si trova in alto appartenente al modulo che sta sotto e piegarla sul quadrato centrale.
11. Proseguire in senso orario, piegando al centro l'aletta arancione che si trova a destra.
12. Proseguire in senso orario, piegando al centro l'aletta gialla che si trova sotto.
13. Piegare ora l'ultima aletta arancione, intascandola sotto la prima aletta gialla piegata.
14. Ecco il *menko* completato.

Prima parte: $\sqrt{2}$.
Una volta completata la piegatura del modello, abbiamo chiesto agli studenti di determinare l'area e il perimetro del *menko*, avvalendosi del *misurometro* come strumento di supporto.
La determinazione dell'area e del perimetro del *menko* ha rappresentato un momento particolarmente ricco dal punto di vista cognitivo. Il problema non era immediatamente accessibile attraverso strategie standard, e questo ha favorito l'emergere di ragionamenti autonomi e di approcci non convenzionali (obiettivo T1). Il tentativo iniziale, da parte di molti studenti, di posizionare il *menko* parallelamente ai lati del *misurometro* (Figura 5, *menko* in alto) ha rivelato una tendenza diffusa a ricercare configurazioni canoniche e familiari, anche quando esse non permettono di risolvere il compito. Così facendo, si poteva solo concludere che l'area è inferiore a 4 e che il lato misura meno di 2.
L'impossibilità di determinare la misura del lato o l'area con tale posizionamento ha svolto una funzione didattica importante, in quanto ha portato gli studenti a interrogarsi sulla necessità di esplorare configurazioni diverse.
Particolarmente significativo è stato il contributo degli studenti che hanno ruotato il *menko* di 45° (Figura 5, *menko* in basso) o che hanno scomposto mentalmente il *menko* nei triangoli che lo compongono, riconoscendo che due di tali triangoli erano equiestesi a un quadrato di area 1. Queste strategie mostrano la capacità di riconoscere invarianti geometrici e di utilizzare la struttura della figura come guida per il ragionamento, indicando il passaggio da un approccio percettivo a uno maggiormente analitico. Il fatto che differenti strategie abbiano condotto alla stessa conclusione – area 2 e lato $\sqrt{2}$ (obiettivo D1) – suggerisce che gli studenti non stavano applicando un algoritmo noto, ma stavano costruendo attivamente relazioni tra forme, misure e concetti già incontrati nelle fasi precedenti.
Dopo aver riportato il risultato nella tabella, il successivo posizionamento del *menko* sul *righello* (Figura 6), con la collocazione di $\sqrt{2}$ sulla striscia graduata, ha permesso di consolidare questa comprensione attraverso una rappresentazione visiva e lineare del numero, mettendone in evidenza il valore approssimato e la sua posizione rispetto ai numeri razionali vicini, in questo caso 1,5 (obiettivo D4). Questa azione ha sostenuto la transizione verso una consapevolezza più articolata dell'ordine e della natura dei numeri irrazionali, mostrando come il lavoro manipolativo possa favorire il passaggio dal concreto all'astratto.

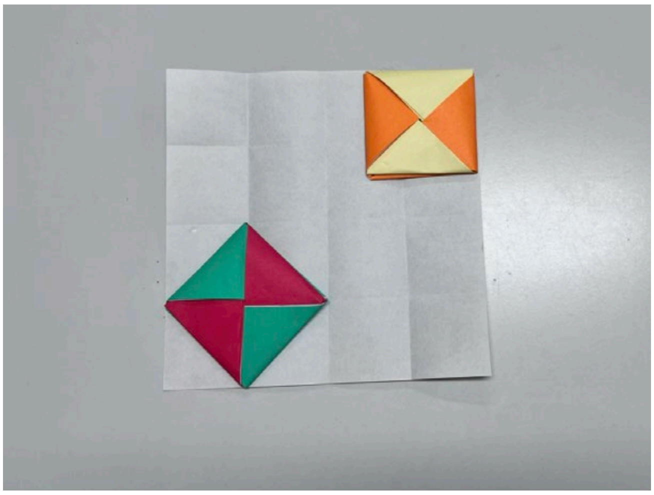


Figura 5. Tessere *menko* sul *misurometro*.

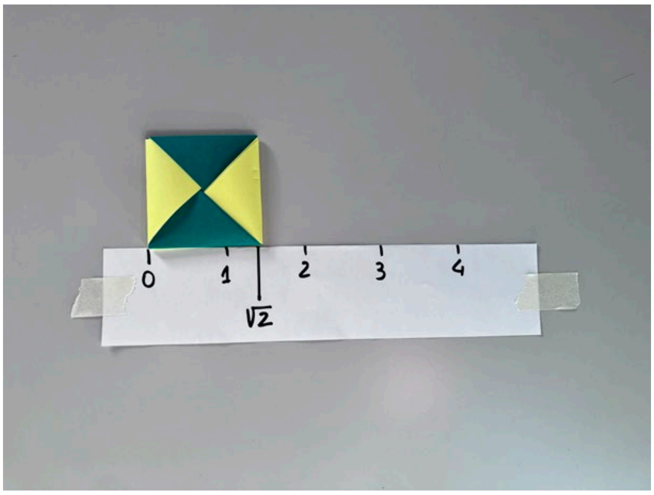


Figura 6. Posizionamento sul *righello* di $\sqrt{2}$.

A questo punto gli studenti sono stati invitati a stimare il valore numerico di $\sqrt{2}$. Prendendo avvio dalla loro osservazione spontanea secondo cui $\sqrt{2}$ dovesse essere "vicino" a 1,5 ma leggermente più piccolo, la classe è stata guidata a utilizzare la calcolatrice per verificarne progressivamente l'approssimazione. Il percorso di ricerca è iniziato con il tentativo di 1,4, il cui quadrato è risultato inferiore a 2. Da lì, gli studenti hanno intrapreso una vera e propria esplorazione numerica: attraverso successive approssimazioni – alcune proposte individualmente, altre discusse collettivamente – hanno aggiunto ulteriori cifre decimali, confrontando i risultati e annotando alla lavagna i valori ottenuti (Figura 7). Il coinvolgimento è cresciuto man mano che la sequenza delle cifre dopo la virgola si allungava senza mostrare alcuna regolarità. La scoperta che il processo non si "chiudesse" ha generato sorpresa e, in alcuni casi, un autentico disorientamento. Da un lato, gli studenti avevano di fronte un oggetto concreto, il lato del *menko*, che sembrava offrire una misura ben definita; dall'altro, si scontravano con l'impossibilità di descrivere quel valore mediante un numero decimale limitato o periodico. In una classe, questo contrasto ha persino portato alcuni studenti a proporre di affidare il compito alla compagna considerata "la più brava" in matematica, convinti che lei potesse ottenere l'esatto valore di $\sqrt{2}$. Tale episodio ha evidenziato quanto forte fosse l'aspettativa di trovare una risposta definitiva e quanto l'esperienza stesse mettendo in discussione le loro concezioni ingenue di "numero esatto". Questa dinamica ha offerto un'opportunità didattica preziosa: la scoperta, non solo dichiarata ma vissuta, del concetto di numero irrazionale come numero decimale illimitato e non periodico (obiettivi D3-D5). Il fenomeno osservato dagli studenti non è stato presentato come un fatto teorico, ma come la naturale conclusione delle loro stesse esplorazioni.

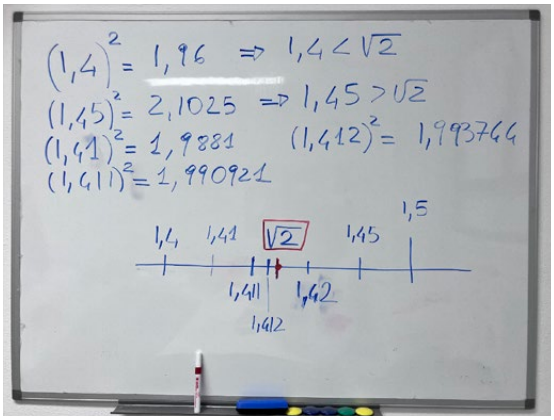


Figura 7. Lavoro svolto in classe sull'approssimazione del valore $\sqrt{2}$.

Seconda parte: $\sqrt{8}$.

A questo punto, poiché ogni gruppo disponeva di almeno quattro *menko*, abbiamo proposto agli studenti di determinare l'area e la misura del lato del quadrato ottenuto accostandoli lato a lato (Figura 8). Anche in questa fase, la classe ha affrontato il problema attraverso strategie diverse, tutte significative dal punto di vista formativo e indicative di un pensiero matematico attivo e partecipato.

Una prima soluzione è emersa da un gruppo che ha fatto riferimento diretto alle conoscenze consolidate: ricordando che ogni *menko* ha area 2, gli studenti hanno immediatamente dedotto che i quattro *menko* formano un quadrato di area 8, con lato pari a $\sqrt{8}$. Un secondo gruppo ha invece scelto un approccio più pratico e percettivo: ha collocato il quadrato costruito sul *misurometro* e osservato che esso ricopriva esattamente metà della sua superficie. Per giustificare in modo operativo tale osservazione, gli studenti hanno ripiegato i triangoli bianchi del *misurometro* sul quadrato dei *menko*, mostrando che quest'ultimo veniva completamente coperto. Anche in questo caso, il gruppo ha concluso che l'area complessiva era 8 e che quindi il lato misurava $\sqrt{8}$. Un terzo gruppo, partendo invece dal lato del singolo *menko*, $\sqrt{2}$, già determinato in precedenza, ha argomentato che il quadrato composto da quattro *menko* ha lato $2 \times \sqrt{2}$ e area 4 volte 2, cioè 8. La varietà delle soluzioni ha mostrato come diversi punti di partenza potessero condurre allo stesso risultato, offrendo agli studenti un'occasione autentica per confrontare modi diversi di ragionare e valorizzare la pluralità di approcci (obiettivi D1, T1 e T2).

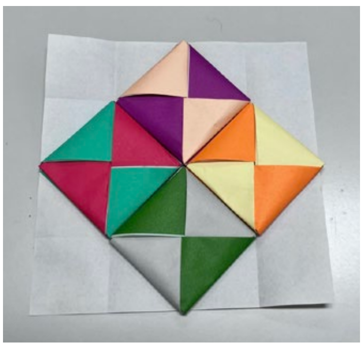


Figura 8. Il quadrato formato da 4 *menko*.

La discussione collettiva ha portato naturalmente a osservare l'uguaglianza $\sqrt{8} = 2 \times \sqrt{2}$ (obiettivo D2). Nelle classi in cui la procedura di "estrazione del fattore dalla radice" era già stata introdotta, ciò ha offerto una conferma geometrica e visiva della regola algebrica. Altrove, l'esistenza di due forme simboliche diverse contenenti la radice quadrata per indicare la stessa lunghezza ha destato curiosità, creando un'attesa spontanea verso la lezione successiva.
Nella parte conclusiva dell'attività, gli studenti hanno compilato la scheda di **Figura 2**, disegnando nella prima colonna il quadrato formato dai quattro *menko*. Poi, appoggiando due *menko* consecutivi sul *righello*, hanno individuato la posizione corrispondente al valore $\sqrt{8}$ (**Figura 9**). Questo li ha guidati a stimare il valore della radice collocandolo tra $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$, più vicino a 3 (obiettivo D4).

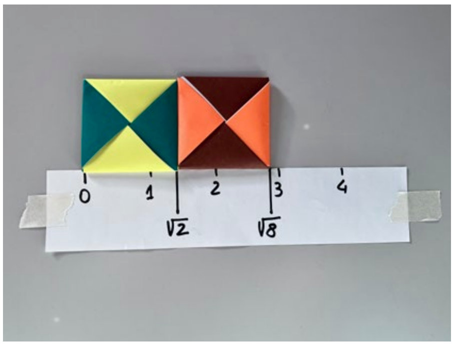


Figura 9. Posizionamento sul *righello* di $\sqrt{8}$.

4.4 Fase 4: $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$

Inizialmente gli studenti hanno lavorato sul *misurometro* già in loro possesso.

Prima parte: $\sqrt{5}$.
Abbiamo invitato la classe a prendere il *misurometro* e a individuare, evidenziandolo con un pennarello o semplicemente seguendone i bordi con le dita, il rettangolo situato in basso a sinistra, di dimensioni 2 unità in orizzontale e 1 in verticale, costituito da due quadrati adiacenti (**Figura 10a**). A partire da questa osservazione, gli studenti hanno rapidamente riconosciuto che la sua area è pari a 2. Successivamente, abbiamo guidato la classe a piegare – o tracciare – la diagonale che parte dal vertice in alto a sinistra del rettangolo (**Figura 10b**). Questa semplice azione ha permesso ai ragazzi di visualizzare come il rettangolo venga suddiviso in due triangoli rettangoli congruenti, ciascuno con area pari a 1. L'attività ha stimolato una comprensione diretta e percettiva della relazione tra figure equivalenti, sostenendo gli studenti nell'interpretazione geometrica delle aree. A partire dalla diagonale ottenuta, la classe è stata poi invitata a costruire un quadrato avente come lato proprio quella diagonale (**Figura 10c**). A questo punto, in linea con l'obiettivo D1, si è chiesto: «Qual è l'area del quadrato costruito? Quanto misura il suo lato?».

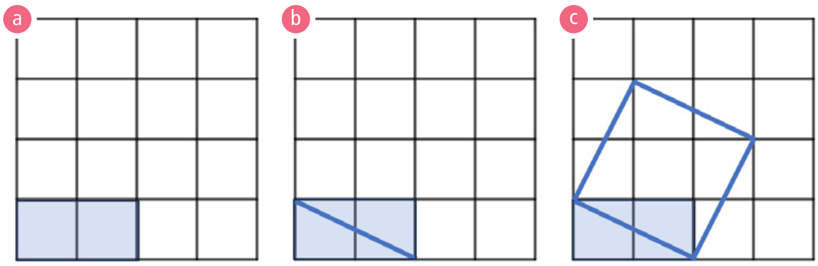


Figura 10a, b, c. La costruzione del quadrato di area 5.

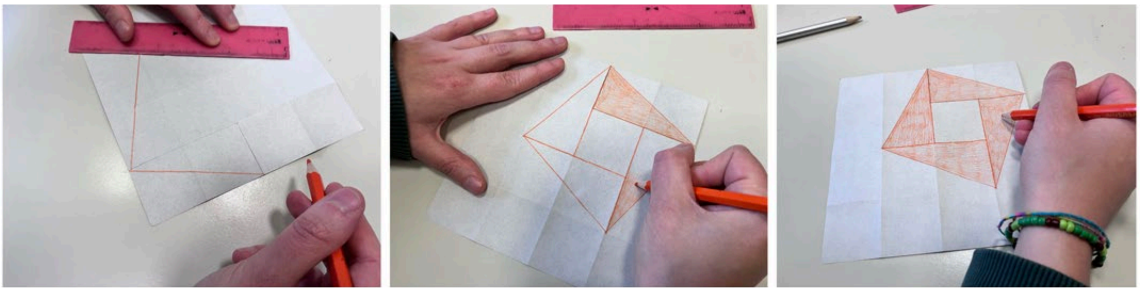


Figura 11. La realizzazione del quadrato di area 5 da parte di un'alunna, dove sono messi in evidenza i triangoli di area 1.

Partendo dalla considerazione che il quadrato ottenuto è costituito da un quadretto centrale del *misurometro* (area 1) e da quattro triangoli congruenti, ciascuno con area pari a 1 (**Figura 11**), alcuni studenti, anche dopo essersi consultati con il gruppo, hanno concluso che l'area totale del quadrato è 5 (obiettivi T1 e T2). Di conseguenza, la lunghezza del lato è $\sqrt{5}$ (obiettivo D1).
Anche questo risultato è stato dapprima annotato sulla scheda di lavoro e successivamente riportato sul *righello* (**Figura 12**).

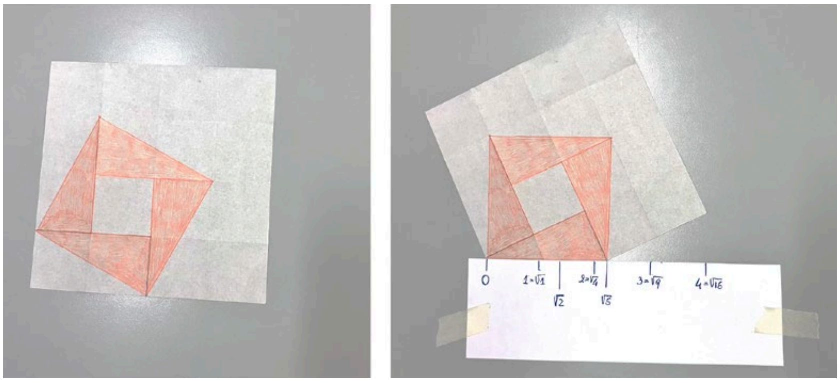


Figura 12. Rappresentazione di $\sqrt{5}$ e suo posizionamento sul *righello*.

Il laboratorio si è concluso con un'ultima osservazione collettiva sulla disposizione delle radici individuate lungo il *righello* (obiettivi D4 e D5), favorendo una riflessione complessiva sulla relazione d'ordine tra i valori rappresentati e sulla vicinanza di alcune radici ai numeri interi (ad esempio $\sqrt{8}$ è molto vicina a $3 = \sqrt{9}$).

Seconda parte: $\sqrt{10}$.
In molte classi abbiamo scelto di lasciare questa seconda parte come compito a casa anche con l'intento di mostrare agli studenti che l'approccio laboratoriale non è una modalità occasionale, riservata esclusivamente al lavoro in classe, ma può diventare un vero e proprio metodo di apprendimento e consolidamento della matematica. Inoltre, questa attività ha offerto agli studenti l'opportunità di riutilizzare, in un contesto diverso e in maniera autonoma, strategie e ragionamenti già sperimentati durante il laboratorio.
Di seguito si descrive cosa è accaduto nelle classi dove è stata portata a termine in aula anche quest'ultima costruzione. Gli obiettivi sono analoghi a quelli indicati per il lavoro svolto su $\sqrt{5}$.
Ogni studente ha realizzato un nuovo *misurometro* a partire da un foglio quadrato di lato 15 cm.
Guidati e seguendo una modalità analoga a quella già sperimentata, gli studenti hanno individuato sul foglio quadrettato un rettangolo formato da tre quadratini unitari e ne hanno tracciato una delle diagonali, come illustrato in **Figura 13**.

