

DdM

18

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Un parco giochi da scoprire e ricostruire

Pamela Martinetti

La tensione fra prove standardizzate
e valutazione soggettiva:
voci di due docenti a confronto

Francesco Beccuti

Dalla descrizione alla definizione:
un itinerario didattico sui quadrilateri

Jessica De Putti Cattaneo

Fattori fuorvianti nelle rappresentazioni grafiche:
un catalizzatore per riconoscere la complessità
dell'interpretazione dei grafici statistici

*Umberto Dello Iacono
e Maria Alessandra Mariotti*

Coreo-Graph: un laboratorio didattico
di teoria dei grafi e danza

Teresa Calogera e Tiziano Penati

Conoscenze specialistiche degli insegnanti
di matematica: riflessioni sull'insegnamento-
apprendimento della proporzionalità

*Daniele De Giorgi, Francesca Martignone
e Cristina Sabena*

In viaggio con la matematica:
esperienza didattica nel mondo
dei trasporti e della logistica

Lucia Piccaluga Dodero

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI), Svizzera.
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino, Svizzera.

Direzione scientifica:

Prof.ssa Silvia Sbaragli, responsabile Centro competenze didattiche della matematica (DDM)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.

Comitato di redazione:

Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.
Marta Barbero, Michele Canducci, Marzia Garzetti, Monica Panero, Silvia Sbaragli
(Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).

Comitato scientifico:

Gilles Aldon (S2HEP, École Normale Supérieure de Lyon, Francia).
Samuele Antonini (Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini", Università di Firenze, Italia).
Gianfranco Arrigo (Società matematica della Svizzera italiana, Svizzera).
Anna Ethelwyn Baccaglini-Frank (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).
Marta Barbero (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).
Giorgio Bolondi (Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano, Italia).
Gemma Carotenuto (Dipartimento di Scienze Umane, Filosofiche e della Formazione, Università degli Studi di Salerno, Italia).
Cristina Coppola (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno, Italia).
Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia).
Emanuele Delucchi (Dipartimento tecnologie innovative, SUPSI, Svizzera).
Pietro Di Martino (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).
Benedetto Di Paola (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo, Italia).
Pier Luigi Ferrari (Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica, Università del Piemonte Orientale, Italia).
Elena Franchini (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).
Athanasios Gagatsis (Faculty of Social Sciences and Education, University of Cyprus, Cipro).
Juan D. Godino (Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Spagna).
Telgia Juon (Pädagogische Hochschule Zürich, Svizzera; Alta scuola pedagogica dei Grigioni, Svizzera).
Colette Laborde (LIG, Université de Grenoble, Francia).
Salvador Llinares (Departamento Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, Spagna).
Mirko Maracci (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).
Claire Margolinas (ACTé, Université Clermont-Auvergne, Francia).
Maria Alessandra Mariotti (Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Università di Siena, Italia).
Maria Mellone (Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università di Napoli Federico II, Italia).
Francesca Morselli (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova, Italia).
Monica Panero (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).
Alberto Piatti (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).
Cristina Sabena (Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino, Italia).
George Richard Paul Santi (Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Italia).
Annarosa Serpe (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Calabria, Italia).

Grafica:

Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.

Impaginazione:

Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.



© 2025 by the author(s).

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

è distribuito con Licenza Creative Commons

Attribuzione 4.0 Internazionale

Novembre 2025

[Editoriale / Editorial](#)
I / III

Riflessione e ricerca

[La tensione fra prove standardizzate
e valutazione soggettiva:
voci di due docenti a confronto](#)
Francesco Beccuti

9

[Conoscenze specialistiche degli
insegnanti di matematica: riflessioni
sull'insegnamento-apprendimento
della proporzionalità](#)
*Daniele De Giorgi, Francesca Martignone
e Cristina Sabena*

24

[Fattori fuorvianti
nelle rappresentazioni grafiche:
un catalizzatore per riconoscere
la complessità dell'interpretazione
dei grafici statistici](#)
*Umberto Dello Iacono
e Maria Alessandra Mariotti*

39

Esperienze didattiche

[Coreo-Graph: un laboratorio didattico
di teoria dei grafi e danza](#)
Teresa Calogera e Tiziano Penati

59

[Dalla descrizione alla definizione:
un itinerario didattico sui quadrilateri](#)
Jessica De Putti Cattaneo

83

[Un parco giochi da scoprire
e ricostruire](#)
Pamela Martinetti

116

[In viaggio con la matematica:
esperienza didattica nel mondo
dei trasporti e della logistica](#)
Lucia Piccaluga Dodero

139

[Recensioni](#)

166

Editoriale

Il diciottesimo numero della rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* è caratterizzato, come i precedenti, dalla ricchezza e dalla varietà dei contributi, che promuovono una didattica della matematica viva, creativa e aperta alla riflessione critica.

Gli articoli di questo numero valorizzano in particolare il ruolo dell'insegnante¹ come promotore di percorsi didattici significativi ed efficaci, capace di adottare uno sguardo riflessivo e critico sulle proprie pratiche. Nei diversi contributi emergono approcci che integrano la dimensione laboratoriale, il coinvolgimento corporeo, la connessione con il territorio e la cittadinanza, nonché una costante attenzione alla costruzione di significati condivisi tra il mondo della ricerca e quello della scuola. Nelle diverse proposte viene inoltre promossa una didattica attiva e consapevole della matematica, per far sì che questa disciplina venga esplorata non solo come insieme di contenuti, ma soprattutto come insieme di competenze fondamentali per interpretare la complessità del mondo.

Nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli. Il primo contributo analizza le opinioni marcatamente contrapposte di due insegnanti italiani della scuola secondaria di secondo grado² sulle prove standardizzate INVALSI, evidenziando una tensione che riflette la sfida istituzionale ancora aperta tra valutazione oggettiva e personalizzazione dell'insegnamento-apprendimento. Il secondo contributo presenta una ricerca condotta con insegnanti in servizio nella scuola secondaria di primo grado³ in Italia, coinvolti da diversi anni in una comunità di indagine; l'analisi delle riflessioni relative ad attività laboratoriali condivise sulle ombre del sole ha fatto emergere le conoscenze specialistiche degli insegnanti riguardanti la proporzionalità diretta, mostrando come esse siano strettamente intrecciate con le loro convinzioni sull'insegnamento-apprendimento del tema nella scuola secondaria di primo grado. Il terzo contributo, disponibile anche in lingua inglese, propone una riflessione sui grafici statistici che possono essere progettati per influenzare ingannevolmente la percezione dei lettori; lo studio, condotto con studenti del secondo anno del corso di laurea magistrale in matematica in Italia, mostra come attività mirate aiutino i potenziali futuri insegnanti a riconoscere i fattori fuorvianti e a comprendere la complessità del processo di interpretazione.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Il primo contributo rivisita un laboratorio sulla teoria dei grafi, basato sul problema dei ponti di Königsberg di Eulero, introducendo un'attività motoria ispirata alla danza per esplorare i cammini euleriani rivolta ad allievi della scuola secondaria di primo grado; la sperimentazione ha permesso una riflessione sullo sviluppo di competenze legate al *problem solving* e sul ruolo delle attività *embodied* nell'apprendimento della matematica. Il secondo articolo propone un percorso didattico sui quadrilateri sperimentato in una classe di quarta elementare allo scopo di passare dall'atto linguistico del descrivere all'atto del definire in ambito geometrico; il percorso viene analizzato in ogni sua fase, integrando riflessioni linguistiche e disciplinari sulle produzioni degli allievi. Il terzo contributo racconta l'esperienza che ha coinvolto i bambini di una scuola dell'infanzia nella progettazione di un nuovo parco giochi per la scuola; i piccoli allievi, attraverso attività di esplorazione, costruzione di plastici, e progettazione partecipa-

1. Il genere maschile viene usato in questo testo per designare persone, indipendentemente dal genere.

2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Cantone Ticino.

3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

ta, hanno sviluppato competenze geometriche e di cittadinanza, valorizzando la matematica come strumento per interpretare e trasformare il territorio. Il quarto articolo presenta un percorso didattico realizzato in una classe di seconda media, incentrato sull'apprendimento della matematica attraverso contesti realistici legati al mondo dei trasporti; il percorso ha permesso di rendere concreti e accessibili i concetti matematici affrontati, stimolando la motivazione degli allievi e sviluppando le competenze matematiche e una visione positiva della disciplina.

Ci auguriamo che la lettura di questo numero possa ispirare ricercatori, docenti e lettori curiosi a interpretare la matematica come un linguaggio per comprendere, valorizzare e trasformare il mondo. Le esperienze raccolte in questo numero testimoniano infatti come la bellezza, l'utilità e la forza della matematica possano essere presenti in tutti i livelli scolastici, dalla scuola dell'infanzia all'università. L'intento è creare percorsi di senso capaci di incentivare stupore, competenza, autonomia e senso critico nei futuri cittadini di domani, capaci di comprendere la complessità del mondo e di contribuire, con intelligenza e responsabilità, alla sua trasformazione.

Prof.ssa Silvia Sbaragli

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

Editorial

The eighteenth issue of the journal *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* is characterized, like the previous issues, by the richness and variety of its contributions, which promote mathematics education as a lively and creative discipline open to critical reflection.

The articles in this issue emphasize in particular the role of teachers as promoters of meaningful and effective didactical paths, also capable of reviewing their own practices with a critical and reflective eye. The various contributions highlight different approaches taking into account laboratory dimension, bodily involvement, connection with territory and citizenship, as well as a constant focus on building shared meanings between the research and school worlds. The various proposals also promote active and conscious teaching of mathematics, allowing the discipline to be explored not only as a set of contents but, above all, as a set of fundamental skills for interpreting the complexity of the world.

The *Riflessione e ricerca* section contains three articles. The first contribution analyzes the markedly contrasting opinions of two Italian upper secondary school¹ teachers on INVALSI standardized tests, highlighting a tension that reflects the still open institutional challenge between objective assessment and personalized teaching and learning. The second contribution presents a research conducted with Italian teachers working in lower secondary school² who have been involved in a research community for several years; during research community meetings, firstly teachers designed together some activities about sun shadows and then they discussed them sharing the issues that arose during their own school lessons; the reflections analysis revealed the teachers' specialized knowledge about direct proportionality, which emerges to be in close intertwinement with their beliefs about its teaching and learning in lower secondary school. The third contribution, also available in English, offers a reflection on statistical graphs that can be designed to misleadingly influence readers' perceptions; the study, conducted with second-year students of a mathematics master's degree course in Italy, shows how targeted activities help potential future teachers to recognize misleading factors and understand the complexity of the interpretation process.

The *Esperienze didattiche* section contains four articles. The first contribution revisits a laboratory activity on graph theory aimed at lower secondary school students, based on Euler's Königsberg bridges problem, by introducing a dance-inspired motor activity to explore Eulerian paths; the experiment allowed for considerations on the development of problem-solving skills and on the role of embodied activities in learning mathematics. The second article proposes a didactical path on quadrilaterals experimented in a fourth-grade class with the aim of moving from the linguistic act of describing to the act of defining in the field of geometry; the path is analyzed in each of its phases, integrating linguistic and disciplinary considerations on the students' work. The third contribution recounts the experience that involved kindergarten children in the design of a new playground for their school; through exploration, model building and participatory design, the pupils developed geometric and citizenship skills, enhancing mathematics as a tool for interpreting and transforming the territory. The fourth article presents a didactical experience carried out in a seventh-grade class, focused on learning mathematics through realistic contexts related to the transportation field; the path made

1. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.

2. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.

the addressed mathematical concepts concrete and accessible, stimulating student motivation and developing mathematical skills and a positive view of the discipline.

We hope that reading this issue will inspire researchers, teachers and curious readers to interpret mathematics as a language for understanding, valuing and transforming the world. The experiences collected in this issue testify how beauty, utility and power of mathematics can exist at all school levels, from kindergarten to university. The aim is to create meaningful educational paths that encourage wonder, expertise, autonomy and critical thinking for the citizens of tomorrow, enabling them to understand the complexity of the world and contribute to its transformation with intelligence and responsibility.

Prof.ssa Silvia Sbaragli

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Switzerland

Riflessione e ricerca

DdM

La tensione fra prove standardizzate e valutazione soggettiva: voci di due docenti a confronto

The tension between standardized tests and subjective assessment: comparing the voices of two teachers

Francesco Beccuti

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari – Italia

Dipartimento di Matematica, Informatica e Geoscienze, Università di Trieste – Italia

✉ francesco.beccuti@units.it

Sunto / In questo contributo verranno presentate e analizzate le riflessioni di due insegnanti di matematica in servizio in Italia a proposito delle prove standardizzate promosse dall'italiano Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione (INVALSI). Come mostrato, tali prove possono essere comprese come un dispositivo volto ad accrescere la standardizzazione delle pratiche scolastiche a possibile discapito della libertà educativa degli insegnanti e della personalizzazione dell'insegnamento per gli studenti. Allo stesso tempo, e per le stesse ragioni, l'influenza di questo dispositivo può essere interpretata come moderatamente liberatoria rispetto al potere tradizionale virtualmente arbitrario dell'insegnante. Questa tensione riflette la sfida istituzionale ancora aperta fra la condivisa necessità di riferirsi a standard comuni e oggettivi di valutazione e il parimenti riconosciuto valore dell'individualità dell'insegnante e dell'apprendimento personalizzato.

Parole chiave: potere; standardizzazione; insegnanti di matematica; valutazione; INVALSI.

Abstract / This article will present and analyze the reflections of two in-service mathematics teachers in Italy about the standardized tests promoted by the Italian *Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione* (INVALSI). As shown, these tests can be understood as part of a device aimed at increasing the standardization of educational practices, potentially to the detriment of teachers' freedom and of student-centered personalization of learning. At the same time, and for the same reasons, the influence of this device can also be interpreted as moderately liberating if contrasted with the traditional virtually arbitrary power detained by teachers. This tension reflects the open institutional challenge between the need to refer to common and objective standards of assessment and the equally recognized value of the teacher's individuality and of personalized learning.

Keywords: power; standardization; mathematics teachers; assessment; INVALSI.

1 Introduzione

Le possibili criticità legate alla somministrazione, alla pubblicizzazione e all'uso didattico delle prove censuarie annuali promosse in Italia dall'Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione (INVALSI) risuonano nelle preoccupazioni articolate dai principali attori¹ toccati dall'introduzione di tale dispositivo nel sistema scolastico italiano.

L'approfondita ricerca di Signorini (2017)² ci fornisce, ad esempio, una panoramica delle opinioni degli insegnanti (interpretate in chiave affettiva) in merito a tale dispositivo educativo che riflettono l'esperienza pluriennale di discussione informale dell'autore con gli insegnanti di matematica sull'argomento (par. 3). Sebbene gli insegnanti non si pongano di solito in atteggiamento completamente e risolutamente contrario alle prove standardizzate (favorendo anzi in molti casi una cauta apertura all'adozione e all'utilizzo in sede didattica delle prove), essi tipicamente ne criticano molti aspetti in modo approfondito.

Una delle principali critiche esposte comunemente dagli insegnanti e riportate da Signorini (2017) riguarda per esempio la pressione che le prove standardizzate possono esercitare su studenti e docenti. Gli studenti, in particolare, a detta degli insegnanti, possono sentirsi ansiosi o stressati nel dover affrontare queste valutazioni quando i risultati potrebbero influenzare le loro opportunità future e in relazione ai tempi ristretti dell'esecuzione delle prove. Gli insegnanti a loro volta rivelano di subire in parte la pressione di "insegnare per il test", favorendo un approccio didattico orientato al conseguimento di punteggi elevati nelle prove a scapito della libertà d'insegnamento. Essi articolano la preoccupazione, poi, che le prove standardizzate non riescano a catturare totalmente o parzialmente l'ampiezza e la profondità delle competenze e delle conoscenze che gli studenti sviluppano a scuola. Inoltre, essi criticano le prove standardizzate in riferimento a questioni di equità, con riferimento in particolare alla loro capacità di valutare in modo corretto studenti provenienti da contesti diversi, con preoccupazioni che le prove possano sfavorire studenti provenienti da situazioni socioeconomiche o culturali svantaggiate e/o con disabilità o bisogni educativi speciali.

La modalità con cui i risultati delle prove vengono utilizzati e raccontati solleva inoltre altre significative questioni sistemiche spesso evidenziate dagli insegnanti. Mentre i dati INVALSI sembrano poter offrire spunti preziosi per il miglioramento delle politiche e delle pratiche educative, gli insegnanti rilevano invece il rischio che tali dati vengano usati per classificare o penalizzare loro, i colleghi o le scuole basandosi principalmente o esclusivamente sui risultati dei test. Inoltre, essi considerano come l'implementazione delle prove richieda risorse rilevanti, sia in termini di tempo sia di denaro, ponendosi interrogativi su come queste risorse possano essere altrimenti impiegate per supportare direttamente l'apprendimento degli studenti, la formazione degli insegnanti, o per affrontare le disparità nel sistema educativo.

Queste critiche³ si riflettono in molti dibattiti internazionali sui pro e contro delle valutazioni standar-

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

2. In questo paragrafo si fornisce una sintesi rielaborata dall'autore di alcuni degli aspetti principali riportati da Signorini (2017, pp. 196–306).

3. Si fa presente che discutere in che misura le critiche degli insegnanti riportate *supra* e *infra* siano più o meno fondate e/o basate su pregiudizi non è l'obiettivo del presente articolo. Tale discussione richiederebbe infatti trattazioni ampie e dedicate e coinvolgerebbe complesse considerazioni sistemiche relative alle istituzioni educative e ai loro obiettivi. Ad esempio, l'insistenza degli insegnanti sul fatto che gli studenti si sentano ansiosi o stressati nell'esecuzione delle prove standardizzate potrebbe mettere in ombra quanto alcune categorie di studenti siano comunque ansiosi e stressati nelle loro interazioni normali e quotidiane con l'insegnante. Nel caso limite di un sistema scolastico in cui si sostituiscano *tout court* tali prove alla valutazione soggettiva del docente si potrebbe argomentare che "circoscrivere lo stress", per così dire, ad una sola prova possa forse essere vantaggioso per tali categorie di studenti. Per altre categorie di studenti (o per gli stessi studenti in fasi diverse della propria formazione), viceversa, questo stato di cose potrebbe rivelarsi disastroso. Al contrario, nel caso in cui le prove si affianchino alle usuali valutazioni, si correrebbe il rischio invece di aggiungere un ulteriore stress ad un altro già presente. Ulteriori argomenti potrebbero portarsi in merito a tale problematica tenendo conto di volta in volta di differenti stati di cose, situazioni o prospettive. Analoghi livelli di complessità dovrebbero essere discussi relativamente agli altri esempi di critiche riportate alle prove standardizzate. Il lettore interessato ad argomenti e riflessioni sulla fondatezza e ragionevolezza di queste ed altre critiche tipicamente rivolte alle prove INVALSI potrà comunque consultare lo stesso studio di Signorini (2017) e molti degli articoli riportati in questa introduzione.

dizzate e della loro influenza nel contesto educativo (si vedano, ad esempio, Beccuti, 2024; Beccuti & Robutti, 2022; Giberti & Maffia, 2020). La ricerca in lingua italiana in didattica della matematica, pur rilevando la presenza di molte di queste possibili criticità, che ha problematizzato (Di Martino, 2017; Sbaragli & Franchini, 2014; Tomasi, 2018), sembra in gran parte aver riportato argomenti di ricercatori implicitamente o esplicitamente positive verso l'implementazione delle prove INVALSI dal punto di vista didattico e della ricerca (esemplificati dai molti interventi pubblicati nelle raccolte intitolate INVALSI per la ricerca a seguito di seminari promossi dall'istituto stesso). Inoltre, pur registrando l'esistenza di dibattiti in merito a tale trasformazione della scuola italiana ancora in divenire (si vedano, ad esempio, Bolondi, 2016; Brunelli, 2013; Di Martino, 2017; Di Martino & Baccaglini-Frank, 2017; Paola, 2017), la ricerca italiana appare avere solo parzialmente rilevato e studiato approfonditamente i discorsi e le opinioni degli insegnanti di matematica in merito, che sembra principalmente aver concettualizzato in termini di convinzioni, emozioni o altre reazioni affettive (Basilico & Maffia, 2021; Di Martino & Signorini, 2019; Signorini, 2015, 2017), mentre sembra aver tralasciato l'interpretazione delle posizioni degli insegnanti da un punto di vista propriamente sociologico o socio-politico. Adottare un tale punto di vista appare rilevante, data non solo la natura sociale dei fenomeni di apprendimento e insegnamento della matematica in generale (Kollosche, 2016; Lerman, 2000; Valero, 2004), ma anche considerando in particolare il profondo potenziale di impatto sistemico delle prove INVALSI sulla didattica della matematica istituzionale in Italia (Bolondi, 2010; Faggiano et al., 2022; Ferretti, 2015).

In questo contributo si riportano ed esaminano dunque le voci di due insegnanti di matematica riguardo le prove INVALSI, che verranno interpretate attraverso la lente della sociologia delle istituzioni sociali sviluppata dal filosofo Michel Foucault. Tale lente, come verrà mostrato, può offrire spunti profondi e provocatori riguardo al potere, alla sorveglianza e alla formazione dell'identità individuale e collettiva all'interno delle istituzioni educative. Questo intervento si iscrive in continuità con la «convinzione che sia di fondamentale importanza conoscere le opinioni provenienti dal modo della scuola e le motivazioni ad esse sottese, al fine di far emergere le criticità percepite e sviluppare una discussione costruttiva sul tema» (Basilico & Maffia, 2021, p. 179).

2 Inquadramento teorico

Foucault, uno dei pensatori più influenti del ventesimo secolo, ha esplorato in modo estensivo le forme di potere dirette o indirette che si realizzano all'interno delle istituzioni sociali attraverso le strategie complesse di gestione sistematica delle vite individuali e collettive che in esse si realizzano. Il potere, in particolare, secondo Foucault, non si esercita solo attraverso la repressione, ma altresì attraverso la regolamentazione positiva delle attività umane anche e soprattutto in relazione ad istituzioni e pratiche apparentemente neutre o benefiche come la medicina e l'educazione. Di peculiare rilevanza, per Foucault, è comprendere come i complessi meccanismi sottesi alle pratiche istituzionali non solo sono regolati da leggi e norme esplicite, ma anche incorporano tecniche implicite di sorveglianza e modalità di esame che mirano a modificare i comportamenti, non solo reprimendo, ma anche regolando e formando le condotte e le identità degli individui e dei gruppi che partecipano a tali istituzioni (Foucault, 1995).

A proposito delle istituzioni educative, Foucault ha evidenziato come esse funzionino fondamentalmente come centri di sorveglianza e disciplina le cui pratiche definiscono e controllano il comportamento degli studenti e degli insegnanti. Le scuole, per esempio, adottano routine, orari e valutazioni che standardizzano l'apprendimento e il comportamento e promuovono tecniche disciplinari per integrare gli individui entro certi schemi di comportamento e rendimento, riducendo la devianza e promuovendo la conformità (Foucault, 1982). Questa conformità è veicolata attraverso la promozione

diretta e indiretta di particolari *tecnologie del sé*, ossia di modi in cui gli individui agiscono su sé stessi per trasformare il proprio comportamento, i propri pensieri e le proprie emozioni in relazione a certi standard di condotta desiderabili e in funzione del raggiungimento dell'autodisciplina e dell'autogestione necessarie al funzionamento delle istituzioni stesse (Foucault, 1997). Il soggetto privilegiato di questo disciplinamento è ovviamente lo studente, spesso posizionato implicitamente o esplicitamente come oggetto passivo di conoscenza e controllo istituzionale. Le istituzioni educative, infatti, tendenzialmente agiscono nel senso della perpetuazione dei comportamenti e degli atteggiamenti intesi come normali o desiderabili tramite la marginalizzazione o la problematizzazione (e a volte persino la medicalizzazione) degli studenti che non possono (o non vogliono) conformarsi.

Le dinamiche di potere che caratterizzano le istituzioni educative non concernono tuttavia soltanto gli studenti ma anche gli insegnanti, parimenti soggetti a meccanismi di controllo e disciplinamento e di marginalizzazione del diverso. Nelle scuole, per esempio, gli insegnanti sono spesso obbligati a seguire curricula, regolamenti e usanze tramandate che contribuiscono a determinare non solo cosa deve essere insegnato, ma parzialmente anche come deve essere insegnato. Questi standard sono implicitamente o esplicitamente imposti o raccomandati da autorità esterne, come ministeri dell'istruzione, agenzie di valutazione e dipartimenti che, ad esempio, possono avere poca familiarità con le dinamiche quotidiane delle classi e delle esigenze specifiche dei loro componenti. Il controllo e l'osservazione dell'operato degli insegnanti basato sulla valutazione degli studenti in prove standardizzate, su osservazioni in classe da parte di superiori o ispettori, e su altre forme di implicita o esplicita sorveglianza, portano gli insegnanti a modificare i propri comportamenti, atteggiamenti e metodologie per allinearsi alle aspettative dell'istituzione, a potenziale discapito della propria autonomia professionale e libertà educativa. Inoltre, il focus su competenze specifiche, misurabili e valutabili (articolate ad esempio in funzione dell'accesso al lavoro e alle professioni) può portare a una marginalizzazione di quelle forme di sapere e di esperienza che non si adattano facilmente alle metriche di valutazione. Ciò può condurre a una concezione dell'educazione riduttiva, in cui la complessità della crescita intellettuale e personale è sostituita dalla promozione di un insieme di abilità mirate all'esecuzione di una prestazione quantificabile (pensate ad esempio in funzione della promozione di ideali di efficienza economica relativi all'istituzione o alla società in generale; si veda, ad esempio, Kaner et al., 2014).

È importante tuttavia sottolineare che, nella prospettiva di Foucault, il potere non è concettualizzato esclusivamente in termini "negativi". Il potere, secondo Foucault, non è infatti soltanto ciò che limita o proibisce, ma anche ciò che crea realtà e produce domini e rituali di verità (Ball, 2017). I dispositivi di potere effettivamente condizionano pensieri e comportamenti di gruppi e individui, ma, per la stessa ragione, possono anche servire loro a contrastare diverse forme di potere e di controllo e ad affrancarsi dalle tradizioni, dalle abitudini e dai meccanismi di legittimazione che influenzano le loro vite dentro e fuori dalle istituzioni. In questo senso, i dispositivi educativi possono essere contemporaneamente anche strumenti con il potenziale di emancipare gli studenti e gli insegnanti da altri meccanismi di controllo legati a forme locali o tramandate di autorità. La riflessione di Foucault sul potere e sulle dinamiche disciplinari all'interno delle istituzioni educative sottolinea la doppia faccia della regolamentazione tramite dispositivi educativi: da un lato, essa può essere vista come un tipo di controllo che limita l'indipendenza e promuove conformità, mentre dall'altro, può fungere da strumento per contrastare forme di potere più pervasive e invisibili (Bernstein, 1996).

Per offrire al lettore una esemplificazione della tensione fra questi concomitanti aspetti dei dispositivi educativi, di seguito verranno presentate e analizzate dunque le riflessioni di due insegnanti di matematica selezionati in base alla loro disponibilità e alla diversità polare di opinioni da essi riportate in merito alle prove INVALSI.

3 Contesto e metodo

Lucia e Marco (pseudonimi) sono insegnanti di matematica nella scuola secondaria di secondo grado⁴ in Italia. Lucia è insegnante da circa dieci anni. Attualmente insegna in un liceo scientifico. Ha una laurea in matematica e frequenta da anni corsi di formazione a più livelli. Marco è insegnante di ruolo da poco più di un anno in un istituto tecnico industriale. Ha una laurea in fisica e non ha quasi mai frequentato corsi di formazione insegnanti.

L'incontro con Lucia e Marco è avvenuto durante un corso di formazione promosso da una università dell'Italia settentrionale. In un momento conviviale nel contesto di tale corso si è discusso informalmente delle prove INVALSI insieme ad altri partecipanti presenti toccando alcuni dei temi citati in introduzione (ad esempio, la pressione che le prove standardizzate possono esercitare sugli studenti e sugli insegnanti, i limiti delle prove rispetto alla valutazione della competenza matematica nel suo senso più ampio, questioni relative alla promozione scolastica dell'inclusione, nonché questioni legate alla destinazione delle risorse nel sistema scuola). Durante la discussione Lucia e Marco si sono segnalati per avere opinioni marcatamente contrapposte e un dibattito concitato ma civile si è verificato fra i due mentre gli altri assistevano. Qualche giorno dopo Lucia e Marco sono stati ricontattati separatamente dall'autore del presente contributo chiedendo loro di scrivere un breve testo intitolato *Le prove INVALSI e la didattica della matematica*, chiarendo loro l'obiettivo della ricerca e spiegando di esporre la propria posizione con la più ampia libertà possibile.