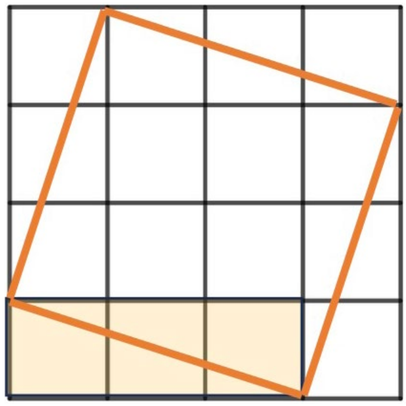


Figura 13. La costruzione del quadrato di area 10.

A questo punto hanno costruito un quadrato che ha per lato la diagonale appena disegnata. Questa richiesta ha attivato nei gruppi un interessante lavoro di anticipazione: molti studenti hanno iniziato a formulare ipotesi sull'area del nuovo quadrato, collegandola intuitivamente alle trasformazioni svolte in precedenza. Sono stati così calcolati l'area del quadrato e la lunghezza del lato: rispettivamente 10 e $\sqrt{10}$. Il nuovo valore è stato infine posizionato sul *righello* personale, completando la sequenza costruita nelle fasi precedenti del laboratorio (Figura 14).

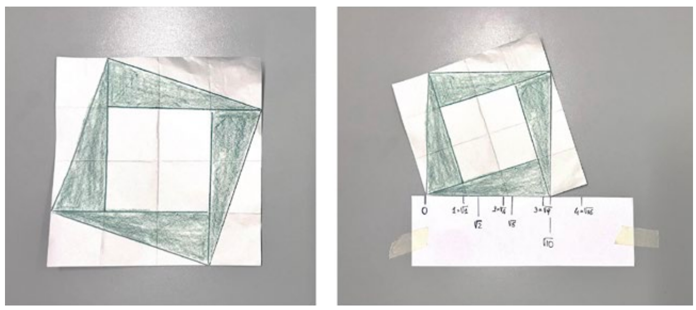


Figura 14. Rappresentazione di $\sqrt{10}$ e suo posizionamento sul *righello*.

4.5 Fase 5: il gioco "radici in scatola"

Poiché questa fase è stata proposta a circa una settimana di distanza dal laboratorio descritto nelle fasi precedenti, la lezione è iniziata con una breve attività introduttiva per riprendere e consolidare strategie di stima, richiamando i valori noti delle radici dei quadrati perfetti e le osservazioni già viste sull'ordinamento e sul posizionamento delle radici quadrate di numeri vicini a quadrati perfetti. Ad esempio, si è chiesto agli studenti se fosse possibile stimare senza la calcolatrice il valore di $\sqrt{97}$. Ricordando quanto fatto per $\sqrt{5}$ (poco più grande di 2) e $\sqrt{8}$ (poco più piccola di 3) gli studenti hanno rapidamente ricondotto 97 al suo quadrato perfetto più vicino (ovvero 100) e hanno quindi ipotizzato che $\sqrt{97}$ fosse un numero poco più piccolo di 10. Tale ipotesi è stata poi confermata utilizzando la calcolatrice. Questo episodio mette in evidenza come gli studenti abbiano interiorizzato l'idea di collocare la radice di un quadrato non perfetto tra le radici di due quadrati perfetti, attivando spontaneamente un ragionamento di tipo comparativo che mostra una crescente padronanza della relazione d'ordine tra radici. L'uso del quadrato perfetto "più vicino" emerge così come una strategia stabile e significativa, non più legata a un singolo esempio ma generalizzata a nuovi numeri.

Una volta consolidata questa modalità di ragionamento con qualche altro esempio, è stata proposta una sfida ulteriore, ovvero provare a stimare, in base alle considerazioni precedenti, il valore di $3 \times \sqrt{8}$. Avendo appena ricordato che $\sqrt{8}$ si colloca sul *righello* poco prima di 3, gli studenti hanno quindi risposto che, triplicando un numero leggermente inferiore a 3, si ottiene un numero inferiore a 9. In questo caso si osserva come gli studenti abbiano iniziato a combinare la stima di una radice con una semplice operazione, mostrando di saper trasferire il ragionamento su $\sqrt{8}$ a un'espressione più complessa. L'abilità di comporre mentalmente radici e moltiplicazioni indica un passaggio verso una gestione più flessibile delle grandezze, evidenziando una comprensione non meramente procedurale.
Anche in questo caso l'ipotesi formulata dagli studenti è stata verificata allungando il *righello* fino a 10 e riportando lì sopra il valore di $3 \times \sqrt{8}$ utilizzando sei tessere del *menko* affiancate. La verifica tramite materiale concreto ha svolto un ruolo importante nel consolidare il ragionamento: la rappresentazione visiva ha reso tangibile l'approssimazione stimata, rafforzando l'idea che il calcolo con le radici possa essere controllato attraverso confronti di grandezza e non solo tramite strumenti formali.
Dopo questa prima fase di riepilogo, la classe era pronta per giocare. Innanzitutto sono state presentate le scatole con le rispettive etichette (**Figura 15a**), chiarendo, ad esempio, che nella scatola etichettata con "$3 \leq n < 6$" andavano collocati tutti i numeri compresi tra 3 e 6, includendo il 3 ed escludendo il 6; abbiamo inoltre precisato che la stessa convenzione valeva per tutte le altre scatole, ad eccezione di quella contrassegnata con "$12 \leq n \leq 15$" nella quale dovevano essere inseriti tutti i numeri da 12 a 15, estremi inclusi. Successivamente, abbiamo mostrato alcune *carte radice* (**Figura 15b**), spiegando che l'obiettivo del gioco consisteva nel posizionare correttamente ciascuna carta nella scatola corrispondente, e abbiamo fornito alcuni esempi richiamando le osservazioni discusse in precedenza.

a

b

$3-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{8}$
$\sqrt{10}-1$	$\sqrt{16}-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{81}}{4}$	$2\sqrt{2}$
$5-\sqrt{25}$	$\sqrt{8}-\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{11}}{11}$	$\sqrt{7} : \sqrt{4}$
$\sqrt{1}+\sqrt{1}$	$(\sqrt{2}+\sqrt{0})^2$	$\sqrt{0} : \sqrt{119}$	$7\sqrt{0}$

c

Figura 15. a) Le scatole delle radici, un foglio con esempi di radici e il foglio per controllare la correttezza delle radici in scatola; **b)** Esempio di *carte radice* relative alla scatola "$0 \leq n < 3$"; **c)** Una scatola con *carte radici*.

Sono state formate quattro squadre chiamate Luna, Stella, Cuore e Fiore, assegnando ad ognuna una postazione nella classe (ovvero un banco) e un cappello, che serviva a designare di volta in volta il *messaggero*, ovvero l'unico membro autorizzato a spostarsi dalla postazione della propria squadra. È stato inoltre chiesto ad ogni squadra di nominare uno *scrivano*, l'unico giocatore della squadra autorizzato a utilizzare carta e penna. Questa strutturazione dei ruoli si è rivelata non solo funzionale alla gestione del gioco, ma anche efficace nel distribuire responsabilità specifiche all'interno del gruppo, favorendo una dinamica cooperativa chiara e riducendo la possibilità di sovrapposizioni o dispersioni.
Mentre le squadre si organizzavano nella propria postazione, le cinque scatole sono state collocate in punti diversi dell'aula e il mazzo delle 80 *carte radice* (precedentemente mescolato) è stato suddiviso in 4 mazzetti contenenti 20 *carte radice* ciascuno, consegnandone uno ad ogni squadra.
Al via, le squadre hanno avuto 10 minuti di tempo per depositare il maggior numero possibile di *carte radice* nelle scatole corrette.
Per farlo, ogni squadra doveva scegliere una delle *carte radice* e stimare (senza utilizzare la calcolatrice) il risultato dell'espressione indicata sulla carta, approssimando, quando necessario, il valore di ogni ad-

dendo per poi sommarli e trovare così il valore approssimato della carta sulla base delle considerazioni fatte precedentemente, e individuare l'intervallo in cui collocarlo. A questo punto lo scrivano prendeva la *carta radice*, ci disegnava sopra il simbolo della squadra e la consegnava al messaggero di turno (riconoscibile dal cappello) che correva a inserirla nella scatola corrispondente all'intervallo scelto (Figura 15c), ritornava alla base e passava il cappello a un altro compagno, che diventava il nuovo messaggero. Poiché durante ciascun viaggio ogni messaggero poteva trasportare una sola *carta radice*, mentre era assente la squadra iniziava a stimare il valore di una nuova carta, così da non perdere tempo e rendere più efficiente la transizione tra un viaggio e l'altro. L'efficienza della squadra, dunque, non dipendeva soltanto dalla correttezza delle stime, ma anche dalla capacità di pianificare micro-strategie di sincronizzazione interna, elemento che ha reso il gioco un'occasione naturale per lavorare sulle competenze trasversali legate alla gestione del tempo e alla collaborazione (obiettivi T1 e T2).

Allo scadere dei 10 minuti tutti i giocatori sono stati richiamati alle proprie postazioni e si è passati alla fase di verifica e assegnazione dei punteggi. Il punteggio è stato calcolato nel modo seguente: +1 punto per ogni carta collocata nella scatola corretta, –1 punto per ogni carta collocata in una scatola sbagliata. Le carte non utilizzate non influenzavano in nessun modo il punteggio. Ha vinto la squadra che ha totalizzato il punteggio maggiore.

Per procedere all'assegnazione dei punteggi, si sono formati 5 gruppi di controllori, uno per ciascuna scatola. Ogni gruppo era composto da studenti appartenenti a squadre diverse, in modo da garantire imparzialità (almeno un rappresentante per squadra in ciascun gruppo). Ad ogni gruppo sono stati affidati una scatola da controllare e un foglio per la raccolta dei punteggi, sul quale indicare, per ogni squadra, il numero di *carte radice* corrette e sbagliate. La formazione di gruppi di controllori misti ha favorito un'interessante forma di "distanziamento cognitivo": studenti che avevano appena svolto il ruolo di giocatori si sono trovati a dover valutare criticamente le scelte altrui, rendendo espliciti criteri di correttezza e strategie di verifica.

A seconda della classe e del tempo a disposizione, abbiamo scelto se fornire o meno ai controllori il foglio delle soluzioni. Quando tale supporto non era disponibile, la fase di controllo si è trasformata in un'ulteriore occasione di confronto tra studenti appartenenti a squadre diverse, favorendo il ragionamento condiviso. In questo caso abbiamo formato gruppi omogenei per livello di competenze, assegnando ai gruppi con competenze meno avanzate scatole contenenti un numero ridotto di carte e autorizzando talvolta l'uso della calcolatrice come supporto alla verifica. Quando invece era necessario garantire una correzione più rapida e accurata, abbiamo organizzato gruppi di controllori eterogenei per livello e fornito a ciascun gruppo una scheda con le soluzioni relative alla scatola assegnata. In entrambe le modalità, i controllori hanno avuto la responsabilità di attribuire i punteggi alle squadre per la scatola di loro competenza. Questa fase ha messo in luce come la verifica non sia stata percepita dagli studenti come un controllo sanzionatorio, ma come un'attività cognitiva che richiedeva argomentazione, confronto e negoziazione di significati, contribuendo al consolidamento delle competenze argomentative (obiettivo T2).

Osservando le fasi di gioco e di verifica, si è potuto notare come gli studenti abbiano affrontato con naturalezza anche la stima del valore di espressioni che coinvolgevano semplici operazioni con le radici (ad esempio $\sqrt{39}+1$ oppure $\sqrt{7}:\sqrt{4}$), senza lasciarsi intimorire dalla presenza di calcoli non trattati precedentemente in modo esplicito con l'insegnante. Le stime e le operazioni sono state eseguite in modo intuitivo, a testimonianza di una buona padronanza dei ragionamenti sulle approssimazioni sviluppati durante l'attività laboratoriale precedente. Ciò suggerisce che il gioco abbia favorito non solo il recupero di conoscenze costruite nelle fasi precedenti, ma anche la loro mobilizzazione in un contesto dinamico, confermando il ruolo dell'attività ludica come spazio di attivazione e trasferimento di strategie.

Le carte contenti $\sqrt{0}$ hanno invece generalmente creato maggiori difficoltà e, nonostante la semplicità dei calcoli richiesti, sono state spesso tralasciate. Esempi come $\sqrt{0}:\sqrt{119}$ oppure $12-\sqrt{0}$ o anche $(\sqrt{2}+\sqrt{0})^2$ richiedevano operazioni immediate, ma non sono state riconosciute come tali dalla maggior parte degli studenti. Anche le carte che includevano $\sqrt{1}$, come $\sqrt{1}+\sqrt{1}$, oppure $7:\sqrt{1}$ non sono state percepite come particolarmente agevoli e sono state spesso relegate in secondo piano a favore di carte che richiedevano calcoli più complessi. Questa difficoltà ricorrente mostra una certa resistenza nell'attribuire significato numerico immediato alle radici di 0 e di 1 e segnala un nodo concettuale ancora fragile, utile per orientare future azioni didattiche mirate a rafforzare la comprensione dei casi particolari.

Il limite di tempo (10 minuti) non permetteva di collocare tutte le 20 *carte radice*, rendendo necessario selezionare quelle per cui la stima risultava più immediata. Questo ha promosso un approccio flessibile e non sequenziale spingendo gli studenti a sviluppare criteri personali di efficienza (obiettivo T1). Tale consapevolezza strategica rappresenta una competenza trasversale importante e testimonia la capacità degli studenti di adattarsi in modo critico alle condizioni del gioco.

Inoltre, il rischio di perdere punti per ogni collocazione errata ha incentivato il confronto all'interno delle squadre: gli studenti hanno dovuto argomentare le proprie ipotesi, valutare quelle dei compagni e giungere a decisioni condivise, evitando approcci individuali o frammentati. In questo senso, il gioco ha favorito dinamiche autentiche di problem solving collettivo (T2), richiedendo decisioni rapide ma ragionate e una gestione coordinata delle risorse del gruppo.

5 Altre esperienze: il percorso ad occhi chiusi

In questa sezione vengono presentate alcune considerazioni sul percorso realizzato in una classe seconda, all'interno della quale era presente una studentessa cieca, che nel seguito verrà chiamata Chiara. La sperimentazione si è svolta nell'ambito di un progetto condotto in collaborazione con l'Istituto dei Ciechi di Milano (Angilletta & Spreafico, 2022).

L'attività ha mostrato un forte valore inclusivo: tutti gli studenti hanno potuto partecipare simultaneamente nello stesso ambiente, seguendo istruzioni comuni per le piegature e prendendo parte insieme al gioco delle "radici in scatola". Questa modalità operativa ha permesso a ciascuno di contribuire attivamente, valorizzando differenti modalità percettive e promuovendo un'esperienza realmente condivisa di apprendimento.

Poiché l'attività è stata progettata in modo inclusivo a priori seguendo i principi dell'UDL, abbiamo scelto di favorire molteplici mezzi di rappresentazione utilizzando, in aggiunta ai fogli di carta di due colori diversi per costruire il *menko*, anche due fogli di texture diverse; in aggiunta al *righello* proposto è stato utilizzato del materiale tattile per costruire il *righello* accessibile: strisce in braille con l'indicazione delle radici e piccoli quadratini in rilievo per posizionare i numeri interi. Tale progettazione ha consentito la piena partecipazione di tutte e tutti (**Figura 16a**).

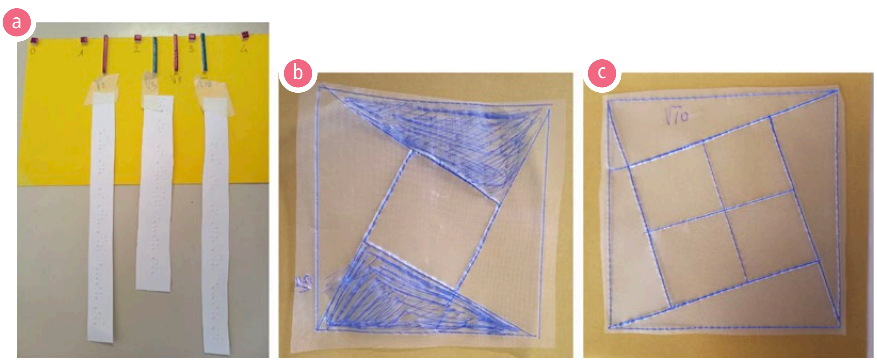


Figura 16. a) Il righello con unità e radici evidenziate con la scritta braille; b) e c) Il foglio gommato prodotto dai compagni di Chiara per "visualizzare" i quadrati di area 5 e 10 e i loro rispettivi lati di lunghezza $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$.[5]

5. I fogli in **Figura 16b** e in **Figura 16c** sono da immaginare ciascuno in proporzione al *misurometro*.

Durante la costruzione dei segmenti di lunghezza $\sqrt{5}$ (e successivamente $\sqrt{10}$) Chiara è stata aiutata dai compagni che hanno riprodotto per lei la configurazione geometrica sul foglio di gomma (**Figura 16b** e **Figura 16c**). In questa occasione i compagni hanno mostrato attenzione e sensibilità verso le modalità con cui Chiara viveva l'attività, riconoscendo l'importanza di utilizzare uno strumento più adatto alle sue preferenze e ai suoi modi di apprendere. Hanno partecipato attivamente discutendo e collaborando con lei per definire insieme i passaggi necessari alla realizzazione del modello tattile. Una volta compreso il procedimento, anche Chiara ha potuto completare autonomamente la piegatura del segmento $\sqrt{5}$ sul proprio foglio.
Anche nel gioco, pur non potendo correre a posizionare le radici nelle scatole, Chiara ha offerto un contributo significativo al calcolo delle stime. Ha utilizzato in modo efficace le strategie che padroneggia, richiamando con rapidità i valori approssimati delle radici e supportando così il lavoro di gruppo.