I loro testi sono dunque stati analizzati seguendo la metodologia di analisi discorsiva ispirata ai sopracitati lavori di Foucault. Questo approccio si differenzia da altri approcci o tecniche di analisi discorsiva più tipicamente connesse alle scienze psicologiche o cognitive perché non mira ad applicare o scoprire modelli o meccanismi relativi a fenomeni mentali sottesi ai discorsi dei partecipanti o allo studio dei loro atteggiamenti o disposizioni (Arribas-Ayllon & Walkerdine, 2017; Kendall & Wickham, 2003). Per questa ragione, i testi vengono allora analizzati il più possibile nella loro *esteriorità* (Beccuti et al., 2024) senza cercare una spiegazione causale o una connessione fra i discorsi da essi espressi con altre informazioni extratestuali sui partecipanti relative a differenze individuali nel loro vissuto.⁵ Questa prospettiva metodologica è coerente con l'idea espressa da Foucault secondo cui i discorsi non sono semplicemente veicoli di espressione della realtà, ma mezzi attraverso i quali la realtà e gli stessi soggetti vengono costituiti, il potere è esercitato e la realtà sociale è costruita e manipolata (Dowling, 2002; Walkerdine, 1988). Questo tipo di analisi si focalizza quindi non tanto sul delineare dettagli e strutture linguistiche di un testo o un gruppo di testi, quanto sulle loro possibili implicazioni sociali e politiche, interpretando l'insieme dei discorsi ivi articolati come siti di conflitto e negoziazione in cui diverse "verità" vengono prodotte, sostenute e trasformate e "competono" fra di loro per legittimità (Walshaw, 2007).

Seguendo in particolare Kendall e Wickham (2003) la presente analisi si concentra allora sulle ricorrenze e risonanze di espressioni relative alle modalità attraverso cui il potere e la conoscenza interagiscono e si manifestano nei discorsi dei partecipanti a proposito di un oggetto, dispositivo o fenomeno di rilevanza sociale o politica (in questo caso le prove INVALSI in riferimento alla didattica della matematica), cercando di offrire non solo un resoconto delle posizioni dei partecipanti in merito, ma anche una riflessione più ampia sulle dinamiche sociali che si realizzano o potrebbero realizzarsi per tramite di tale oggetto o dispositivo. Nell'analisi dei discorsi dei partecipanti, una particolare importanza ha l'individuazione di particolari *tecnologie del sé*, per comprendere come essi articolino l'internalizza-

4. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Cantone Ticino.

5. Per ragioni di completezza, si discute comunque in forma congetturale nel par. 6 la possibile connessione fra le informazioni riportate sui partecipanti all'inizio della presente sezione e i discorsi da loro articolati riportati nella sezione seguente.

zione delle (o la resistenza alle) norme esplicite e implicite connesse alla somministrazione e all'utilizzo delle prove INVALSI e possano quindi potenzialmente regolare di conseguenza il loro comportamento e le loro aspettative.

Questo approccio permette di dischiudere parte delle complesse dinamiche di potere sottese dai discorsi da loro articolati, immergendosi nelle loro modalità espressive per comprendere non solo il contenuto di ciò che dicono, ma anche il contesto più ampio e le implicazioni sistemiche dei loro discorsi, attendendo ai modi in cui le prove INVALSI sono da essi incorniciate, discusse e/o criticate (Kollosche, 2016). Questo coinvolge l'articolazione dei modi con cui i discorsi esposti da ciascuno dei partecipanti sono presentati come legittimi o contestati sia in riferimento alla logica interna a ciascun elaborato, sia confrontandone le argomentazioni fra di loro (Beccuti, 2024), riflettendo sulle pratiche discorsive di allineamento e/o resistenza con le politiche istituzionali o governative ad esse connesse. Tale analisi implica un'indagine critica su come i discorsi dei partecipanti possano contribuire a perpetuare e/o a scardinare le pratiche esistenti nel sistema educativo, esaminando come le loro narrazioni influenzino o potrebbero influenzare le politiche educative, le pratiche didattiche e l'esperienza degli studenti (Walshaw, 2007).

Nel prossimo paragrafo (par. 4) verranno riportati integralmente i testi prodotti dai partecipanti; in seguito (par. 5) ci si concentrerà sulla loro analisi. Lo scopo di questa analisi qualitativa non è chiaramente quella di fornire un campione esaustivo e generalizzabile *stricto sensu* delle possibili opinioni degli insegnanti di matematica in merito alle prove INVALSI, ma volutamente di presentare e confrontare, come detto, posizioni polarmente contrapposte nello spettro delle possibili posizioni che gli insegnanti di matematica possono assumere rispetto a tale dispositivo educativo.

4 Elaborati dei partecipanti

Di seguito si riporta integralmente l'elaborato di Lucia.

«Le prove INVALSI sono spesso presentate come strumenti per valutare le competenze degli studenti e per migliorare la didattica. Tuttavia, questo approccio presenta molte problematiche, specialmente riguardo l'insegnamento della matematica, una materia che dovrebbe essere sinonimo di logica, creatività e indagine. La mia esperienza come insegnante mi porta a esprimere forti perplessità riguardo l'efficacia e l'impatto delle prove INVALSI sulla didattica. Il principale problema di queste prove è che sono imposte dall'esterno in conformità con una visione della matematica per competenze utili a supposte esigenze del mercato del lavoro formulata senza tenere conto dell'autentico valore formativo dell'educazione. Inoltre, esse tendono a promuovere un apprendimento che direi superficiale e meccanico, orientato principalmente al superamento del test stesso, piuttosto che alla comprensione profonda dei concetti matematici e che limita gravemente il potenziale educativo della matematica. Infatti, la matematica è una disciplina fondamentalmente creativa, che dovrebbe essere insegnata attraverso l'esplorazione e la scoperta tenendo conto delle possibilità di ciascuno. I grandi matematici non sono solo coloro che risolvono equazioni velocemente o memorizzano formule, ma sono quelli che pensano in modo innovativo e risolvono problemi complessi in modo autonomo. Purtroppo, la standardizzazione imposta dai test INVALSI riduce questa ricchezza, focalizzandosi su un insieme ristretto di abilità che possono essere facilmente misurate e valutate. Inoltre, la pressione sui risultati dei test può creare un ambiente stressante e competitivo, che è poco favorevole all'esplorazione intellettuale e alla crescita personale. C'è anche da considerare l'impatto dei test su come la matematica è percepita dagli allievi. Quando l'apprendimento è ridotto a un'esercitazione per il test, gli studenti

possono sviluppare un'idea della matematica come un che di noioso e privo di significato, piuttosto che come uno strumento per comprendere la realtà all'interno di un'esperienza scolastica creativa e appassionante. Inoltre, i test standardizzati possono rinforzare disuguaglianze esistenti. Studenti provenienti da contesti sociali più favorevoli spesso hanno accesso a migliori risorse, mentre coloro che provengono da ambienti meno privilegiati possono ritrovarsi svantaggiati, nonostante il loro potenziale a causa delle loro difficoltà o bisogni specifici, di cui difficilmente un test standardizzato potrà tenere conto nel momento della valutazione».

Segue lo scritto di Marco, anch'esso riportato integralmente.

«In un mondo sempre più guidato dai dati e dalla ricerca di risultati quantificabili, l'insegnamento della matematica non può sottrarsi alla necessità di un rinnovamento che integri efficacemente valutazioni standardizzate come le prove INVALSI. Questi test non sono solo un modo di valutare, ma rappresentano strumenti per migliorare l'insegnamento della matematica nelle nostre scuole. Io personalmente li vedo come un mezzo essenziale per garantire che gli standard educativi siano mantenuti e per stimolare l'innovazione del sistema scolastico. Un argomento spesso trascurato dai critici dell'INVALSI è la variabilità nella qualità dell'insegnamento. Non tutti gli insegnanti sono uguali, e la realtà è che essi non sempre sono adeguatamente preparati per fornire una istruzione di qualità. Molti insegnanti sono dedicati e competenti, ma purtroppo questo non vale per tutti. Le prove INVALSI possono allora essere un "correttivo" a situazioni spesso non ideali, imponendo un criterio oggettivo che tutti (studenti e insegnanti) devono rispettare. Inoltre la standardizzazione dei test garantisce equità nella valutazione degli studenti, offrendo a tutti la stessa opportunità di dimostrare le proprie competenze al di là di favoritismi o simpatie che naturalmente emergono nella vita di classe fra insegnanti e allievi e per cui anche il migliore insegnante (a volte) fa fatica a rendersi conto. Questo è particolarmente importante in un sistema educativo che aspira a ridurre le disparità e a promuovere l'uguaglianza. Dal punto di vista di una scuola che voglia valorizzare le competenze le prove INVALSI sono un potente strumento perché consentono di identificare non solo gli studenti che necessitano di supporto aggiuntivo, ma anche di rivelare dove gli insegnanti e le scuole potrebbero non essere all'altezza. Questa è una prospettiva vitale in un sistema che spesso è autoreferenziale, incapace di rinnovarsi da sé. L'utilizzo ragionato dei risultati INVALSI permette infatti di sviluppare strategie didattiche mirate, capaci di affrontare specifiche difficoltà di apprendimento. Ad esempio, se un particolare quesito sui test rivela difficoltà ricorrenti nel calcolo delle probabilità, possiamo intervenire con programmi di recupero *ad hoc*. Inoltre, mentre alcuni sostengono che gli INVALSI promuovano un'educazione orientata solo al superamento dei test, credo che la sfida non sia nel test stesso, ma nel modo in cui gli insegnanti scelgono di rispondere a esso. Invece di insegnare per superare il test, gli educatori possono utilizzare i risultati del test per comprendere meglio le aree di debolezza e forza dei loro studenti e per costruire un curriculum che sia veramente rispondente alle loro esigenze. Ne segue che le prove INVALSI, se interpretati [*sic*] in modo corretto, possono stimolare buone pratiche didattiche in una società e un mondo del lavoro sempre più basato sulle competenze. Molti insegnanti criticano le prove INVALSI che percepiscono come una ingerenza nei propri metodi e un attacco alle proprie convinzioni, ma questo spesso è solo un modo di proteggere pratiche desuete e di resistere al cambiamento. Io penso che, come insegnanti responsabili, dobbiamo abbracciare questi strumenti in modo costruttivo, riconoscendo il loro potenziale di migliorare significativamente la didattica matematica in Italia».

5 Analisi degli elaborati

Per facilitare e orientare la lettura si è scelto di inquadrare l'analisi sviluppata di seguito attraverso quattro temi: *la standardizzazione degli apprendimenti*; *il modello educativo promosso*; *il potere dell'insegnante*; *l'obiettivo dell'istruzione matematica*. Il primo tema concerne le idee articolate negli scritti di Lucia e Marco sui rischi e i benefici connessi alla standardizzazione; il secondo tema concerne l'idea di formazione dell'individuo che i due docenti percepiscono come soggiacente o legato alle prove; il terzo tema concerne la visione del potere dell'insegnante sostenuta dai due docenti in riferimento alle prove; infine, il quarto tema concerne la visione dei due docenti riguardo gli obiettivi e le priorità dell'istruzione matematica e la sua (equa) valutazione.

La standardizzazione degli apprendimenti. Lucia argomenta come le prove INVALSI funzionino come uno strumento di potere disciplinare che non solo misura le competenze degli studenti in matematica, ma anche indirizza e norma il comportamento sia degli studenti sia degli insegnanti. Lucia rifiuta radicalmente le prove INVALSI, esprimendo una forma di resistenza a questo potere disciplinare che, a suo parere, mira a formare individui conformi ad aspettative stabilite esternamente e valide per tutti. Lucia critica inoltre le prove standardizzate in generale, che vede come espressione di una tendenza istituzionale a ridurre l'istruzione a un insieme di metriche quantificabili, interpretate come contrapposte a un'idea di educazione che valorizzi la creatività, il pensiero critico e l'individualità. La sua resistenza mette quindi in discussione la validità e l'efficacia delle prove standardizzate che non catturerebbero la natura creativa e profonda della matematica e l'apprendimento matematico come scoperta ed esplorazione.

Marco vede invece le prove INVALSI come un mezzo per mantenere standard elevati e garantire la qualità dell'istruzione attraverso una valutazione oggettiva. In questo senso, egli sostiene l'idea che la standardizzazione sia necessaria per assicurare che tutti nell'istituzione educativa aderiscano a specifiche norme di rendimento che possono non solo promuovere lo sviluppo di competenze, ma anche limitare l'azione potenzialmente detrimente degli insegnanti che potrebbero non «essere all'altezza». Marco, sostenendo l'importanza di utilizzare le prove INVALSI, approverebbe dunque una certa normalizzazione delle pratiche educative, dove il successo e il fallimento degli studenti sono definiti in termini di capacità di raggiungere i risultati desiderati nelle prove, in funzione del tentativo di misurare e valutare l'apprendimento in modi certi e quantificabili, un aspetto dell'identità professionale che egli percepisce come corretta e responsabile.

Il modello educativo promosso. Il modello educativo che, secondo Lucia, le prove INVALSI tenderebbero a promuovere è legato a una forma di scuola in cui la regolamentazione e la standardizzazione sono tese a massimizzare l'efficienza degli insegnanti e degli studenti: una visione secondo lei riduttiva dell'educazione e servente primariamente interessi statali e/o economici, invece che la formazione culturale più ampia degli studenti. Lucia inoltre nota come, promuovendo certi tipi di conoscenza matematica e metodi di valutazione a scapito di altri, le prove INVALSI contribuiscano a definire ciò che è considerato valido nel campo dell'istruzione e contesta questa imposizione, sostenendo una visione dell'apprendimento che riconosca e valorizzi diverse forme di conoscenza e intelligenza. Come detto, la posizione di Lucia nei confronti delle prove INVALSI può essere in generale interpretata come una critica al potere disciplinare che queste prove esercitano nel campo dell'educazione, che ella vede come un obbligo di confinamento entro limiti rigidi e paradigmaticamente opposti a un'idea di matematica caratterizzata da indagine e creatività e più aperta all'esplorazione delle potenzialità individuali. La resistenza di Lucia può essere allora vista come una tensione verso lo sviluppo di modalità educative più autentiche e meno normate e incardinate nell'auspicio di un futuro

educativo in cui la valutazione non sia semplicemente mero esercizio di potere disciplinare, ma un processo che supporti lo sviluppo intellettuale e personale. Criticando l'effetto omologante di dispositivi come le prove INVALSI, Lucia incoraggia sé stessa e potenzialmente altri educatori a esplorare e adottare metodi didattici che valorizzano l'autonomia e la creatività, e che promuovano una visione meno conformista o uniformata dell'educazione oltretutto meno legata ad esigenze di sviluppo di competenze economicamente legittimate.

Nella prospettiva di Marco, invece, appare più centrale una visione dell'educazione pensata principalmente con l'obiettivo di ottimizzare l'istruzione per l'impiego futuro, invece che fine a sé stessa. Da questo punto di vista, la posizione di Marco potrebbe essere interpretata come una forma di assenso a un regime di potere che tendenzialmente privilegia le competenze che possono essere facilmente trasformate in produttività economica, contrapposta a una più ampia concezione dell'educazione che include la critica, l'innovazione e la crescita personale. Questa enfasi sulle competenze utili riflette un'inclinazione a conformare l'educazione alle logiche e alle esigenze del mercato del lavoro, con una potenziale tendenza alla trasformazione dell'apprendimento a una serie di obiettivi quantificabili da raggiungere. Viceversa, Lucia, come detto, critica questa impostazione in favore di una visione della missione educativa meno allineata a obiettivi utilitaristici e più in linea con una visione tradizionale di educazione interpretata come uno sviluppo a tutto tondo della persona. La sua resistenza può essere vista come un atto di sfida a un'idea di educazione atta a produrre un tipo di cittadino il cui valore è definito in termini di produttività economica e conformità a un insieme eterodeterminato di competenze misurabili.

Il potere dell'insegnante. Allo stesso tempo, tuttavia, si potrebbe leggere la resistenza di Lucia alle prove standardizzate come l'implicita difesa di un potere discrezionale tradizionalmente esercitato dagli insegnanti, un potere che permette in buona misura di determinare il curriculum, i metodi di insegnamento e i criteri di valutazione basati sul loro giudizio professionale. Come adombrato da Marco, la critica all'apparente obiettività e uniformità delle prove INVALSI potrebbe essere un tentativo di preservare non solo l'autonomia educativa dell'insegnante ma anche una forma di potere più nascosto e personale che permette agli insegnanti di esercitare un'influenza diretta sugli studenti, il più possibile liberi dai vincoli imposti da politiche ministeriali o da misure standardizzate. Da questa prospettiva, l'appello di Lucia per un approccio all'insegnamento che valorizzi la creatività e l'individualità può essere interpretato come un desiderio di mantenere il tipo di potere pedagogico che permette agli insegnanti di essere i principali arbitri dell'educazione (e forse anche, più banalmente, «un modo di proteggere pratiche desuete», come argomentato da Marco). La sua enfasi su un approccio olistico e meno quantitativo all'apprendimento potrebbe allora essere vista come un rifiuto di una trasparenza e di una *accountability* più estesa. La prospettiva di Lucia può sembrare un rifiuto *tout court* del controllo e della normazione, ma questo rifiuto può essere letto come un'espressione di una preferenza per un diverso tipo di controllo che resti totalmente nelle mani dell'insegnante, invece di essere dipendente o condizionato da sistemi esterni di valutazione. Questo tipo di potere, ancorato nel riconoscimento del valore della professionalità e del giudizio discrezionale dell'insegnante, può essere considerato meno visibile ma non meno influente nel plasmare direttamente e indirettamente l'esperienza educativa degli studenti.

L'obiettivo dell'istruzione matematica. Ambedue le prospettive sottendono la convinzione che l'insegnamento della matematica e il suo miglioramento sia in definitiva un compito precipuo dell'istruzione matematica scolastica e di loro stessi come insegnanti. La prospettiva di Marco, come sottolineato, appare parzialmente mediata dall'enfasi sull'utilità che lo sviluppo di competenze matematiche potrebbe avere per gli studenti anche nel loro futuro accesso al mondo del lavoro e che potrebbero essere utilmente misurate e promosse anche attraverso le prove standardizzate. La prospettiva di Lucia, come detto, è invece più legata all'idea che la promozione della conoscenza matematica sia un

bene culturalmente legittimato in sé come fine, la cui complessità e profondità sarebbe irriducibile a competenze misurabili dalle prove standardizzate. Infine, è interessante notare come ambedue le prospettive legittimino le proprie argomentazioni con l'idea di contribuire a un sistema più equo. Da un lato Lucia sottolinea come solo una valutazione di tipo soggettivo potrebbe, in situazioni di particolari criticità o contesti svantaggiati, tenere conto e valorizzare le storie personali, i vissuti e le potenzialità o le debolezze degli allievi che rimarrebbero invisibili in una valutazione standardizzata. Marco enfatizza invece come l'uniformità delle prove standardizzate possa servire a spezzare implicite ed esplicite forme di favoritismo o penalizzazione inerentemente legate alle valutazioni di tipo soggettivo dipendenti dall'autorità dell'insegnante.

6 Discussione

Lucia e Marco, pur condividendo la stessa professione di insegnanti di matematica, articolano visioni profondamente differenti sulle prove standardizzate. Queste differenze, si può ipotizzare, possono essere in una certa misura rispondenti ai loro specifici percorsi formativi, alle loro scelte di vita e ai loro attuali contesti di lavoro. Da un lato si potrebbe argomentare che l'ambiente di lavoro di Lucia (liceo scientifico) e la sua laurea in matematica richiedano forse più tipicamente un'attitudine all'approfondimento teorico e all'esplorazione profonda dei concetti matematici e una visione del pensiero astratto come valore e ricchezza culturale intrinseca. Al contrario, la formazione fisica di Marco e il suo ambiente di lavoro (istituto tecnico industriale) potrebbero tipicamente meglio corrispondere a una inclinazione positiva verso la quantificazione e la riproducibilità di tipo sperimentale, oltreché a una prospettiva educativa più legata allo sviluppo di competenze tecniche utili all'inserimento professionale. Inoltre, nell'impegno pluriennale di Lucia nella formazione professionale risuona una complessiva fiducia nella possibilità sistemica degli insegnanti di migliorare le proprie pratiche e metodologie. Nelle parole di Marco, al contrario, riecheggia una generale sfiducia nella possibilità di molti insegnanti di migliorarsi rispetto a un ideale unico e corretto di cosa costituisca essere un "buon insegnante". Questo potrebbe derivare dalla sua limitata esposizione ad approcci educativi alternativi a quelli a cui egli stesso è stato sottoposto nel passato nonché a una limitata conoscenza delle critiche contemporanee alle prove standardizzate stesse. Viceversa, si può ipotizzare che l'attivo coinvolgimento di Lucia nella formazione professionale l'abbia negli anni esposta almeno tangenzialmente a prospettive direttamente critiche agli approcci psicometrici alla valutazione o comunque a teorie e pratiche pedagogiche innovative o divergenti che potrebbero aver contribuito a sensibilizzarla verso le potenziali conseguenze negative di un eccessivo focus su prove di tipo standardizzato. Allo stesso tempo, l'accento posto nell'argomento di Lucia sulla presunta preponderanza nelle prove standardizzate di quesiti risolvibili meccanicamente e tramite la mera applicazione di formule denotano forse una scarsa attenzione al contenuto delle prove stesse, fatto in una certa misura sorprendente in quanto articolato da un'insegnante di ruolo d'esperienza. Inoltre, la generale contraddizione che ella sottolinea fra il suo ideale di cultura matematica e le competenze valutate nelle prove potrebbe derivare da una sua conoscenza limitata degli obiettivi e dei limiti psicometrici fra i livelli di competenza dichiarati come valutabili nel quadro di riferimento delle prove e quelli dichiarati come non valutabili (INVALSI, 2018).

È possibile ipotizzare che le diverse posizioni di Lucia e Marco sulle prove INVALSI, presumibilmente, riflettano non solo mere "preferenze", ma complessi intrecci di conoscenze ed esperienze personali, educative e professionali.⁶ Dalle parole di entrambi i partecipanti, comunque, pur da versanti dialettici

6. Queste interpretazioni, come detto, sono solo congetturali e derivano dalle informazioni sui partecipanti riportate nel par. 3 oltreché dalla breve conoscenza personale non ulteriormente articolabile in questa sede fra l'autore e i partecipanti. Esse si situano dunque fuori dall'analisi discorsiva degli elaborati propriamente detta e condotta con la metodologia descritta.

contrapposti, emerge parimenti in modo chiaro la funzione non neutrale delle prove INVALSI rispetto al sistema educativo e alla sua possibile evoluzione (Bolondi, 2010; Faggiano et al., 2022). Le prove INVALSI sono da entrambi viste non solo come un mezzo di valutazione dell'apprendimento, ma anche come un dispositivo che incide profondamente sulla formazione degli individui e sulla struttura dell'educazione: un dispositivo che non solo misura, ma potenzialmente modella, il comportamento sia degli studenti sia degli insegnanti. Nella prospettiva della sociologia delle istituzioni sviluppata da Foucault, le prove standardizzate sono infatti dispositivi che, insieme ad altri, contribuiscono alla creazione di norme educative e alla definizione di ciò che è considerato "conoscenza valida", esercitando così un profondo impatto sulle politiche educative e sulle pratiche pedagogiche (Kanes et al., 2014). Esse sono un mezzo per disciplinare studenti e insegnanti, promuovendo specifiche norme educative e tendendo a marginalizzare coloro che non vi si conformano. Questa normalizzazione contribuisce a definire i confini tra successo e fallimento, influenzando l'identità e le possibilità future degli studenti ed è più in generale un mezzo attraverso cui il potere (statale, istituzionale) produce e legittima certi tipi di saperi a scapito di altri.⁷ Ciò ha implicazioni profonde sul tipo di conoscenza che viene valorizzata nella nostra società e su chi ha l'autorità di definirla (par. 2). Coloro che, come Marco, enfatizzano la misurazione oggettiva e l'uniformità potrebbero, forse involontariamente, contribuire alla promozione di un modello educativo e di un'idea di equità legata all'apparente neutralità dei numeri e dei punteggi, che può nascondere ed effettivamente perpetuare le disuguaglianze esistenti in funzione di una visione utilitaristica dell'educazione e delle competenze. Dibattiti, alternative e posizioni critiche come quella di Lucia, possono allora essere visti come forme di resistenza che cercano di ripensare e trasformare le pratiche educative, proponendo visioni differenti dell'apprendimento e della valutazione che valorizzino la diversità, l'innovazione e l'autonomia degli studenti.

Tuttavia, come visto, l'influenza delle prove INVALSI può essere contemporaneamente interpretata in modo moderatamente "positivo" e liberatorio rispetto all'arbitrarietà del potere di valutazione dell'insegnante. Questa contraddizione si radica nell'opposizione fra due visioni fondamentalmente diverse su come il potere e l'autorità operano all'interno del sistema educativo e riflette una complessità intrinseca nei dibattiti sull'istruzione standardizzata (Tsai & Li, 2017). Da un lato le prove INVALSI possono essere comprese come un dispositivo di potere che "formatta" studenti e insegnanti secondo determinate norme e aspettative, fungendo da meccanismi di disciplinamento e normalizzazione e limitando dunque la varietà di approcci educativi e modi di apprendimento. L'INVALSI, in questo contesto, esercita un tipo di potere che può essere interpretato come opprimente, in quanto determina cosa conta come conoscenza e successo educativo, potenzialmente marginalizzando visioni e approcci alternativi o non valorizzando la diversità e l'inclusione di esperienze o vissuti divergenti o socio-economicamente e/o culturalmente svantaggiati. Dall'altro lato, le prove INVALSI possono essere interpretate come un potenziale argine rispetto a un sistema di valutazione basato primariamente sul giudizio soggettivo dell'insegnante, come detto (par. 2). Questa visione si basa sull'idea che una valutazione standardizzata possa fornire una misura oggettiva e imparziale (o quantomeno circoscritta e uniforme, Ball, 2017; Bernstein, 1996) delle abilità degli studenti, indipendentemente dalle preferenze personali, dalle aspettative, dai pregiudizi degli insegnanti e dai contesti di provenienza degli studenti. Secondo questo punto di vista, aderendo a uno standard uniforme, strumenti come le

7. Si potrebbe argomentare che siano le indicazioni curriculari, più propriamente, il dispositivo dove si riflettono le scelte (forse inevitabili) di normalizzazione stabilite in sede politica e che le prove siano solo uno strumento atto a fornire una "fotografia" oggettiva di alcuni dei traguardi/competenze/conoscenze/obiettivi formulati nelle indicazioni (INVALSI, 2018). Il problema è molto complesso e la sua trattazione coinvolgerebbe lunghe considerazioni epistemologiche sulla natura degli strumenti di misurazione dei fenomeni psichici e sulla loro interazione con il funzionamento di istituzioni articolate e complesse come i sistemi scolastici. In sintesi, l'immagine delle prove come semplici "ricettori passivi" delle indicazioni curriculari (implementate tramite una tecnica psicometrica assolutamente univoca e neutrale), e dunque di per sé prive di influenza sul funzionamento delle istituzioni, sembra impropria all'autore. Questo sia in ragione della prospettiva sociologica adottata nel presente studio (par. 3), sia in ragione della complessa storia delle interazioni fra istituzioni e dispositivi psicometrici (Kline, 2001; Suen & French, 2003; si veda la nota 9), sia in ultimo tenendo conto degli studi più avanzati in sociologia e filosofia della psicometria (Wijsen, 2021; Wijsen et al., 2022).

prove INVALSI possono contribuire a un sistema educativo più equo, in cui gli studenti sono valutati prescindendo o limitando i fattori soggettivi, che parimenti potrebbero riprodurre implicitamente situazioni di svantaggio o di privilegio.