6 Considerazioni conclusive

Il percorso descritto in questo articolo è il risultato di numerose sperimentazioni condotte in undici classi seconde della scuola secondaria di primo grado e in corsi di formazione per insegnanti, sia in Italia che all'estero.
Nelle varie sperimentazioni abbiamo osservato un alto livello di efficacia delle attività proposte, sia in termini di apprendimento che di partecipazione. Tutti gli studenti coinvolti hanno preso parte alle attività in modo attivo e motivato, compresi coloro che solitamente mostrano scarso interesse o partecipazione durante le lezioni di matematica. Il contesto laboratoriale e ludico ha creato un ambiente didattico altamente accessibile, nel quale gli studenti hanno potuto impegnarsi in forme di ragionamento matematico anche complesse senza essere frenati dalla dimensione formale del contenuto, lasciando spazio alla sperimentazione e alla negoziazione di strategie.
La parte manipolativa del percorso, oltre a favorire la costruzione concreta di alcune radici quadrate, ha offerto spunti di riflessione sulla stima del valore di radici di numeri naturali attraverso il riferimento ai quadrati perfetti, l'uso della relazione d'ordine e l'esplorazione di diverse rappresentazioni dello stesso numero.
In diverse classi è emerso come le competenze acquisite in questa prima parte siano state poi consolidate nella fase di gioco, durante la quale i ragazzi hanno dimostrato una buona padronanza nella stima del valore sia delle radici di numeri naturali sia di espressioni algebriche contenenti tali radici.
Questi risultati suggeriscono come l'alternanza tra manipolazione concreta, discussione e gioco possa promuovere un passaggio naturale dall'esperienza operativa alla generalizzazione, sostenendo processi di astrazione che non appaiono imposti dall'esterno, ma emergono come esigenza interna agli studenti stessi. Inoltre, l'efficacia mostrata anche nella stima di radici contenute in espressioni algebriche sembrerebbe indicare una forma di trasferibilità cognitiva che va oltre la singola attività, segnalando che gli studenti hanno costruito significati sufficientemente robusti da essere utilizzati in contesti nuovi.
Nelle diverse sperimentazioni è stato possibile confrontare le prestazioni tra classi che avevano livelli differenti di familiarità con il concetto di radice quadrata. Nelle classi in cui l'argomento non era ancora stato introdotto formalmente, gli studenti hanno mostrato una notevole efficacia nell'elaborare stime corrette, soprattutto durante il gioco, facendo ricorso a strategie intuitive di confronto numerico che sembravano attivarsi con naturalezza in un contesto privo di vincoli formali. Al contrario, nelle classi in cui il concetto di radice era già stato affrontato attraverso un percorso più tradizionale, la qualità delle risposte è risultata complessivamente meno elevata.

Il percorso proposto sembra dunque favorire la valorizzazione delle intuizioni numeriche come base per la costruzione di significati più astratti, confermando che l'apprendimento matematico richiede ambienti che legittimino forme di ragionamento non ancora formalizzate.
Molti docenti che hanno sperimentato il percorso durante il corso di formazione lo hanno successivamente riproposto nelle proprie classi, condividendo poi con le autrici gli esiti dell'esperienza. È emerso in modo particolarmente significativo il valore del loro ruolo: una presenza attiva ma equilibrata, che non sostituisce l'iniziativa degli alunni, bensì la orienta. Gli insegnanti hanno potuto osservare con attenzione le dinamiche dei gruppi, riconoscere e valorizzare i diversi contributi, e accompagnare gli studenti nella costruzione di significati a partire dalle loro esplorazioni e intuizioni.
Inoltre, ci sono riscontri molto positivi anche dai docenti che hanno sperimentato il percorso in presenza di alunni con BES o DSA, sia per quanto riguarda la partecipazione alle attività di piegatura sia per quanto riguarda il gioco. Questo aspetto, coerente con il criterio di attenzione all'inclusività, oltre a confermare la buona accessibilità delle attività, suggerisce che esse possano funzionare come mediatori didattici capaci di rendere comprensibili concetti astratti attraverso strumenti corporei e visivi. L'approccio risulta così in linea con i principi dell'*Universal Design for Learning*: offrendo molteplici mezzi di coinvolgimento, rappresentazione, azione ed espressione, può ridurre la dipendenza dalla simbolizzazione precoce e permettere agli studenti di accedere al nucleo concettuale del contenuto matematico attraverso percorsi diversificati.

Ringraziamenti
Si ringraziano tutti i docenti che ci hanno aperto le porte delle loro classi per le sperimentazioni e che, avendo seguito i nostri corsi, hanno riproposto le attività alle loro classi. In particolare, ringraziamo la tiflologa Tiziana Angilletta e le professoresse Morena Franco e Cristina Pronzato per i preziosi suggerimenti e per loro disponibilità durante la partecipazione al progetto con l'Istituto dei Ciechi di Milano. Ringraziamo inoltre i gruppi GNSAGA e GNFM dell'Indam per il supporto.

Bibliografia

Angilletta, T., & Spreafico, M. L. S. (2022). Ad occhi chiusi: l'origami per mostrare la matematica ad alunni non vedenti. In B. D'Amore (Ed.), *Didattica della matematica come attività di ricerca in aula* (pp. 73–74). Pitagora Editrice.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario.* Matteoni Stampatore.

Ausubel, D. P. (1963). *The Psychology of Meaningful Verbal Learning.* Grune & Stratton.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View.* Holt, Rinehart & Winston.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica.* Centro documentazione educativa del Comune di Modena.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: Artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *32*, 269–294.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13–15.

Capuano, A., Storace, F., & Ventriglia, L. (2018). *Apprendimento significativo. Utilizzo didattico delle mappe concettuali.* Lattes Editori.

Kanefke, J., & Schukajlow, S. (2024). I find this task interesting, so do you? Preservice teachers' judgments of students' enjoyment, boredom, and situational interest regarding tasks with and without a connection to reality. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *27*, 499–520. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09581-8

Meyer, A., Rose, D. H., & Gordon, R. (2013). *Universal Design for Learning. Theory and Practice.* CAST.

Ministero dell'Istruzione e del Merito. (2025). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.* MIM. https://www.mim.gov.it/documents/20182/10554370/curricolo_web.pdf/f91c31a0-5ed4-65f3-bfea-fb49adaba55f?version=1.0&t=1773224873548

Naik, N. (2014). Non-digital game-based learning in the teaching of mathematics in higher education. In C. Busch (Ed.), *Proceedings of the 8th European Conference on Games-based Learning* (Vol. 2, pp. 431–436). DECHEMA.

Plass, J. L., Homer, B. D., & Kinzer, C. K. (2015). Foundations of game-based learning. *Educational Psychologist*, *50*(4), 258–283. https://doi.org/10.1080/00461520.2015.1122533

Susac, A., Bubić, A., Vrbanc, D., & Planičić, M. (2014). Development of abstract mathematical reasoning: The case of algebra. *Frontiers in Human Neuroscience*, *8*, 630. https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00679

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: Osservare, interpretare, intervenire.* Springer Science & Business Media.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 179–201. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.7

OPEN ACCESS

La rubrica valutativa come strumento di osservazione e sviluppo di competenze argomentative in matematica

The evaluation rubric as a tool for observation and development of argumentative skills in mathematics

Sara Tipura
Scuola media di Biasca – Svizzera

sara.tipura@edu.ti.ch

Sunto / In questo articolo viene presentata una rubrica per la valutazione delle competenze argomentative in matematica degli allievi di scuola media. La rubrica è stata sperimentata in una classe terza corso base di una scuola media ticinese, attraverso un percorso di cinque attività su ambiti matematici differenti.
Le attività proposte hanno richiesto agli allievi di produrre argomentazioni scritte, che sono state valutate dall'insegnante e utilizzate anche dagli allievi per l'autovalutazione, con il supporto di feedback personalizzati. Nell'articolo vengono descritte le attività svolte, la struttura della rubrica e le modalità di utilizzo in classe, oltre ad alcune evidenze emerse dall'analisi degli elaborati.
I risultati mostrano come la rubrica possa sostenere la costruzione di argomentazioni più chiare e coerenti e favorire una maggiore consapevolezza del processo argomentativo negli allievi. L'esperienza suggerisce che lo strumento può essere utilizzato come supporto formativo in diversi contesti matematici e adattato alla pratica quotidiana in classe.

Parole chiave: argomentazione; rubrica valutativa; valutazione formativa; scuola media.

Abstract / The article presents a rubric for evaluating lower secondary school students' mathematical argumentation skills. The rubric was implemented in a teaching pathway focused on argumentation, carried out in an eighth-grade class of a lower secondary school in the Canton of Ticino, through five activities covering different mathematical domains.
The proposed activities required students to produce written arguments, which were assessed by the teacher and also used by the students for self-assessment, supported by personalized feedback. The article describes in detail the activities carried out, the structure of the rubric and how it was used in the classroom, as well as selected evidence emerging from the analysis of students' work.
The results show that the rubric can support the construction of clearer and more coherent arguments and foster greater awareness of the argumentation process among students. The experience suggests that the tool can be used as a formative support in different mathematical contexts and adapted to everyday classroom practice.

Keywords: argumentation; assessment rubric; formative assessment; lower secondary school.

1 Introduzione

Questo lavoro nasce dalla volontà di aiutare gli allievi[1] della scuola media a rendere più chiaro e strutturato il proprio modo di argomentare in matematica. Quotidianamente in classe, infatti, emerge come gli allievi fatichino a spiegare le proprie idee, a giustificare i passaggi o a sostenere in modo coerente un'affermazione. Nonostante la capacità di eseguire calcoli o applicare procedure, la dimensione comunicativa e argomentativa rimane talvolta poco sviluppata o poco consapevole.
A partire da queste osservazioni e dal desiderio di aiutare gli allievi a comprendere meglio cosa significa argomentare, è stata progettata e sperimentata una rubrica valutativa basata sul modello di Toulmin (1958/2003) descritto nel prossimo paragrafo. La rubrica non si limita a valutare le argomentazioni prodotte, ma soprattutto intende essere uno strumento per guidare gli allievi nella costruzione di argomentazioni complete e strutturate, aiutandoli a capire quali elementi includere e come organizzarli.
La rubrica è stata introdotta e sperimentata attraverso un percorso realizzato in una classe di terza media corso base[2] del Cantone Ticino, composta da diciotto allievi, strutturato in cinque attività distribuite nel corso dell'anno scolastico. Le attività, volutamente diversificate per temi e contesti matematici, avevano lo scopo di osservare l'applicabilità della rubrica valutativa e di verificare in che misura potesse aiutare gli allievi nella costruzione di un'argomentazione.
Questo articolo offre una sintesi dell'esperienza svolta: dopo un breve inquadramento teorico (par. 2), vengono presentati lo strumento adottato e le modalità d'uso (par. 3), le attività proposte (par. 4) e alcune riflessioni emerse dall'analisi degli elaborati (par. 5). L'intento è quello di condividere un esempio di percorso che, attraverso uno strumento semplice e flessibile, mira a sostenere lo sviluppo della competenza argomentativa in matematica. Il presente contributo è tratto da un lavoro più ampio di tesi (Tipura, 2025) a cui si rimanda per eventuali approfondimenti.[3]

2 Riferimenti teorici

Nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022), la capacità di comunicare ragionamenti e argomentazioni è riconosciuta come parte integrante delle competenze disciplinari e trasversali, e rappresenta un elemento chiave del processo di apprendimento della matematica. Fare matematica significa infatti non solo scegliere e applicare procedure corrette, ma anche saper giustificare le proprie scelte, collegare informazioni e rendere esplicito il ragionamento seguito (Sbaragli & Demartini, 2021).

2.1 Il modello di argomentazione di Toulmin

Per rendere osservabili e valutabili alcuni elementi chiave dell'argomentazione matematica in ambito scolastico, questo lavoro fa riferimento al modello di argomentazione di Toulmin (1958/2003).
Tale modello è stato pubblicato per la prima volta nel 1958 dal filosofo britannico Stephen Toulmin,

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.
2. Negli ultimi due anni di scuola media ticinese gli allievi sono suddivisi in due corsi in base al livello di competenze in matematica e in tedesco: il corso attitudinale e il corso base.
3. Lavoro di Tesi di Sara Tipura (2025) svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatore: Alberto Piatti.

con l'idea di proporre uno schema per analizzare e costruire delle argomentazioni. Successivamente questo schema strutturale è stato importato e utilizzato in diverse ricerche in didattica della matematica (si veda, ad esempio, Inglis et al., 2007).

Il modello di Toulmin (Figura 1) è costituito da sei elementi distinti collegati tra di loro, ognuno dei quali ha un ruolo specifico per supportare la validità di un'argomentazione. In primo luogo, il *claim* rappresenta l'affermazione che si vuole sostenere, cioè quello che si intende dimostrare attraverso l'argomentazione. Il *ground* consiste nelle premesse, ovvero i dati, le evidenze e/o i fatti su cui si basa l'argomentazione e che permettono di supportare l'affermazione. Il *warrant* corrisponde al ragionamento logico e coerente che giustifica il passaggio dalle premesse e all'affermazione, consentendo di spiegare come i dati forniti possono essere rilevanti per sostenere l'affermazione. Il *backing* rappresenta un ulteriore supporto o spiegazione per fornire maggiore credibilità al *warrant*, il *qualifier* esprime la probabilità o il grado di certezza con cui viene presentata l'affermazione e, infine, il *rebuttal* consiste nella presentazione di casi eccezionali che potrebbero compromettere la validità dell'affermazione (Toulmin, 1958/2003).

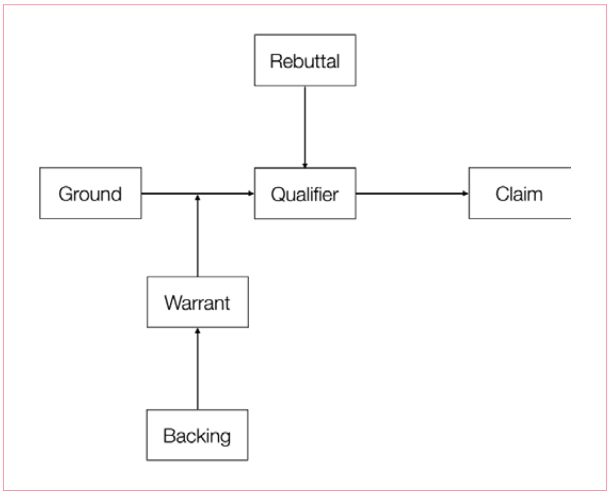


Figura 1. Rielaborazione personale del modello di Toulmin.

Come detto precedentemente, in un'argomentazione tutti questi elementi sono connessi tra di loro. Il *ground* supporta il *claim* attraverso un *warrant*, che viene validato ulteriormente dal *backing*. Il *qualifier* determina il grado di certezza collegato al *claim* e i *rebuttal*, infine, definiscono le circostanze che limitano la validità del *claim*.

Il modello di Toulmin presenta una struttura utile per comprendere e costruire delle argomentazioni solide. La sua applicazione permette di rendere visibili i diversi elementi che compongono un ragionamento, promuovendo così lo sviluppo di competenze argomentative. Pur con alcune limitazioni, questo modello rappresenta una buona base di partenza per introdurre un lavoro sull'argomentazione con gli allievi. In particolare, secondo Karbach (1987), gli elementi essenziali all'interno di un'argomentazione sono il *claim*, il *ground* e il *warrant*, al contrario gli altri tre componenti possono essere inseriti quando ritenuto necessario. Tanto è vero che l'autore suggerisce agli insegnanti che desiderano utilizzare il modello per sviluppare le competenze argomentative degli allievi di focalizzarsi solamente sui tre elementi principali, in quanto risultano semplici da spiegare e facilmente comprensibili per gli allievi. Una volta compresi e interiorizzati la struttura e termini chiave del modello, è possibile introdurre agli allievi anche il concetto di *backing*, *qualifier* e *rebuttal* per rafforzare le loro argomentazioni (Karbach, 1987).

2.2 La prospettiva trifocale per valutare competenze

Dal punto di vista valutativo, il lavoro fa riferimento alla prospettiva trifocale proposta da Castoldi (2016), che considera la competenza come oggetto di osservazione da più punti di vista: quello del docente, quello dell'allievo attraverso l'autovalutazione e quello delle evidenze prodotte negli elaborati. L'approccio della prospettiva trifocale (Castoldi, 2016), infatti, permette di valutare una competenza in maniera accurata e completa, integrando i tre punti di vista in gioco, ossia:

- la dimensione *soggettiva* che si riferisce alla prospettiva dell'allievo sullo sviluppo della competenza, considerando la percezione delle proprie capacità, delle risorse e delle strategie utilizzate. Questa dimensione implica una riflessione sull'esperienza di apprendimento e sull'esecuzione del compito richiesto;
- la dimensione *intersoggettiva* che riguarda le aspettative delle persone coinvolte nel processo di apprendimento della competenza, come l'insegnante, i compagni ecc. Questa prospettiva valuta la maniera in cui la competenza viene riconosciuta e accettata nel contesto educativo;
- la dimensione *oggettiva* che si riferisce agli indicatori concreti e osservabili della competenza, relativi al compito richiesto e alle capacità dimostrate da parte dell'allievo.

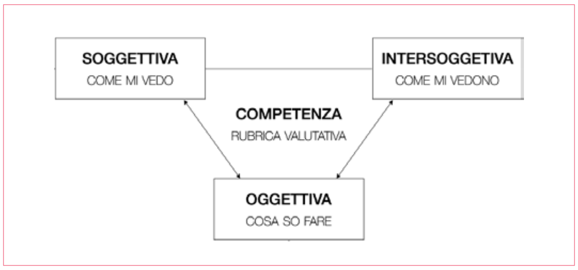


Figura 2. Prospettiva trifocale della valutazione della competenza (rielaborazione da Castoldi, 2016).

L'idea di competenza è al centro della prospettiva trifocale (Figura 2) e consiste nella visione condivisa che orienta la valutazione della competenza. Infatti, risulta fondamentale che gli attori coinvolti nel processo di apprendimento abbiano una concezione comune della competenza nel contesto in cui viene esaminata, in modo da rendere il processo valutativo il più possibile coerente e preciso (Castoldi, 2016). A tal fine, è importante disporre di uno strumento che permetta di definire con chiarezza i criteri di riferimento durante la valutazione, rappresentando un quadro di riferimento per l'osservazione e l'analisi della competenza in ognuna delle tre dimensioni. In questo senso, una rubrica valutativa può fungere non solo da strumento di valutazione, ma anche da supporto formativo e riflessivo.

3 La rubrica valutativa

All'interno della cornice teorica appena delineata, questo articolo presenta e analizza l'uso di una rubrica di tipo analitico, progettata *ad hoc* per descrivere in modo dettagliato e multidimensionale le competenze argomentative degli allievi in ambito matematico. Lo strumento è stato sperimentato attraverso un percorso didattico proposto a una classe di terza media corso base (descritto nel par. 4), e dunque costruito in base alle esigenze della classe. Gli allievi ai quali è stato proposto il percorso, presentavano difficoltà più marcate in attività in cui è richiesto un maggiore sforzo in termini di ragionamento, di collegamento tra concetti e di rielaborazione personale. In queste situazioni, alcuni allievi necessitavano di un maggiore ac-

compagnamento nell'organizzare un ragionamento matematico e nell'individuare relazioni significative.
Seguendo il modello di Toulmin, ma tenendo conto delle indicazioni di Karbach (1987), dunque, ci si è concentrati sugli elementi centrali del modello: *claim*, *ground* e *warrant*. Per garantire una comprensione immediata agli allievi, questi elementi fondanti del modello sono stati tradotti in italiano, utilizzando i termini *affermazione*, *premesse* e *ragionamento*.
Per ciascun elemento sono stati poi definiti uno o più criteri di valutazione. Per l'affermazione è stato individuato il criterio della *chiarezza*, ossia la capacità di esprimere in modo esplicito e comprensibile la posizione che si vuole sostenere.
Per le premesse sono stati individuati tre criteri:

- la *pertinenza*, cioè l'uso di informazioni rilevanti e collegate al problema affrontato;
- la *correttezza*, intesa come l'accuratezza dei riferimenti e delle informazioni utilizzate;
- la *completezza*, ossia la capacità di includere tutti gli elementi necessari per sostenere adeguatamente l'affermazione.

Infine, per il ragionamento sono stati definiti quattro criteri:

- la *coerenza*, intesa come la presenza di un legame teorico tra le premesse e l'affermazione;
- l'*organizzazione*, ossia la struttura generale dell'argomentazione;
- il *linguaggio*, per verificare l'uso corretto e appropriato dei termini matematici;
- i *calcoli*, per valutare la correttezza delle procedure matematiche svolte a sostegno dell'argomentazione.

La **Tabella 1** riassume gli elementi, i criteri di valutazione e i corrispondenti indicatori identificati nella progettazione della rubrica valutativa.

	Criteri	**Indicatori**
Affermazione	Chiarezza	L'affermazione è formulata in modo chiaro, preciso e senza ambiguità.
Premesse	Pertinenza	Le premesse includono fatti o informazioni rilevanti rispetto all'affermazione sostenuta.
	Correttezza	Le premesse sono accurate e prive di errori concettuali.
	Completezza	Le premesse coprono tutti gli elementi necessari a sostenere l'affermazione.
Ragionamento	Coerenza	La coerenza del ragionamento è mantenuta in tutta l'argomentazione, senza contraddizioni tra le parti.
	Organizzazione	Il ragionamento è organizzato in modo chiaro e ordinato, facilitandone la comprensione.
	Linguaggio	L'uso del linguaggio matematico è accurato, coerente e contribuisce alla chiarezza del ragionamento.
	Calcoli	L'esecuzione dei calcoli è accurata e contribuisce alla solidità dell'argomentazione.

Tabella 1. Elementi, criteri e indicatori della rubrica valutativa.

Per ogni criterio sono stati formulati degli indicatori descrittivi, che hanno guidato la costruzione dei quattro livelli di padronanza (avanzato, buono, discreto e base). La scelta di ordinare i livelli di padronanza dal più elevato al meno elevato nasce dalla volontà di fornire agli allievi un riferimento chiaro sulle aspettative rispetto all'argomentazione, grazie alla descrizione presente nella prima colonna della rubrica. Questi livelli, rappresentati nella rubrica attraverso un sistema di stelle (**Figura 3**), hanno reso più immediata la lettura del profilo di competenza e hanno permesso agli allievi di riconoscere sia i propri punti di forza, sia le aree di miglioramento.
L'intero processo di costruzione della rubrica ha richiesto di trovare un equilibrio tra rigore teorico e accessibilità operativa, traducendo gli elementi del modello di Toulmin in un linguaggio comprensibile e utilizzabile dagli allievi. Il risultato, presentato in **Figura 3** e disponibile nell'Allegato 1, è uno strumento che mira a supportare non solo la valutazione, ma anche la costruzione dell'argomentazione stessa, favorendo negli allievi un approccio più consapevole e strutturato.

		⭐⭐⭐⭐	⭐⭐⭐	⭐⭐	⭐
Affermazione	Chiarezza	L'affermazione è chiara e non può essere fraintesa.	L'affermazione è abbastanza chiara, con margini di precisione.	L'affermazione è in parte chiara, ma deve essere migliorata.	L'affermazione è confusa o non collegata alla situazione.
Premesse	Pertinenza	Le premesse sono rilevanti e collegate all'affermazione.	Le premesse sono per lo più rilevanti, con qualche elemento meno collegato.	Le premesse sono in parte rilevanti e contengono elementi non collegati.	Le premesse non sono rilevanti e collegate all'affermazione.
	Correttezza	Le premesse sono accurate e prive di errori concettuali.	Le premesse sono accurate, con margini di precisione.	Le premesse sono giustificate in modo confuso, limitandone la validità.	Le premesse sono errate o non giustificate, rendendo l'argomentazione debole.
	Completezza	Le premesse coprono tutti gli elementi necessari per sostenere l'affermazione.	Le premesse coprono la maggior parte degli elementi necessari.	Le premesse sono parziali e tralasciano aspetti importanti.	Le premesse non coprono gli elementi essenziali della situazione.
Ragionamento	Coerenza	Il ragionamento è coerente, con passaggi logicamente collegati.	Il ragionamento è abbastanza coerente, con piccole imprecisioni.	Il ragionamento presenta delle incoerenze che ne riducono la chiarezza.	Il ragionamento è incoerente e contraddittorio.
	Organizzazione	La struttura è ben organizzata e facile da comprendere.	Il struttura è organizzata, con margini di precisione.	La struttura è disorganizzata, con passaggi che potrebbero essere collegati meglio.	La struttura è disorganizzata e difficile da capire.
	Linguaggio	Il linguaggio matematico è corretto, preciso e coerente.	Il linguaggio matematico è semplice, con margini di precisione.	Il linguaggio matematico è semplice, ma presenta qualche errore.	Il linguaggio matematico è scorretto e poco accurato.
	Calcoli	I calcoli sono svolti in modo corretto e accurato.	I calcoli sono per lo più corretti, con lievi imprecisioni.	I calcoli contengono errori che compromettono il ragionamento.	I calcoli presentano errori che compromettono l'argomentazione.

Figura 3. Rubrica valutativa progettata e sperimentata nel percorso.

3.1 Applicabilità della rubrica valutativa in prospettiva trifocale

Dal punto di vista del docente, la rubrica valutativa progettata è principalmente uno strumento per valutare dettagliatamente le argomentazioni prodotte dagli allievi. Infatti, permette di fornire a ciascun allievo un riscontro oggettivo e personalizzato sul proprio elaborato, evidenziandone sia i punti di forza sia gli aspetti che necessitano di miglioramenti. Questo strumento, infatti, consente di distinguere con precisione le criticità legate alla formulazione dell'affermazione, all'accuratezza delle premesse e alla coerenza del ragionamento, offrendo così un feedback mirato per supportare il progresso degli allievi. Per rendere la valutazione ancora più chiara e immediata, si è deciso di accompagnare il riscontro elaborato grazie alla rubrica con un grafico a ragnatela (diversi esempi verranno forniti in dettaglio nel **par. 4**), che permette agli allievi di visualizzare in modo sintetico il proprio livello di competenza rispetto ai diversi criteri di valutazione. Inoltre, si è previsto un utilizzo regolare della rubrica valutativa per esaminare anche il progresso degli allievi nel tempo: confrontando le varie attività svolte, è pos-

sibile osservare i miglioramenti e individuare le difficoltà persistenti su cui è necessario lavorare per favorire lo sviluppo delle competenze argomentative.
Da parte degli allievi, la rubrica valutativa risulta in primo luogo un supporto alla produzione delle argomentazioni durante le attività svolte in classe, offrendo loro un riferimento preciso sui criteri di valutazione e le aspettative da parte del docente. La rubrica, quindi, rappresenta uno strumento di controllo durante l'elaborazione delle argomentazioni, consentendo agli allievi di verificare in maniera autonoma il rispetto dei vari criteri. In aggiunta, gli allievi possono usare la rubrica valutativa per confrontare il riscontro ricevuto con i criteri stabiliti, riflettendo così sulla propria argomentazione. Questo momento di riflessione è pensato per favorire una maggiore consapevolezza delle proprie competenze, permettendo di individuare con più chiarezza gli aspetti positivi e quelli da migliorare. Infine, la rubrica può fungere da strumento di autovalutazione della propria argomentazione, consentendo agli allievi di applicare in prima persona i diversi criteri di valutazione e di sviluppare un approccio più critico e autonomo nella valutazione della competenza.
Coerentemente con la prospettiva trifocale descritta nel par. 2.2, perciò, la rubrica valutativa progettata consente di valutare la competenza argomentativa nelle tre dimensioni:

– la dimensione *oggettiva*, focalizzando ciò che l'allievo è in grado di fare attraverso criteri e indicatori osservabili;
– la dimensione *soggettiva*, attraverso l'autovalutazione;
– la dimensione *intersoggettiva*, attraverso il confronto dei due punti di vista: quello dell'allievo, espresso mediante l'autovalutazione, e quello del docente, indicato con il feedback.

La rubrica, quindi, assume un ruolo centrale nell'esplicitare le diverse dimensioni valutative della competenza, sostenendo un processo valutativo non solo descrittivo, ma anche riflessivo e formativo.

4 Le attività proposte

Il percorso didattico si è articolato in cinque attività, proposte nel corso dell'anno scolastico tra i mesi di ottobre e marzo, con l'obiettivo di sviluppare e osservare la competenza argomentativa in contesti matematici differenti. Le attività sono state progettate in modo progressivo e hanno previsto, in momenti diversi, l'introduzione e l'utilizzo della rubrica valutativa come strumento di supporto alla produzione, alla valutazione e all'autovalutazione delle argomentazioni.

4.1 Costruzione del concetto di argomentazione

Il percorso sulla competenza argomentativa è iniziato con un'attività introduttiva, incentrata sulla costruzione del significato di argomentazione. Agli allievi è stato chiesto di riflettere sul significato del termine e di condividere le proprie ipotesi sulla base delle loro conoscenze. Le risposte hanno evidenziato un'idea intuitiva del concetto, spesso associato all'idea di spiegare, motivare o giustificare un'opinione, e ha permesso di approfondire quali elementi siano necessari per sostenere un punto di vista in modo credibile.
Il confronto è stato guidato in modo da condurre gradualmente gli allievi all'identificazione dei tre elementi dell'argomentazione, corrispondenti a quelle indicate nella rubrica valutativa, ossia l'affermazione, le premesse e il ragionamento. Successivamente, questi concetti sono stati ulteriormente chiariti attraverso alcuni esempi: uno di carattere generale e uno legato a un contesto matematico (Figura 4), per mostrare come la struttura argomentativa sia utilizzata anche all'interno del contesto disciplinare.

Figura 4. Esempi semplici di argomentazione proposti.

Infine, è stata proposta un'attività a coppie in cui bisognava sviluppare e presentare alla classe una breve argomentazione a partire da un tema a scelta, individuando al suo interno l'affermazione, le premesse e il ragionamento. Il confronto con i compagni ha permesso agli allievi di analizzare e intervenire per segnalare eventuali elementi mancanti o scorretti rispetto ai tre elementi dell'argomentazione. Questo momento ha permesso di consolidare ulteriormente la comprensione della struttura argomentativa e di preparare indirettamente gli allievi per le attività successive, in cui questi aspetti sarebbero stati oggetto di osservazione.

4.2 Attività 1 - Interpretazione di un grafico

Descrizione dell'attività. La prima attività proposta, riferita all'ambito di competenza "Probabilità e statistica", è servita ad avvicinare gli allievi alla costruzione di un'argomentazione a partire dall'interpretazione di dati statistici (Allegato 2). È stato fornito un grafico tratto dallo studio JAMES del 2022 (Figura 5), che raccoglie informazioni sulle attività extra-mediali svolte nel tempo libero dai giovani svizzeri tra i 12 e i 19 anni (Külling et al., 2022).

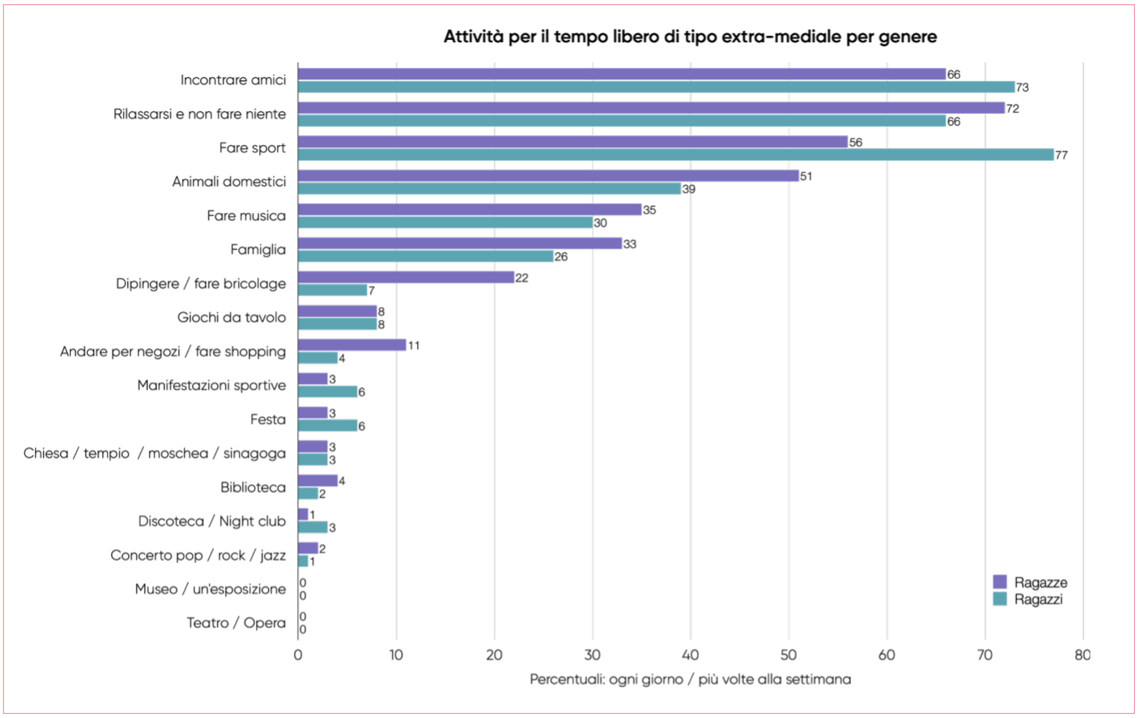


Figura 5. Dati statistici forniti nella prima attività (rielaborazione da Külling et al., 2022, p. 17).

L’attività è stata introdotta con un esempio svolto insieme alla classe, in cui si è riflettuto su un’affermazione («I ragazzi preferiscono svolgere attività artistiche come bricolage o dipingere più frequentemente rispetto alle ragazze»). Così facendo, gli allievi sono stati guidati nell’analisi del grafico e nella costruzione di un’argomentazione a supporto della posizione presa. In un secondo momento, gli allievi hanno lavorato individualmente su una seconda affermazione («I ragazzi preferiscono le attività sociali rispetto a quelle individuali»), applicando quanto osservato precedentemente. Nello specifico, gli allievi dovevano prendere posizione rispetto a un’affermazione proposta, indicando se la ritenevano vera o falsa, e giustificare la propria opinione facendo riferimento ai dati presenti nel grafico. Questa modalità ha reso l’attività più guidata, permettendo agli allievi di concentrarsi sulla costruzione del ragionamento e sull’individuazione di premesse pertinenti, senza preoccuparsi della formulazione dell’affermazione.

Lavoro con la rubrica valutativa. In questa prima attività la rubrica valutativa non è stata introdotta, per permettere agli allievi di concentrarsi sulla costruzione dell’argomentazione senza essere condizionati da criteri valutativi espliciti. L’attività ha avuto una funzione prevalentemente di avvio al lavoro argomentativo e di raccolta concezioni su cosa significasse per gli allievi argomentare un’affermazione.