La tensione tra queste due prospettive si manifesta nella tensione fra due forme istituzionali di potere: quella esercitata attraverso valutazioni standardizzate e quella esercitata dagli insegnanti attraverso valutazioni più soggettive e personalizzate. Da una parte, le prove standardizzate di matematica possono essere criticate per il loro potenziale di omologazione e per il rischio adombrato di ridurre (almeno parzialmente) l'educazione a un insieme di competenze misurabili; dall'altra, questo stesso potenziale può essere visto come uno strumento per contrastare o limitare l'influenza arbitraria e potenzialmente ingiusta degli insegnanti, offrendo una misura di rendimento meno soggettiva. Questa tensione riflette una sfida più generale dell'educazione istituzionale: trovare un equilibrio tra la condivisa esigenza di standard comuni e oggettivi di valutazione e il parimenti riconosciuto valore dell'individualità dell'insegnante e dell'apprendimento personalizzato. Il metodo adottato in questo studio fa emergere questa tensione in corrispondenza dell'esplicita scelta di analizzare due discorsi in aperta e polare contrapposizione. Naturalmente, come riportato in introduzione, la ricerca in lingua italiana ha evidenziato come tipicamente il parere di molti insegnanti si situi in posizioni mediane rispetto alle opinioni estremali qui riportate, favorendo anche in molti casi un cauto equilibrio fra le due forme di valutazione (o comunque non pregiudizialmente sfavorendo l'uso, formalmente o informalmente definito, delle prove standardizzate, Signorini, 2017).

Un'aperta proposta di configurazione di equilibrio fra queste forme di valutazione è articolata inoltre nelle considerazioni dello stesso istituto INVALSI che, nel suo quadro di riferimento, invita a non considerarle come contrapposte ma come complementari. Tale proposta evidenzia in particolare l'importanza delle prove INVALSI come strumento al servizio dell'insegnante per valutare il raggiungimento di alcuni dei traguardi stabiliti nel curriculum e ne sottolinea invece i limiti rispetto ad altri traguardi, anche in riferimento alle limitazioni dei metodi psicometrici attualmente adottati (INVALSI, 2018).

La considerazione della soluzione di equilibrio istituzionale proposta dall'istituto potrebbe apparire come naturalmente risolutoria rispetto alle contraddizioni evidenziate. Tuttavia, la prospettiva sociologica adottata nel presente articolo invita a considerare che le istituzioni educative non sono statiche, ma si trasformano in funzione dei discorsi relativi ai loro oggetti, alle loro forme e alle loro pratiche che competono fra di loro per legittimità (Kendall & Wickham, 2003). Gli stessi discorsi articolati e promossi dall'istituto INVALSI fanno allora parte e direttamente influenzano la trasformazione istituzionale ancora in divenire ad esso relative e appare dunque irragionevole adottare questo punto di vista come il più appropriato o legittimato in sede di ricerca. Più in generale, se tale prospettiva di equilibrio appare sostanzialmente misurata e coerente rispetto allo stato presente della dialettica fra le due forme di valutazione, essa appare inadeguata in sede di ricerca a rendere conto del processo di evoluzione dinamica delle istituzioni educative.⁸ Non è infatti possibile prevedere (anche in funzione della storia relativamente breve delle forme standardizzate di valutazione in Italia) allo stato attuale della ricerca quanto questo equilibrio si rivelerà definitivo, ovvero quanto "spazio" queste due forme di valutazione assumeranno l'una rispetto all'altra in futuro.⁹

Il problema concernente la dialettica istituzionale fra queste due forme di valutazione e i loro equili-

8. Nonché implicitamente fondata, si potrebbe argomentare, sull'immagine del rapporto fra strumenti psicometrici e istituzioni di cui alla nota 7.

9. Proprio l'analisi geometrica della complementarità fa emergere quanto lo "spazio" istituzionale guadagnato da una forma di valutazione non può che corrispondere a una perdita di "spazio" dell'altra (supponendo pari le "risorse" iniziali in termini, ad esempio, di tempo e di mezzi). La recente complessa vicenda relativa al rapporto formale fra il giudizio negli esami di stato in Italia e i risultati delle prove INVALSI offre ad esempio una finestra per osservare questa dialettica istituzionale ancora in divenire. Allo stesso tempo, si noti, non si tratta qui chiaramente solo di spazi espliciti e formalmente definiti, ma anche di spazi d'influenza e legittimità impliciti e sottesi al funzionamento generale del sistema scuola e alle sue trasformazioni (si veda, ad esempio, in ambito internazionale, la discussione dell'influenza implicita ed esplicita delle prove PISA in Beccuti, 2024; Beccuti & Robutti, 2022; Kanes et al., 2014).

bri è dunque ancora aperto e richiede un attento studio non solo delle pratiche ad esse relative, ma anche dell'interazione fra i discorsi di legittimità che informano tali pratiche, delle loro contraddizioni, consonanze e sovrapposizioni. Indipendentemente da quale sistema di valutazione o da quale tipo di equilibrio fra di essi si voglia favorire, questo studio appare rilevante per il problema ancora aperto e le contraddizioni irrisolte concernenti le forme e i modi in cui le valutazioni in generale possono essere pensate e implementate per interagire fra loro, rispettando e valorizzando la diversità degli studenti, degli approcci pedagogici e la libertà d'insegnamento, e promuovendo nel contempo l'equità e la trasparenza nel sistema educativo.

Ringraziamenti

Ringrazio in particolare Maria Polo per la gentile e fruttuosa discussione di una precedente versione del presente articolo.

Bibliografia

- Arribas-Ayllon, M., & Walkerdine, V. (2017). Foucauldian discourse analysis. In W. Stainton Rogers & C. Willig (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research in Psychology* (2nd edition, pp. 110–123). Sage Publications.
- Ball, S. (2017). *Foucault as Educator*. Springer International.
- Basilico, D., & Maffia, A. (2021). Indagine sulle convinzioni di docenti e studenti sulle prove INVALSI di matematica del grado 13. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 44B(2), 177–195.
- Beccuti, F. (2024). Meaning and subjectivity in the PISA mathematics frameworks: A sociological approach. *Educational Studies in Mathematics*, 116(1), 49–65. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10296-z>
- Beccuti, F., & Robutti, O. (2022). Teaching mathematics in today's society: Didactic paradigms, narratives and citizenship. *For the Learning of Mathematics*, 42(2), 29–34.
- Beccuti, F., Valero, P., & Robutti, O. (2024). Stories of devoted university students: The mathematical experience as a form of ascesis. *Educational Studies in Mathematics*, 115(1), 51–67. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10259-4>
- Bernstein, B. (1996). *Pedagogy, symbolic control and identity*. Taylor & Francis.
- Bolondi, G. (2010). Prove INVALSI: Matematica. In G. C. Cerini & M. Spinosi (Eds.), *Voci della scuola 2010: Il sistema educativo nella società che cambia* (pp. 378–389). Tecnodid.
- Bolondi, G. (2016). Prove INVALSI. La ricerca sulle competenze matematiche: dalla valutazione al curriculum. In A. M. Benini & A. Orlandoni (Eds.), *EM.MA. MATEMATICA. Dall'emergenza matematica all'autovalutazione per il miglioramento* (Quaderno n. 37, pp. 54–61). Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna.
- Brunelli, F. (2013). Considerazioni in margine alle prove INVALSI di matematica per l'esame di licenza media del giugno 2012. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36(2), 169–184.
- Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 23–37. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.2>

- Di Martino, P., & Baccaglini-Frank, A. E. (2017). Beyond performance results: Analyzing the informational and developmental potentials of standardized mathematics tests. *For the Learning of Mathematics*, 37(3), 39–44.
- Di Martino, P., & Signorini, G. (2019). Teachers and standardized assessments in mathematics: An affective perspective. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien & P. Vale (Eds.), *Proceedings of 43rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185–192). University of Pretoria.
- Dowling, P. (2002). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths / Pedagogic texts*. Routledge.
- Faggiano, E., Ferretti, F., & Arzarello, F. (2022). How do primary teachers interpret and use standardized assessment: The case of the crochet placemats. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3785–3792). Free University of Bozen-Bolzano. <https://hal.science/hal-03753407v1>
- Ferretti, F. (2015). *L'effetto "età della Terra". Contratto didattico e principi regolativi dell'azione degli studenti in matematica*. Tesi di Dottorato di Ricerca. Università di Bologna.
- Foucault, M. (1982). Afterword: The subject and power. In H. Dreyfus & P. Rabinow (Eds.), *Michel Foucault: Beyond structuralism and hermeneutics* (pp. 208–226). University of Chicago Press.
- Foucault, M. (1995). *Discipline and punish: The birth of the prison*. Vintage Books.
- Foucault, M. (1997). Technologies of the self. In P. Rabinow (Ed.), *Ethics, subjectivity and truth: The essential works of Michel Foucault, 1954-1984* (Vol. 1, pp. 281–301). Penguin.
- Giberti, C., & Maffia, A. (2020). Mathematics educators are speaking about PISA, aren't they? *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 39(4), 266–280. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrz018>
- Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2018). *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di matematica*. INVALSI. https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MA-TEMATICA.pdf
- Kanes, C., Morgan, C., & Tsatsaroni, A. (2014). The PISA mathematics regime: Knowledge structures and practices of the self. *Educational Studies in Mathematics*, 87(2), 145–165. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9542-6>
- Kendall, G., & Wickham, G. (2003). *Using Foucault's methods*. Sage.
- Kline, W. (2001). *Building a better race: Gender, sexuality, and eugenics from the turn of the century to the baby boom*. University of California Press.
- Kollosche, D. (2016). Criticising with Foucault: Towards a guiding framework for socio-political studies in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 73–86. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9648-5>
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Ablex.

- Paola, D. (2017). Riflessioni sulle risposte degli studenti ad alcune domande delle prove INVALSI. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 2, 26–45. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.2.2>
- Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI.
- Signorini, G. (2015). Attitudes of teachers towards the external evaluation system for the assessment of mathematical learning. In K. Krainer & N. Vondorva (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3170–3171). Charles University in Prague.
- Signorini, G. (2017). *Le convinzioni e le emozioni degli insegnanti sulle prove INVALSI di matematica*. Tesi di Dottorato di Ricerca. Università di Pisa.
- Suen, H. K., & French, J. L. (2003). A history of the development of psychological and educational testing. In C. R. Reynolds & R. W. Kamphaus (Eds.), *Handbook of psychological and educational assessment of children. Intelligence, aptitude, and achievement* (2nd edition, pp. 3–23). The Guilford Press.
- Tomasi, L. (2018). Alcune riflessioni didattiche sulle prove INVALSI e sulla valutazione in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 41AB(2), 162–176.
- Tsai, T. L., & Li, H. C. (2017). International comparative studies in mathematics education: Are we obsessed with the international rankings of measured educational outcomes? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(8), 1262–1267. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1315189>
- Valero, P. (2004). Socio-political perspectives on mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 5–23). Kluwer Academic Publishers.
- Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. Routledge.
- Walshaw, M. (2007). *Working with Foucault in education*. Brill.
- Wijsen, L. D. (2021). *Characterizations of psychometrics*. Tesi di Dottorato di Ricerca. Università di Amsterdam.
- Wijsen, L. D., Borsboom, D., & Alexandrova, A. (2022). Values in Psychometrics. *Perspectives on psychological science: A journal of the Association for Psychological Science*, 17(3), 788–804. <https://doi.org/10.1177/17456916211014183>

Conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica: riflessioni sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità

Mathematics teacher's specialised knowledge:
reflections on the teaching and learning of proportionality

Daniele De Giorgi*, Francesca Martignone* e Cristina Sabena°

*Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica, Università del Piemonte Orientale – Italia

°Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino – Italia

✉ daniele.degorgi@uniupo.it, francesca.martignone@uniupo.it, cristina.sabena@unito.it

Sunto / Questo articolo presenta i primi risultati di una ricerca che ha coinvolto un gruppo di insegnanti in una comunità di indagine e riflessione sul tema del ragionamento proporzionale a partire dal contesto delle ombre del sole. Con l'obiettivo di capire come la condivisione di idee e pratiche didattiche possa aiutare a rendere visibili, a discutere e, in alcuni casi, a trasformare le conoscenze professionali degli insegnanti, si è coniugato il quadro della trasposizione meta-didattica con il modello del *mathematics teacher's specialised knowledge*. Attraverso l'analisi delle trascrizioni delle discussioni nella comunità di indagine sono stati identificati nei discorsi degli insegnanti diversi aspetti delle loro conoscenze specialistiche sulla proporzionalità diretta. Inoltre, è emerso come queste conoscenze siano strettamente intrecciate con le loro convinzioni sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità diretta.

Parole chiave: conoscenze specialistiche degli insegnanti; ragionamento proporzionale; praxeologie meta-didattiche; conoscenza pedagogica del contenuto; comunità di indagine.

Abstract / This paper presents the initial results of a research project involving a group of teachers in a community of inquiry and reflection on proportional reasoning, starting from the context of the sun shadows. With the aim of understanding how the sharing of ideas and teaching practices can help to make teachers' professional knowledge visible, open to discussion and, possibly, subject to transformation, the framework of meta-didactical transposition was combined with the model of mathematics teacher's specialised knowledge. Through the analysis of transcripts of discussions in the community of inquiry, different aspects of teachers' specialised knowledge on direct proportionality were identified in their discourse. Moreover, the findings show how this knowledge is closely intertwined with their beliefs about the teaching and learning of direct proportionality.

Keywords: teachers' specialised knowledge; proportional reasoning; meta-didactical praxeologies; pedagogical content knowledge; community of inquiry.

1 Introduzione

Per cogliere le sfide poste dall'insegnamento e per affrontare contesti sempre diversi, gli insegnanti¹ devono conoscere non solo i contenuti della materia che insegnano, ma padroneggiare conoscenze specialistiche anche in altri ambiti, tra cui le metodologie didattiche, le tecnologie per una didattica innovativa, le possibili difficoltà degli studenti, i documenti istituzionali ecc. Questa complessità ha portato l'attenzione dei ricercatori in didattica della matematica ad approfondire il tema della conoscenza necessaria per e nell'insegnamento della matematica, in particolare negli ultimi due decenni (Rowland, 2020; Rowland & Ruthven, 2011; Sullivan & Wood, 2008). Ancora prima, già gli studi fondanti di Shulman (1986) hanno portato in evidenza l'importanza che gli insegnanti possiedano una profonda comprensione del contenuto matematico *amalgamata* con le conoscenze relative ai processi di insegnamento-apprendimento dei concetti matematici. Questa conoscenza è stata denominata *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e definita come segue:

«[...] la conoscenza pedagogica, che va oltre la conoscenza della disciplina in sé e include la dimensione della conoscenza disciplinare per l'insegnamento. Parlo ancora di conoscenza dei contenuti, ma di una forma particolare di conoscenza che racchiude quegli aspetti del contenuto più rilevanti per la sua insegnabilità».

(Shulman, 1986, p. 9, traduzione degli autori)

A partire dagli studi di Shulman, sono stati sviluppati diversi modelli per descrivere le *conoscenze degli insegnanti di matematica*: tra questi, hanno avuto molto successo a livello internazionale il modello *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball et al., 2008), il *Knowledge Quartet* (Rowland, 2013) e, più recentemente, il modello *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018). In quest'ultimo modello sono considerate specialistiche degli insegnanti sia la conoscenza dei contenuti matematici, sia la conoscenza pedagogica dei contenuti, e si sottolinea anche che la conoscenza degli insegnanti è permeata dalle loro convinzioni (sulla matematica e sul suo insegnamento e apprendimento). La pratica in classe dell'insegnante è infatti profondamente influenzata dalle convinzioni (Thompson, 1992) sulla matematica, su come si impara e come dovrebbe essere insegnata. Le conoscenze e le convinzioni degli insegnanti di matematica sono oggetto di discussione in molti convegni internazionali (ad esempio nei gruppi di lavoro del *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* – CERME, Martignone et al., 2025), in particolare sta crescendo l'interesse sulla relazione tra convinzioni e conoscenze matematiche (Martignone et al., 2023).

Nella ricerca qui presentata si fa riferimento al modello MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) per descrivere alcuni aspetti delle convinzioni e delle conoscenze specialistiche degli insegnanti sull'insegnamento-apprendimento del concetto di proporzionalità diretta che emergono durante discussioni collettive all'interno di comunità di indagine (Jaworski, 2006) formate da docenti del primo ciclo di istruzione² e ricercatori in didattica della matematica che lavorano insieme e condividono teorie e pratiche.

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

2. Il primo ciclo d'istruzione in Italia dura otto anni e corrisponde ai cinque anni di scuola elementare e ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

2 Quadro di riferimento

2.1 Le conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica

Il modello *mathematics teacher's specialised knowledge* è stato introdotto da Carrillo-Yañez e colleghi (2018) al fine di offrire una lente completa per individuare e descrivere le conoscenze specialistiche che gli insegnanti di matematica utilizzano e sviluppano nella loro pratica professionale. Una premessa iniziale del modello MTSK è l'estensione dell'idea di specializzazione della conoscenza, sia al dominio della conoscenza matematica, sia a quello della conoscenza pedagogica dei contenuti. Ciò che rende specializzata la conoscenza matematica degli insegnanti non è tanto ciò che sanno sulla matematica di diverso rispetto ad altri professionisti, ma il fatto che tale conoscenza sia legata all'insegnamento:

«Il nostro punto di partenza è l'assunzione che, per poter svolgere il proprio ruolo professionale – che comprende la progettazione delle lezioni, la collaborazione con i colleghi, l'attività didattica in classe e la riflessione successiva – l'insegnante necessita di conoscenze specifiche. Colleghiamo tale specificità all'insegnamento della matematica».

(Carrillo-Yañez et al., 2018, p. 239, traduzione degli autori)

Un aspetto fondamentale del modello MTSK è che si sottolinea che le azioni professionali di un insegnante non sono solo una funzione della sua conoscenza matematica o della sua conoscenza pedagogica, ma sono anche fortemente influenzate dalle convinzioni sulla natura della matematica, su come essa venga appresa e su come debba essere insegnata – in altri termini questioni di natura precipuamente didattica.

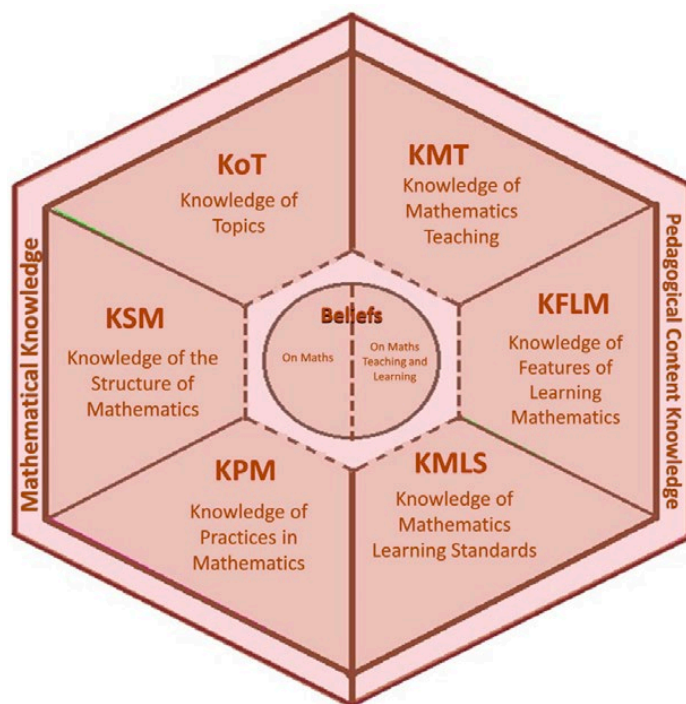


Figura 1. Il modello MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018, p. 241).

Il modello MTSK (Figura 1) si articola in due domini principali: la conoscenza matematica (*Mathematical Knowledge* – MK) e la conoscenza pedagogica del contenuto (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK). Il dominio MK è suddiviso in: conoscenza degli argomenti (*Knowledge of Topics* – KoT), ossia la conoscenza specifica dei concetti matematici, incluse definizioni, proprietà, procedure, rappresentazioni e applicazioni; conoscenza della struttura della matematica (*Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM), ossia la capacità di collegare argomenti matematici tra diversi domini e di comprendere la coerenza sottostante alla disciplina; conoscenza delle pratiche matematiche (*Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM), ossia la conoscenza dei processi matematici fondamentali, come dimostrare, giustificare, definire, fare inferenze e fornire esempi e controesempi.

Il dominio PCK è suddiviso in: conoscenza dell'insegnamento della matematica (*Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT), ossia la conoscenza delle teorie dell'insegnamento, delle strategie didattiche e dell'uso efficace di risorse, materiali e tecnologie per insegnare i concetti matematici; conoscenza delle caratteristiche dell'apprendimento della matematica (*Knowledge of the Features of Learning Mathematics* – KFLM), ossia la conoscenza delle teorie dell'apprendimento e dei modi in cui gli studenti interagiscono con i contenuti matematici, comprese le loro difficoltà e i loro errori comuni; conoscenza degli standard di apprendimento della matematica (*Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS), ossia la conoscenza dei programmi curriculari, degli obiettivi di apprendimento e dei risultati attesi nei diversi segmenti scolastici. Questo modello fornisce pertanto un quadro articolato per analizzare la conoscenza complessa e multifaccettata che supporta lo sviluppo dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica.

2.2 La trasposizione meta-didattica

Una comprensione più profonda di come la conoscenza specializzata degli insegnanti e le loro credenze sottostanti emergano e possano modificarsi in contesti collaborativi è cruciale per la progettazione di programmi di sviluppo professionale. È importante che gli insegnanti partecipino a processi riflessivi che facciano emergere e trasformino le loro conoscenze specialistiche, nell'interazione con altri colleghi e con ricercatori esperti in educazione matematica. I processi di collaborazione in cui sia gli insegnanti sia i ricercatori apprendono dalla propria pratica e dalle riflessioni condivise costituiscono un aspetto fondamentale di quelle che Jaworski ha definito "comunità di indagine" (Jaworski, 2006). Mettendosi in discussione e condividendo nuovi punti di vista, i partecipanti a tali comunità hanno l'opportunità di acquisire nuove conoscenze e discutere con gli altri partecipanti (insegnanti o ricercatori) sia in relazione a questioni teoriche provenienti dalla ricerca scientifica, sia a partire da pratiche didattiche e di sviluppare in tal modo un pensiero critico sulla propria opera professionale. Per analizzare i processi che si possono attivare in queste comunità di indagine che condividono teorie e pratiche, il riferimento è al modello della trasposizione meta-didattica (Aldon et al., 2013; Arzarello et al., 2014). Il modello è radicato principalmente nella teoria antropologica della didattica (*Anthropological Theory of the Didactic* – ATD) che concettualizza la conoscenza e la pratica attraverso la nozione di praxeologia (Chevallard, 1999; Chevallard & Bosch, 2020). Una praxeologia si sviluppa all'interno di contesti istituzionali ed è strutturata su due livelli principali (García et al., 2006): il livello della *prassi* o del "saper fare", che include il compito (*tâche* in francese, *task* in inglese), o una famiglia di compiti, e le tecniche utilizzate per affrontarlo; e il livello del *logos* o della conoscenza, che include i discorsi sviluppati per giustificare le tecniche e le teorie che li sostengono.

Nei processi di sviluppo professionale degli insegnanti, oltre alle praxeologie matematiche e a quelle didattiche messe a fuoco dall'ATD, si trovano le praxeologie meta-didattiche, ossia compiti, tecniche e discorsi giustificativi che emergono e si evolvono come riflessione sulle attività didattiche. Questo tipo di praxeologie condivise durante le attività di collaborazione tra insegnanti e ricercatori rappresentano una sintesi di componenti provenienti sia dalle praxeologie dei ricercatori, sia da quelle degli insegnanti, innescando un processo dinamico di trasformazione della conoscenza. Il modello della trasposizione meta-didattica mira a cogliere la complessità di queste dinamiche e individuare le

componenti che le innescano (o le inibiscono). La ricerca qui presentata si concentra sulla parte del logos di tali praxeologie meta-didattiche utilizzando il modello MTSK sopra presentato per analizzare le conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica sviluppate in comunità di indagine così concepite. Prima di entrare nel dettaglio dello studio specifico presentato in questo contributo, il prossimo paragrafo ha lo scopo di approfondire brevemente il contenuto matematico attorno cui sono state centrate le attività didattiche discusse con gli insegnanti.

2.3 Il ragionamento proporzionale

Il ragionamento proporzionale è considerato un concetto chiave nell'insegnamento-apprendimento della matematica elementare e fondamento per gli studi di matematica nella scuola secondaria (Lesh et al., 1988). Il ragionamento proporzionale si basa sulla comprensione di come delle quantità variano insieme (covariazione) e sullo stabilire confronti multipli tra diverse quantità. Nel caso della proporzionalità diretta tra coppie di variabili, queste co-variano in modo tale che il loro rapporto rimanga costante.

«Il ragionamento proporzionale – termine che indica il ragionamento in un sistema di due variabili tra le quali esiste una relazione funzionale lineare – porta a conclusioni su una situazione o un fenomeno che possono essere caratterizzati da un rapporto costante».

(Karplus et al., 1983, p. 219, traduzione degli autori)

Il confronto tra le quantità può avvenire utilizzando rapporti e operazioni di moltiplicazione e divisione, ma come sottolineano Proulx et al. (2024) il ragionamento proporzionale non si può ridurre al calcolo proporzionale.

«Al di là dei numeri e dei calcoli, il ragionamento proporzionale può essere concettualizzato in termini di relazioni tra rapporti (quantificati o meno), una compatibilità che può essere mantenuta, imposta e ripetuta, rendendo possibile confrontare, adattare, preservare, trasformare tali rapporti, e così via. Tutto questo va ben oltre l'aritmetizzazione di queste relazioni attraverso procedure o operazioni. In altre parole, oltre al calcolo c'è il ragionamento».

(Proulx et al., 2024, p. 6, traduzione degli autori)

Il ragionamento proporzionale non si può quindi ridurre a una serie di procedure quantitative. Freudenthal (1983) inoltre osserva che gli studenti riconoscono intuitivamente la proporzionalità anche senza numeri, come quando giudicano un'immagine riprodotta inadeguata perché le proporzioni tra le sue parti non sono corrette. Oltre il dominio strettamente quantitativo, il concetto di proporzionalità viene colto spesso in termini qualitativi di armonia ed equilibrio (si pensi per esempio alle prime attività alla scuola dell'infanzia in cui si analizzano immagini dove si mantengono le proporzioni di tutte o solo parte delle componenti di una figura). Questa visione qualitativa è supportata dall'idea di covariazione, in cui "tutto varia insieme". Una perdita di coerenza nelle relazioni tra le parti di un oggetto, come in un disegno non proporzionato, porta a una disarmonia. In questo senso, il ragionamento proporzionale va oltre il puro calcolo e si concentra sulle relazioni tra le quantità e la loro variazione reciproca.

Nelle discussioni sviluppatesi durante gli incontri della comunità di indagine oggetto di analisi in questo studio, l'insegnamento-apprendimento delle relazioni di proporzionalità è stato trattato e analizzato a fondo. Come sottolineato dalla letteratura (Lesh et al., 1988; Proulx et al., 2024; Tournaire & Pulos, 1985) e come emerso dalle riflessioni degli insegnanti, il concetto di proporzionalità e il suo insegnamento sono complessi. Ci possono essere diversi approcci e tipologie di problemi sulla

proporzionalità (de la Torre et al., 2015). Il ragionamento proporzionale va oltre la semplice risoluzione di problemi "a valore mancante", tradizionalmente affrontati attraverso procedure mnemoniche, per abbracciare un processo di pensiero più ampio e complesso. Questo tipo di ragionamento si estende a concetti matematici cruciali come equivalenza, variabili e trasformazioni, evidenziando l'importanza di superare un approccio procedurale a favore di una comprensione concettuale che riconosca l'invarianza come elemento chiave (Sowder et al., 1998). La preparazione e lo sviluppo professionale degli insegnanti sul concetto di proporzionalità sono per questo cruciali. È fondamentale che gli insegnanti riflettano sulla profondità, ampiezza e durata del processo di acquisizione del ragionamento proporzionale da parte degli studenti. Questo include il riconoscimento che tale ragionamento si collega con molti aspetti della matematica legati alle funzioni, alla misurazione e ai rapporti.