4.3 Attività 2 - Teorema di Pitagora

Descrizione dell’attività. La seconda attività, connessa all’ambito di competenza “Geometria”, aveva l’obiettivo di introdurre, attraverso una situazione concreta, il teorema di Pitagora nello spazio: il problema chiedeva di determinare quali lunghezze potessero avere delle cannucce affinché potessero essere inserite all’interno di una scatola dalle dimensioni date (Figura 6, Allegato 3).
Il teorema di Pitagora, fino a quel momento, era stato applicato solo nel piano, senza considerare situazioni nello spazio. L’attività mirava quindi a stimolare un ragionamento plausibile, basato sulle conoscenze pregresse. Per risolvere il problema, gli allievi dovevano interpretare le dimensioni fornite e formulare delle ipotesi sulle possibili lunghezze che potessero entrare nella scatola: infatti, non era richiesto di trovare una risposta unica o definitiva, ma di giustificare in modo coerente il proprio ragionamento.

Scatole e cannucce

Consideriamo la scatola rappresentata di seguito come un parallelepipedo rettangolo, con dimensioni interne di 22,1 cm, 17,2 cm e 11,7 cm.

All’interno della scatola si vogliono riporre delle cannucce di spessore trascurabile.
Quali lunghezze possono avere le cannucce per poter essere inserite nella scatola?

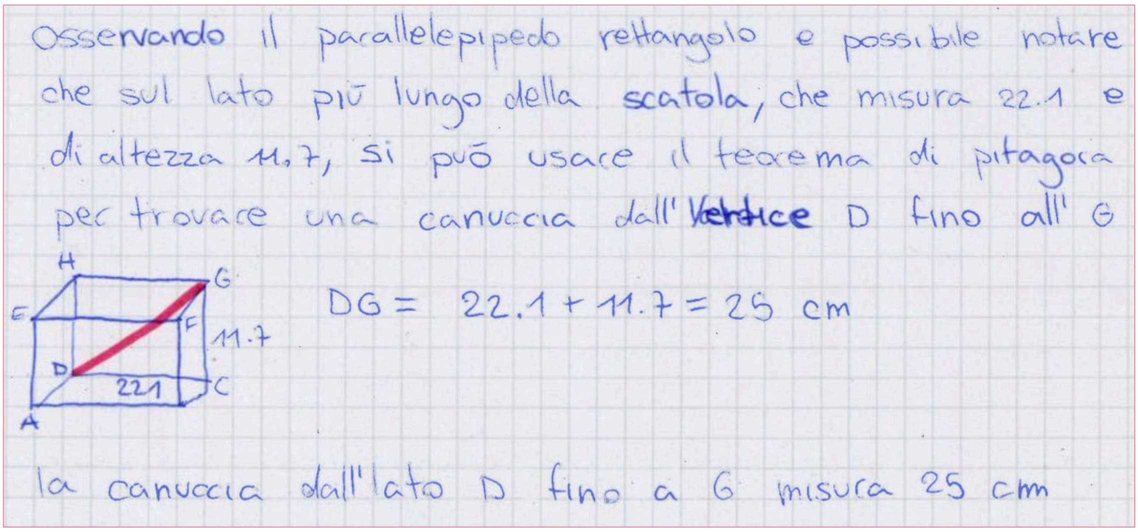
Figura 6. Consegna relativa all’attività 2.

Lavoro con la rubrica valutativa e feedback sull'attività. Durante questa attività, la rubrica valutativa è stata presentata agli allievi attraverso un momento di spiegazione collettiva con l'intero gruppo classe. A partire dal concetto di argomentazione costruito insieme alla classe, sono stati ripresi i tre elementi: affermazione, premesse e ragionamento. Per ognuna sono stati analizzati i criteri di valutazione, chiarendone il significato e la funzione all'interno di un'argomentazione. In seguito, si è andati nel dettaglio dei livelli di padronanza, per chiarire cosa distingue un'argomentazione strutturata e solida da una meno efficace. La rubrica valutativa, quindi, è stata utilizzata dagli allievi come strumento di supporto alla produzione della propria argomentazione. In particolare, è stato chiesto agli allievi di sviluppare un'argomentazione e di confrontarla successivamente con i criteri e i livelli descritti nella rubrica, con l'intento di individuare il proprio livello di padronanza nei diversi aspetti considerati ed eventualmente revisionare l'elaborato.

All'inizio della lezione successiva dedicata al percorso, così da offrire agli allievi degli spunti e dei consigli per sviluppare le argomentazioni seguenti, è stato fornito un riscontro rispetto all'argomentazione elaborata nell'attività 2 sia in forma scritta sia attraverso un grafico a ragnatela. Il commento in forma scritta aveva l'obiettivo di esplicitare in modo chiaro e semplice gli aspetti dell'argomentazione risultati più efficaci e, allo stesso tempo, gli elementi su cui concentrare un ulteriore lavoro. Il feedback mirava quindi a rendere più espliciti i punti di forza dell'elaborato e a indicare possibili direzioni di miglioramento in relazione ai diversi criteri della rubrica. Il linguaggio utilizzato richiama i descrittori dei livelli di padronanza ed è formulato in modo accessibile agli allievi, così da favorire la comprensione del riscontro ricevuto.

Nel grafico a ragnatela sono stati rappresentati i criteri, a ciascuno dei quali è stato associato un valore numerico compreso tra 4 (avanzato) e 1 (base), corrispondenti ai livelli di padronanza previsti dalla rubrica. Questa rappresentazione ha permesso agli allievi di visualizzare in modo immediato il proprio profilo di competenza e di orientarsi nel miglioramento dell'argomentazione nelle attività successive.

Per offrire un esempio, si riporta l'argomentazione di un allievo prodotta nel corso dell'attività 2 (**Figura 7**) e il relativo feedback fornito sia in forma scritta (**Figura 8**) sia attraverso il grafico a ragnatela (**Figura 9**).


Osservando il parallelepipedo rettangolo e possibile notare che sul lato più lungo della scatola, che misura 22.1 e di altezza 11,7, si puó usare il teorema di pitagora per trovare una canuccia dall' Vertice D fino all' G

DG = 22.1 + 11.7 = 25 cm

la canuccia dall'lato D fino a G misura 25 cm

Figura 7. Un esempio di argomentazione prodotta nell'attività 2.

L'affermazione è stata espressa in modo chiaro e le premesse sono pertinenti e ben collegate all'affermazione. Il ragionamento è generalmente coerente e l'organizzazione delle idee è chiara. Continua a lavorare con questa attenzione!

Per migliorare concentra il tuo lavoro sulla costruzione di premesse più complete e precise, assicurandoti di includere tutti gli aspetti rilevanti necessari a supportare l'affermazione. Questo renderà la tua argomentazione più solida e ben strutturata.

Figura 8. Feedback relativo all'attività 2 espresso in forma scritta.

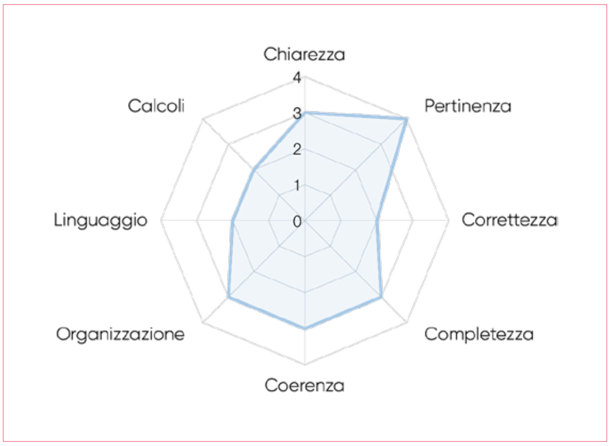


Figura 9. Feedback relativo all'attività 2 espresso con grafico a ragnatela.

In questa fase, dunque, la rubrica valutativa ha svolto un duplice ruolo: in un primo momento ha offerto agli allievi un riferimento per la costruzione dell'argomentazione, successivamente li ha supportati nell'interpretazione del feedback ricevuto dal docente.

4.4 Attività 3 - Rapporto in scala

Descrizione dell'attività. La terza attività, relativa all'ambito di competenza "Funzioni", proponeva una situazione concreta in cui gli allievi dovevano individuare le dimensioni di un nuovo armadio da inserire in una stanza, utilizzando un modello in scala come riferimento (Allegato 4). Il compito richiedeva non solo di applicare correttamente i rapporti in scala, ma anche di interpretare la situazione in modo realistico, formulando una proposta motivata in base allo spazio disponibile e alle dimensioni dell'oggetto (Figura 10).

Camera e armadi

La maestra ha deciso di rinnovare la stanza! Vuole sostituire la cassettiera e la televisione con un armadio, ma non sa quali dimensioni deve scegliere.

Osserva lo spazio disponibile nella stanza e proponi le dimensioni ideali per un armadio che possa adattarsi alla camera. Aiuta la maestra a trovare la soluzione perfetta!

Figura 10. Consegna relativa all'attività 3.

Lavoro con la rubrica valutativa e feedback sull'attività. Anche in questo caso, la rubrica valutativa è stata utilizzata come strumento di riferimento per strutturare l'argomentazione e per interpretare il feedback ricevuto dal docente sull'argomentazione relativa all'attività del rapporto in scala.
Il riscontro, consegnato nella lezione successiva prima di avviare la quarta attività, è stato fornito sia in forma scritta sia attraverso un grafico a ragnatela, che ha permesso agli allievi di visualizzare in modo immediato il livello di padronanza raggiunto nei diversi criteri. Si riporta un esempio nelle Figure 11-13.

nel disegno il comodino vale 4,2 cm che nella realta
e 210 perché si usa il rapporto in scala cioè
1:50 che vuol dice che nel disegno e 1 cm e nella
realtà 50 cm, Il rapporto in scala serve a sapere
quanto misura una cosa nella vita reale o il contrario
Ragionamento:
Larghezza: 4,2 · 50 = 210 cm
Lunghezza: 6,2 · 50 = 310 cm
Sppessore: 1 cm · 50 = 50 cm
affermazione:
l'armadio nel disegno ~~misura~~ misurerebbe 4,2 di larghezza
e 6,2 di Lunghezza nella realta di radoppia per 50
quindi 4,2 · 50 e 6,2 · 50 quindi le misure del
armadio usando il rapporto in scala è
Larghezza 210 cm, Lunghezza 310 cm e spessore 50 cm.

Figura 11. Un esempio di argomentazione prodotta nell'attività 3.

🌟 Le premesse sono pertinenti e ben collegate all'affermazione finale, dimostrando di aver capito il metodo per identificare le dimensioni reali. Inoltre, hai applicato correttamente il rapporto in scala per trovare le misure dell'armadio e i calcoli sono svolti con precisione.

🔧 Le premesse, pur essendo corrette, potrebbero essere più complete: cerca di fornire più dettagli per spiegare il percorso che ti porta alla scelta delle misure, evitando di dare per scontati alcuni passaggi. Anche il ragionamento può essere reso più chiaro: prova a esplicitare meglio il collegamento tra il dato iniziale, i calcoli e la conclusione. L'organizzazione generale dell'argomentazione può essere migliorata per rendere il testo più strutturato e leggibile, assicurandoti che ogni parte sia ben collegata alla successiva. Infine, fai attenzione all'uso dei termini matematici: utilizzare un linguaggio preciso ti aiuterà a rendere la tua spiegazione più chiara e comprensibile per chi legge.

Figura 12. Feedback relativo all'attività 3 espresso in forma scritta.

Figura 13. Feedback relativo all'attività 3 espresso con grafico a ragnatela.

Inoltre, come si vede dal grafico in Figura 13, è stato riportato anche il profilo di competenza relativo all'attività 2, sul teorema di Pitagora, consentendo così agli allievi di confrontare la qualità delle due argomentazioni e di osservare eventuali cambiamenti significativi.

4.5 Attività 4 - Struttura della piramide

Descrizione dell'attività. L'obiettivo della quarta attività, riferita all'ambito di competenza "Geometria", era quello di stimolare una riflessione sulle proprietà strutturali della piramide e di indirizzare gli allievi nella costruzione di un'argomentazione basata su osservazioni geometriche. Per introdurre l'argomento, è stata proposta un'attività iniziale (Allegato 5a) in cui gli allievi, suddivisi in gruppi, dovevano confrontarsi su alcune affermazioni relative alla piramide (ad esempio, «Tutte le piramidi hanno la faccia caratterizzante quadrata») senza avere a disposizione riferimenti teorici o rappresentazioni grafiche. Attraverso le proprie immagini mentali, gli allievi erano chiamati a esprimere il proprio accordo o disaccordo, motivando le proprie idee in maniera accurata. Di seguito, una discussione con il gruppo classe ha consentito di approfondire elementi importanti della piramide come la faccia caratterizzante, gli spigoli, i vertici ecc. In un secondo momento è stata proposta l'attività di argomentazione (Figura 14, Allegato 5b), molto simile a quelle precedenti: gli allievi, questa volta individualmente, dovevano prendere posizione rispetto a un'affermazione relativa alla piramide e costruire un'argomentazione scritta coerente con la propria opinione.

Piramidi… facce, spigoli e vertici 🤔

Leggi attentamente la frase seguente: ritieni che sia vera oppure falsa? Giustifica la tua risposta argomentando l'affermazione e, se necessario, aiutati con dei disegni.

Se si raddoppiano il numero di lati della base di una piramide, allora si raddoppiano anche il numero di facce, spigoli e vertici.

Figura 14. Consegna relativa all'attività 4.

Lavoro con la rubrica valutativa e feedback sull'attività. La modalità di lavoro con la rubrica valutativa è stata del tutto simile a quella proposta nelle attività precedenti. In aggiunta, al termine dell'attività sulle piramidi, agli allievi è stato chiesto di svolgere un'autovalutazione compilando personalmente il grafico a ragnatela, riflettendo sulla qualità del proprio elaborato e sul livello di padronanza raggiunto per ciascun criterio.
Di seguito si propone un esempio di argomentazione prodotta (**Figura 15**) con il relativo feedback fornito sia in forma scritta (**Figura 16**) sia attraverso il grafico a ragnatela evolutivo (**Figura 17**), in cui manca il criterio "Calcoli" perché non considerati nell'attività 4 (come spiegato nel **par. 4.7**).

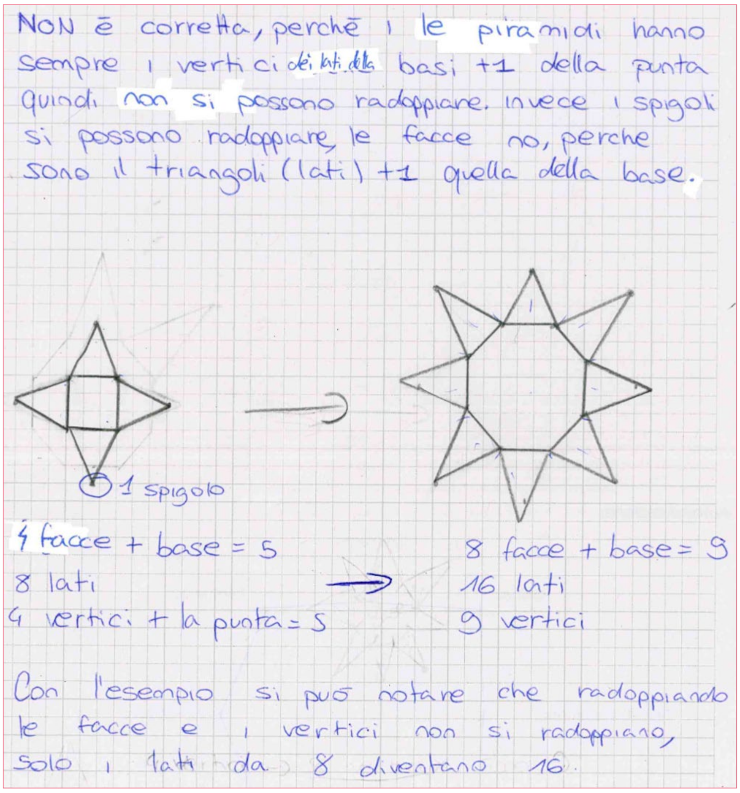


Figura 15. Un esempio di argomentazione prodotta nell'attività 4.

Hai strutturato un'affermazione chiara e precisa, collegando correttamente i concetti di facce, spigoli e vertici. Le tue premesse sono ben formulate, esplicitando la relazione tra il numero di lati della base e il comportamento degli altri elementi della piramide. Inoltre, hai fornito un esempio numerico concreto che supporta e rende ancora più chiaro il tuo ragionamento. L'uso dei termini matematici è più che buono, e il ragionamento è coerente e ben organizzato.

La tua argomentazione è già ben sviluppata, ma potresti ulteriormente approfondire la giustificazione del motivo per cui le facce e i vertici non raddoppiano. Sebbene sia chiaro che il numero di lati della base influenzi le facce e i vertici, potrebbe essere interessante dare una spiegazione ancora più dettagliata su questo comportamento, per rendere il ragionamento ancora più completo.

Figura 16. Feedback relativo all'attività 4 espresso in forma scritta.

Figura 17. Feedback relativo all'attività 4 espresso con grafico a ragnatela.

4.6 Attività 5 - Argomentazione sui social media

Descrizione dell'attività. La quinta attività, relativa all'ambito di competenza "Probabilità e statistica", ha proposto una riflessione argomentativa a partire da una tematica di attualità – il divieto dei social media ai minori di 16 anni – con lo scopo di favorire una presa di posizione consapevole, sostenuta da un ragionamento coerente e dall'interpretazione di dati statistici. In un primo momento è stato presentato il caso dell'Australia, dove è stata introdotta una misura legislativa che proibisce ai minori di 16 anni l'accesso ai social media. Dopo la lettura di un articolo (Allegato 6a), è stata aperta una discussione collettiva per raccogliere le prime opinioni sulla questione. Successivamente, sono stati mostrati agli allievi alcuni dati statistici sull'utilizzo dei social media da parte dei giovani svizzeri tra i 12 e i 19 anni, questa volta tratti dallo studio JAMES del 2024 (Külling-Knecht et al., 2024, Allegato 6b): questi elementi hanno permesso di avviare una nuova riflessione più ampia sulla possibilità di introdurre un divieto simile anche in Svizzera. Alla luce di queste informazioni, è stato chiesto agli allievi di produrre individualmente un'argomentazione scritta in cui esprimere il proprio punto di vista, motivandolo attraverso dati, osservazioni e collegamenti logici (Allegato 6c).

Lavoro con la rubrica valutativa. Nell'ultima attività proposta la rubrica valutativa è stata utilizzata esclusivamente come strumento di autovalutazione: agli allievi è stato chiesto di analizzare la propria argomentazione e di rappresentare il livello di competenza raggiunto nei diversi criteri attraverso la compilazione del grafico a ragnatela.

4.7 Attivazione dei criteri della rubrica valutativa

Nel corso del percorso la rubrica valutativa è stata applicata in modo flessibile, selezionando i criteri più rilevanti rispetto alle caratteristiche e agli obiettivi delle singole attività proposte. Nella Tabella 2 sono indicati, per ogni attività, i criteri utilizzati.

		Attività 1	Attività 2	Attività 3	Attività 4	Attività 5
Affermazione	Chiarezza		X	X	X	X
Premesse	Pertinenza	X	X	X	X	X
	Correttezza	X	X	X	X	X
	Completezza	X	X	X	X	X
Ragionamento	Coerenza	X	X	X	X	X
	Organizzazione	X	X	X	X	X
	Linguaggio		X	X	X	
	Calcoli		X	X		

Tabella 2. Tabella riassuntiva relativa all'attivazione dei criteri per attività.

Tra i criteri definiti nella rubrica valutativa, alcuni non sono stati attivati in maniera generalizzata. In particolare, il criterio relativo all'uso del linguaggio è stato considerato sono nella seconda, nella terza e nella quarta attività, in cui la precisione e la coerenza dei termini matematici rivestivano un ruolo significativo nella costruzione dell'argomentazione. Allo stesso modo, il criterio riferito all'accuratezza nell'esecuzione dei calcoli è stato attivato solamente nella seconda e nella terza attività, in quanto erano le uniche in cui era richiesto un vero e proprio procedimento matematico.

Va inoltre sottolineato che il criterio relativo alla chiarezza dell'affermazione, nonostante sia un elemento centrale nella struttura argomentativa, non è stato attivato nella prima attività. La struttura del compito, infatti, non richiedeva necessariamente una formulazione esplicita del proprio punto di vista, ma si concentrava sullo sviluppo del ragionamento a partire da premesse coerenti. In questo contesto, la valutazione dell'affermazione non avrebbe rappresentato un indicatore affidabile della competenza, rischiando di sfavorire produzioni valide solo per l'assenza di una riformulazione esplicita della propria opinione.

Gli altri criteri specifici, ossia quelli relativi alle premesse, alla coerenza e all'organizzazione del ragionamento, sono stati attivati trasversalmente in tutte le attività proposte, in quanto ritenuti elementi fondamentali per valutare la qualità di un'argomentazione.

5 Valutazione delle argomentazioni

Per mostrare in modo concreto il funzionamento della rubrica in fase valutativa, vengono analizzati in modo approfondito due criteri: la chiarezza dell'affermazione, che nel corso del percorso ha evidenziato un miglioramento, e la correttezza delle premesse, che ha invece mostrato difficoltà persistenti. L'intento non è quello di fornire un'analisi esaustiva di tutte le produzioni, ma di mostrare come la rubrica abbia consentito di leggere le argomentazioni degli allievi, mettendone in evidenza punti di forza e criticità. Un'analisi approfondita degli elaborati degli allievi, articolata su tutti i criteri della rubrica, è sviluppata nel lavoro di tesi (Tipura, 2025).

5.1 Chiarezza dell'affermazione

Il criterio della chiarezza valuta la capacità dell'allievo di formulare in modo esplicito e preciso la propria posizione rispetto alla situazione. Un'affermazione chiara costituisce la base dell'argomentazione, poiché rende comprensibile il punto di vista espresso e orienta il successivo sviluppo del ragionamento. L'analisi delle produzioni mostra che in alcuni casi le affermazioni risultano comprensibili solo in modo parziale. In diversi elaborati emergono formulazioni poco lineari, imprecisioni linguistiche o ambiguità terminologiche che rendono meno chiaro il contenuto del messaggio, pur in presenza di un'idea di fondo pertinente rispetto al contesto. In questi casi, la difficoltà non risiede tanto nella comprensione della situazione matematica, quanto nella capacità di tradurre il proprio pensiero in un'affermazione esplicita e ben formulata.
Queste differenze nella qualità delle affermazioni sono state rese visibili e distinguibili attraverso i descrittori di livello della rubrica. Per illustrare come il criterio sia stato applicato in concreto, si riportano di seguito le definizioni di ciascun livello di padronanza insieme a un esempio per ciascun livello.

- *Livello avanzato*: l'affermazione risulta pienamente comprensibile e direttamente collegata al contesto proposto; il punto di vista è espresso con chiarezza e non può essere frainteso. Nell'esempio riportato in **Figura 18** l'allievo esplicita con chiarezza e precisione il proprio punto di vista, formulando un'affermazione coerente con il contesto (la cannuccia è posizionata come la diagonale del parallelepipedo) e che non può essere fraintesa (è esplicitata l'unità di misura).

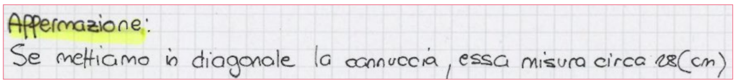

Affermazione:
Se mettiamo in diagonale la cannuccia, essa misura circa 28(cm)

Figura 18. Manifestazione del criterio chiarezza (livello avanzato) in un'argomentazione relativa all'attività 2.

- *Livello buono*: l'affermazione è nel complesso comprensibile e pertinente, ma presenta alcune imprecisioni che ne riducono la chiarezza. L'esempio in **Figura 19** mostra come la formulazione della frase non sia del tutto corretta, in quanto fa riferimento ad «altezze» e «larghezze» al plurale, pur descrivendo le dimensioni di un unico oggetto. Malgrado queste imprecisioni linguistiche, l'affermazione permette di cogliere con precisione il punto di vista dell'allieva e risulta coerente con il contesto proposto.

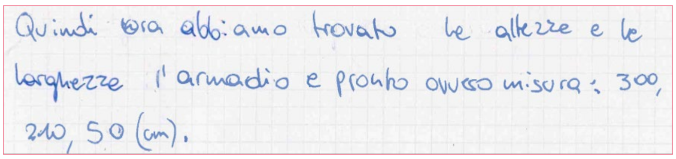

Quindi ora abbiamo trovato le altezze e le larghezze l'armadio e pronto ovvero misura: 300, 210, 50 (cm).

Figura 19. Manifestazione del criterio chiarezza (livello buono) in un'argomentazione relativa all'attività 3.

– *Livello discreto*: l'affermazione è solo in parte comprensibile; l'idea di base può essere intuita, ma l'uso di espressioni poco chiare e una formulazione poco strutturata generano ambiguità e confusione. L'esempio proposto in **Figura 20** presenta un'idea di base corretta con la situazione, ma l'utilizzo di espressioni poco chiare – come «raddoppiare una piramide» – limitano la chiarezza del messaggio. Anche la parte finale della frase, riferita agli spigoli, non chiarisce il concetto e contribuisce a generare confusione. L'idea di fondo può essere intuita, ma il livello di chiarezza rimane limitato.

Se si raddopia una piramide gli spigoli, vertici e facce non si raddoppiano tranne gli spigoli. ~~che do e possono~~

Figura 20. Manifestazione del criterio chiarezza (livello discreto) in un'argomentazione relativa all'attività 4.

– *Livello base*: l'affermazione risulta poco chiara, confusa oppure non coerente con la consegna; in questi casi non emerge una presa di posizione leggibile rispetto al compito proposto. L'affermazione, riportata in **Figura 21**, appare corretta da un punto di vista concettuale, ma non si riferisce alla situazione specifica dell'attività. L'allieva non formula una presa di posizione coerente rispetto alla consegna, rendendo difficile attribuire un livello di padronanza sulla base del criterio della chiarezza.

AFFERMAZIONE: È vero tracciando una diagonale si formano 2 triangoli rettangoli (da cui ho calcolato l'ipotenusa).

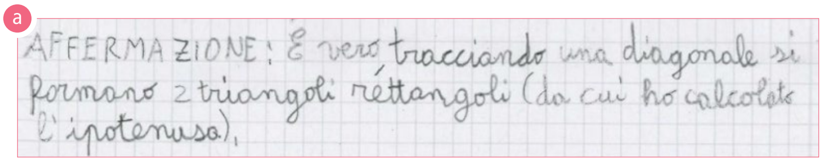
Figura 21. Manifestazione del criterio chiarezza (livello base) in un'argomentazione relativa all'attività 2.

Il confronto tra esempi appartenenti a livelli di padronanza differenti permette di cogliere in modo concreto le principali difficoltà legate alla formulazione dell'affermazione, in particolare la mancata presa di posizione esplicita, l'uso di formulazioni vaghe o poco mirate rispetto alla consegna e la tendenza a descrivere un procedimento senza esplicitare l'idea che si intende sostenere. Tali elementi permettono di distinguere tra affermazioni solo parzialmente comprensibili e affermazioni formulate in modo chiaro ed efficace.

Osservando l'andamento del criterio lungo il percorso, si nota tuttavia un'evoluzione significativa. Nel corso delle attività, e in particolare in quelle di carattere geometrico, le affermazioni risultano progressivamente più precise, mirate e coerenti con la consegna. Gli allievi tendono a esplicitare meglio la propria posizione, riducendo ambiguità e formulazioni generiche.

Un confronto tra le argomentazioni (**Figura 22a, b**) della stessa allieva in momenti diversi del percorso permette di mettere in luce alcuni cambiamenti nella formulazione dell'affermazione. Nella seconda attività, relativa al teorema di Pitagora, l'affermazione non risponde in modo diretto alla consegna (**Figura 22a**): l'allieva descrive un procedimento per individuare una diagonale, ma non prende posizione rispetto alla domanda posta, che richiedeva di stabilire quale lunghezza deve avere una cannuccia per entrare nella scatola. Nella quarta attività, inerente alle caratteristiche della piramide, l'affermazione risulta più mirata e pertinente (**Figura 22b**): l'allieva prende posizione in modo esplicito e indica con precisione quale aspetto non ritiene corretto. Il confronto tra queste due produzioni evidenzia un miglioramento nelle capacità di formulare un'affermazione chiara e direttamente collegata alla consegna.

a



b

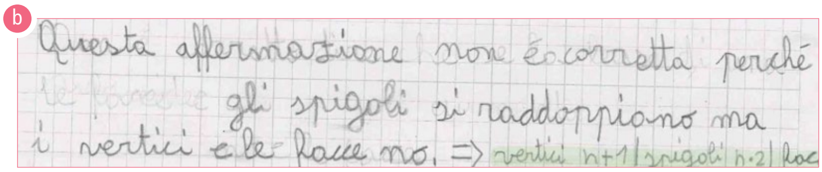


Figura 22. Confronto delle produzioni di un'allieva: a) Argomentazione relativa all'attività 2; b) Argomentazione relativa all'attività 4.

Questo sviluppo è stato sostenuto anche dall'utilizzo della rubrica valutativa come strumento di riferimento per gli allievi. Il confronto tra il proprio elaborato, i feedback ricevuti e i criteri della rubrica ha permesso di rendere più esplicite ed evidenti le aspettative relative alla formulazione dell'affermazione e di individuare gli aspetti da rendere più precisi. In questo modo, la rubrica non ha avuto solo una funzione descrittiva, ma ha orientato maggiormente gli allievi nella formulazione dell'affermazione.

5.2 Correttezza delle premesse

Il criterio della correttezza delle premesse valuta la capacità dell'allievo di utilizzare informazioni matematicamente corrette e concettualmente adeguate a sostenere la propria affermazione. Premesse corrette presuppongono una comprensione appropriata dei concetti matematici coinvolti e un loro uso coerente rispetto alla situazione proposta.
L'analisi delle produzioni mostra che questo criterio rappresenta una delle principali difficoltà incontrate dagli allievi nel corso del percorso. In diversi elaborati emergono imprecisioni concettuali, confusioni tra oggetti matematici diversi o riferimenti incompleti a proprietà e relazioni rilevanti. In questi casi, anche quando l'affermazione risulta comprensibile, la presenza di premesse scorrette o formulate in modo approssimativo compromette la solidità dell'argomentazione.
Queste differenze nella qualità delle premesse sono state rese visibili e distinguibili attraverso i descrittori di livello della rubrica. Per illustrare come il criterio sia stato applicato in concreto, si riportano di seguito esempi rappresentativi per ciascun livello di padronanza.

– *Livello avanzato*: le premesse risultano corrette e formulate in modo preciso, vengono utilizzati concetti e proprietà matematiche adeguati, che sono collegati in modo coerente alla situazione proposta. Nell'esempio riportato in Figura 23, l'allievo seleziona due dati numerici relativi alle attività svolte dai ragazzi e li confronta correttamente per sostenere la propria opinione. L'utilizzo del simbolo matematico ">", insieme alla distinzione delle attività, dimostra una comprensione accurata dei dati e una corretta interpretazione.

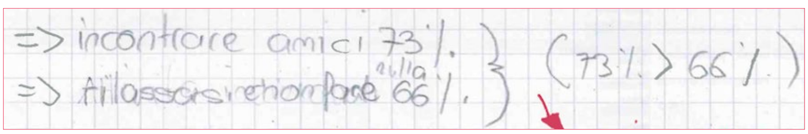


Figura 23. Manifestazione del criterio correttezza (livello avanzato) in un'argomentazione relativa all'attività 1.

– *Livello buono*: le premesse sono nel complesso corrette, ma presentano alcune imprecisioni che ne riducono la precisione concettuale (ad esempio, formulazioni approssimative o mancanza di specificazioni necessarie). La **Figura 24** mostra come l'allievo conosca il concetto di rapporto in scala, ma lo esprime in modo approssimativo e non del tutto corretto («rapporto in scala è 50»); inoltre, non specifica l'unità di misura a cui fa riferimento. Nonostante il significato complessivo sia comprensibile, questi elementi ne riducono la precisione.

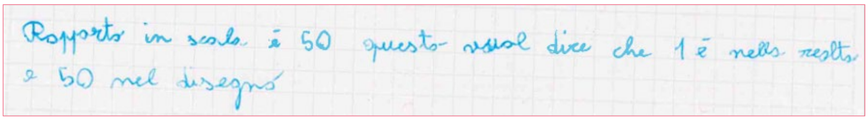


Figura 24. Manifestazione del criterio correttezza (livello buono) in un'argomentazione relativa all'attività 3.

– *Livello discreto*: le premesse risultano solo in parte corrette; emergono imprecisioni concettuali o ambiguità che indeboliscono la giustificazione e rendono meno solido il collegamento con l'affermazione. Nella **Figura 25** si nota come l'allieva faccia riferimento alla diagonale di un rettangolo, generando una certa ambiguità rispetto al solido in considerazione (parallelepipedo). Inoltre, l'espressione «si formano due angoli retti» è imprecisa e può essere facilmente fraintesa: potrebbe derivare da una confusione con la presenza di due triangoli rettangoli o dall'idea errata che la diagonale generi due angoli retti. Oltretutto, manca una giustificazione esplicita che colleghi la situazione all'applicazione del teorema di Pitagora. L'insieme di queste imprecisioni limitano la validità delle premesse.

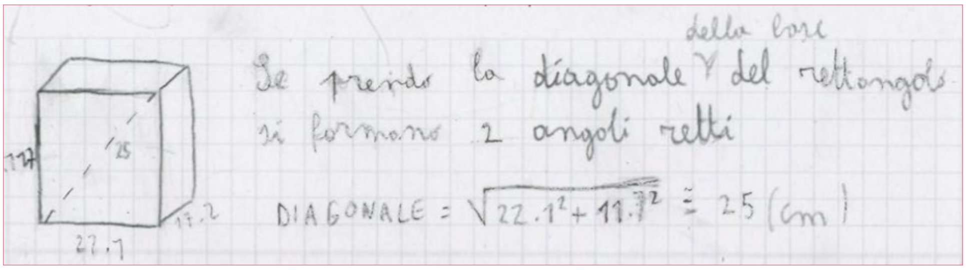


Figura 25. Manifestazione del criterio correttezza (livello discreto) in un'argomentazione relativa all'attività 2.

– *Livello base*: le premesse risultano scorrette o non adeguate alla situazione. In questi casi le informazioni utilizzate non sono matematicamente valide oppure non sostengono in modo coerente l'affermazione proposta. Nella **Figura 26** è possibile notare come l'allievo individui correttamente le misure del modello e riconosca la necessità di utilizzare il rapporto in scala per determinare le grandezze reali. Tuttavia, non spiega quali sono le implicazioni del rapporto in scala e come debba essere utilizzato. L'assenza di riferimenti concettuali validi rende le premesse poco affidabili per lo sviluppo di un'argomentazione.

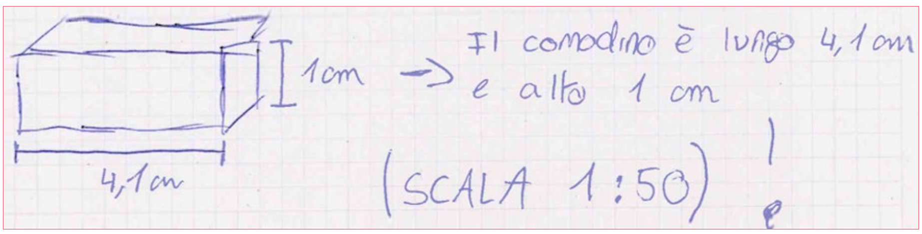


Figura 26. Manifestazione del criterio correttezza (livello base) in un'argomentazione relativa all'attività 3.