Nonostante una tale importanza, la ricerca sull'effettivo ragionamento proporzionale degli insegnanti in servizio ha ricevuto relativamente poca attenzione, anche se ci sono studi recenti che se ne stanno occupando (ad esempio, Copur-Gencturk & Ezaki, 2025). Lo studio presentato in questo articolo si inserisce in questa prospettiva. Dall'analisi di discussioni in una comunità di indagine formata da insegnanti in servizio e da ricercatori in didattica della matematica si possono identificare diversi aspetti delle conoscenze specialistiche dei contenuti. Tali discussioni abbracciano sia il piano matematico (argomenti, connessioni, definizioni, procedure, schemi ecc.), sia quello didattico (obiettivi di apprendimento, metodologie, curriculum ecc.), mostrando la forte interconnessione tra le conoscenze matematiche e le conoscenze pedagogiche relative all'insegnamento-apprendimento della proporzionalità (De Giorgi et al., 2025).

3 Lo studio

Il presente studio si propone di mostrare alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica sui processi di insegnamento-apprendimento riguardanti la proporzionalità diretta che emergono quando si condividono tra insegnanti e ricercatori praxeologie meta-didattiche durante le discussioni in una comunità di indagine.

I dati e materiali analizzati sono stati prodotti all'interno di una comunità di indagine formata da 16 docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado³ della regione Piemonte e due ricercatori in didattica della matematica dell'Università del Piemonte Orientale (i primi due autori di questo articolo).⁴ Questa comunità di indagine si incontra circa una volta al mese (in presenza o a distanza secondo le esigenze), ma, quando è stato necessario un confronto durante le sperimentazioni, gli incontri sono stati svolti anche con intervalli più brevi. In linea con il modello della trasposizione meta-didattica, insegnanti e ricercatori collaborano e condividono riflessioni sui contenuti da insegnare e sulle relative attività didattiche. Il progetto da cui sono stati ricavati i dati analizzati in questo contributo è iniziato nel settembre 2024 con lo studio e progettazione di attività didattiche ed è durato tutto l'anno scolastico con sperimentazioni nelle classi e analisi dei risultati. Le attività sono state progettate in verticale e concordate tra tutti gli insegnanti in modo da svolgere le stesse attività nelle diverse classi coinvolte. In questo articolo si mostrano alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica che sono emerse durante l'incontro di fine anno scolastico (giugno 2025) della comunità di indagine nel quale sono stati analizzati alcuni dei protocolli raccolti nelle sperimentazioni svolte durante l'anno scolastico appena terminato. Nell'incontro, la discussione ha preso avvio dall'esigenza di alcuni

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

4. In questo articolo si riporteranno solo le discussioni che hanno coinvolto gli insegnanti della scuola secondaria di primo grado sul tema della proporzionalità diretta.

insegnanti di riflettere su aspetti emersi dal confronto tra le analisi a priori delle attività progettate e la loro effettiva realizzazione in aula. Durante l'incontro il gruppo ha analizzato questi materiali condividendo interpretazioni e riflessioni didattiche sui processi di insegnamento-apprendimento della matematica, in particolare della proporzionalità diretta. Tale analisi a posteriori dà avvio a una praxeologia meta-didattica perché consiste in un compito di riflessione su pratiche didattiche. MK e PCK degli insegnanti fanno parte del logos su cui basano i loro discorsi sulle analisi a posteriori dei materiali. Verranno mostrati i primi risultati di uno studio qualitativo che ha lo scopo di rispondere alla seguente domanda di ricerca: quali aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica della scuola secondaria di primo grado relative al concetto di proporzionalità diretta possono emergere grazie alla condivisione di praxeologie meta-didattiche?

Le discussioni che si sono svolte all'interno della comunità di indagine sono state videoregistrate e i dialoghi sono stati trascritti. Per l'analisi dei dati è stata utilizzata l'analisi qualitativa del contenuto (Mayring, 2015), applicando un approccio di codifica deduttiva. Questo metodo ha permesso di assegnare sistematicamente categorie predefinite provenienti dal modello MTSK (Figura 1) a specifici passaggi delle trascrizioni delle discussioni, consentendo un'analisi mirata del materiale raccolto. L'analisi del contenuto è stata inizialmente condotta dagli autori in modo indipendente, seguita da una discussione di gruppo fino al raggiungimento di un consenso finale.

Dato che lo studio si basa sull'analisi di discussioni in una specifica comunità di indagine (un campione di convenienza), i risultati ottenuti non sono generalizzabili a una popolazione più ampia. I partecipanti rappresentano un gruppo con caratteristiche peculiari in parte descritte precedentemente, non rappresentative di contesti diversi. Questa limitazione però non compromette l'obiettivo dello studio che è mostrare, attraverso un'analisi qualitativa di estratti di discussioni, come alcuni aspetti della conoscenza specialistica degli insegnanti legati ai processi di insegnamento-apprendimento della proporzionalità diretta nella scuola secondaria di primo grado possono emergere durante la condivisione di praxeologie meta-didattiche. Nei paragrafi successivi saranno mostrati alcuni estratti di discussioni svolte all'interno della comunità in cui si sono analizzati materiali provenienti dalla scuola secondaria di primo grado.

4 Analisi degli estratti dalle discussioni

In questo paragrafo si riportano alcuni estratti di discorsi sviluppati durante l'analisi a posteriori dei protocolli raccolti dagli insegnanti nelle loro classi al termine delle sperimentazioni svolte durante l'anno scolastico 2024/2025 sul fenomeno delle ombre del sole. Gli studenti hanno raccolto dati sulla lunghezza delle ombre di gnomoni diversi alla stessa ora e in orari diversi. Si è poi chiesto agli studenti di analizzare i dati raccolti nelle attività didattiche in tabelle cartacee o in fogli di calcolo.

La discussione del gruppo di insegnanti e ricercatori nell'analizzare alcuni protocolli degli studenti si è focalizzata inizialmente sugli errori di misura e sulle difficoltà degli studenti nell'identificare il rapporto costante tra lunghezza degli gnomoni e delle loro ombre nello stesso momento e nello stesso luogo. Nella discussione collettiva i diversi interventi degli insegnanti vanno a costituire un unico flusso che si sviluppa dalle dinamiche collaborative della comunità di indagine sinergicamente impegnata nell'analisi delle pratiche didattiche condivise. L'insegnante B. ad esempio innesca un flusso di discussione condividendo la sua scelta di impostare lei stessa l'operazione di rapporto sul foglio Excel dove gli studenti hanno riportato le misure di gnomoni e ombre (Figure 2a e 2b).

a	Lunghezza gnomone (cm)		
	11	12,5	15
Ora	Lunghezza ombra (cm)		
10:10	19,5	20,5	24
11:10	13,7	14,5	19
12:10	10,6	12,5	14,5
13:10	9	10,5	14
14:10	8,7	10,5	14
15:10	9,8	12,5	15,8

Figura 2a. Tabella con le misure delle lunghezze degli gnomoni e delle loro ombre.

b	Lunghezza gnomone (cm)		
	11	12,5	15
Ora	Rapporto ombra : gnomone		
10:10	1,77	1,64	1,6
11:10	1,25	1,16	1,27
12:10	0,96	1	0,97
13:10	0,82	0,84	0,93
14:10	0,79	0,84	0,93
15:10	0,89	1	1,05

Figura 2b. Tabella con i rapporti tra ombra e gnomone proposta da B.

B.: «Perché nel vedere questi dati i ragazzi... non sono dati intuitivi per loro, ed era stato già sollevato all'inizio questo problema della lunghezza dello gnomone, perché se fossero stati il doppio o il triplo... i dati probabilmente venivano fuori più semplici. Quindi trovandosi davanti a questa tabella si sono un po' persi, quindi io ho dovuto guidarli molto. Quindi cosa ho fatto? Ho fatto il rapporto tra ombra e gnomone per il corto, per il medio e per il lungo [...]. Allora, noi abbiamo fatto le proporzioni. L'abbiamo fatto su questo foglio di Excel, quindi ovviamente guidati, però insomma le proporzioni le hanno capite, e facendo il rapporto, forse qui non si può dire però ai decimi, il rapporto tra ombra e gnomone è abbastanza costante».

L'intervento di B. descrive le praxeologie didattiche che ha adottato in classe per far capire che il rapporto rimane circa costante. Partendo da questo intervento il gruppo ha dunque discusso su come si era affrontata nelle classi l'individuazione della relazione di proporzionalità tra le lunghezze degli gnomoni e delle loro ombre. La praxeologia meta-didattica condivisa è generata dal compito di analisi di protocolli di studenti che hanno affrontato problemi di proporzionalità diretta legati alle ombre del sole. Sono state analizzate strategie additive e moltiplicative, si è riflettuto sui diversi possibili approcci, su errori e difficoltà. Durante queste riflessioni, alcuni degli insegnanti di scuola secondaria di

primo grado hanno dichiarato che nelle loro classi hanno trattato il concetto di proporzionalità diretta principalmente attraverso l'impostazione e il calcolo di proporzioni tra lunghezze delle ombre e degli gnomoni, presentate come uguaglianze del tipo $a : b = c : d$.

L'analisi dei materiali provenienti dalle classi conferma questa tendenza: in numerosi protocolli gli studenti hanno impostato proporzioni nella forma classica $a : b = c : d$, applicando procedure apprese per la loro risoluzione (ad esempio l'uguaglianza tra il prodotto dei medi e quello degli estremi).

Queste evidenze, insieme agli interventi delle insegnanti, suggeriscono l'esistenza di una pratica didattica ricorrente e condivisa all'interno del gruppo, fondata sull'impostazione della proporzione e sullo sviluppo di procedure operative come via privilegiata per affrontare il ragionamento proporzionale. A titolo esemplificativo, si riporta un protocollo (Figura 3), incluso tra i materiali ritenuti significativi e meritevoli di discussione da un'altra insegnante di secondaria di primo grado del gruppo (S.), che mostra come gli studenti hanno impostato diverse proporzioni per rispondere ai quesiti proposti.

Nella nostra attività abbiamo analizzato la seguente tabella.

Lunghezza gnomone	11 cm	12,5 cm	15 cm
ORA	LUNGHEZZA OMBRA (cm)	LUNGHEZZA OMBRA (cm)	LUNGHEZZA OMBRA (cm)
10:10	19,5	20,5	24
11:10	13,7	14,5	19
12:10	10,6	12,5	14,5
13:10	9	10,5	14
14:10	8,7	10,5	14
15:10	9,8	12,5	15,8

a. Da ciò che abbiamo imparato sul sole e sulle ombre, potremmo sapere quanto è lunga l'ombra che avrebbe fatto uno gnomone, più lungo di quelli che abbiamo usato noi, alla stessa ora, nello stesso posto e lo stesso giorno?

b. Quanto misura l'ombra di uno gnomone lungo il doppio di quello più corto, alle 13:10, nello stesso posto e lo stesso giorno?

c. Quanto sarà lunga l'ombra di uno gnomone lungo 27,5 cm rilevata alle 13:10, nello stesso posto e lo stesso giorno?

Motiva le tue risposte.

a. Si, si potrebbe sapere la lunghezza dell'ombra usando una proporzione. ✱

b. $11:9 = 22:x$ $x = \frac{9 \times 22}{11} = 18x$

c. $11:9 = 27,5:x$ $x = \frac{9 \times 27,5}{11} = 22,5x$

c. $12,5:10,5 = 27,5:x$ $x = \frac{10,5 \times 27,5}{12,5} = 23,1x$

c. $15:14 = 27,5:x$ $x = \frac{14 \times 27,5}{15} = 25,7x$

Si può sapere perché se si posiziona uno gnomone più lungo nello stesso punto si ha un punto di riferimento uguale.

Figura 3. Protocollo di un gruppo di studenti di una classe di scuola secondaria di primo grado, discusso durante l'incontro di fine anno della comunità di indagine.

Nella Figura 3 si nota come per svolgere i calcoli gli studenti abbiano applicato procedure standard di uguaglianza tra prodotti di specifici termini della proporzione secondo la loro posizione (si vedano gli archetti sotto i numeri). Si può notare inoltre che per rispondere al quesito c) gli studenti hanno impostato e risolto tre proporzioni che, a causa degli errori di misura nei dati raccolti, hanno restituito

valori diversi relativi alla possibile lunghezza dell'ombra dello gnomone da 27,5 cm; questo aspetto, tuttavia, non è stato discusso o argomentato dagli studenti, i quali hanno reputato di aver assolto il loro compito trovando dei valori tramite un calcolo corretto delle proporzioni.

Dall'analisi dei materiali condivisi sono quindi emersi in modo preponderante gli aspetti procedurali. Tra le diverse osservazioni condivise durante l'incontro, è stato evidenziato però come spesso gli studenti abbiano applicato, senza un controllo semantico delle procedure, le proporzioni tra lunghezze di ombre e gnomoni impostate con tale scrittura simbolica. In alcuni casi, infatti, gli studenti sembrano non aver colto il significato delle rappresentazioni e delle procedure che stavano svolgendo. Si mostra a titolo di esempio uno dei protocolli discussi (Figura 4). L'insegnante (T.) nella condivisione dei materiali lo ha proposto per l'analisi alla comunità in quanto l'errore rilevato era stato inatteso.

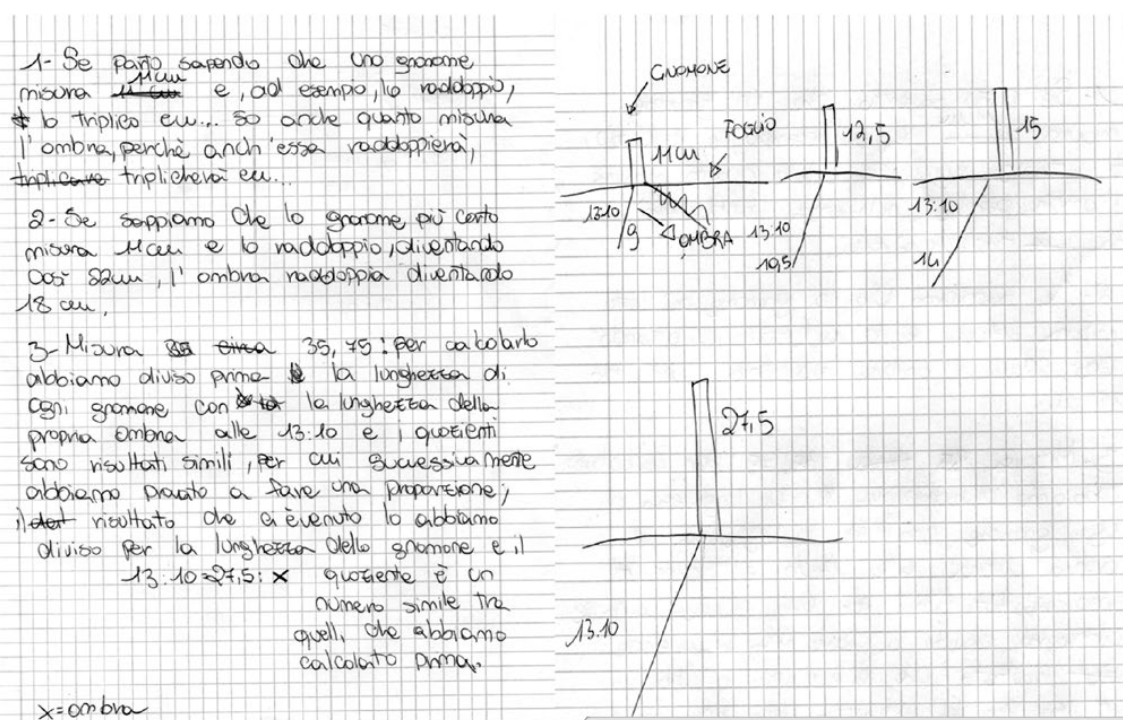


Figura 4. Protocollo di uno studente di scuola secondaria di primo grado, discusso durante l'incontro di fine anno della comunità di indagine.

Nell'impostare la proporzione tra la lunghezza di uno gnomone e quella della sua ombra, lo studente autore del protocollo in Figura 4 ha usato l'orario in cui sono state rilevate le ombre considerando la scrittura dell'orario 13:10 come un elemento della proporzione. Discutendo all'interno della comunità di indagine gli insegnanti notano però che lo studente, dalla sua descrizione del fenomeno delle ombre del sole, sembra che abbia colto che vi è una regolarità/proporzione tra le lunghezze degli gnomoni e quelle delle ombre misurate nello stesso posto nello stesso istante («Se parto sapendo che uno gnomone misura 11 cm e, ad esempio, lo raddoppio, lo triplico ecc... So anche quanto misura l'ombra, perché anch'essa raddoppierà, triplicherà ecc...»). Tuttavia, quando deve quantificare la relazione nel caso richiesto dalla consegna (lunghezza dell'ombra dello gnomone di 27,5 cm alle 13:10) prende i numeri che probabilmente identifica in una scrittura simile a quella delle proporzioni che è solito manipolare. Partendo dall'analisi di questo caso, gli insegnanti e i ricercatori hanno cominciato a discutere sull'importanza di dare significato alle procedure e soprattutto all'interpretazione di quelle scritture in cui vengono proposte le proporzioni come $a : b = c : d$ e alla perdita di significato delle operazioni svolte se si applicano procedure mnemoniche.

All'interno di questo flusso di discussione sviluppato all'interno della comunità di indagine si riporta il seguente intervento di una insegnante (P.) della scuola secondaria di primo grado che ha voluto condividere il suo punto di vista non concorde con quello proposto dai ricercatori, i quali avevano sottolineato il fatto che l'insegnamento della proporzionalità non deve ridursi a problemi "a valore mancante" e a procedure mnemoniche, ma il focus deve essere sulle relazioni. Questo è un esempio in cui si mostra come l'essere parte della comunità di indagine può portare gli insegnanti a condividere riflessioni sulle pratiche didattiche e a esplicitare la parte logos delle praxeologie meta-didattiche in gioco, attivate dal compito di analisi di materiali condivisi. Anche se l'insegnante ha condiviso delle praxeologie didattiche all'interno della comunità svolgendo nelle sue classi le stesse attività dei colleghi, nella discussione finale, durante lo sviluppo delle praxeologie meta-didattiche, mostra che a livello di logos le sue conoscenze specialistiche dei contenuti non sono allineate con quelle che si stavano condividendo all'interno della comunità (ossia che il ragionamento proporzionale non è solo una procedura o il calcolo di una proporzione attraverso moltiplicazioni e divisioni, ma è la capacità di comprendere come diverse quantità variano insieme e di riconoscere che il loro rapporto rimane costante).

P.: «Almeno per quanto mi riguarda, ma per tutti, la definizione di proporzione è l'uguaglianza di due rapporti. Quindi noi la diamo così, la spieghiamo così e iniziamo a fare tutto così. Poi, quando su una classe di 22, con questo concetto la capiscono in 3, allora inizio a dire ok, però meccanicamente quello sta a quello come quello sta a quell'altro. È proprio complesso ed è incredibile, perché secondo me le proporzioni per me sono delle cose che ... tanto che mi è rimasta fin dalle medie per tutta la vita... sono assolutamente intuitive. Non è però assolutamente intuitivo e tantissimi anche bravi comunque hanno avuto grandissime difficoltà anche quando le dai meccanicamente, cioè tu prendi le cose che sono tra loro simili, perché comunque il parallelo in geometria si fa quello, e le metti appunto... le cose corrispondenti le devi mettere in proporzione e loro questo più o meno lo riescono a capire, ma se glielo spieghi semplicemente come rapporto tra numeri che rimane costante nella mia esperienza, che per carità non è di milioni di anni, ma di un po' di anni è che la capiscono davvero tre o quattro persone. Quindi, se lo scopo è fargli capire veramente cosa è la proporzione capisco di sforzarmi su quello. Se lo scopo è far applicare le proporzioni ai lati pratici anche per chi magari non è particolarmente portato secondo me a livello didattico si dice quello sta a quello come quello sta a quell'altro».

In questo estratto P. condivide delle riflessioni sulle pratiche didattiche che emergono grazie alle attività di analisi e collaborazione sviluppate all'interno della comunità di indagine. Usando il modello MTSK si possono individuare diversi aspetti delle conoscenze specialistiche che P. espone nella sua analisi delle pratiche. Nello specifico P. mostra una conoscenza degli argomenti (KoT) relativa al concetto di proporzionalità quando afferma che: «la definizione di proporzione è l'uguaglianza di due rapporti» e quando parla di «rapporto tra numeri che rimane costante». Poi citando l'ambito geometrico («il parallelo in geometria»), P. mostra anche una conoscenza della struttura della matematica (KSM), ovvero la capacità di collegare concetti tra diverse aree della matematica. Per P. le proporzioni sono un argomento che sente di conoscere e padroneggiare: «le proporzioni per me sono delle cose che... tanto che mi è rimasta fin dalle medie per tutta la vita... sono assolutamente intuitive». P. ribadisce questo concetto in un altro momento della discussione: «il fatto è che nella mia vita pratica, quando faccio le ricette, anche io faccio la proporzione, faccio il rapporto uova-farina e vedo se rimane uguale». La sua conoscenza degli argomenti (KoT) e le prassi matematiche appaiono fortemente radicate nella quotidianità, confermando come le conoscenze specialistiche siano intrise di credenze sulla matematica come sottolinea il quadro MTSK. Ciò che risulta particolarmente interessante è osservare come tali conoscenze interagiscano con la sua PCK, orientando la definizione di strategie didattiche coerenti con il suo modo di

concepire e affrontare il pensiero proporzionale. La PCK risulta essere la componente più evidente che emerge dal suo discorso: in particolare si tratta della conoscenza dell'insegnamento della matematica (KMT) che si manifesta quando l'insegnante riflette su diverse strategie didattiche e sulla loro efficacia rispetto agli obiettivi didattici, ossia quando afferma che si inizia con la definizione di proporzione come uguaglianza di rapporti per poi passare al metodo meccanico del «quello sta a quello come quello sta a quell'altro». P. ha chiari i suoi obiettivi didattici, che dipendono dalla sua conoscenza delle caratteristiche dell'apprendimento della matematica (KFLM), in quanto sostiene che gli studenti hanno difficoltà con le proporzioni definite come uguaglianza di rapporti («su una classe di 22, con questo concetto la capiscono in 3»). P. percepisce la differenza tra la sua comprensione del concetto («sono assolutamente intuitive») e quella degli studenti («tantissimi anche bravi comunque hanno avuto grandissime difficoltà») e sottolinea che anche un approccio meccanico, sebbene più accessibile, non è privo di difficoltà per molti di loro. Si osserva che l'insegnante non mette in dubbio la necessità di affrontare l'argomento, pur riconoscendone la difficoltà per gli studenti, poiché è consapevole che esso rientra tra gli obiettivi di apprendimento e i risultati attesi nel grado scolastico in cui insegna (KMLS). Tuttavia, dalla sua esperienza non sembra emergere come obiettivo didattico fondamentale l'individuazione della relazione invariante; al contrario, appare privilegiata l'acquisizione delle procedure pratiche da parte del maggior numero possibile di studenti. Nelle parole di P. si nota quindi che emergono diversi aspetti delle conoscenze dei contenuti che, come il modello MTSK permette di individuare, sono permeate dalle sue convinzioni sulla matematica e sul suo insegnamento, e di conseguenza influenzano le sue convinzioni sul modo più efficace di affrontare il ragionamento proporzionale («Se lo scopo è far applicare le proporzioni ai lati pratici anche per chi magari non è particolarmente portato secondo me a livello didattico si dice quello sta a quello come quello sta a quell'altro»). P. alla fine aggiunge tuttavia anche che «se lo scopo è fargli capire veramente cosa è la proporzione capisco di sforzarmi su quello». Con questa frase si può notare una possibile apertura al cambiamento delle prassi didattiche influenzata dal condividere riflessioni meta-didattiche all'interno della comunità che continuerà a sviluppare percorsi didattici anche negli anni successivi focalizzando le attività sugli aspetti relazionali legati al concetto di proporzionalità.

5 Discussione

L'analisi dei discorsi sviluppati nella comunità di indagine mostra che la condivisione di praxeologie meta-didattiche ha fatto emergere alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti. Nello specifico, l'analisi di un protocollo selezionato da una insegnante per la discussione collettiva ha agito da catalizzatore, spostando il focus della discussione dalla descrizione di praxeologie didattiche condivisa da un'insegnante, all'analisi di difficoltà degli studenti in singole consegne e di possibili strategie di risoluzione di problemi e a una più generale riflessione sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità. Durante le discussioni è infatti emerso come alcuni degli insegnanti di scuola secondaria di primo grado fossero fortemente ancorati all'idea di insegnare la proporzionalità diretta principalmente attraverso il calcolo delle proporzioni con la scrittura classica $a : b = c : d$.

I ricercatori, in linea con quanto studiato in letteratura (Lesh et al., 1988; Proulx et al., 2024; Tourniaire & Pulos, 1985), hanno condiviso riflessioni didattiche su possibili approcci che vanno oltre il mero calcolo per privilegiare gli aspetti relazionali del concetto di proporzionalità diretta (ossia quegli aspetti che mettono in luce le relazioni matematiche caratterizzanti il concetto, come il rapporto costante) e l'individuazione di regole/leggi e invarianti. In questo articolo sono state riportate, in ottica esemplificativa, le riflessioni sulle pratiche didattiche che l'insegnante P. ha condiviso. Il modello MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) ha permesso di mettere in luce i diversi aspetti che emergono dalle riflessioni di questa insegnante sui processi di insegnamento-apprendimento della proporzionalità. Dall'analisi

è emerso chiaramente come gli obiettivi didattici possono essere principalmente motivati dall'amalgama tra le convinzioni sulla matematica e sul suo insegnamento e i diversi domini della PCK dell'insegnante. Grazie all'impiego del modello MTSK è stato possibile mettere in luce, nel discorso di P., i diversi domini delle conoscenze che sono a fondamento delle sue riflessioni sulla pratiche didattiche: da un lato i sottodomini della MK, ossia la conoscenza del contenuto matematico e delle relazioni tra i diversi ambiti della matematica; dall'altro quelli della PCK, ovvero la conoscenza che usa per giustificare le proprie scelte didattiche nell'insegnamento della proporzionalità nel grado scolastico in cui opera. P. motiva infatti le sue scelte facendo riferimento alla conoscenza delle difficoltà degli studenti maturata con l'esperienza e rendendo espliciti i propri obiettivi didattici, orientati in particolare verso azioni di tipo operativo che privilegiano l'acquisizione delle procedure di calcolo rispetto alla messa in evidenza degli aspetti relazionali. Queste sue riflessioni sono fondate sulle sue conoscenze pedagogiche dei contenuti, ma anche sulle sue convinzioni relative alla matematica e al suo insegnamento. I primi risultati di questo studio, qui presentati e discussi, mostrano come la condivisione di praxeologie meta-didattiche relative al compito di analizzare a posteriori protocolli provenienti dalle classi non solo porti a esplicitare alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti (identificati tramite le lenti teoriche fornite dal modello MTSK), ma anche a mettere in discussione convinzioni, prassi didattiche e conoscenze specialistiche. Nello specifico, si è mostrato come la praxeologia meta-didattica sviluppata in una comunità di indagine relativa all'analisi a posteriori di materiali e protocolli provenienti dalle sperimentazioni nelle classi abbia creato uno spazio di riflessione sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità diretta aprendo la strada a una potenziale trasformazione delle conoscenze specialistiche degli insegnanti esplicitate nelle riflessioni sui processi di insegnamento-apprendimento e sulle pratiche didattiche.

6 Riflessioni conclusive e prospettive future

Secondo il modello della trasposizione meta-didattica (Aldon et al., 2013; Arzarello et al., 2014) le praxeologie condivise durante le attività della comunità di indagine rappresentano una sintesi di componenti provenienti sia dalle praxeologie dei ricercatori, sia da quelle degli insegnanti, innescando un processo dinamico di trasformazione della conoscenza. Questo studio ha evidenziato come dalla condivisione di praxeologie meta-didattiche e dall'interazione all'interno della comunità di indagine possano emergere anche dissonanze tra le conoscenze pedagogiche dei contenuti dei partecipanti. Far parte di una comunità che ha individuato un oggetto di riflessione e indagine e che progetta attività a lungo termine per portare avanti sperimentazioni didattiche, è un'occasione per tutti i partecipanti di verbalizzare e mettere in discussione le proprie convinzioni arrivando talvolta a modificare le proprie conoscenze. La condivisione di praxeologie meta-didattiche infatti può anche fungere da ponte, creando uno spazio di riflessione che non si limita a confermare e a condividere conoscenze specialistiche e pratiche didattiche esistenti, ma apre la strada a nuove prospettive di sviluppo professionale. Future ricerche potrebbero indagare se e come tali aperture si traducano in un effettivo cambiamento o in una maggior consapevolezza nelle praxeologie didattiche in aula, lasciando un segno tangibile nell'apprendimento professionale – fine ultimo di ogni percorso di formazione professionale.

Ringraziamenti

Ringraziamo tutti gli insegnanti della comunità di indagine. Il loro instancabile impegno e la loro continua collaborazione sono stati essenziali per i risultati raggiunti e continueranno a essere un motore cruciale per la crescita del gruppo, contribuendo anche al progresso della ricerca in didattica della matematica.

Bibliografia

- Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., Sabena, C., & Soury-Lavergne, S. (2013). The meta-didactical transposition: A model for analysing teachers education programs. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 97–124). PME.
- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programs. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development* (Vol. 2, pp. 347–372). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_15
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzalez, A., Ribeiro, M., & Munoz-Catalan, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266. <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034
- Copur-Gencturk, Y., & Ezaki, J. (2025). Middle school mathematics teachers' proportional reasoning and its relation to their content and pedagogical content knowledge. *Research in Mathematics Education*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/14794802.2025.2462930>
- De Giorgi, D., Martignone, F., & Sabena, C. (2025). Mobilizing mathematical knowledge and pedagogical content knowledge through interdisciplinary educational activities. In C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri & V. Randolph (Eds.), *Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 195–202). PME.
- de la Torre, J., Tjoe, H., Rhoads, K., & Lam, D. (2015). Conceptual and theoretical issues in proportional reasoning. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 6(1), 22–33.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 38(3), 226–246. <https://doi.org/10.1007/BF02652807>
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 187–211. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-1223-z>

- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219–233. <https://doi.org/10.1007/BF00410539>
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93–118). National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.
- Martignone, F., Montes, M., Ferretti, F., Hubeňáková, V., Karlsson, J., Kennedy, N., & Ribeiro, M. (2023). Introduction to TWG20: Knowledge, beliefs and identity. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3675–3678). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Martignone, F., Montes, M., Ribeiro, M., Ferretti, F., Hubeňáková, V., Stoyanova Kennedy, N., & Karlsson, J. (2025). Thematic working group on mathematics teacher knowledge, beliefs and identity, TWG20. *European Mathematical Society*, 135(249), 56–58. <https://doi.org/10.4171/mag/249>
- Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. In A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 365–380). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6>
- Proulx, J., Mégrourèche, C., & Novak, C. (2024). Beyond proportions: Conceptualizing proportional reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 44(1), 28–34.
- Rowland, T. (2013). The Knowledge Quartet: The genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education*, 1(3), 15–43. <https://doi.org/10.25749/sis.3705>
- Rowland, T. (2020). Frameworks for Conceptualizing Mathematics Teacher Knowledge. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_63
- Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. Springer.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 127–155. <https://doi.org/10.1023/A:1009980419975>
- Sullivan, P., & Wood, T. (Eds.) (2008). *Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching* (Vol. 1). Sense Publishers.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(1), 181–204. <https://doi.org/10.1007/PL00020739>

Fattori fuorvianti nelle rappresentazioni grafiche: un catalizzatore per riconoscere la complessità dell'interpretazione dei grafici statistici

Misleading factors in graphical representations: a catalyst for recognizing the complexity of interpreting statistical graphs

Umberto Dello Iacono* e Maria Alessandra Mariotti^{o1}

*Dipartimento di Matematica e Fisica, Università della Campania “L. Vanvitelli”, Caserta – Italia

^oDipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Università di Siena – Italia

✉ umberto.delloiacono@unicampania.it, mariotti21@unisi.it

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA INGLESE

Sunto / La letteratura ha mostrato chiaramente come i grafici statistici possano essere intenzionalmente fuorvianti: la rappresentazione grafica dell'informazione statistica può essere progettata e realizzata con l'intento di persuadere e modificare i giudizi di valore dei lettori sulla base di una percezione ingannevole; più in generale, il processo di interpretazione può essere influenzato dall'utilizzo di fattori fuorvianti. In una prospettiva educativa, si ipotizza che sia possibile sfruttare gli effetti prodotti da specifici fattori fuorvianti per progettare un intervento didattico incentrato sull'interpretazione dei grafici statistici e finalizzato a far emergere tali fattori e con essi la consapevolezza degli effetti da essi prodotti. Questo articolo presenta l'analisi dei dati raccolti in una prima sperimentazione e mostra come attività opportunamente progettate possano rendere i futuri insegnanti consapevoli dell'effetto dei fattori fuorvianti, ma anche e più in generale, favorire lo sviluppo della loro consapevolezza della complessità del processo di interpretazione.

Parole chiave: rappresentazioni grafiche; grafici statistici; *lie factor*; regole intuitive; futuri docenti.

Abstract / Literature has clearly shown how statistical graphs can be intentionally misleading: graphical representation of statistical information can be designed and realized with the intention of persuading and changing readers' value judgments on the basis of deceptive perception; more generally, the interpretation process can be affected by using misleading factors. Taking an educational perspective, this article assumes the hypothesis that it might be possible to exploit the effects produced by specific misleading factors for designing a didactical intervention focused on the interpretation of statistical graphs and aimed at bringing out these factors and with them an awareness of the effects they produce. The article reports on a first experimentation where the analysis of the data collected shows how appropriately designed activities can make prospective teachers aware of the effect of misleading factors, but also and more generally foster the development of their awareness about the complexity of the interpretation process.

Keywords: graphical representations; statistical graphs; *lie factor*; intuitive rules; prospective teachers.

1. Gli autori hanno contribuito in egual misura allo sviluppo del manoscritto ed entrambi hanno letto e approvato il manoscritto finale. Gli autori dichiarano che il contenuto del manoscritto non è stato pubblicato o presentato per la pubblicazione altrove.

1 Introduzione

Per rendere le persone dei cittadini² riflessivi (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2019) è sempre più necessario educarle all'interpretazione dei grafici statistici: non si tratta solo di saper leggere dati numerici, ma anche di riconoscere relazioni tra questi dati che siano significative rispetto al contesto (Balchin & Coleman, 1966; Ben-Zvi et al., 2017). Grafici, diagrammi o altre figure possono essere intenzionalmente progettati con l'obiettivo di persuadere e modificare i giudizi di valore dei lettori sulla base di una percezione ingannevole. Ha quindi senso analizzare alcune caratteristiche dei grafici che possono risultare ingannevoli, come chiarito nel classico contributo di Huff (1993), che parla di *"How to lie with statistics"*, e come ripreso da Parks e Yeh (2021).

Da un punto di vista didattico, è importante preparare gli insegnanti ad affrontare questo argomento in classe, educando quindi i futuri docenti non solo a riconoscere il problema dei possibili effetti fuorvianti nella lettura dei grafici statistici, ma anche, e più in generale, a prendere coscienza della complessità dell'interpretazione dei grafici statistici come problema didattico.

Come verrà discusso in questo articolo, si possono identificare due principali obiettivi educativi:

- da un lato, un obiettivo immediato è quello di rendere consapevole chi legge il grafico del fatto che i fattori fuorvianti possono influenzare l'interpretazione dei grafici statistici;
- dall'altro, un obiettivo più generale è quello di educare alla lettura dei grafici statistici esplicitando la complessità del processo interpretativo, in particolare esplicitando i due livelli di interpretazione, quello dei dati e quello delle relazioni tra i dati.

Partendo dall'ipotesi che i fattori fuorvianti possono avere l'effetto di condurre a un'interpretazione ingannevole dei dati, si può ipotizzare che tali fattori, e gli effetti che ci si aspetta dalla loro presenza, possano essere utilizzati nella formazione insegnanti con l'intento di favorire la consapevolezza del processo di interpretazione dei grafici statistici, in particolare sulla complessità relativa ai due livelli di rappresentazione: quello dei dati e quello delle loro relazioni. Questa ipotesi ha ispirato la progettazione di un intervento incentrato sull'interpretazione dei grafici statistici: la scelta dei compiti, in particolare la scelta delle rappresentazioni proposte per l'interpretazione, mira a far emergere fattori fuorvianti e con essi la consapevolezza dei lettori dei diversi livelli di rappresentazione. Il presente lavoro riporta i primi risultati ottenuti da una sperimentazione dell'intervento di formazione, finalizzata ad esplorarne l'efficacia.

2 Il tema in primo piano

Le rappresentazioni grafiche, più o meno direttamente collegate alle elaborazioni statistiche, sono presenti in quasi tutti i settori della vita quotidiana (Gigerenzer et al., 1989): sono molto comuni in politica e in economia e compaiono spesso in TV, sulle riviste, sui giornali o sui *social media* e in molte presentazioni create quotidianamente. Questi grafici vengono utilizzati sia per l'analisi dei dati sia per la comunicazione, e spesso sono rappresentazioni che gli studenti incontrano nei programmi scolastici, relativamente a discipline come le scienze e gli studi sociali, e naturalmente in matematica e fisica (Friel et al., 2001). Pertanto, saper interpretare correttamente queste rappresentazioni è un'importante abilità da sviluppare. Nel quadro PISA (OECD, 2019), la capacità di rappresentazione è intesa come la capacità di «selezionare, interpretare, tradurre e utilizzare una varietà di rappresentazioni per descrivere una situazione, interagire con un problema o presentare il proprio lavoro» (OECD, 2019, p. 81, traduzione degli auto-

2. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

ri). Le rappresentazioni a cui si fa riferimento includono «grafici, tabelle, diagrammi, immagini, equazioni, formule e materiali concreti» (OECD, 2019, p. 81, traduzione degli autori). In matematica, per rappresentare e comunicare le informazioni, si possono usare molteplici registri che possono riferirsi a dati qualitativi e quantitativi. Tuttavia, tra le rappresentazioni più comuni, quelle grafiche giocano un ruolo privilegiato in base all'assunto condiviso che possano supportare la visualizzazione. Come afferma Presmeg (2006), «[...] la visualizzazione comprende i processi di costruzione e trasformazione sia delle immagini mentali visive sia di tutte le scritture di natura spaziale che possono essere implicate nel fare matematica» (p. 206, traduzione degli autori). La visualizzazione entra spesso in gioco nei processi di ragionamento e di risoluzione dei problemi (Arcavi, 2003; Stylianou & Silver, 2004), forse perché rende i dati "percettivamente facili" da interpretare (Larkin & Simon, 1987). Infatti, data una sequenza di numeri, la costruzione di una linea che li unisce può produrre una rappresentazione grafica che può aggiungere ulteriori informazioni; ad esempio, una linea può essere interpretata come rappresentante l'andamento di una sequenza di dati. Una rappresentazione di questo tipo può essere ancora più efficace di quella offerta da una tabella: l'aumento, la stabilità e la diminuzione di un particolare fenomeno possono essere immediatamente colti osservando l'inclinazione della linea, verso l'alto, orizzontale o verso il basso (Eshleman, 2002). A tal proposito, alcuni autori sostengono che i grafici siano naturalmente interpretabili (Zacks & Tversky, 1999), anche se molti studi hanno evidenziato che gli studenti hanno difficoltà a interpretare correttamente alcune rappresentazioni grafiche, ad esempio gli istogrammi (Bruno & Espinel, 2009; Cooper, 2018; Cooper & Shore, 2010; Derouet & Parzysz, 2016; Lem et al., 2013; Watson & Moritz, 1998) o i grafici a linee (Ali & Peebles, 2013; Koslyn, 2006). In sostanza, ciò che conta è come l'osservatore interpreta una rappresentazione grafica (Chabris & Koslyn, 2005); ad esempio, spesso vengono interpretati correttamente i grafici a barre nei quali c'è bisogno di valutare l'altezza delle barre, mentre si riscontrano difficoltà nel confrontare le relazioni tra le parti in un grafico a torta poiché si tratta di un processo che richiede il confronto tra relazioni "parte/intero" oppure fra angoli. Queste difficoltà di interpretazione spesso persistono nonostante i numerosi interventi educativi (Kaplan et al., 2014).

2.1 L'interpretazione dei grafici statistici

È possibile interpretare una determinata rappresentazione grafica a due livelli: quello dei dati e quello delle relazioni tra i dati. Poiché esistono diversi modi di rappresentare i dati, ciascuno di essi può evidenziare aspetti diversi e, di conseguenza, diversi modi di rappresentare le relazioni tra i dati. Ad esempio, i due grafici della Figura 1 rappresentano gli stessi dati (cioè il numero di bottiglie di vino vendute nel 2020 dai due venditori A e B della stessa azienda X) ma in modo diverso.

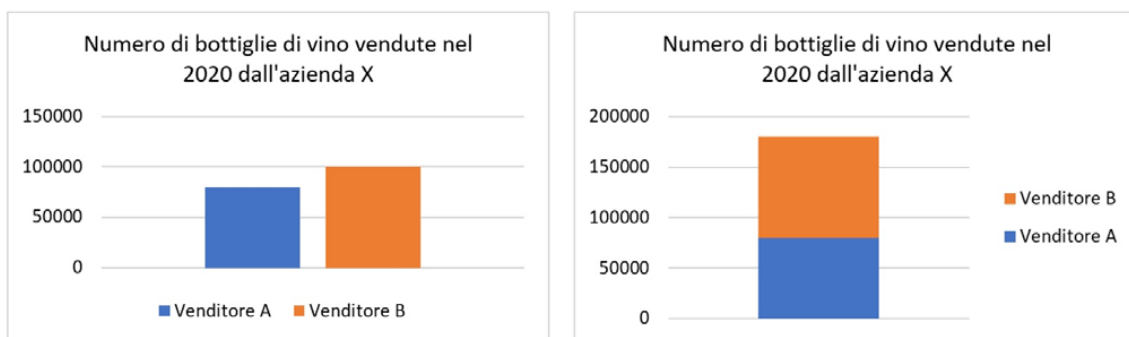


Figura 1. Grafici che rappresentano le stesse informazioni ma in modo diverso.

Il grafico di sinistra rappresenta separatamente i dati relativi ad A e quelli relativi a B, mentre il grafico di destra rappresenta i due dati combinati in un'unica barra. Per quanto riguarda la relazione tra i dati,

le due rappresentazioni non sono equivalenti: da un lato, mentre la differenza di vendite tra i due venditori è evidente nel grafico di sinistra, non può essere percepita con altrettanta evidenza guardando il grafico di destra; dall'altro, il totale delle vendite dei due venditori è evidente nel grafico di destra, mentre non può essere percepito direttamente dal grafico di sinistra. Tale variabilità interpretativa intrinseca al tipo di grafico statistico utilizzato può spiegare le difficoltà degli studenti sia nell'affrontare i grafici, sia nel controllare quelli che Cairo (2015) chiama "*misleading graphics*", ossia caratteristiche dei grafici che possono produrre interpretazioni fuorvianti. Nel seguito queste caratteristiche sono chiamate *fattori fuorvianti*, e se ne presenta una sintesi nel par. 3.

3 Quadro concettuale

La progettazione dell'intervento didattico ha richiesto la selezione di compiti interpretativi da utilizzare coerentemente con l'ipotesi formulata; sono stati quindi considerati i risultati riportati in letteratura sui possibili effetti prodotti da particolari fattori fuorvianti. Inoltre, si è tenuto conto di particolari tratti caratteristici del processo interpretativo dovuti ad aspetti percettivi, come l'attenzione dell'osservatore nei confronti della *figura*, e non di ciò che rimane nello *sfondo*. L'interesse è sui fattori fuorvianti (dualità *figura-sfondo*, distorsione del sistema di riferimento), che possono spiegare alcune delle difficoltà nell'interpretazione di un grafico statistico.

3.1 Dualità *figura-sfondo*

Nell'interpretazione dei grafici, alcune informazioni sui dati possono essere evidenti, cioè percepite direttamente, mentre altre devono essere ottenute attraverso un'ulteriore elaborazione. Pertanto, i risultati classici sui processi percettivi possono essere utili per identificare possibili fattori fuorvianti, in particolare i principi formulati dalla teoria della Gestalt. Hartmann e Crosswhite (1966) sottolineano che «ogni esperienza o vita mentale implica una differenziazione del campo sensoriale o percettivo a cui l'organismo può rispondere secondo uno schema *figura-sfondo*» (p. 657, traduzione degli autori). Esiste quindi un dualismo tra *figura* e *sfondo*, che è una caratteristica di ogni atto percettivo. La *figura* è la caratteristica della situazione alla quale l'osservatore rivolge la propria attenzione, ciò che rimane è da considerarsi *sfondo* e avrà un ruolo secondario. Pertanto, in un'immagine la relazione tra le parti e l'insieme può influenzare il processo di percezione, indirizzando l'attenzione dell'osservatore verso una parte (la *figura*) piuttosto che un'altra che di conseguenza resterà come *sfondo*.

3.2 Distorsione del sistema di riferimento

Per quanto riguarda i grafici cartesiani o a barre, esiste una certa flessibilità nella scelta dell'unità di misura sugli assi di riferimento: qualora si scelga un sistema di riferimento non monometrico, ciò può comportare l'allungamento o la compressione di uno o di entrambi gli assi che a sua volta può modificare l'aspetto dei dati rappresentati. Ad esempio, in **Figura 2**, attraverso la compressione dell'asse delle ordinate nel grafico A e l'allungamento dell'asse delle ascisse nel grafico B, si modifica percettivamente la pendenza del segmento rappresentato. Così, piccole differenze nella variazione di una delle variabili possono apparire ingrandite e, al contrario, grandi differenze possono apparire attenuate (Eshleman, 2002). Tutto questo è parte della normale prassi dell'uso di grafici (statistici e non); ad esempio, è il caso di rappresentazioni per le quali i grafici si basano su sistemi di riferimento semilogaritmici o logaritmici, oppure le rappresentazioni del globo terrestre o le mappe di sistemi di trasporto (come le mappe delle metropolitane): in questi casi, le distanze sulla rappresentazione non sono proporzionali a quelle reali e si rinuncia alla proporzionalità per mettere in luce altri aspetti. Tuttavia, rappresentazioni di questo tipo richiedono da parte di chi le interpreta un buon controllo concettuale sul processo di rappresentazione al fine di assicurarne una lettura efficace.

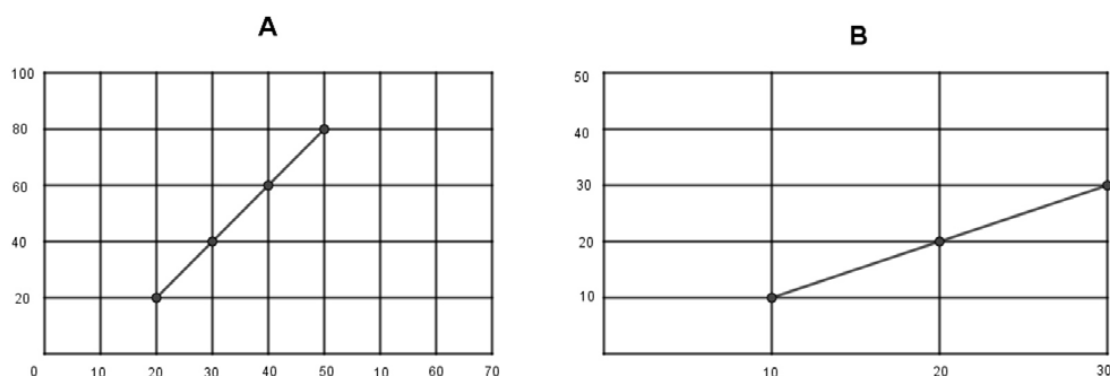


Figura 2. L'allungamento o la compressione degli assi modificano l'aspetto dei dati rappresentati.

In effetti, per l'autore del grafico esiste la possibilità di distorcere intenzionalmente le informazioni al fine di indurre una lettura falsata. Per descrivere questo fenomeno che lega una possibile distorsione intenzionale e il suo effetto ingannevole, Tufte parte dalla considerazione che «un grafico non distorce se la rappresentazione visiva dei dati è consistente con la rappresentazione numerica» (Tufte, 1983/2001, p. 55, traduzione degli autori), cioè se esiste una proporzionalità diretta tra la rappresentazione dei dati, fisicamente misurata sul grafico, e i dati rappresentati. Di qui la definizione di *lie factor* come il rapporto tra la dimensione dell'effetto mostrato nel grafico (cioè la differenza relativa tra le rappresentazioni) e la dimensione dell'effetto mostrato nei dati (cioè la differenza relativa tra i dati). In base alla precedente descrizione della complessità intrinseca della rappresentazione statistica, questa definizione di *lie factor* risulta interessante perché particolarmente significativa rispetto alla distinzione tra il livello di interpretazione dei dati e il livello di interpretazione della relazione tra i dati. Secondo come viene definito matematicamente, il *lie factor* è un indice che misura l'eventuale "distorsione" del grafico: quando il *lie factor* è uguale a 1, non c'è una vera e propria distorsione; quando il *lie factor* è maggiore (minore) di 1, allora la dimensione dell'effetto mostrato nel grafico è maggiore (minore) della dimensione dell'effetto mostrato nei dati, il che porta a sovrastimare (sottostimare) la relazione tra i dati. La seguente Figura 3 mostra due esempi di grafici a barre realizzati a partire dagli stessi dati.

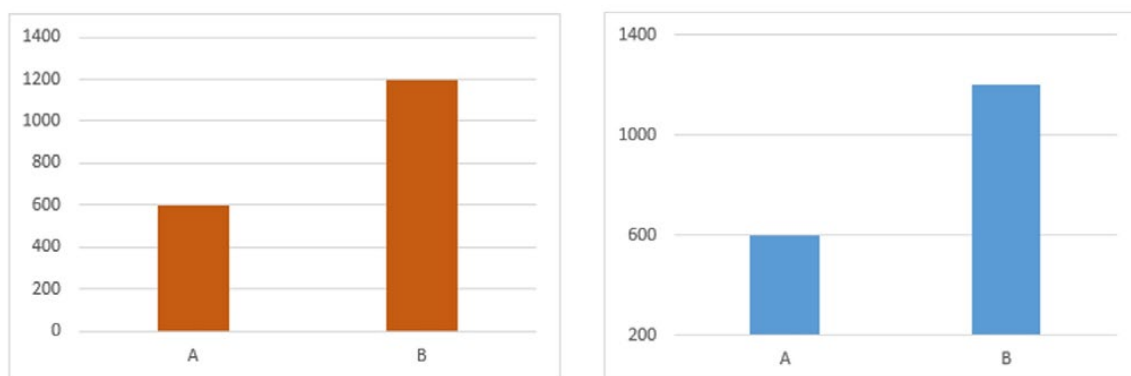


Figura 3. Due esempi di grafici a barre con *lie factor* diversi realizzati a partire dagli stessi dati.

Nel grafico di sinistra, il *lie factor* è uguale a 1 poiché le altezze delle barre sono proporzionali ai valori riportati sull'asse verticale. Nel grafico a destra, invece, non c'è proporzionalità. Infatti, la barra "B" ha un'altezza che è più del doppio di quella della barra "A", ma ciò non è in accordo con i valori sull'asse verticale.

Nel grafico di destra, dunque, il *lie factor* è maggiore di 1 e l'osservatore è portato a sovrastimare i dati. Tufte (1983/2001) riporta diversi esempi di gravi distorsioni esprimibili attraverso la nozione di *lie factor*. In alcuni casi la mancata diretta proporzionalità tra la rappresentazione dei dati, fisicamente misurata sul grafico, e i dati rappresentati può essere un fattore fuorviante intenzionale che produce effetti fuorvianti, come nel grafico di destra della Figura 3.

Questo lavoro intende far emergere tali effetti della distorsione per portare gli studenti e gli insegnanti a riflettere su questi aspetti, e in generale sul processo di interpretazione di grafici; tutto questo è chiarito nella sezione che segue.

4 Ipotesi e domanda di ricerca

Il quadro concettuale sopra descritto ha guidato il progetto di ricerca e ispirato la progettazione di un intervento didattico il cui scopo è rendere i partecipanti consapevoli della complessità dell'interpretazione dei grafici statistici e dei grafici in generale.

L'ipotesi riguardante il ruolo svolto dalla presenza di fattori fuorvianti nel prendere consapevolezza della complessità del processo di interpretazione ha orientato la progettazione: sono stati intenzionalmente introdotti fattori fuorvianti nei compiti di interpretazione con la previsione non solo che insorgessero i relativi effetti, ma che la presa di coscienza di questi effetti potesse innescare la riflessione sul processo di interpretazione e sulla complessità di tale processo.

L'ipotesi di ricerca e la domanda di ricerca sono state quindi formulate come segue:

- *Ipotesi di ricerca*: l'introduzione di fattori fuorvianti nei grafici può portare il solutore del compito a prendere coscienza della complessità del processo interpretativo; in qualsiasi grafico la rappresentazione dei dati determina anche il modo in cui vengono rappresentate le relazioni tra di essi.
- *Domanda di ricerca*: esistono prove che l'intervento didattico progettato possa promuovere la consapevolezza della complessità del processo interpretativo? In particolare, esiste qualche evidenza dell'influenza di fattori fuorvianti sull'innescare di tale consapevolezza?

Considerando l'importanza di educare all'interpretazione dei grafici, e dei grafici statistici in particolare, abbiamo scelto come destinatari del nostro intervento didattico gli studenti dell'ultimo anno del corso di laurea magistrale in matematica (di seguito denominati "partecipanti"), considerati per questo potenziali futuri insegnanti di matematica.

5 Metodo

Di seguito viene descritto il disegno dell'intervento didattico, i partecipanti e l'organizzazione dell'intervento, la raccolta dei dati e i criteri di analisi dei dati.

5.1 Il disegno dell'intervento didattico

Si è voluto esplorare l'ipotesi di ricerca su diversi tipi di grafici per ampliare il più possibile il caso di studio. Per questo motivo, il disegno dell'intervento didattico è stato incentrato su compiti che chiedevano di interpretare due tipologie di grafici statistici: grafici a linee e grafici a barre. Per ciascuna delle

due tipologie, sono stati prodotti tre differenti grafici che rappresentano lo stesso insieme di dati, ma che differiscono per il modo in cui sono rappresentati i dati e di conseguenza le relazioni tra di essi. Le differenze sono dovute all'introduzione di particolari fattori fuorvianti: ad esempio, l'asse delle ordinate è omesso, è ingrandito, i valori riportati non partono dall'origine degli assi, la proporzionalità non è rispettata o le dimensioni delle barre sono allungate.

5.1.1 Progettazione dei grafici utilizzati nell'intervento didattico

Nella creazione dei grafici sono stati considerati i seguenti fattori fuorvianti.

- F1. In accordo con i principi enunciati dalla Gestalt e dagli studi di Hartmann e Crosswhite (1966), in un grafico statistico, la relazione tra le parti e il tutto può influenzare il processo di percezione dirigendo l'attenzione dell'osservatore e di conseguenza la focalizzazione su ciò che deve essere considerato la *figura* e lasciando ciò che rimane come *sfondo*;
- F2. In accordo con gli studi di Tufte (1983/2001), la presenza di un *lie factor* maggiore (minore) di 1 può influenzare l'interpretazione di un grafico statistico portando l'osservatore a sovrastimare (sottostimare) la relazione tra i dati.

I sei grafici sono presentati nella Tabella 1, che è organizzata visualizzando nella stessa colonna i tre grafici dello stesso tipo.

	1	2
A		
B		
C		

Tabella 1. Le tre versioni dei grafici statistici secondo le due tipologie.

Nel seguito, i grafici della **Tabella 1** saranno indicati con il riferimento alla riga e alla colonna. Ad esempio, il grafico C1 è quello che si trova nell'angolo in basso a sinistra della **Tabella 1**.