Il confronto tra esempi appartenenti a livelli di padronanza differenti permette di evidenziare come, in questo criterio, le difficoltà non riguardino soltanto la formulazione, ma soprattutto la comprensione e l'uso corretto dei concetti matematici coinvolti.
Osservando l'andamento del criterio lungo il percorso, non si rileva un miglioramento altrettanto marcato rispetto a quanto osservato per la chiarezza dell'affermazione. Le difficoltà legate alla correttezza delle premesse tendono a persistere nel tempo, in particolare nelle attività più aperte, in cui è richiesto di selezionare e utilizzare informazioni matematiche pertinenti senza fare riferimento a procedure consolidate. Un esempio di questa complicazione emerge dall'argomentazione svolta da un'allieva nell'ultima attività proposta (Figura 27): viene formulata un'affermazione chiara e pertinente rispetto alla consegna, accompagnata da una presa di posizione esplicita. Tuttavia, le premesse a sostegno dell'affermazione non fanno riferimento ai dati quantitativi forniti, ma si basano su considerazioni generali sull'uso dei social media nella fascia d'età considerata. L'assenza di un richiamo esplicito alle informazioni statistiche a disposizione riduce la solidità delle premesse.

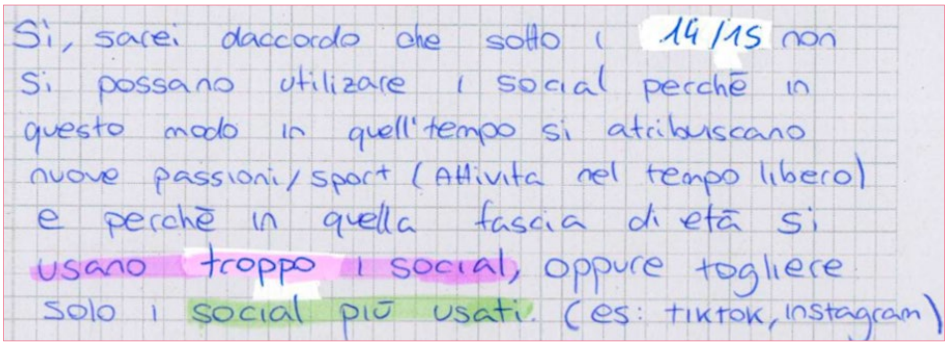

Si, sarei daccordo che sotto i 14/15 non
si possano utilizare i social perchē in
questo modo in quell'tempo si atribuiscano
nuove passioni/sport (Attività nel tempo libero)
e perchē in quella fascia di etā si
usano troppo i social, oppure togliere
solo i social più usati. (es: tiktok, instagram)

Figura 27. Premesse esposte da un'allieva nell'ultima attività proposta.

Questo andamento suggerisce che la correttezza delle premesse rappresenta un criterio più complesso, anche perché le premesse sono legate a contenuti matematici diversi che possono essere stati appresi dallo stesso allievo con gradi di profondità anche molto differenti. La rubrica ha tuttavia permesso di rendere esplicito questo aspetto critico, offrendo agli allievi un riferimento chiaro per riconoscere la necessità di costruire premesse più solide attraverso informazioni adeguate.

6 Bilancio dell'esperienza

L'analisi delle argomentazioni prodotte nelle cinque attività aveva come obiettivo principale di verificare in che misura la rubrica valutativa risultasse applicabile in contesti matematici differenti. La possibilità di utilizzarla in attività diverse ha permesso di verificarne l'applicabilità e di evidenziare come i criteri proposti siano in grado di cogliere aspetti distintivi della qualità dell'argomentazione. Più che descrivere nel dettaglio i livelli di padronanza raggiunti dagli allievi, l'attenzione si è concentrata sulla capacità dello strumento di supportare gli allievi nella produzione di argomentazioni.
La varietà delle attività proposte ha permesso di mettere alla prova la rubrica in compiti più o meno guidati, legati a dati forniti, a conoscenze geometriche o a situazioni più aperte e interpretative. In questo senso, l'analisi dei criteri presentata nel capitolo precedente mostra come lo strumento consenta di cogliere sia aspetti che evolvono nel tempo, come la chiarezza dell'affermazione, sia difficoltà

più persistenti, come la correttezza delle premesse.
Nel complesso, i risultati descritti suggeriscono che la rubrica possiede una struttura sufficientemente solida e flessibile per essere utilizzata in attività con livelli di complessità diversi, confermando il suo potenziale come strumento di osservazione della competenza argomentativa. Infatti, la rubrica è stata impiegata in ambiti matematici diversi e in fasi del lavoro differenti – dall'introduzione di nuovi concetti alla loro applicazione – permettendo di osservare l'argomentazione in situazioni eterogenee.
L'esperienza descritta mostra inoltre come l'introduzione di una rubrica valutativa possa rappresentare un valido supporto per rendere più consapevole il processo di argomentazione in matematica, come mostrano gli esempi di proposte dei singoli allievi analizzati nel paragrafo precedente che evidenziano cambiamenti e criticità nella costruzione dell'argomentazione.
La rubrica, infatti, non svolge soltanto una funzione valutativa, ma può diventare uno strumento didattico a tutti gli effetti e di supporto allo sviluppo di competenze argomentative: sostiene gli allievi a orientarsi nella costruzione del ragionamento, facilita la comprensione del feedback e permette di confrontare il risultato delle attività svolte nel tempo. L'impiego del grafico a ragnatela, in particolare, ha reso immediata la lettura dei punti di forza e delle difficoltà, contribuendo a rafforzare la dimensione riflessiva del lavoro, soprattutto nei momenti di autovalutazione previsti nelle ultime attività.
Nonostante alcuni criteri risultino più sensibili al tipo di consegna e alle conoscenze matematiche, la rubrica valutativa ha dimostrato di mantenere una buona coerenza e di offrirsi come struttura chiara per la lettura delle argomentazioni. Questo consente di capire che uno strumento pensato con attenzione, calibrato sui bisogni degli allievi e costruito sulla base di un riferimento teorico, può sostenere la pratica didattica.
Inoltre, l'esperienza suggerisce che un uso regolare della rubrica, integrato con attività di confronto e discussione tra pari, potrebbe ulteriormente favorire la consapevolezza degli allievi rispetto al proprio modo di argomentare e rendere ancora più espliciti i passaggi logici che sottendono il ragionamento matematico. La rubrica valutativa, nella sua forma attuale, rappresenta dunque una base promettente per sviluppi futuri e per esplorare modalità più strutturate di insegnamento e valutazione dell'argomentazione, in linea con le esigenze della scuola media e con le indicazioni del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*.

Bibliografia

Castoldi, M. (2016). *Valutare e certificare le competenze.* Carocci.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://pianodistudio.edu.ti.ch

Inglis, M., Mejia-Ramos, J., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Karbach, J. (1987). Using Toulmin's model of argumentation. *Journal of Teaching Writing*, *6*(1), 81–92.

Külling, C., Waller, G., Suter, L., Willemse, I., Bernath, J., Skirgaila, P., Streule, P., & Süss, D. (2022). *JAMES: Jugend, Aktivitäten, Medien - Erhebung Schweiz.* Zürcher Hochschule für Anfewandte Wissenschaften. https://www.zhaw.ch/storage/psychologie/upload/forschung/medienpsychologie/james/2018/Bericht_JAMES_2022_de.pdf

Külling-Knecht, C., Waller, G., Willemse, I., Deda-Bröchin, S., Suter, L., Streule, P., Settegrana, N., Jochim, M., Bernath, J., & Süss, D. (2024). *JAMES: Jugend, Aktivitäten, Medien - Erhebung Schweiz.* Zürcher Hochscule für Anfewandte Wissenschaften. https://www.swiss-schools.ch/wp-content/uploads/2024/11/JAMES-Studie_2024.pdf

Sbaragli, S., & Demartini, S. (Eds.) (2021). *Italmatica: Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica.* Edizioni Dedalo.

Tipura, S. (2025). *Argomentare in matematica: la rubrica valutativa come strumento di valutazione.* Tesi Master. Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://doi.org/10.71910/supsi.12448

Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument.* Cambridge University Press. (Prima edizione pubblicata nel 1958).

Recensioni

DdM

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
2026 (19), 203–213.
OPEN ACCESS

Recensioni[1]

AA.VV. (2025). *Giochi e supporti digitali del progetto "MaMa - Matematica per la scuola elementare".*
mama.edu.ti.ch

Come docente di scuola elementare, conosco e utilizzo i materiali del progetto "MaMa - Matematica per la scuola elementare" da diversi anni, integrandoli con altre risorse didattiche. Da aprile dell'anno scorso sulla piattaforma del progetto (mama.edu.ti.ch) è stata resa disponibile una nuova tipologia di materiali dal carattere molto innovativo, che ho provato subito a sperimentare con i miei allievi[2] di prima e seconda elementare. Si tratta di giochi e di supporti digitali, che possono essere svolti e utilizzati direttamente online, lavorando con tutta la classe sulla lavagna interattiva multimediale oppure proponendoli agli allievi singolarmente o a coppie su un computer o un tablet. Per accedere a tali materiali, nelle sezioni "Tutto", "Giochi" e "Supporti" della sezione "Materiali didattici" è necessario impostare il filtro "Tipologia di materiale" sull'opzione "Digitale" o "Digitale e Cartaceo".
La duplice modalità di utilizzo (cartaceo e digitale) dello stesso materiale rende questi nuovi materiali una ricchezza unica nel genere.
Il supporto Il castello dei numeri, ad esempio, può essere usato come vero e proprio strumento didattico in aula nella sua versione cartacea da far costruire ed utilizzare agli alunni, scegliendo la variante più adatta alla propria pratica didattica (0-99, 99-0, 1-100, 100-1). Allo stesso tempo, può essere aperto e usato online sulla lavagna interattiva multimediale per colorare, spostare, mostrare e nascondere le caselle numeriche. Il castello nella sua versione digitale diventa, inoltre, l'ambientazione fantastica per due giochi digitali caratterizzati da una grafica accattivante e diversi livelli di difficoltà crescenti, sfidanti e motivanti: il Castello dei numeri - Fare ordine e il Castello dei numeri - Il tesoro del re. Lavorare sull'ordinamento dei numeri naturali entro il 100 e sulla loro scomposizione in unità e decine risulta più giocoso, sia per i bambini sia per la docente, immaginando cavalleresche avventure all'interno delle varie stanze del castello.

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).
2. Il genere maschile viene usato in questa sezione della rivista per designare persone, indipendentemente dal genere.

Questi nuovi materiali didattici per uso digitale, inoltre, possono uscire dall'aula vera e propria: trattandosi di materiali gratuiti reperibili online, infatti, gli alunni hanno la possibilità di giocare anche a casa con le loro famiglie. Che cosa c'è di più stimolante di sfidare i propri genitori (e spesso riuscire anche a vincere!) per mostrare le abilità acquisite a scuola? I vantaggi di questa doppia modalità di utilizzo sono molteplici: la condivisione con il mondo extrascolastico, e in particolare con il contesto familiare, facilita il consolidamento in modo informale di ciò che viene trattato in classe. Attraverso il gioco Castello dei numeri - Il tesoro del re, ad esempio, sono spesso i genitori stessi a rimanere increduli nel vedere i propri figli così coinvolti nello svolgimento di calcoli di diversa difficoltà, anche a mente. L'errore non è visto come sconfitta: se si sbaglia a scegliere una stanza del castello, viene esplicitata l'operazione da svolgere per trovare la stanza corretta e si ha tutto il tempo a disposizione per riuscire a farlo.
Un'altra efficace risorsa da utilizzare in questa interessante dinamica tra scuola e famiglia, è il gioco Forza 4 matematico: gli allievi si sfidano a coppie in una versione matematica del gioco classico, dove abilità di calcolo e strategia la fanno da padrone per riuscire a vincere. Dopo essersi sfidati tra loro e aver sfidato la maestra, la sfida continua a casa con i propri genitori e familiari. Con i giochi MaMa cambia la prospettiva sull'uso del digitale: i genitori sanno che il gioco è didattico, veicola un preciso tipo di compito, che l'alunno è in grado di affrontare perché già sperimentato a scuola con la maestra e i compagni. Sono i genitori, per una volta, a lasciarsi guidare dai propri figli nel mondo della matematica.
Un ulteriore aspetto vantaggioso può essere proprio quello della familiarità: gli alunni con maggiori difficoltà sono confortati dal ritrovare nel mondo digitale ciò di cui hanno avuto esperienza con la manipolazione concreta e viceversa. È il caso del gioco del Memory della simmetria: il classico memory rivisitato in versione geometrica con immagini simmetriche, tagliate lungo l'asse di simmetria, da ricomporre. Ispirandosi alla versione cartacea, la versione digitale propone livelli di difficoltà crescenti legati al tipo di simmetria (interna, esterna, interna ed esterna), alla tipologia di immagini (figure reali o astratte, insetti, farfalle), al numero di carte (12, 24, 28) e alla loro disposizione, fino al livello difficilissimo con 20 carte in disordine. Questo gioco pensato per un minimo di 2 giocatori è ideale da far sperimentare nella sua versione digitale a coppie con l'utilizzo di un tablet: le dimensioni sono proporzionate, i comandi semplici e, anche qui, il gioco è familiare. Grazie al feedback tecnologico, ossia di fronte a coppie di carte che non si trasferiscono nel mucchietto del giocatore, ma si rigirano a faccia in giù per essere rigiocate, le domande degli alunni giocatori sorgono spontanee: «Perché queste due figure non si abbinano?», «Mi sembravano uguali e invece no: in che cosa erano diverse?». L'osservazione, in modo specifico nella sezione farfalle, risulta particolarmente complessa: le immagini sembrano simmetriche, ma spesso non lo sono! Passare poi alla versione cartacea, per poter confrontare "con le mani", come dicono i bambini, queste immagini complesse e articolate, e scoprire dove si trova l'asse di simmetria (ma soprattutto perché si è perso contro il compagno durante quella partita!) è consigliatissimo. In questo modo il gioco digitale introduce l'argomento da focalizzare e il gioco cartaceo ne permette l'analisi. Il percorso si può poi concludere con una vera e propria prova di competenza: perché non creare le "carte simmetriche della classe" per poter continuare a giocare con nuovi mazzi inediti? Il gioco cartaceo Memory della simmetria, infatti, come la maggior parte dei giochi MaMa, presenta tra gli allegati carte memory vuote editabili, pronte per essere personalizzate in aula. Chissà, forse il team MaMa sta già pensando anche a una versione del gioco digitale da poter personalizzare?
Questi materiali, insomma, permettono davvero un'efficace integrazione fra digitale e cartaceo: per poter consolidare, ma anche introdurre argomenti matematici in diversi ambiti di contenuto. A tal proposito, sono disponibili anche altri materiali digitali, oltre a quelli qui esaminati, come La corsa dei cavalli, il Memory delle tabelline e gli Orologi didattici, che appaiono stimolanti e promettenti per lavorare su temi come la probabilità, la moltiplicazione e le misure di tempo. Sarà molto interessante sperimentarli con i miei allievi quando saranno più grandi, per proseguire con questa bella esperienza tra cartaceo e digitale, tra scuola e casa.

I materiali digitali MaMa rappresentano una boccata d'aria innovativa per gli insegnanti di scuola elementare, i quali hanno così la possibilità di integrare nella pratica didattica, giorno dopo giorno, il mondo digitale, che tanto spaventa ed allo stesso tempo affascina.

Anna Maria Brunero
Scuola primaria "Federico Sclopis",
Istituto Comprensivo "Pacchiotti – Via Revel" di Torino, Italia

Sobel, D. (2017). *Longitudine: Come un genio solitario cambiò la storia della navigazione*. Rizzoli.

Longitudine di Dava Sobel è un breve saggio narrativo che ricostruisce il tentativo di risolvere il problema della determinazione della longitudine durante la navigazione in mare. La longitudine richiede, infatti, di mettere in relazione spazio e tempo, confrontando l'ora locale con quella di un meridiano di riferimento: questo aspetto, apparentemente semplice, nasconde difficoltà tecniche che hanno richiesto un grandissimo lavoro, sia teorico, matematico e astronomico, sia tecnico, legato all'invenzione di orologi capaci di resistere alle intemperie e all'umidità del mare senza perdere precisione. Il libro si sviluppa intorno alla storia di John Harrison, orologiaio inglese del Settecento che ebbe un ruolo chiave nella risoluzione di tale questione.
L'autrice richiama fin dalle prime pagine alcune conseguenze degli errori nella determinazione della longitudine nella navigazione oceanica e si sofferma sul naufragio del 1707 presso le isole Scilly, dovuto a un errore di stima, come caso esemplare della rilevanza pratica del problema. Ricostruisce poi il contesto che porta, nel 1714, al *Longitude Act* emanato dal parlamento britannico, con cui viene istituito un premio per una soluzione ritenuta "pratica e utile". La questione della longitudine emerge così fin dall'inizio come problema insieme scientifico, tecnico e istituzionale.
Il volume si sviluppa poi attorno a due linee principali: da un lato i metodi astronomici, basati sull'osservazione del cielo e in particolare sulle distanze lunari; dall'altro la soluzione meccanica perseguita da Harrison, fondata sulla possibilità di trasportare nelle traversate in mare l'ora del porto di partenza tramite un orologio sufficientemente preciso. Il testo mostra anche che la soluzione del problema della longitudine non dipese solo dall'invenzione di Harrison: vengono messe in evidenza, infatti, le difficoltà incontrate da un costruttore esterno ai circuiti accademici nel vedere riconosciuto il proprio lavoro. Le pagine dedicate alla *Commissione per la Longitudine* e a Nevil Maskelyne, astronomo e "antieroe" del libro, mostrano chiaramente come il riconoscimento di uno specifico metodo di determinazione della longitudine non potesse prescindere dal ruolo delle istituzioni e dai criteri con cui esse stabilivano che cosa fosse da considerare affidabile e accettabile.
Nel contesto scolastico, il libro risulta interessante soprattutto perché consente di collocare in una cornice storica concreta il sistema di coordinate geografiche, la relazione fra rotazione terrestre e misura del tempo, la conversione tra differenze orarie e differenze angolari, oltre al tema dell'errore di misura. In questo senso, può offrire una contestualizzazione efficace per attività didattiche sul tema della longitudine, non tanto per l'approfondimento matematico in sé, quanto piuttosto perché restituisce il problema nella sua complessità storica, tecnica e scientifica.