Per quanto riguarda i grafici a linee, i dati visualizzati nei tre grafici sono gli stessi e riportano le "Spese in tecnologia in Italia nel 2020", ma il loro aspetto differisce a causa di alcuni fattori fuorvianti. L'andamento della curva, rappresentato da una linea lentamente crescente, è lo stesso nei grafici A1 e C1, ma nel grafico A1 l'asse delle ordinate è omesso. In base al fattore fuorviante F1, l'assenza dei valori sull'asse delle ordinate può passare inosservata all'osservatore (*sfondo*). Nel caso del grafico B1, l'asse delle ordinate non parte da 0 (fattore fuorviante F2). Il risultato è un grafico che percettivamente cresce rapidamente, e questo potrebbe portare all'interpretazione di un grande aumento delle spese. Per quanto riguarda i grafici a barre, i dati visualizzati nei tre grafici sono gli stessi e riportano il "Numero di bottiglie di vino vendute dall'azienda Vines nel 2019" da tre venditori (venditore A, venditore B e venditore C). Nel grafico A2, i valori sull'asse delle ordinate non partono da 0, dettaglio che potrebbe non essere notato dall'osservatore (*sfondo*) in accordo con il fattore fuorviante F1. Lo scopo è quello di sminuire percettivamente il lavoro del venditore A, la cui relativa colonna ha un'altezza, e quindi un'estensione, quasi pari a zero. Il grafico C2 è ottenuto dal grafico A2 allungando l'asse delle ordinate, generando così un grafico con *lie factor* maggiore di 1 che può portare l'osservatore a sovrastimare i dati, in accordo con il fattore fuorviante F2, e a percepire una differenza molto forte tra il venditore C e gli altri. Il grafico B2 mostra le informazioni in modo "onesto", cioè i valori sull'asse delle ordinate partono da 0, ma sono meno dettagliati.

5.1.2 La struttura dell'intervento didattico

L'intervento didattico consiste in tre fasi con diversi compiti di interpretazione, ispirati dall'ipotesi di ricerca sul ruolo che i fattori fuorvianti possono avere nell'innescare negli studenti la consapevolezza della complessità del processo di interpretazione.

La fase 1 mira a che il solutore si concentri sull'interpretazione dei diversi grafici sopra descritti. Il compito consiste nel presentare i sei grafici della **Tabella 1**, uno alla volta, in modo che vengano mostrati consecutivamente i grafici di tipologie diverse: prima i grafici della prima riga (A1 e A2), poi quelli della seconda riga (B1 e B2) e infine quelli della terza riga (C1 e C2). Per ogni grafico, ai partecipanti sono poste le seguenti domande: *Osserva il grafico. Cosa si può dedurre? Quali informazioni sta cercando di comunicare? Giustifica la tua risposta. Inoltre, attribuisce un titolo significativo al grafico.*

In accordo con l'ipotesi principale, tali domande hanno lo scopo di guidare verso l'interpretazione dei diversi grafici in termini di relazione tra i dati. A questo proposito, la richiesta di un titolo significativo è un elemento chiave: infatti, ci si aspetta che in questa fase iniziale dell'attività, le risposte a questa richiesta possano rivelare l'effetto dei fattori fuorvianti.

La fase 2 mira a che il solutore si concentri sulla differenza tra rappresentazione dei dati e rappresentazione delle relazioni tra i dati; secondo l'ipotesi principale, l'attività si basa sul confronto di diversi grafici: ci si aspetta che l'effetto prodotto da specifici fattori fuorvianti possa promuovere la consapevolezza del solutore delle discrepanze e delle incongruenze, portandolo così a prendere coscienza della complessità del processo di interpretazione. Nella fase 2, tutti i grafici dello stesso tipo vengono presentati contemporaneamente: prima i grafici a linee (A1, B1 e C1), poi i grafici a barre (A2, B2 e C2), ossia sono presentati insieme i tre grafici che differiscono per gli effetti dei fattori fuorvianti. Il compito è formulato come segue: *Guarda i grafici. Pensi che dicano la stessa cosa? Rappresentano le stesse informazioni? Cercano di comunicare le stesse informazioni? Giustifica le tue risposte e riporta le tue riflessioni.*

La richiesta esplicita di confronto ha come obiettivo quello di portare il solutore ad analizzare i tre casi alla ricerca di somiglianze e differenze: l'effetto di fattori fuorvianti può emergere portando il solutore a riconoscere la differenza tra rappresentazioni di dati e rappresentazioni di relazioni tra dati.

La fase 3 mira a favorire la riflessione dei partecipanti sull'intera attività svolta in relazione al loro possibile futuro ruolo di insegnanti. A tal fine, a ciascun partecipante è chiesto: *Riporta le tue riflessioni sull'attività. Come futuro insegnante, soffermati sugli aspetti educativi che ritieni importanti.*

5.1.3 Partecipanti e organizzazione dell'intervento didattico

I partecipanti alla sperimentazione sono stati diciannove studenti del secondo anno del corso di laurea magistrale in matematica (quindi già in possesso di una laurea triennale in matematica) che frequentavano il corso di Didattica della matematica presso l'Università della Campania "L. Vanvitelli". I partecipanti hanno svolto l'attività durante le lezioni del corso e hanno acconsentito alla raccolta dei dati. L'attività è stata svolta in due lezioni consecutive. Nella prima lezione, della durata di 2 ore, si è svolta la fase 1. Nella seconda lezione, della durata di 3 ore, sono state sperimentate sia la fase 2 (in circa 2 ore) sia la fase 3 (in circa 1 ora). I partecipanti hanno avuto la possibilità di riflettere attentamente su ogni domanda e di formulare le loro risposte senza fretta. L'insegnante non è intervenuto durante l'attività.

Tutte le fasi sono state implementate sulla piattaforma Moodle utilizzando il modulo "Questionario" di Moodle. Ogni fase è stata realizzata attraverso un questionario diverso. Grazie alla funzione "Termini di accesso" di Moodle, i questionari sono stati vincolati l'uno all'altro, il che significa che i partecipanti potevano accedere ai questionari successivi solo dopo aver completato e inviato quelli precedenti. In questo modo, gli studenti hanno affrontato tutte le fasi in modo sequenziale, come previsto dal disegno dell'intervento didattico. Inoltre, sempre in accordo al disegno, impostando in Moodle l'opzione "Visibilità dei questionari inviati" su "mai", i partecipanti non hanno potuto visualizzare le proprie risposte inviate nelle fasi precedenti.

Tutti i dati sono stati raccolti attraverso la piattaforma Moodle.

6 Analisi dei dati e risultati

È stata condotta un'analisi qualitativa delle risposte dei partecipanti e dei commenti che hanno scritto, cercando nei dati raccolti un'interpretazione delle rappresentazioni che mostrasse l'effetto atteso dei fattori fuorvianti. Tenuto conto del ruolo che ogni fase della sequenza avrebbe dovuto svolgere, il resoconto dell'analisi è stato strutturato in base alle tre fasi e ai loro obiettivi specifici.

I partecipanti sono stati indicati con le etichette P1, P2, ..., P19.

6.1 Fase 1

In questa fase un'attenzione specifica è stata rivolta al titolo che i partecipanti sono stati invitati ad attribuire ai grafici. In coerenza con il fattore fuorviante F1, l'attenzione iniziale della maggior parte dei partecipanti si è concentrata su parti specifiche dei grafici, trascurandone altre.

Grafici a linee. Per quanto riguarda i grafici a linee, la maggior parte dei partecipanti sembra essere stata influenzata dal fattore fuorviante F1. Come previsto, per il grafico B1, la maggioranza (quindici partecipanti) ha sovrastimato l'inclinazione della linea e ha fatto riferimento a un aumento significativo della spesa. Per il grafico A1, tutti i partecipanti, invece, hanno fatto riferimento a un aumento della spesa. In particolare, cinque partecipanti hanno fatto riferimento a una crescita «costante», due a una crescita «quasi lineare» e uno a una crescita «progressiva». Tuttavia, sedici partecipanti hanno evidenziato una «crescita lenta». Nove partecipanti hanno sottovalutato l'informazione rappresentata dal grafico C1, e hanno fatto riferimento a un «leggero aumento», un «piccolo aumento» o un «aumento regolare» della spesa. Solo tre partecipanti hanno menzionato un «aumento elevato».

Anche nel caso in cui sono stati percepiti più dettagli di rappresentazione, l'effetto dei fattori fuorvianti F1 e F2 è persistito.

Nel caso del grafico B1 alcuni partecipanti hanno notato la presenza dei valori sull'asse delle ordinate, omessi invece nel grafico A1. Di seguito alcuni esempi:

- P2: «Da quel grafico [B1] si deduce un aumento della spesa in Italia. A differenza del grafico precedente [A1], questo aumento è supportato da valori».
- P15: «In questo caso [B1] l'unità di misura riportata sull'asse delle ordinate rende leggibile l'informazione quantitativa».

Altri hanno fatto riferimento a informazioni più dettagliate, ad esempio:

- P7: «In questo caso [B1] si può dedurre un andamento meno regolare, essendo le informazioni più dettagliate e quindi il grafico più accurato».
- P13: «In questo grafico [B1] possiamo vedere in modo più dettagliato la spesa sostenuta nel 2020».

Alcuni partecipanti hanno fatto esplicitamente riferimento a valori numerici, come ad esempio:

- P18: «Si può dedurre che le spese sono aumentate, passando da 19'000'000 di gennaio 2020 a 25'000'000 di dicembre, mantenendosi stabili tra febbraio e marzo».

In generale, gli effetti dei fattori fuorvianti sono stati evidenti, come mostrano le interpretazioni e soprattutto i titoli dati da P1 e P4 (Tabella 2).

	Grafico A1	Grafico B1	Grafico C1
P1	«Si può dedurre che nel periodo gennaio-marzo la spesa è costante, mentre nel periodo aprile-dicembre si registra un aumento della spesa. Titolo: Aumento della spesa».	«Alla fine dell'anno si registra un aumento sostanziale della spesa rispetto a gennaio. Titolo: Aumento della spesa».	«Alla fine dell'anno si registra un leggero aumento della spesa. Titolo: Leggero aumento della spesa per la tecnologia».
P4	«Il grafico mostra che nel corso di un anno la spesa è aumentata progressivamente. Titolo: Soldi spesi per la tecnologia».	«Nel 2020 la spesa per la tecnologia è aumentata in modo quasi esponenziale. Titolo: Aumento vertiginoso della spesa per la tecnologia».	«La spesa nella tecnologia è aumentata costantemente nel corso del 2020 in Italia, passando da € 20'000'000 dell'anno precedente a ben € 25'000'000. Titolo: La spesa in tecnologia continua a crescere in Italia».

Tabella 2. Interpretazione dei grafici a linee date da P1 e P4.

Tuttavia, già nella fase 1, quando i diversi grafici si sono susseguiti, si sono potute rilevare alcune osservazioni esplicite su possibili interpretazioni fuorvianti. Alcuni partecipanti hanno iniziato a confrontare i grafici dello stesso tipo visualizzati in momenti diversi e sembrano aver riconosciuto una differenza tra le rappresentazioni dei dati e le rappresentazioni delle relazioni tra i dati.

Ad esempio, per quanto riguarda i grafici a linee, P9 ha notato che gli ultimi due grafici (rispettivamente C1 e B1) rappresentavano le stesse informazioni, ma in modo diverso. Ha scritto:

«Ho notato che i valori in realtà non differiscono da quelli del grafico precedente che mostrava le stesse informazioni. Tuttavia, la linea non ha un aumento molto visibile e quindi suggerisce un leggero aumento della spesa. Gli do il titolo "Leggero aumento della spesa tecnologica"».

P9 ha notato che i valori del grafico C1 sono gli stessi del grafico B1 e che, a parità di dati rappresentati, la rappresentazione delle relazioni tra i dati può essere diversa: nel grafico C1, «la linea non ha un aumento molto visibile», cioè il grafico C1 «suggerisce un leggero aumento della spesa»; nello specifico, P9 ha confermato la differenza nell'interpretazione della relazione tra i dati, formulando il titolo «Leggero aumento della spesa tecnologica».

Grafici a barre. Analogamente, l'effetto di fattori fuorvianti è emerso nel caso dei grafici a barre. Per quanto riguarda i grafici A2 e B2, la maggior parte dei partecipanti sembra essere stata influenzata dal fattore fuorviante F1 e si è concentrata sulle altezze delle colonne e, in particolare, sulla colonna più alta (*figura*). Solo quattro partecipanti sembrano essersi soffermati sui valori dell'asse y e nessun partecipante ha osservato che l'asse y non parte da zero (*sfondo*). Come effetto del fattore F2, dodici partecipanti, in riferimento al grafico C2, hanno affermato che il venditore C è di gran lunga «il miglior venditore». I partecipanti sembrano essersi concentrati sulle dimensioni delle immagini: hanno ritenuto che il venditore fosse tanto più bravo quanto più era alta la colonna del grafico a lui riferita, indipendentemente dai valori sull'asse delle ordinate. Anche in questi casi sono state utilizzate le stesse espressioni, «aumento significativo» e «leggero aumento».

Scendendo nei dettagli delle informazioni fornite dai singoli partecipanti, anche per quanto riguarda i grafici a barre, P9 ha scritto:

«Da questo grafico [C2] noto sempre una maggiore vendita del venditore C rispetto agli altri. In realtà, leggendo la scala a sinistra i valori non sono diversi da quelli dei grafici precedenti. Tuttavia, suggerisce che il venditore A non vende quasi nulla, mentre il venditore C è un successo. L'ho intitolato "Supremazia del venditore C"».

P9 ha sostenuto che il grafico C2 rappresenta gli stessi dati dei grafici precedenti («leggendo la scala a sinistra i valori non si distinguono dai grafici precedenti»). Tuttavia, il modo distorto in cui la relazione tra i dati è rappresentata nel grafico C2 riprende quella visualizzata negli altri grafici dello stesso tipo. P9 ha scritto che il grafico C2 «suggerisce che il venditore A non vende quasi nulla, mentre il venditore C è un successo» e infine ha assegnato al grafico il titolo «Supremazia del venditore C».

Anche P8 ha mostrato di essere consapevole delle differenze nella rappresentazione dei dati, ma è emerso l'effetto del fattore fuorviante F2; infatti, P8 ha scritto:

«L'asse delle ordinate rispetto al grafico precedente è molto più distanziato, quindi la risposta diventa molto più evidente: il venditore C ha venduto molto di più».

In una certa misura, alcuni partecipanti sembra che abbiano già discriminato in fase 1 la differenza tra la rappresentazione dei dati e la rappresentazione delle relazioni tra i dati, ma ciò è rimasto raro e limitato.

6.2 Fase 2

Nella fase 2, quando il confronto tra grafici è stato esplicitamente richiesto, si sono cercate evidenze di diverse interpretazioni di grafici dello stesso tipo che mostrassero l'emergere della consapevolezza

che le differenze di interpretazione potevano essere indotte da specifiche scelte nelle rappresentazioni. L'analisi si è concentrata principalmente sull'emergere di commenti che rivelassero lo spostamento dell'attenzione dalla rappresentazione dei dati alle diverse possibili rappresentazioni delle loro relazioni reciproche; in particolare, si è cercato di osservare in che misura gli effetti di un fattore fuorviante contribuissero allo sviluppo della consapevolezza dell'interpretazione.

Come previsto, nella fase 2, la richiesta esplicita di osservare e confrontare i grafici dello stesso tipo e visualizzati contemporaneamente ha portato i partecipanti a notare dettagli non osservati in precedenza, anche se non tutti sembrano aver raggiunto la consapevolezza dell'intera complessità del processo interpretativo ed essere in grado di descriverlo pienamente.

L'analisi ha evidenziato la consapevolezza dei partecipanti delle differenze tra grafici dello stesso tipo. Possiamo dire che quasi tutti i partecipanti si sono resi conto delle differenze, ma solo una parte di loro (nove) sembra essere consapevole del fatto che tali differenze possano influenzare l'interpretazione della relazione tra i dati, osservando esplicitamente che, sebbene i grafici rappresentino gli stessi dati, in realtà rappresentano relazioni diverse tra tali dati. Si noti che l'attenzione si è concentrata su parti specifiche dei grafici, ad esempio le figure o le etichette, «la presenza dell'unità di misura...» o «l'altezza delle barre...». Questo spostamento di attenzione è stato accompagnato da diverse interpretazioni introdotte da espressioni come «il grafico suggerisce che...» o «il grafico vuole comunicare che...»; queste interpretazioni testimoniano un maggiore livello di consapevolezza dell'intenzionalità dei grafici di comunicare informazioni specifiche e possono corrispondere a una raggiunta consapevolezza dell'impatto che le scelte fatte per rappresentare i dati possono avere sull'interpretazione della relazione tra i dati.

Grafici a linee. Per quanto riguarda i grafici a linee, P4 scrive:

«Ovviamente l'informazione comunicata è la stessa, quello che cambia è il come e, soprattutto, cosa viene enfatizzato: nel primo si mostra solo l'aumento annuale, senza specificare la somma; nel secondo si vuole mostrare, in particolare, la variazione mensile della spesa; nel terzo si vuole mostrare la variazione annuale, mostrando numericamente la differenza da gennaio a dicembre».

P4 ha affermato che «l'informazione comunicata è la stessa», ma sembra aver riflettuto sul fatto che i grafici mirano a enfatizzare aspetti diversi; tuttavia, non è chiaro quanta "enfasi" possa diventare "fuorviante". Un'analisi più approfondita è stata condotta da P3, P12 e P9, che hanno utilizzato rispettivamente espressioni che fanno riferimento all'intenzionalità del processo di rappresentazione e di conseguenza a quanto possa essere aperta l'interpretazione.

Espressioni come «vuole evidenziare», «sembra che l'aumento sia minore rispetto al secondo» e «vuole suggerire» esprimono l'intenzionalità dei grafici di mostrare relazioni specifiche tra i dati:

- P3: «[...] Il grafico 2 [B1] invece vuole evidenziare come la spesa per la tecnologia aumenti solo di mese in mese».
- P12: «[...] Guardando gli ultimi due [B1 e C1], i grafici vogliono comunicare le stesse informazioni, ma nell'ultimo grafico sembra che l'aumento sia minore rispetto al secondo, perché nel secondo la spesa è mostrata in modo più dettagliato».

P3 e P12 sembrano aver riconosciuto una differenza tra la rappresentazione dei dati e le relazioni tra di essi, ma non l'hanno esplicitata. Al contrario, P9 ha scritto:

«[...] il secondo e il terzo rappresentano la stessa informazione ma non vogliono comunicare la stessa informazione. Infatti, il secondo vuole suggerire un aumento della spesa, mentre il terzo vuole suggerire un leggero aumento della spesa».

P9 ha distinto tra i dati che i grafici rappresentano («il secondo e il terzo rappresentano la stessa informazione») e ciò che intenzionalmente non vogliono comunicare («ma non vogliono comunicare la stessa informazione»). P9 ha usato le stesse parole, «la stessa informazione», una volta per riferirsi ai dati e poi per riferirsi alle relazioni tra i dati (aumento della spesa). Sembra non rendersi conto dell'incoerenza di questo uso o forse ha cercato di esprimere la relazione tra rappresentare e comunicare e la sua complessità.

Grafici a barre. P9 ha dato una risposta abbastanza simile nel caso dei grafici a barre:

«Anche in questo caso, i grafici rappresentano tutti le stesse informazioni, ma comunicano informazioni diverse. Il terzo grafico [C2] suggerisce che solo il venditore C vende, il venditore B vende poco e il venditore A non vende affatto. Il primo grafico [A2] comunica un divario tra l'addetto alle vendite C e gli altri assoluti. Il secondo grafico [B2] mostra invece una vendita più omogenea dei prodotti».

P9 ha utilizzato le espressioni «i grafici rappresentano tutti le stesse informazioni ma comunicano informazioni diverse», tuttavia ha specificato che «il terzo grafico suggerisce...» e «il primo grafico comunica...» per indicare che i dati rappresentati sono gli stessi, ma i modi in cui sono rappresentati nei diversi grafici suggeriscono interpretazioni diverse.

In realtà, in generale nel caso dei grafici a barre, troviamo risposte simili; ad esempio, P3 ha sottolineato la differenza sulla possibile interpretazione indotta dall'intenzione di comunicare informazioni diverse e ha parlato esplicitamente di distorsione. P3 ha scritto:

«Rappresentano la stessa informazione ma vogliono comunicare informazioni diverse. Il vino del venditore C è stato acquistato il doppio delle volte rispetto al vino del venditore B, che è stato acquistato il doppio delle volte rispetto al vino del venditore A. Il grafico 1 [A2] e il grafico 3 [C2] vogliono distorcere questa informazione. In questi grafici si tende a minimizzare le bottiglie di vino del venditore A e del venditore B».

L'uso dell'espressione «Il grafico 1 e il grafico 3 vogliono distorcere» mostra che P3 ha riconosciuto l'effetto dei fattori fuorvianti. Anche P4 ha riconosciuto tale effetto. Infatti, ha notato l'allungamento dell'asse delle ordinate nel grafico C2 (fattore F2) e l'effetto che questo allungamento provoca a livello percettivo, cioè un «divario meno netto» nelle vendite. P4 ha scritto:

«Anche in questo caso l'informazione è la stessa: cambia il modo di presentare il risultato; l'effetto ottenuto diminuendo la scansione delle bottiglie vendute, e quindi l'altezza dei grafici a barre, è un divario meno netto nel secondo [B2] rispetto al terzo [C2]».

Questo effetto visivo è stato osservato anche da P5, che ha usato l'espressione «visivamente l'impatto è diverso». Ha scritto:

«A livello quantitativo riportano le stesse informazioni, ma visivamente l'impatto è diverso perché dal secondo [B2] al terzo [C2] si evidenzia il divario importante sulle vendite di C rispetto ad A e B».

Per P8, è necessario andare oltre «l'impatto visivo» per comprendere appieno ciò che i grafici cercano di comunicare, ossia le relazioni tra i dati:

«Quando li leggi, l'impatto visivo è certamente importante, ma devi concentrarti di più sui dati in un grafico. Gli intervalli del terzo grafico hanno un'ampiezza maggiore e, di conseguenza, rendono più chiaro ciò che vogliamo trasmettere».

P8 ha notato i fattori fuorvianti («gli intervalli del terzo grafico hanno un'ampiezza maggiore») e il loro effetto che porta a una diversa interpretazione del grafico.

6.3 Fase 3

I commenti forniti dai partecipanti nella fase 3 sono stati analizzati con l'obiettivo di fornire una risposta alla domanda di ricerca riguardante la consapevolezza della complessità del processo di interpretazione dei grafici statistici e quanto tale consapevolezza sia legata alla presenza e agli effetti di fattori fuorvianti.

Dall'analisi delle risposte dei partecipanti alla fase 3, si evince che per la maggior parte di loro sia aumentata la consapevolezza del processo di interpretazione e della sua complessità. La maggior parte dei partecipanti (undici) ha sottolineato l'importanza di concentrarsi sui dettagli nell'interpretazione dei grafici. Ad esempio, P16 ha scritto:

«Ciò che è veramente importante alla fine di questa attività è soffermarsi sui dati a disposizione e analizzarli in dettaglio».

P11 ha sottolineato l'importanza di osservare «l'andamento del grafico» ma anche la «scala utilizzata». Ha scritto:

«Penso che questa attività sia utile per gli studenti per imparare a guardare un grafico nella sua interezza, cioè i valori inseriti, la scala utilizzata, l'andamento del grafico e come ricavarne informazioni utili».

Anche P5 ha parlato di dettagli, ma anche di una consapevolezza degli errori commessi, maturata gradualmente durante l'attività:

«Durante questi diversi questionari, ho preso gradualmente coscienza degli errori di valutazione che avevo commesso nelle fasi precedenti, emersi proprio dal confronto di situazioni simili e con una maggiore riflessione sui dettagli».

Ricordando gli effetti dei fattori fuorvianti sperimentati nelle fasi precedenti, P8 ha fatto riferimento al fatto che a volte i grafici possono essere progettati intenzionalmente per indurre una specifica interpretazione. Ha quindi sottolineato l'importanza di saper leggere i grafici per capire quali informazioni vogliono comunicare e individuare eventuali intenzioni fuorvianti. Infatti, P8 ha scritto:

«Saper leggere un grafico non ti rende schiavo di quello che gli altri vogliono farti capire, ma puoi avere una tua idea chiara e immediata».

Allo stesso modo, P3 e P9 hanno fatto esplicito riferimento all'inganno. P3 ha scritto:

«I grafici devono essere ben interpretati perché possono essere ingannevoli».

Tuttavia, P9 ha sottolineato sia la necessità di essere attenti sia la necessità di un'abilità specifica per interpretare un grafico; ha scritto:

«Questa attività mi suggerisce che l'informazione che si vuole trasmettere è facilmente manipolabile se la si guarda in modo distratto o se non si sanno leggere i grafici in un certo modo. Penso che sia essenziale saper leggere un grafico e non farsi "ingannare" da ciò che vuole trasmettere».

Oltre a concentrarsi genericamente sull'importanza e sulla complessità di acquisire una competenza specifica per l'interpretazione delle rappresentazioni statistiche, alcuni partecipanti hanno cercato di spiegare in cosa potrebbe consistere tale competenza. Ad esempio, due partecipanti, P1 e P17, sembravano consapevoli della necessità di considerare il modo in cui i dati sono rappresentati e di come tale modo di rappresentazione possa influenzare l'interpretazione delle relazioni tra di essi.

- P1: «Dobbiamo soffermarci sui dettagli perché anche grafici uguali sono apparsi diversi».
- P17: «[...] ad esempio, i grafici sulle vendite di vino all'inizio, per come erano rappresentati, potevano sembrare diversi, ma in realtà valutando i dati si vede che rappresentano gli stessi risultati».

In entrambi i casi, appare il ruolo degli effetti prodotti dai fattori fuorvianti («anche grafici uguali sono apparsi diversi», «i grafici... potevano sembrare diversi, ma in realtà...»): P1 e P17 sembrano aver raggiunto la consapevolezza del processo di interpretazione riflettendo sulla loro esperienza e in particolare sull'effetto che modi diversi di rappresentare un insieme di dati possono avere sull'interpretazione della loro relazione: come viene rappresentato il numero di bottiglie vendute e come questo può cambiare il modo di rappresentare il tasso di vendita dei venditori di vino.

Le riflessioni dei partecipanti hanno anche tenuto conto della rilevanza didattica di affrontare questi temi in classe con gli studenti. Ad esempio, P10 ha scritto:

«Penso che questa attività sarebbe utile nelle scuole per mostrare come gli stessi diagrammi possano essere fraintesi in modi diversi. È importante perché, lavorando da soli e dando una risposta autonoma, è lo stesso studente che si rende conto di aver sbagliato o meno quando guarda il diagramma successivo. Sbagliare è un ottimo modo per imparare».

Sembra che P10 abbia sottolineato che l'attività permette ai partecipanti di rendersi conto autonomamente dei propri errori e che questo è un passo necessario per l'apprendimento. Molto interessante è la risposta di P15, che avvalorava definitivamente l'ipotesi di ricerca sull'efficacia dell'attività progettata:

«Un'osservazione superficiale dei grafici potrebbe portare a dedurre informazioni errate. È importante sviluppare capacità di osservazione e riflessione, nonché strumenti tecnici, affinché la prima informazione che l'occhio riesce a cogliere non sia quella definitiva. Riuscire a quantificare i dati è l'unico modo perché la nostra percezione non sia falsata. Un aspetto didattico che ritengo importante è certamente la comprensione che non tutto ciò che ci viene presentato è così immediato; gli strumenti appresi durante lo studio che possono risultare così ostici, sono fondamentali affinché i nostri occhi siano, appunto, meno ingannabili».

7 Discussione e conclusioni

Nell'interpretare un grafico statistico, si fanno inferenze sulle relazioni tra i dati rappresentati e queste possono suggerire conclusioni che possono rivelarsi molto diverse tra loro. In particolare, può accadere che particolari modalità di rappresentazione inducano conclusioni distorte (Pastore et al., 2017; Weissgerber et al., 2015). Questo è il caso di quelli che nel presente articolo sono stati chiamati fattori fuorvianti.