Sul piano della scrittura si privilegiano la chiarezza e la scorrevolezza narrativa. La prosa rimane generalmente ordinata e accessibile, anche se non sempre particolarmente incisiva, restando però ben sostenuta dall'interesse della vicenda storica. Ne risulta un testo piacevole, capace di introdurre in modo efficace una questione centrale per la storia della navigazione e della misura.

Marzia Garzetti
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

Tozzi, L., & Sbaragli, S. (2026). ***StellA, un'extraterrestre in matematica. E se la tua compagna di classe venisse da un altro pianeta?*** **Editoriale Scienza.**

> «La matematica propone modi di pensare e di agire, situazioni e linguaggi che oggi incidono profondamente su tutte le dimensioni della vita quotidiana, sia individuale sia collettiva, consentendo di interpretare e valutare in modo critico le informazioni sempre più numerose e complesse offerte dalla società e di esercitare la propria appartenenza alla cittadinanza attraverso decisioni coscienti e motivate.
> Nella scuola, la matematica è chiamata a fornire le risorse necessarie per affrontare con successo situazioni sia concrete, attinenti alla vita quotidiana, sia più astratte, attraverso la capacità di descrivere scientificamente il mondo tramite la matematizzazione e la modellizzazione dei fenomeni che lo caratterizzano».
> (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022, p. 129)

Con questi due paragrafi si apre il capitolo dedicato all'area matematica del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*, alla cui elaborazione Silvia Sbaragli ha lavorato a lungo e con grande impegno. Non sorprende quindi che abbia ora scelto di dedicarsi a questo esercizio letterario scritto a quattro mani con Luca Tozzi: l'intento è incuriosire, sorprendere e raccontare, con leggerezza ma anche con rigore, la sua amata disciplina, la matematica.
Appassionare alla lettura e far comprendere concetti matematici sono due tra le finalità che oggi impegnano di più i docenti di scuola elementare. Per i bambini la lettura è un'attività talvolta faticosa, vista da alcuni come un obbligo noioso che entra sempre più spesso in competizione con stimoli visivi ben più accattivanti forniti da tablet, cellulari o altri canali. In secondo luogo, la matematica è spesso ritenuta difficile, accessibile solo ai "cervelloni" e queste convinzioni condizionano le idee dei bambini e delle bambine di "non riuscire", di non essere in grado di capire. In tutto ciò i docenti sono i facilitatori, i traghettatori delle loro alunne e alunni verso la comprensione e l'apprendimento.

Come docente di scuola elementare, sono sempre alla ricerca di testi coinvolgenti, vicini all'esperienza delle bambine e dei bambini, che mostrino la matematica come una disciplina presente in molti aspetti della vita quotidiana: qualcosa che si può comprendere, che può anche divertire e le cui difficoltà possono diventare sfide stimolanti da affrontare insieme e superare. Per questo, in classe, mi piace creare situazioni coinvolgenti, giochi, percorsi, problemi, ed esercizi non sempre facili, ma comunque stimolanti.
Le avventure di StellA, la bambina extraterrestre protagonista della storia, ha il merito di unire narrativa e contenuti disciplinari, accompagnando i piccoli lettori nel mondo della matematica secondo una prospettiva originale. L'introduzione di elementi fantastici come il gatto SmufficchiO dotato di superpoteri, l'astronave del papà, i trans-ciondoli (che permettono di comunicare nella lingua dei terrestri) consente di immergersi in un mondo pieno di sorprese ulteriormente arricchito dalle illustrazioni di Francesca Carabelli che, col suo lavoro, rende questo libro accattivante tanto quanto i migliori cartoni animati contemporanei.
La storia è formata da 4 capitoli (ognuno incentrato su un argomento matematico specifico) e ogni capitolo è diviso in due parti: la prima ambientata in classe e la seconda fuori dalla scuola, per sottolineare il fatto che la matematica non è solo una materia scolastica, ma una realtà ben presente nella vita di tutti. I temi trattati vanno dalle frazioni, all'orientamento delle figure sul piano e a quello dei solidi nello spazio, al concetto di altezza fino al rapporto fra area e perimetro. E ogni volta si cerca di fare luce su quelle misconcezioni che, nella scuola di tutti giorni, confondono tanto le allieve e gli allievi quanto gli insegnanti e non di rado finiscono persino nei libri di testo adottati negli istituti.
StellA, che ha sempre uno sguardo lucido sulle cose, spiega i concetti in modo puntuale senza essere saccente, con un linguaggio chiaro e diretto. Ogni contesto diventa così un'occasione per fare chiarezza: in questo modo si può ragionare sulle frazioni tanto a scuola quanto a casa di un amico, davanti a una tavoletta di cioccolato da 35 quadretti da dividere in quattro. Lo stesso dicasi per le figure geometriche che non cambiano in base alla posizione che assumono; dunque, anche una piramide rigirata "a testa in giù" rimarrà pur sempre una piramide e poco male se, per convincere la classe, StellA dovrà ricorrere ai superpoteri del suo gatto fucsia facendo levitare in aria un compagno polemico e saccente. StellA si ritrova anche a confutare il libro di testo e la spiegazione dalla maestra: un trapezio non ha una sola altezza (quella usata per calcolare l'area) ma quattro, una per ogni lato. In questo caso si sottolinea l'importanza del senso critico che "autorizza" le allieve e gli allievi a mettere in discussione le teorie, quando queste sollevano dubbi e interrogativi. Ancora, i rapporti fra aree e perimetri, ultimo concetto di matematica trattato, vengono spiegati partendo da situazioni quotidiane: recintare un orto e posizionare più persone a tavola senza avere tavoli da aggiungere.
Questo originale approccio conferma quanto dichiarato nell'incipit del *Piano di studio* citato: la matematica è una scienza fondamentale, indispensabile per interpretare e comprendere il mondo che ci circonda e ci accompagna ovunque: quando si fa la spesa, quando si cucina, quando si è nel traffico, quando si cerca di far quadrare il bilancio familiare o quando si prepara un dolce.
Ma *StellA, un'extraterrestre in matematica* non è solo un libro sulla matematica. La storia, portata avanti da un gruppo di amici affiatati, coinvolge il lettore fino a un divertente e inaspettato finale che sottolinea il valore profondo dell'amicizia.
In conclusione, sarebbe riduttivo definire questo testo una semplice favola per bambini. La storia rappresenta piuttosto uno strumento prezioso anche per i docenti: è scritta in modo piacevole e scorrevole e contiene vere e proprie lezioni di matematica, chiare e accessibili, oltre a offrire spunti per attività da proporre in classe. Il tutto è arricchito da una preziosa appendice, accessibile tramite QR code, che approfondisce i temi affrontati nel racconto.
Al termine della lettura, le lettrici e i lettori avranno trascorso alcune ore piacevoli e divertenti, ma avranno anche imparato qualcosa. E chissà: possiamo solo augurarci che le avventure di StellA abbia-

no un seguito. Sarebbe bello lasciarsi sorprendere ancora dagli autori, abili nel guidare con leggerezza i loro giovani – e meno giovani – lettori nei territori extraterrestri della matematica.

Anna Zaninelli
Gruppo Matematicando
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

Bibliografia

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://pianodistudio.edu.ti.ch

Ragazze che amano la matematica

Alberto Saracco
Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma – Italia

Introduzione

Il 12 maggio è la "Giornata internazionale delle donne in matematica". La data è stata scelta per onorare la memoria di Maryam Mirzakhani, matematica iraniana prematuramente scomparsa a soli 40 anni, prima donna ad essere insignita della medaglia Fields.
Per onorare il tema e la memoria della grande matematica vorrei recensire due bei romanzi, molto diversi tra loro, che raccontano di due giovani ragazze, molto diverse tra loro, alle prese con la matematica, materia che amano.
Le due storie non possono essere più diverse tra loro: Nombeko, protagonista de *L'analfabeta che sapeva contare*, è una ragazza di colore nel Sud Africa dell'apartheid costretta dalla vita a crescere più velocemente di quanto dovrebbe fare una adolescente e sfrutta le sue innate doti matematiche per sopravvivere in un ambiente ostile; Bethany, protagonista di *Bethany alle Olimpiadi di matematica*, è una ragazza canadese alle prese con i normali problemi dell'adolescenza, difficoltà con i coetanei e con gli adulti, con un sogno che la fa andare avanti, rappresentare il Canada alle Olimpiadi Internazionali della Matematica. Due storie di crescita personale, ambientate in periodi diversi e con stili di racconto molto diversi tra loro, ma ugualmente affascinanti e soprattutto legate tra loro dalla passione per la matematica delle due protagoniste.

Jonasson, J. (2016). *L'analfabeta che sapeva contare*. Bompiani.

Jonas Jonasson, svedese, è un autore di romanzi surreali, pieni di un'ironia nordica molto distante da quella a cui siamo abituati noi italiani. Così non ci deve stupire troppo che *L'analfabeta che sapeva contare* inizi raccontandoci di un evento alquanto improbabile: un'analfabeta sudafricana si ritrova rinchiusa in un furgone per il trasporto delle patate con il re e il primo ministro svedesi. Questo fatto ha una probabilità di accadere pari a 1 su 45 miliardi, 666 milioni, 212 mila e 810, secondo i calcoli della stessa analfabeta. Come si è arrivati ad una situazione simile? Se siete estimatori del surreale, questo romanzo fa al caso vostro: vi potrete immergere nelle oltre 350 pagine di un racconto infarcito di coincidenze incredibili che serviranno a portare Nombeko, l'analfabeta in questione, all'interno del furgone con re e primo ministro, e una bomba atomica. E anche a quel punto i colpi di scena non saranno affatto finiti.
La passione (e la competenza) nella matematica elementare della protagonista vuole raccontarci di

come le abilità matematiche possano presentarsi anche nelle situazioni più inaspettate (la storia di Ramanujan ci dice qualcosa?). Soprattutto, però, le abilità matematiche di Nombeko servono per mettere in luce la genialità della protagonista, che nel corso del romanzo, che attraversa svariati decenni della sua vita, riuscirà a sfruttare per compiere una serie di prodezze incredibili, una dopo l'altra. Per dirne una, senza svelare troppo: riuscire ad imbrogliare ripetutamente due agenti del Mossad.
Le abilità aritmetiche di Nombeko appaiono immediatamente nella storia. A dieci anni, bambina lavoratrice, stupisce il proprio superiore con un calcolo mentale ragionato:

> «"Novantacinque per novantadue," borbottò una volta il responsabile. "Dov'è la calcolatrice?"
> "Ottomilasettecentoquaranta," rispose Nombeko.
> […] "Come fai a saperlo?"
> "Be', penso che novantacinque è uguale a cento meno cinque, novantadue a cento meno otto, se tu inverti e sottrai le due differenze per arrivare a cento, il risultato è sempre ottantasette. E cinque volte otto fa quaranta. Ottantasettequaranta. Ottomilasettecentoquaranta».
>
> (pp. 15–16)

In queste righe, Nombeko spiega alla perfezione il suo metodo di calcolo veloce; o perlomeno spiega come fa il conto, non perché funziona. Riassunto grazie al calcolo algebrico, il metodo di Nombeko è semplicemente questo:

$$(100 - a) \times (100 - b) = 10'000 - 100 \times (a + b) + ab = 100 \times (100 - a - b) + ab.$$

Nel caso *a* e 1 siano sufficientemente piccoli (ovvero il loro prodotto sia inferiore a cento), il metodo illustrato da Nombeko di fare i due calcoli $100 - a - b$ e ab e giustapporre i risultati (a due cifre) funziona!
Come spesso capita nei romanzi, non si va a fondo nella matematica, ma trovo particolarmente interessante che qui la matematica venga vista come un superpotere per cambiare il proprio status sociale: tramite molte peripezie Nombeko passa da bambina lavoratrice sfruttata nei sobborghi di Soweto ad ambasciatrice ed esperta di rapporti internazionali. Ovviamente non ci riesce solo grazie alla matematica, ma alla sua genialità a tutto tondo (e all'amore per il surreale di Jonasson).
Non vi svelo di più. Se volete conoscere tutta la storia non vi resta che immergervi nella lettura, che scorrerà veloce e piacevole.

Hoshino, R. (2025). ***Bethany alla Olimpiadi di matematica*.** **Scienza express.**

Se la matematica per Nombeko è semplicemente un indizio di una mente geniale e capace di pensare fuori dagli schemi, per Bethany è tutta la sua vita.
La storia di *Bethany alle Olimpiadi di matematica* inizia quando la protagonista si siede in un'aula per affrontare la fase nazionale delle Olimpiadi canadesi. Alle qualificazioni Bethany ha strappato il 50° e

ultimo posto disponibile e ora deve puntare a un punteggio perfetto per avere la speranza di coronare il suo sogno: far parte della squadra che rappresenterà il Canada alle Olimpiadi Internazionali della Matematica (IMO).
L'autore del romanzo, Richard Hoshino, ha lui stesso fatto parte della rappresentativa canadese alle IMO nel 1996 in India, ottenendo una medaglia d'argento. Quindi nessun dubbio che sappia di quello di cui parla.
Appena dopo la breve introduzione, veniamo catapultati nel vivo delle competizioni olimpiche: ci viene proposta la lista dei cinque problemi che Bethany dovrà affrontare nelle successive tre ore. I problemi, che spaziano dall'algebra, alla teoria dei numeri, alla geometria e alla logica, sono tutti realmente tratti dalle Olimpiadi nazionali canadesi (negli anni dal 1994 al 1998).
Ogni capitolo del romanzo ha poi la stessa struttura: Bethany legge uno dei problemi, inizia a farsi venire alcune idee e poi si immerge in un lungo flashback che la riporta a quando ha imparato un metodo che si rivelerà essenziale per attaccare e risolvere quel problema. Il capitolo poi finisce con il tentativo di Bethany di risolvere il problema (non ho intenzione di rivelarvi se e quanto Bethany riesca nella sua impresa).
Il cuore di ogni capitolo è la parte dedicata al lungo *flashback*, che ci porta a percorrere in ordine cronologico la storia della passione di Bethany inizialmente per le gare di matematica e infine per la matematica stessa. Si parte con una bambina della scuola elementare che – come il piccolo Gauss – trova un modo rapido per sommare una successione di interi consecutivi e che scopre l'esistenza di gare di matematica. Si passa attraverso gli stage delle Olimpiadi e le amicizie con altre ed altri appassionati, fino ad arrivare all'incontro con una docente universitaria e a dei veri tentativi di ricerca matematica da parte delle protagonista. È il racconto di una passione che si trasforma in un'ossessione, per poi far crescere Bethany, che infine si rende conto che la matematica non è solo gare e che l'esito di una gara non determina quello che sei.
Non posso negare che – prima di immergermi nella lettura – avevo un pregiudizio: di certo sarà un libro molto nerd inaccessibile a chiunque non sia appassionato di gare matematiche. Mi sono dovuto ricredere. La storia della matleta canadese è un romanzo di crescita: grandi obiettivi, grandi frustrazioni, grande impegno. Non è diverso nella struttura dalle storie così diffuse del giovane (o della giovane) aspirante sportivo, che non ha paura di dedicare tante ore della propria vita a un duro allenamento per provare ad arrivare a un obiettivo ambizioso. Non è un caso che il nome della protagonista sia dedicato a una surfista, Bethany Hamilton, la cui storia ha ispirato un film di crescita personale, *Soul surfer*.
Particolarmente interessante in questo senso è la figura della madre di Bethany, che da giovane ha avuto un grande sogno sportivo da cui è rimasta scottata. Tenta di evitare alla figlia gli stessi errori che ha compiuto lei da giovane: per proteggerla, cerca di dissuaderla dalla sua ossessione. Il rapporto madre-figlia è una delle trame che ci accompagnano durante i cinque capitoli che segnano la crescita di Bethany.
Ovviamente la matematica (e la matematica olimpica) è al cuore della storia: i cinque problemi (e molti altri) vengono seriamente affrontati nel corso del romanzo e da un certo punto di vista questa lettura può essere utile per imparare un po' di matematica. Ma perché stupirsi? In *Sognando Beckham* (*Bend it like Beckham*, in originale) non si parla forse di calcio? Jess è ossessionata dal calcio e dal suo sogno di emulare la stella del Manchester United. In *Ogni maledetta domenica* (*Any given Sunday*) non si parla forse in continuazione di football americano? Siamo abituati a film e libri di crescita in cui i protagonisti sono appassionati di uno sport. E sono bellissimi anche se non siete appassionati di quello sport. Sarebbe veramente bello vedere un film tratto da *Bethany alle Olimpiadi di matematica*, un film di crescita e di passione per una disciplina troppo spesso odiata.
Non nego che se amate la matematica, e la matematica olimpica in particolare, il romanzo è ancora più godibile, ma la storia della nostra adolescente può essere davvero d'ispirazione a tanti e a tante: Richard Hoshino mette anche l'accento sulla scarsa presenza femminile all'interno del circuito delle Olimpiadi. E può anche essere un modo per scoprire un po' di matematica diversa da quella che siamo abituati a vedere a scuola.