La ricerca presentata in questo lavoro nasce dall'ipotesi che i fattori fuorvianti possano essere utilizzati didatticamente per innescare la consapevolezza della complessità del processo interpretativo che coinvolge allo stesso tempo l'interpretazione dei dati e l'interpretazione delle relazioni tra di essi. Partendo da questa ipotesi, è stato progettato un intervento didattico in tre fasi relativo al problema didattico dell'interpretazione dei grafici statistici. Il problema si pone a due livelli: rendersi conto che i grafici possono essere influenzati da fattori fuorvianti; promuovere la consapevolezza della complessità del processo di interpretazione di un grafico statistico. L'intervento didattico è stato sperimentato con studenti dell'ultimo anno del corso di laurea magistrale in matematica. L'analisi dei dati raccolti durante tale sperimentazione sembra supportare la ragionevolezza dell'ipotesi di ricerca. L'analisi dei dati ha mostrato l'emergere dell'effetto dei fattori fuorvianti, ma anche una crescente consapevolezza della complessità del processo interpretativo; in particolare, i partecipanti sembrano aver raggiunto la consapevolezza dell'intenzionalità del processo di rappresentazione e, di conseguenza, di quanto aperta possa essere l'interpretazione, in particolare rispetto alla relazione tra i dati rappresentati. L'analisi presentata sopra può quindi fornire una prima verifica dell'ipotesi di ricerca. Anche se non tutti i partecipanti hanno mostrato uguale profondità nell'esplicitare la relazione tra i dati, molti di loro hanno confrontato i grafici e si sono concentrati sia sui dati sia sulla loro relazione, cercando elementi che potessero esplicitarla. Inoltre, come testimoniano i commenti forniti nella fase 3, l'intervento educativo ha permesso ai partecipanti di vivere momenti in cui hanno assunto un duplice ruolo, prima come studenti, alle prese con la lettura e l'interpretazione dei grafici, e poi come futuri insegnanti, riflettendo sugli aspetti educativi legati all'attività. Come previsto, la fase 3 ha offerto ai partecipanti l'opportunità di riflettere, non come studenti ma come futuri insegnanti, sul ruolo cruciale svolto da specifici aspetti della rappresentazione grafica nell'ambito della statistica e sull'importanza educativa di affrontare questi temi in classe. Come chiarito in precedenza, il contributo di questa ricerca non riguarda direttamente i concetti statistici, poiché si focalizza sul problema educativo dell'interpretazione dei grafici. Tuttavia, affronta un elemento chiave della conoscenza statistica, ossia le rappresentazioni dei dati e i processi di inferenza sulle loro relazioni che derivano da tali rappresentazioni. Da questo punto di vista, la ricerca contribuisce ad aspetti riguardanti lo sviluppo delle conoscenze didattiche degli insegnanti (Shulman, 1986) nell'ambito della statistica (Groth, 2007).

I risultati di questa ricerca sembrano inoltre mostrare che l'ipotesi di ricerca può essere tradotta in un principio di progettazione per interventi didattici: utilizzare grafici costruiti a partire da specifici fattori fuorvianti per rendere gli studenti consapevoli della complessità del processo di interpretazione. Ovviamente, attività simili a quella descritta, analizzata e discussa in questo articolo sono solo un prerequisito per una successiva discussione in classe con gli studenti sugli aspetti dell'interpretazione dei grafici statistici.

C'è un altro aspetto interessante che emerge dall'analisi dei dati e riguarda una questione più generale. Osservando un grafico e interpretando alcune sue caratteristiche, è possibile inferire direttamente non solo le proprietà di ciò che è rappresentato, ma anche altre proprietà relative al contesto, cioè alla situazione da cui i dati sono estratti. Questa inferenza può essere fatta automaticamente senza necessariamente rendere esplicita la relazione con i dati stessi. Dall'analisi dei dati si è osservato, ad esempio, in riferimento al grafico a barre C2, come dodici partecipanti, nel vedere che la barra relativa

al venditore C era la più alta di tutte, hanno automaticamente inferito che C era il miglior venditore in assoluto. Quanto appena descritto potrebbe essere interpretato, a nostro parere, secondo la teoria delle regole intuitive (Fischbein, 2005; Stavy et al., 2006; Tirosh & Stavy, 1999) e, in particolare, alla regola intuitiva “più A – più B”, secondo la quale il confronto $A1 > A2$, in riferimento a una quantità A, si estende al confronto $B1 > B2$ in riferimento a un'altra quantità B che si considera correlata ad A. Ad esempio, se un osservatore vede oggetti della stessa forma, con il primo più pesante del secondo, lanciati dalla stessa altezza, tende a concludere che il primo arriverà a terra prima del secondo. Oppure, se un osservatore vede due angoli (opposti al vertice) con i lati del primo rappresentati più lunghi del secondo, tende a concludere che il primo angolo è maggiore del secondo. Questa regola intuitiva “più A – più B” potrebbe spiegare alcune delle interpretazioni errate dei grafici statistici. Nella fase 1, la maggior parte dei partecipanti si è comportata secondo la regola intuitiva “più A – più B”, indipendentemente dalla presenza o meno dei valori sull'asse delle ordinate nei grafici. Infatti, la maggior parte dei partecipanti ha considerato:

- eccessive le spese che erano rappresentate nei punti in cui la linea aveva una pendenza maggiore;
- il miglior venditore quello le cui vendite erano rappresentate dalla colonna più alta.

A questo proposito, Tversky (1997) sottolinea che le persone, quando leggono un grafico, tendono a dare più importanza alla dimensione verticale che a quella orizzontale e a vedere “alto” come “più” o “migliore”. La dimensione verticale, infatti, è più significativa nell'interazione con il mondo (ad esempio, la gravità agisce verticalmente, le persone crescono verticalmente). Questo potrebbe spiegare perché certe rappresentazioni sembrano essere più difficili da interpretare per gli studenti rispetto ad altre. Da questo punto di vista, la presente ricerca può contribuire alla ricerca internazionale sulle regole intuitive (Fischbein, 2005; Stavy et al., 2006; Tirosh & Stavy, 1999). Infatti, i dati analizzati in questo lavoro sembrano mostrare che tali regole possono coinvolgere anche aspetti legati alla statistica e alla lettura e interpretazione dei grafici.

In tal senso, questo lavoro apre una direzione di ricerca sugli aspetti percettivi legati alla lettura dei grafici statistici: comprendere più a fondo come e perché la lettura di un grafico può essere fuorviante potrebbe fornire elementi chiave per la progettazione di interventi educativi volti a sviluppare la sensibilità didattica degli insegnanti sullo sviluppo della capacità di rappresentazione degli studenti. Tuttavia, questo studio ha riguardato soltanto un numero limitato di futuri insegnanti. Da questo punto di vista, sono necessarie ulteriori ricerche che possano coinvolgere anche studenti e insegnanti in servizio, per analizzare il processo di interpretazione di una rappresentazione grafica. Sarà interessante anche allargare l'indagine ad altri ambiti della matematica, o alla modellazione matematica, per i quali l'interpretazione di grafici specifici presenta complessità simili.

Bibliografia

- Ali, N., & Peebles, D. (2013). The effect of gestalt laws of perceptual organization on the comprehension of three-variable bar and line graphs. *Human factors*, 55(1), 183–203.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.
- Balchin, W. G. V., & Coleman, A. M. (1966). Graphicacy should be the fourth ace in the pack. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 3(1), 23–28. <https://doi.org/10.3138/C7Q0-MM01-6161-7315>

- Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.) (2017). *International handbook of research in statistics education (1st ed.)*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7>
- Bruno, A., & Espinel, M. C. (2009). Construction and evaluation of histograms in teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 40(4), 473–493. <https://doi.org/10.1080/00207390902759584>
- Cairo, A. (2015). Graphics Lies, Misleading Visuals. In D. Bihanic (Ed.), *New Challenges for Data Design* (pp. 103–116). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-6596-5_5
- Chabris, C. F., & Kosslyn, S. M. (2005). Representational correspondence as a basic principle of diagram design. In S.-O. Tergan & T. Keller (Eds.), *Knowledge and information visualization: Searching for synergies* (pp. 36–57). Springer.
- Cooper, L. L. (2018). Assessing students' understanding of variability in graphical representations that share the common attribute of bars. *Journal of Statistics Education*, 26(2), 110–124. <https://doi.org/10.1080/10691898.2018.1473060>
- Cooper, L. L., & Shore, F. S. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*, 18(2), 18. <https://doi.org/10.1080/10691898.2010.11889487>
- Derouet, C., & Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions? *ZDM – Mathematics Education*, 48(6), 757–773. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0769-9>
- Eshleman, J. W. (2002). A Review of Edward R. Tufte's "The Visual Display of Quantitative Information". *Journal of Precision Teaching And Celeration*, 18(2), 88–94.
- Fischbein, E. (2005). *Intuition in science and mathematics: An educational approach (Vol. 5)*. Springer Science & Business Media.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124–158.
- Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., & Krüger, L. (1989). *The empire of chance: How probability changed science and everyday life*. Cambridge University Press.
- Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 427–437.
- Hartmann, G. W., & Crosswhite, F. J. (1966). Classics in Mathematics Education: Gestalt Psychology and Mathematical Insight. *The Mathematics Teacher*, 59(7), 656–661.
- Huff, D. (1993). *How to lie with statistics*. WW Norton & Company.
- Kaplan, J. J., Gabrosek, J. G., Curtiss, P., & Malone, C. (2014). Investigating student understanding of histograms. *Journal of Statistics Education*, 22(2), 1–30.
- Kosslyn, S. M. (2006). *Graph design for the eye and mind*. Oxford University Press.

- Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65–99.
- Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2013). On the misinterpretation of histograms and box plots. *Educational Psychology*, 33(2), 155–174.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- Parks, J., & Yeh, D. D. (2021). How To Lie with Statistics and Figures. *Surgical infections*, 22(6), 611–619.
- Pastore, M., Lionetti, F., & Altoè, G. (2017). When one shape does not fit all: A commentary essay on the use of graphs in psychological research. *Frontiers in Psychology*, 8, 1666. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01666>
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205–235). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stavy, R., Babai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Lin, F. L., & McRobbie, C. (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(3), 417–436.
- Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353–387.
- Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive Rules: A way to Explain and Predict Students' Reasoning. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of Mathematical Knowledge* (pp. 51–66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1584-3_3
- Tufte, E. R. (2001). *The Visual Display of Quantitative Information* (2nd ed.). Graphics Press. (Prima edizione pubblicata nel 1983).
- Tversky, B. (1997). Cognitive principles of graphic displays. *AAAI fall symposium on reasoning with diagrammatic representations II* (pp. 8–10). AAAI Press.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1998). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37(2), 145–168. <https://doi.org/10.1023/A:1003594832397>
- Weissgerber, T. L., Milic, N. M., Winham, S. J., & Garovic, V. D. (2015). Beyond bar and line graphs: Time for a new data presentation paradigm. *PLoS biology*, 13(4), e1002128. <https://doi.org/10.1371/journal.pbio.1002128>
- Zacks, J., & Tversky, B. (1999). Bars and lines: A study of graphic communication. *Memory & Cognition*, 27, 1073–1079.

Esperienze didattiche

DdM

Coreo-Graph: un laboratorio didattico di teoria dei grafi e danza

Coreo-Graph: a learning laboratory of graph-theory and dance

Teresa Calogera^{••} e Tiziano Penati^{•••}

[•]Dipartimento di Matematica “F. Enriques”, Università di Milano – Italia

^{••}Istituto di Istruzione e Formazione Professionale “Immaginazione e Lavoro”, Milano – Italia

^{•••}Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, Istituto Nazionale di Alta Matematica “F. Severi”,
Università di Parma – Italia

✉ teresa.calogera@gmail.com, tiziano.penati@unimi.it

Sunto / Questo contributo rivisita un laboratorio didattico di teoria dei grafi descritto in Gaio et al. (2020), basato sul problema dei ponti di Königsberg di Eulero, estendendone alcuni aspetti concettuali e alcune attività laboratoriali; inoltre, si propone un'attività motoria ispirata alla danza, allo scopo di esplorare i cammini euleriani e le loro proprietà. In questa nuova veste, il progetto è stato proposto e sperimentato nel biennio scolastico 22/23-23/24 come attività di rafforzamento delle competenze curriculari di *problem solving*. Allo stesso tempo, esso è stato un'occasione di riflessione sul ruolo delle attività *embodied* nel facilitare la creazione di concetti astratti della matematica.

Parole chiave: teoria dei grafi; danza; *embodied cognition*; *problem solving*; problema di Königsberg.

Abstract / This contribution revisits a learning laboratory of graph theory, based on the well-known Königsberg's bridges problem due to Euler, already proposed and described in Gaio et al. (2020): some of its conceptual aspects and laboratory activities are extended, in particular by inserting a dance-inspired activity in order to explore the properties of eulerian paths. In this new guise, the project was proposed and tested in the school years 22/23-23/24 as an activity to strengthen the curricular skills of problem solving. At the same time, it was an opportunity to think over the role of embodied activities in facilitating the formation of abstract concepts of mathematics.

Keywords: graph theory; dance; embodied cognition; problem solving; Königsberg's problem.

1 Introduzione

Il progetto qui descritto nasce con l'intento di offrire un laboratorio di teoria dei grafi che sia di potenziamento delle competenze di *problem solving* nella scuola secondaria di primo grado¹ e nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado² per le classi aderenti al Progetto Liceo Matematico³ (denominate nel seguito "classi del Liceo Matematico" o più semplicemente "Liceo Matematico") riprendendo la sperimentazione di *outdoor learning* descritta in Gaio et al. (2020) e valutandone possibili integrazioni e modifiche. Una delle strategie consolidate nel proporre la teoria dei grafi nei vari ordini scolastici, come attività di potenziamento di *problem solving*, è quella di presentarla come strumento per la risoluzione del celebre problema dei ponti di Königsberg di Eulero (Ferrarello & Mammana, 2017; González et al., 2021; Robinson, 2006; Santoso, 2018). Il fiume Pregel crea all'interno della città di Königsberg due isole, che sono collegate alla terraferma da sei ponti, mentre un settimo ponte collega le due isole tra di loro (Figura 1, immagine di sinistra): il problema consiste nel chiedersi se esista o meno un percorso che, partendo da una qualunque delle quattro regioni delimitate dal fiume Pregel, permetta di attraversare in sequenza tutti i sette ponti che collegano tali regioni, senza attraversare due volte lo stesso ponte. La non esistenza di un simile percorso deriva dall'applicazione del teorema di Eulero, riportato di seguito, al grafo che si ottiene associando un vertice ad ogni regione e un arco ad ogni ponte della mappa in questione (Figura 1, immagine di destra).

Teorema di Eulero (Teorema sui cammini/circuiti euleriani in grafi connessi)

In un grafo connesso G , di vertici $v_i \in V$:

- I. Se tutti i vertici v_i hanno grado pari, allora esistono cammini euleriani e non dipendono dalla scelta iniziale del vertice. Inoltre, il vertice di partenza e di arrivo coincidono (ovvero i cammini sono circuiti euleriani).
- II. Se esistono solo due vertici v_1 e v_2 di grado dispari, allora esistono solo cammini euleriani che partono in v_1 e terminano in v_2 o viceversa (quindi non sono circuiti euleriani).
- III. In tutti gli altri casi non esistono cammini euleriani.

Infatti, una soluzione al problema dei ponti di Königsberg corrisponde a un cammino euleriano sul grafo (ovvero a una sequenza di vertici e archi che contenga una e una sola volta tutti gli archi presenti), e il grafo di Figura 1 presenta quattro vertici $\{v_i\}_{i=1,\dots,4}$ di grado dispari, dove il grado di un vertice v_i indica il numero di archi ad esso collegati.

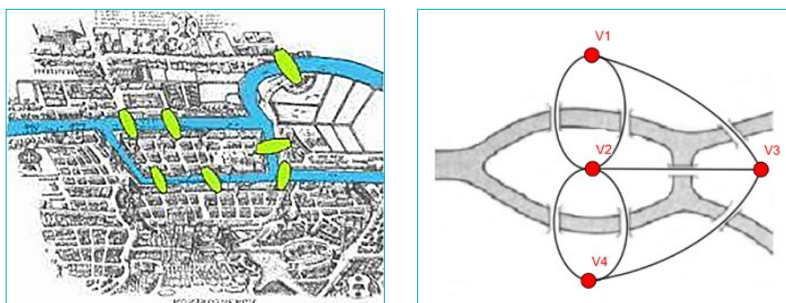


Figura 1. Illustrazione del problema dei ponti di Königsberg di Eulero (fonte Wikipedia) e del corrispondente grafo.

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.
 2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Cantone Ticino.
 3. Il Progetto Liceo Matematico, diffuso in tutta Italia e caratterizzato da una forte collaborazione tra scuole secondarie e università, prevede ore aggiuntive rispetto a quelle curriculari per trattare temi di matematica, soprattutto attraverso attività interdisciplinari. Per maggiori informazioni si consulti il sito: <https://www.liceomatematico.it>. In particolare, in questo articolo, il riferimento è al Polo di Milano Statale.

La proposta didattica contenuta in Gaio et al. (2020) è riproporre il tema del problema dei ponti di Königsberg in un contesto motorio di orientamento all'interno di una mappa cittadina: l'idea dell'attività è quella di cercare, se esiste, una soluzione al *problema della guida turistica*, che deve accompagnare un gruppo di turisti⁴ lungo un itinerario, facendo in modo che ciascuna strada (che compone l'itinerario) venga percorsa una e una sola volta. Successivamente, la stessa tipologia di problema viene riproposta col linguaggio della teoria dei grafi, per mettere in luce la struttura geometrica del problema, il ruolo del grado di un vertice e illustrare il teorema di Eulero sull'esistenza dei cammini euleriani. La scelta metodologica è dunque quella di integrare le attività laboratoriali di *problem solving* con esperienze di tipo *embodied*, che stimolino il riconoscimento della struttura di un problema matematico assegnato e dei suoi elementi, ancorandoli così a un'esperienza concreta che ne faciliti il successivo studio astratto. Rispetto a tale progettazione, si è deciso di ampliare e modificare le attività laboratoriali in due direzioni:

- è stato aggiunto un costante focus sulla scelta del vertice di partenza in relazione alle proprietà di apertura o chiusura dei cammini, per rinforzare la riflessione sul ruolo del grado di un vertice all'interno dell'enunciato del teorema di Eulero. Le classi hanno così potuto lavorare fin dall'inizio su aspetti locali (la scelta del vertice) e globali (chiusura dei cammini) delle soluzioni;
- l'attività motoria è stata ripensata per renderla osservabile direttamente da parte dei docenti/esperti durante tutto il suo svolgimento. Ispirandosi alla danza, si è infatti sostituito il *problema della guida turistica* con quello che ha preso il nome di *problema delle coreografie euleriane*, da cui il titolo *Coreo-Graph*: l'obiettivo è quello di eseguire una sequenza di passi che collegano alcune posizioni assegnate (coreografia), in modo tale che tutti i passi siano eseguiti esattamente una e una sola volta (si veda il par. 4.2).

Nella sperimentazione è stato possibile proporre tale esperienza motoria solo all'interno del contesto della scuola secondaria di primo grado, mentre le classi del Liceo Matematico hanno dovuto svolgere le attività dei ponti e dei grafi in sequenza; questa differenza è stata comunque un'occasione per riflettere sull'efficacia di un'attività *embodied* nella formazione di nuovi concetti matematici.

Il resto del lavoro è organizzato come segue. Nel par. 2 si richiamano sinteticamente i temi teorici portanti del progetto, ovvero il *problem solving* e l'*embodiment*. Nel par. 3 vengono descritti gli obiettivi formativi e la metodologia adottata nello svolgimento del laboratorio. Il par. 4 è dedicato alla descrizione delle varie fasi del laboratorio e alla presentazione dell'attività *Coreo-Graph*. Il par. 5 raccoglie i risultati della sperimentazione, mentre il par. 6 è dedicato alle conclusioni e alle prospettive di sviluppo del progetto qui descritto.

2 *Problem solving ed embodiment*

2.1 Il *problem solving*

La comprensione degli elementi fondamentali della teoria dei grafi e il teorema di Eulero non costituiscono, dal punto di vista didattico, il fine del laboratorio proposto, quanto più un mezzo per mostrare e far sperimentare un'attività di *problem solving*. Come afferma Schoenfeld, il punto di partenza è la convinzione che

«L'insegnamento della matematica dovrebbe rendere gli studenti consapevoli del significato della disciplina: della sua portata, potenza, applicazione e storia. Dovrebbe dare loro una percezione di cosa sia la matematica e di come venga praticata, a un livello appropriato affinché gli studenti possano sperimentarlo e capirlo».

(Schoenfeld, 1992, p. 335, traduzione degli autori)

4. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

Per quanto possa risultare difficile fornire una definizione condivisa del concetto di *problem solving*, o di cosa caratterizzi un'attività di *problem solving* come tale (Chamberlin, 2008), si concorda sul fatto che un problema che rappresenti una sfida nuova e coinvolgente, e che non sia risolvibile con un semplice accesso a conoscenze già note (Schoenfeld, 1992, 1994), offra un'occasione per cogliere il significato della matematica. Un'attività di *problem solving*, infatti, non deve fornire uno strumento da applicare in maniera ripetitiva, come accade nello svolgimento di un esercizio. Piuttosto, deve portare a una personale ricerca (*plan*), sperimentazione (*act*) e verifica (*test*) delle possibili soluzioni del problema (Ortiz, 2016; Pólya, 1945), anche attraverso la formulazione e la validazione di congetture. La ricerca di una soluzione spesso richiede la ripetizione di diversi tentativi, che sono necessari per indagare la natura del problema e che quindi possono facilitarne la comprensione. Proprio la comprensione del problema dovrebbe essere l'obiettivo ultimo di tali attività (Schoenfeld, 1992, 1994): per questo, dopo aver trovato una soluzione, è significativo interrogarsi sull'esistenza di altre soluzioni, o sulle proprietà che le soluzioni dovrebbero avere per essere tali; altrettanto significativa è inoltre la prassi di provare a modificare i dati del problema in modo che esso ammetta almeno una soluzione (eventualmente assegnata a priori). Queste sono le principali strategie di *problem solving* che si possono ritrovare nelle attività qui descritte, proposte in varie fasi del progetto come metodologie per accompagnare le classi verso un'indagine più ampia e approfondita del problema, necessaria a cogliere il contenuto del teorema di Eulero.

Le attività descritte nel par. 4 offrono complessivamente una visione della matematica tutt'altro che procedurale, in accordo con la natura esplorativa del *problem solving*. Lo studente, infatti, per portare a termine ciascuno dei compiti che gli vengono assegnati, non deve riprodurre schemi o algoritmi spiegati dall'insegnante, ma, piuttosto, è invitato a confrontarsi con un problema nuovo per la risoluzione del quale egli avrebbe bisogno dell'aiuto di qualcuno appena più esperto. Perciò, l'insegnante non si pone come unico detentore del sapere che fornisce istruzioni da seguire, quanto più come autentico soggetto che indaga e affronta il problema insieme agli studenti, con l'obiettivo di aiutarli a «rendere il pensiero visibile» (Collins et al., 1991). In questo modo, avviene un processo in cui l'attività cognitiva degli studenti e quella metacognitiva incoraggiata dall'insegnante si integrano continuamente e permettono non solo la comprensione del particolare, ma anche la scoperta – o l'approfondimento – di un modo di agire tipicamente matematico.

2.2 L'embodiment

Il modo in cui attribuiamo un significato a un concetto matematico è modellato dalla nostra interazione con il mondo, che avviene attraverso il movimento e la percezione. Il concetto di *embodiment* si riferisce quindi al contributo del corpo, attraverso le esperienze motorie e sensoriali, nei processi di formazione, comprensione e comunicazione dei concetti astratti della matematica (Alibali & Mitchell, 2012; Núñez, 2000, 2008; Smith & Walkington, 2019); in tal senso, le potenzialità e i limiti del nostro pensiero astratto dipendono anche dalle capacità e dalle restrizioni del nostro sistema motorio-sensitivo. Tale influenza è visibile, per esempio, quando immaginiamo un insieme come una collezione di oggetti a noi noti (Núñez, 2008), oppure una frazione (e quelle ad essa equivalenti) come una porzione di una torta divisa in parti uguali (Edwards, 2009), un angolo come una regione di piano compresa tra due braccia (Alibali & Mitchell, 2012), l'ordinamento dei numeri naturali sulla linea orientata e il concetto di proporzionalità tra interi come spostamenti relativi di un individuo rispetto ad un altro (Smith & Walkington, 2019; Way et al., 2014), le proprietà del grafico di una funzione come traiettorie descritte da movimenti del corpo nello spazio (Gerofsky, 2011). In tutti questi esempi ragioniamo infatti sui concetti della matematica e sulle loro relazioni dando loro un significato attraverso un riferimento concreto. Un'attività *embodied* è dunque un'attività didattica in cui «l'esperienza fisica è connessa ad azioni e percezioni matematicamente rilevanti» (Smith & Walkington, 2019, p. 17), che possono avvenire attraverso il movimento del corpo, la manipolazione di materiali o in generale con esperienze dirette e pratiche.

Nel progetto qui presentato, lo strumento scelto per avvicinarsi alla comprensione degli elementi costitutivi della teoria dei grafi e alla risoluzione del problema è un'attività *embodied* che utilizza la danza: gli schemi geometrici e ritmici presenti nei movimenti, e nella musica che li accompagna, possono infatti offrire un'esperienza complementare per indagare e comprendere le proprietà di alcuni oggetti matematici (Gerofsky, 2013; Gerofsky et al., 2023). L'introduzione di una traduzione intermedia tra le mappe e i grafi, attraverso l'utilizzo di schemi coreografici, può facilitare l'analogia tra il problema dei ponti di Königsberg e la teoria dei grafi, perché il pensiero si trasforma in un'azione del corpo. I ponti da attraversare tra una regione e l'altra diventano così passi da eseguire tra due posizioni nello spazio, ovvero archi tra due vertici. Un cammino euleriano, di conseguenza, si trasforma in una sequenza non ripetuta di passi in una coreografia, che diventa un circuito nel momento in cui la sequenza termina nella stessa posizione in cui è iniziata. Allo stesso modo, il grado di un vertice, ossia il numero di ponti costruiti a partire da una data regione, corrisponde al numero di passi distinti con cui si raggiunge o si abbandona una data posizione nella coreografia.

3 Obiettivi, metodi e strumenti

3.1 Contesto di riferimento, durata dell'attività e modalità di collaborazione con gli istituti

Il laboratorio qui descritto è stato ideato principalmente per la scuola secondaria di primo grado e, in una formula opportunamente adattata, per il biennio delle scuole secondarie di secondo grado. Nel primo caso, il progetto ha coinvolto 6 classi seconde della scuola secondaria di primo grado durante il biennio scolastico 22/23-23/24 di sperimentazione, per un totale di oltre 120 partecipanti, ed è stato diviso in tre incontri in orario curricolare, della durata rispettivamente di due ore (fase 1, problema dei ponti), un'ora (fase 2, *Coreo-Graph*, ovvero ricerca di coreografie euleriane) e due ore (fase 3, teoria dei grafi, teorema di Eulero e sue applicazioni). In questo contesto, si è cercato di mantenere i tre incontri molto ravvicinati, per non disperdere la comprensione e l'attenzione acquisite durante ciascuna fase. Nel contesto del Liceo Matematico, il progetto, privato della parte motoria, ha coinvolto nello stesso periodo 5 classi, per un totale di quasi 150 partecipanti, ed è stato svolto presso il Dipartimento di Matematica "F. Enriques" dell'Università di Milano nell'arco di mezza giornata.

Il progetto nella forma qui descritta è stato sviluppato da entrambi gli autori, ed è stato offerto agli istituti come attività di Terza Missione: esso è sempre stato svolto in forma gratuita e solidale, senza alcuna autorizzazione alla raccolta ed elaborazione dei dati ai fini della ricerca scientifica. Gli autori hanno sempre partecipato come esperti alla realizzazione del progetto, talvolta affiancati da alcuni studenti del corso di laurea triennale o magistrale in matematica, interessati ad acquisire crediti formativi di tipo F⁵ nell'area della didattica della matematica.

3.2 Metodologie didattiche

3.2.1 L'attività dei ponti di Königsberg e le due domande guida

Il progetto rispecchia la suddivisione già illustrata in Gaio et al. (2020) in tre fasi, che rappresentano tre successivi momenti di lavoro con ciascuna classe: in tale suddivisione, il problema dei ponti di Königsberg proposto inizialmente, e lasciato insoluto, viene ripreso solo alla fine dell'ultima fase dove, opportunamente tradotto nel linguaggio della teoria dei grafi, viene risolto.

Nella rivisitazione qui proposta, si è deciso di non limitarsi alla questione della sola esistenza delle soluzioni, ma di estendere l'analisi alle loro proprietà, focalizzandosi anzitutto sul ruolo svolto dai vertici

5. I crediti formativi di tipo F sono riconosciuti agli studenti universitari per attività che permettono di acquisire conoscenze e competenze aggiuntive non rientranti nelle consuete attività formative caratterizzanti. Tali crediti completano il profilo dello studente in termini di capacità linguistiche, informatiche, comunicativo-relazionali e consapevolezza professionale.

di partenza. Infatti, in tutte e tre le fasi del progetto, sono state poste sempre le stesse due domande:

1. Esistono delle soluzioni al problema?
2. Esistono delle soluzioni partendo da qualunque regione/posizione/vertice?

La progettazione di tale estensione si è ispirata all'attività disponibile sul sito Mathigon,⁶ mantenendo la scelta di iniziare il laboratorio con la sfida più impegnativa, costituita proprio dal problema dei ponti di Königsberg; in tal modo le classi si sono subito confrontate con la difficoltà della possibile inesistenza di una soluzione al problema assegnato, difficoltà resa evidente dall'apparente fallimento dei ripetuti tentativi. Questo è sembrato il modo migliore per stimolare fin dall'inizio la creazione di quelle strategie di *problem solving* che sarebbero risultate utili allo svolgimento e alla comprensione delle attività successive (Jonsson et al., 2014; Kapur, 2010, 2011), proponendo allo stesso tempo una narrazione ancorata al contesto storico del problema.

3.2.2 Strategie di *problem solving* attese

L'attenzione sistematica al ruolo dei vertici iniziali (e finali) delle soluzioni punta anzitutto a facilitare il riconoscimento della struttura comune alle tre diverse situazioni (I, II, III) per preparare il terreno alla formulazione e alla comprensione dell'enunciato del teorema di Eulero. Il cambio di contesto proposto tra ogni attività e la successiva (già presente in Gaio et al., 2020), e in particolare tra l'attività sulle mappe e quella sulla danza, vuole rinforzare l'analogia tra le varie situazioni, al fine di facilitare la trasformazione del problema di Königsberg nel grafo corrispondente.

Inoltre, prima di approfondire il ruolo del grado di un vertice in un grafo, si è scelto di consolidare l'analisi delle proprietà delle eventuali soluzioni, per offrire una visione più ampia e chiara circa la questione della loro esistenza. Se una soluzione esiste, può infatti assumere solo due forme: può essere un cammino aperto che inizia e termina in due vertici distinti del grafo (nel qual caso, tutte le soluzioni condividono gli stessi vertici di inizio e fine), oppure può costituire un circuito che inizia e termina sempre nello stesso vertice di partenza (in questo caso, la scelta del vertice di partenza è arbitraria).

La riflessione sul ruolo dei vertici e sulle proprietà delle eventuali soluzioni viene sviluppata anche introducendo quello che qui viene chiamato il *problema inverso*. Se nel *problema diretto* gli elementi della mappa o del grafo sono fissati e l'incognita è data dal cammino euleriano, nel *problema inverso* ci si chiede come modificare un grafo o una mappa in modo da avere determinati cammini euleriani. Si ritiene infatti che il confronto col *problema inverso* possa aiutare sia a riconoscere le proprietà locali (come il grado di un vertice) che discriminano tra esistenza e non esistenza delle soluzioni, sia a verificare la validità del teorema di Eulero. Anche in questo caso, la proposta qui presentata trova un parallelo nelle strategie di *problem solving*, in cui si interviene sui dati di un problema per garantire che esso ammetta almeno una soluzione (in questo caso assegnata a priori).

3.2.3 L'attività Coreo-Graph

L'uso della danza rappresenta l'ingrediente di originalità di questo progetto nell'ambito dell'attività didattica di tipo *embodied* applicata alla teoria dei grafi (a differenza del lavoro di Gerofsky et al., 2023, dove l'utilizzo dei circuiti euleriani su un grafo è finalizzato alla costruzione di performance artistiche). Uno dei suoi principali vantaggi è la flessibilità: l'attività, infatti, può essere facilmente adattata ai diversi contesti in cui è stata sperimentata (palestre, auditorium, giardini), e permette non solo di osservare le classi al lavoro, ma di stimolarle proponendo variazioni al problema assegnato, come l'aggiunta o la rimozione di un passo o la composizione di due distinte coreografie in sequenza. Inoltre, rispetto alla proposta di Gaio et al. (2020), l'adozione di uno spazio di esplorazione più contenuto permette agli studenti di mantenere una doppia prospettiva sul problema: una visione interna, mentre eseguono la coreografia, e una visione esterna, mentre la osservano.

6. <https://it.mathigon.org/course/graph-theory/bridges>.

Di contro, l'attività *Coreo-Graph* introduce una difficoltà aggiuntiva rispetto alla proposta di Gaio et al. (2020), ovvero la richiesta di *fondere spazio e tempo*, sincronizzando lo schema motorio con la base musicale (Gerofsky, 2013). Consapevoli che questo potesse costituire un ostacolo all'attività *embodied*, si è fatto ricorso ad alcune metodologie dell'insegnamento della danza per facilitarne lo svolgimento. Come descritto più in dettaglio nel par. 4, sono state distinte due fasi: inizialmente, tutti i membri della *crew* hanno eseguito le coreografie euleriane sugli schemi a pavimento come momento di verifica e riproduzione delle soluzioni; e solo dopo aver acquisito gli schemi motori, i ballerini hanno sincronizzato i movimenti con la base musicale. Per accompagnare gradualmente gli studenti fino all'esibizione finale, è stato inoltre dedicato un breve spazio all'ascolto del brano, aiutandoli a riconoscerne elementi utili come il ritmo, gli accenti e la suddivisione tra strofe e ritornello.

Questo laboratorio di danza offre un'esperienza che viene ripresa nello sviluppo della fase teorica successiva, perché concretizza l'idea di cammino euleriano su un grafo come un processo dinamico. La possibile riduzione del livello di astrazione (Hazzan & Hadar, 2005) derivante da questa attività è stata quindi bilanciata dalla richiesta di produrre sempre una rappresentazione simbolica di tali coreografie. In particolare, l'uso di stringhe alfanumeriche in corrispondenza biunivoca con le coreografie ha permesso di mantenere una visione più astratta del concetto di cammino su un grafo (inteso come sequenza di vertici e archi), offrendo al tempo stesso uno strumento rappresentativo efficace nell'esplorazione delle coreografie.

3.2.4 Il teorema di Eulero e la sua applicazione ai problemi precedenti

Il punto di arrivo del progetto non è solo la formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero, ma anche il suo utilizzo per rileggere e risolvere tutte le attività svolte nelle fasi precedenti (cammini sulle mappe e coreografie nella danza): con quest'ulteriore compito si è voluto evidenziare la differenza tra risolvere un problema specifico per tentativi e sfruttare l'analogia con altri contesti, per identificare una strategia più efficace che sia poi di immediata applicazione a problemi che ne condividono la stessa struttura.

3.3 Strumenti

Nelle varie fasi sono stati proposti alle classi diversi strumenti e modalità per lo studio dei cammini euleriani: attività con carta e penna, facili da riproporre in ogni contesto scolastico; laddove possibile, uso dei tablet disponibili negli istituti (laboratori informatici itineranti), per accedere alle attività del sito Mathigon in modalità digitalmente sicura e controllata. L'attività motoria *Coreo-Graph* è stata invece introdotta da video esplicativi autoprodotti, per anticipare in aula la spiegazione di ciò che avrebbero poi dovuto svolgere in palestra. La restituzione delle risposte alle due domande guida, nel contesto delle coreografie euleriane, è stata svolta con un Padlet amministrato dagli esperti: la condivisione delle considerazioni riportate sul Padlet dagli studenti ha permesso di avviare in aula una discussione sul ruolo dei vertici e sulle differenti proprietà di apertura e chiusura delle soluzioni. La classificazione delle tre tipologie di grafo contenute nel teorema di Eulero è stata invece supportata dalla compilazione alla lavagna di due tabelle che raccolgono i risultati dell'attività sui grafi, che saranno illustrati nel par. 4.3.1.

3.4 Obiettivi formativi

Come già osservato da Mammana e Milone (2010) nella loro sperimentazione con analoghe fasce d'età, l'assenza di prerequisiti specifici rispetto alla teoria dei grafi nel curriculum di matematica delle scuole secondarie (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010, 2012) consente alla maggior parte dei partecipanti di potersi mettere in gioco, servendosi principalmente della propria curiosità e delle proprie capacità logico-intuitive.

Il progetto mira infatti a mantenere un buon livello di interesse delle classi durante le varie fasi del suo sviluppo, facendole lavorare sugli aspetti logici e intuitivi del percorso di risoluzione del problema. In

tal modo, esso vuole operare allo stesso tempo su due differenti aspetti della pratica laboratoriale. Da una parte vuole promuovere l'utilità e la necessità dei contenuti della disciplina, lavorando in maniera guidata sul processo di creazione degli strumenti matematici necessari alla risoluzione del problema assegnato, come da traguardo di competenza prefissato dalle Indicazioni Nazionali: «[L'allievo] ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà» (MIUR, 2012, p. 51); dall'altra, caratterizzandosi proprio come attività di *problem solving*, esso vuole accompagnare verso un'azione creativa che è difficile da includere sistematicamente nella didattica frontale della matematica, dove la teoria di norma precede la sua applicazione. In questo caso la pratica laboratoriale vuole condurre alla formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero, attraverso il raggiungimento di alcuni obiettivi specifici:

- Passare da una fase sperimentale (per tentativi) alle successive fasi di formulazione di un enunciato (congettura) e della sua verifica.
- Risolvere un problema passando attraverso la risoluzione di problemi simili, ovvero in cui si osserva la medesima struttura (analogia).
- Riflettere sull'esistenza e non esistenza delle soluzioni di un problema. In particolare, il progetto si pone due obiettivi distinti: primo, fornire esempi di problemi che non ammettono soluzioni; secondo, mostrare che la non esistenza delle soluzioni di un problema può essere più difficile da argomentare rispetto all'esistenza.
- Sperimentare l'uso del problema inverso come metodologia utile alla risoluzione e comprensione del problema diretto.

4 Descrizione del laboratorio

Il progetto, nel suo complesso, è un vero e proprio laboratorio di matematica, secondo la definizione che ne viene data in Anichini et al. (2004, p. 28): esso è infatti «un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici», costruzione che «è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività». Nella descrizione del laboratorio, si delineano i diversi aspetti che emergono da tale definizione, esplicitando dunque quali sono i significati che vengono costruiti, gli strumenti attraverso cui essi vengono indagati e indicando la modalità di interazione tra esperti e studenti e quella da incoraggiare all'interno del gruppo classe.

4.1 Fase 1: i ponti di Eulero e le sue varianti

La prima fase si focalizza sulla risoluzione del problema dei ponti, nella versione originaria del problema di Eulero e in alcune sue varianti. È stata introdotta la definizione di *cammino euleriano* (o *percorso euleriano*) sulla mappa come una soluzione a tale problema, ovvero un percorso che, partendo da una regione, attraversa una e una sola volta tutti i ponti della mappa (in accordo con la definizione di *euler trial* in Bondy e Murty, 1976). Per questa fase ci si è inizialmente appoggiati e ispirati alle attività proposte sul sito Mathigon: il sito permette di confrontarsi col problema dell'esistenza e non esistenza delle soluzioni attraverso uno strumento digitale che facilita la ricerca delle soluzioni per tentativi (offrendo la possibilità di ripulire la mappa dopo ogni tentativo). In aggiunta alle mappe già proposte da Mathigon, sono stati inseriti due esempi di mappe che includono il caso non contemplato nel sito, ovvero quello di mappe che ammettono cammini euleriani chiusi a partire da ciascuna delle regioni di cui la mappa è composta (ovvero dei circuiti). La Figura 2 mostra alcune delle mappe utilizzate in

questa fase, nell'ordine con cui sono state assegnate alle classi, ovvero: come prima mappa, quella che riproduce il problema dei ponti di Königsberg (in alto a sinistra, mappa 1 di Mathigon), una seconda mappa che ammette cammini aperti che iniziano e terminano in due regioni distinte (in alto a destra, mappa 2 di Mathigon) e una terza mappa che ammette circuiti che iniziano da ciascuna delle quattro regioni indicate (scelta tra le due mostrate in basso alla Figura 2). In alcune classi, la mappa in alto a destra di Figura 2 è stata sostituita con la mappa 3 di Mathigon (qui non riprodotta). Per lo svolgimento della terza e ultima mappa è stata inoltre introdotta la *rappresentazione simbolica* regioni (lettere) – ponti (numeri interi) di un percorso sulla mappa. Ad esempio, nel caso della mappa in basso a sinistra in Figura 2, si possono numerare i ponti da sinistra verso destra: una possibile soluzione che inizia e termina nella regione *A* si scriverà quindi come *A1D6C5B4A3B2A*.

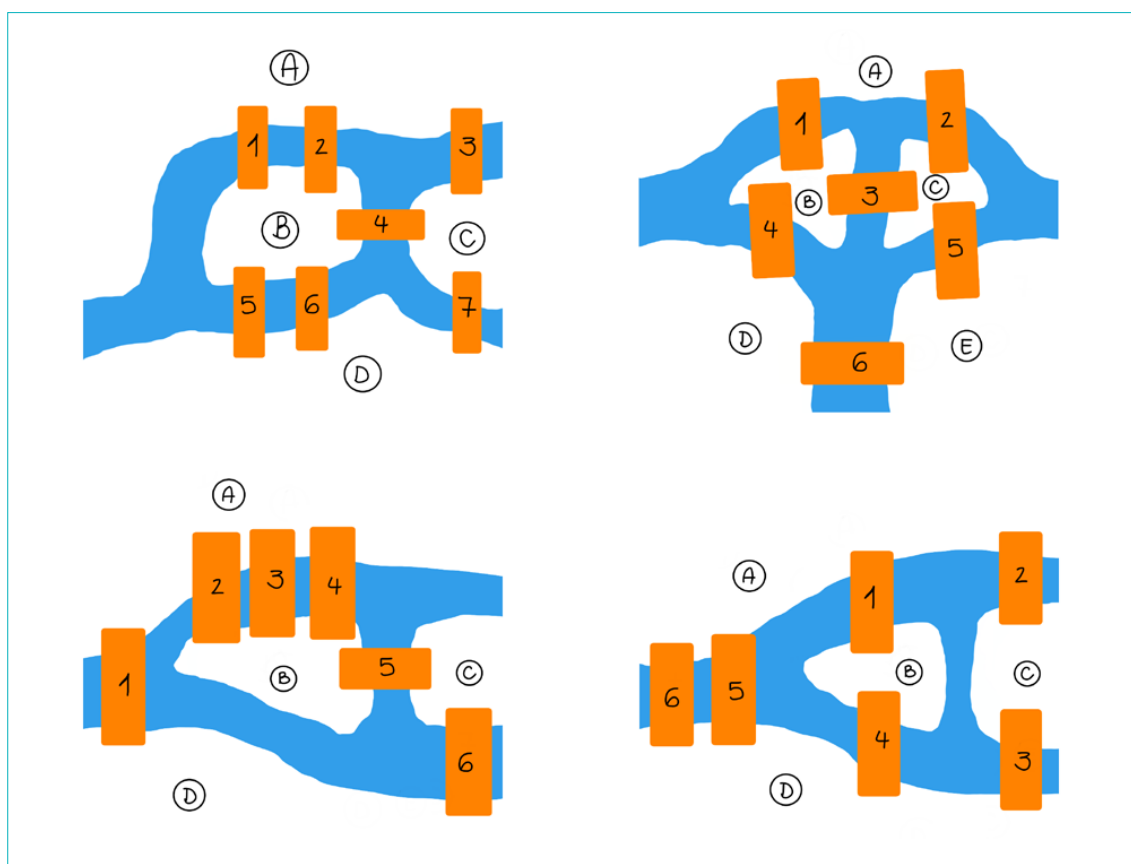


Figura 2. Mappe usate per la prima fase. In alto, una riproduzione delle prime due mappe presenti sul sito Mathigon (la prima corrisponde al problema di Eulero originale). In basso due mappe usate come esempi dell'esistenza di cammini euleriani che iniziano da ognuna delle quattro regioni.

La breve discussione avviata in conclusione della fase 1 ha posto l'accento sul confronto tra le tre situazioni presentate, che esemplificano i tre possibili casi del teorema di Eulero. In questa fase si intendeva anzitutto far emergere le differenze tra le tre situazioni, per facilitare l'analogia con la fase successiva e per iniziare a discutere delle strategie di *problem solving*. Si è sempre concluso assieme alle classi che la risolubilità di un problema si può ottenere attraverso la scoperta di almeno una soluzione. Mostrare la non risolubilità è invece molto più difficile: quando non riusciamo a trovare la soluzione infatti, non siamo sicuri della sua inesistenza, a meno di esplorare tutti i cammini possibili. Andare per tentativi è faticoso e poco efficiente, ma anche necessario per costruirsi una prima rappresentazione della situazione matematica da indagare.

4.2 Fase 2: il problema della coreografia euleriana

Col problema della *coreografia euleriana* si vuole riproporre il problema della ricerca di cammini euleriani su un grafo nel contesto della danza: il tentativo è quello di progettare un'attività capace di combinare un'analisi geometrica della situazione proposta con una disciplina artistico-motoria in grado di intercettare alcuni interessi o tendenze della fascia d'età considerata.

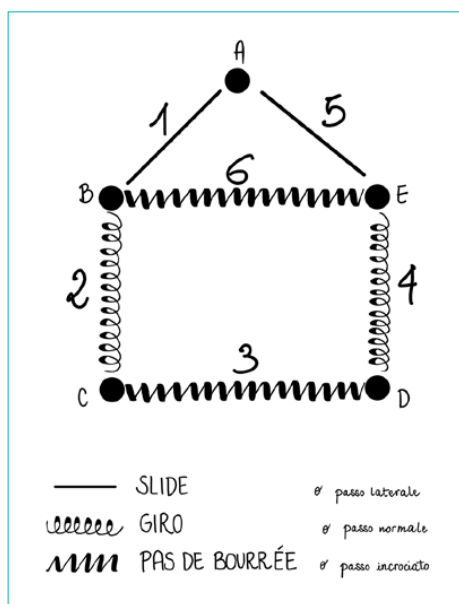


Figura 3. Schema coreografico a "casetta": i pallini neri etichettati con lettere maiuscole indicano le posizioni assegnate, mentre i passi numerati indicano i possibili spostamenti tra le posizioni.

La prima parte di questa attività si è svolta in classe. Il punto di partenza è stato lo schema di Figura 3, di cui si sono precisati gli elementi costitutivi, anticipando di fatto la struttura di un grafo (esattamente come era stato fatto in Gaio et al. (2020) per l'itinerario sulla mappa):

- le posizioni – ovvero i "vertici" in cui si può trovare il ballerino;
- i passi – ovvero gli spostamenti che sono consentiti tra le posizioni assegnate;
- lo stile dei passi – ovvero il modo con cui si effettua ciascuno spostamento.

È stata introdotta una definizione di *coreografia* sullo schema assegnato, in analogia al concetto di cammino sulle mappe della prima fase: con *coreografia* si intende ogni sequenza di passi che parta e termini nelle posizioni assegnate, compatibile con lo schema. Il ballerino può quindi spostarsi solo tra posizioni collegate da passi (a prescindere dallo stile del passo). Allo stesso modo, ripensando al problema dei ponti (i ponti sono ciò che ci fa passare da una regione all'altra), diventa naturale definire una *coreografia euleriana* come una sequenza di passi dello schema assegnato che consenta al ballerino di compiere tutti i passi dello schema, ma facendo ogni passo una e una sola volta. Usando anche in questo contesto la rappresentazione simbolica già introdotta, si può fornire quindi un esempio di coreografia euleriana: *B6E5A1B2C3D4E*. Per rinforzare il concetto di *eulerianità*, durante la sperimentazione sono stati mostrati dei video autoprodotti, con riferimento allo schema di Figura 3: in alcuni viene eseguita una coreografia euleriana e in altri viene commesso un errore (un passo non viene eseguito oppure viene eseguito due volte).

4.2.1 L'attività Coreo-Graph

Dopo aver diviso gli studenti in gruppi (o *crew*), è stato assegnato a ogni gruppo uno schema di danza equivalente a un grafo, come quello in Figura 3. Sono state distribuite tre diverse tipologie di schemi illustrati in Figura 4 (uno schema per ciascuna *crew*), di cui due risolubili (nel senso dell'esistenza di coreografie euleriane) e uno non risolubile:

- uno schema risolubile con (due) vertici di grado dispari (CG1);
- uno schema risolubile con soli vertici di grado pari (CG2);
- uno schema non risolubile (CG3).

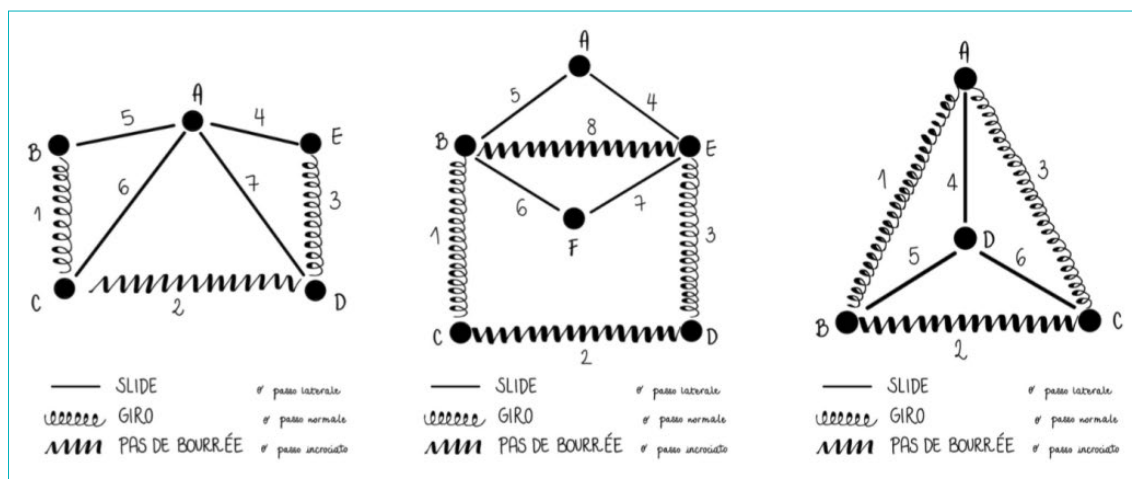


Figura 4. In ordine da sinistra a destra: CG1, CG2, CG3.

Si sono poi resi visibili gli schemi sul pavimento attraverso dei cerchi colorati per le posizioni e dei nastri per i passi (come in Figura 5).



Figura 5. Esempio di schema CG1 riprodotto in palestra.

Al fine di lavorare sulle stesse due domande guida della fase precedente, opportunamente declinate nella nuova attività, è stato chiesto a ciascuna *crew* di svolgere nell'ordine indicato i seguenti compiti:

1. Provare a identificare le possibili coreografie euleriane e scriverle con la rappresentazione simbolica, prestando attenzione al ruolo svolto dalla scelta del vertice di partenza (posizione iniziale del ballerino). Dopo una prima fase di esplorazione, alla *crew* in possesso dello schema CG3 viene proposto di aggiungere un passo tra due posizioni a scelta, in maniera tale da assicurare l'esistenza di almeno una coreografia euleriana.
2. Eseguire (a turno) una delle coreografie precedentemente identificate senza base musicale, usando i riferimenti sul pavimento.
3. Scegliere due membri della *crew* disposti a memorizzare le coreografie sincronizzandosi con la base musicale, eventualmente modificando a proprio piacimento lo stile dei passi indicati nello schema.
4. Far eseguire ai/alle ballerini/e selezionati dalle *crew* le proprie coreografie euleriane, nella breve esibizione finale.

A conclusione di questa attività, le *crew* hanno postato le proprie risposte alle due domande guida su un Padlet condiviso e amministrato dagli esperti esterni: ogni *crew* aveva il compito di riportare le risposte alle due domande sotto le immagini precaricate degli schemi di **Figura 4**, sostenendo tali risposte con alcuni esempi di coreografie euleriane trovate. Inoltre ciascuna *crew* è stata invitata a osservare gli schemi e le soluzioni degli altri gruppi: infatti questa fase di restituzione su Padlet verrà poi ripresa e commentata in classe durante l'inizio della terza ed ultima fase, prima di presentare la teoria dei grafi.

4.3 Fase 3: introduzione alla teoria dei grafi e teorema di Eulero

L'inizio della terza fase ha ripreso il problema della coreografia euleriana sviluppato sul Padlet dalle varie *crew*. Attraverso la condivisione delle risposte e degli esempi forniti dai vari gruppi, si sono fatte emergere le diverse proprietà delle coreografie euleriane, ovvero il collegamento tra proprietà locali e globali delle soluzioni al problema assegnato:

1. quando esistono coreografie euleriane che partono da ogni vertice dello schema, la coreografia è sempre un circuito;
2. quando invece i possibili vertici di partenza per le coreografie sono solamente due, essi sono sempre il punto di partenza e di arrivo di una coreografia euleriana aperta.

Prima di abbandonare la riflessione sull'attività motoria in favore della teoria dei grafi, si è estesa la risoluzione del *problema inverso* (già descritto nel par. 3) agli schemi CG1 e CG2 di **Figura 4**, in precedenza proposta per il solo schema CG3; si è quindi chiesto ad ogni *crew* di rimuovere un solo passo in maniera tale da modificare la tipologia delle proprie coreografie euleriane (da chiuse ad aperte e viceversa). La terza e ultima fase è proseguita con due momenti distinti:

1. la ricerca e classificazione di cammini euleriani su grafi connessi, la formulazione del teorema di Eulero e l'utilizzo del teorema per rileggere il problema inverso delle coreografie euleriane;
2. la trasformazione e risoluzione del problema dei ponti di Königsberg e di alcune sue possibili varianti.

4.3.1 Ricerca e classificazione di cammini euleriani su grafi connessi

Dopo aver sottolineato come il numero di vertici, il numero di passi e il modo con cui i passi collegano i vertici sia tutto ciò che caratterizza la risolubilità del problema della ricerca di una coreografia euleriana, sono stati introdotti formalmente gli elementi di un grafo (vertici, archi, estremi di un arco) e ci si è soffermati sulla nozione di grado di un vertice. Si è deciso di evidenziare maggiormente que-

sta nozione, osservando come cambino i gradi dei cinque vertici nelle tre trasformazioni sul grafo in Figura 6: nello specifico, si è mostrato che l'aggiunta, la rimozione e lo spostamento di un arco (che possiamo immaginare come l'azione di "tagliare" un arco nei suoi vertici e di "incollarlo" ad altri vertici del grafo) incrementano o riducono di un'unità i gradi dei vertici adiacenti all'arco, coerentemente con l'operazione effettuata.

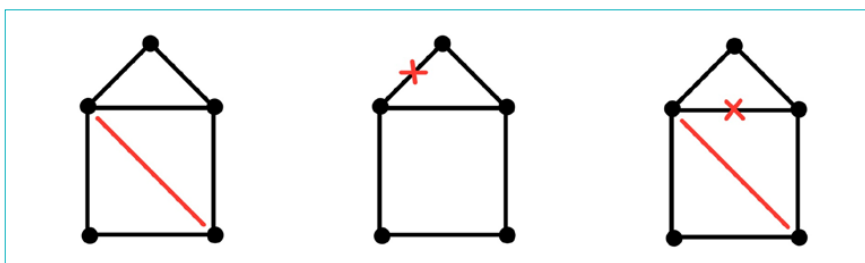


Figura 6. Trasformazioni su un grafo. Nell'ordine da sinistra a destra: aggiunta di un arco (primo esempio), rimozione di un arco (secondo esempio), spostamento di un arco oppure taglia-incolla (terzo esempio).

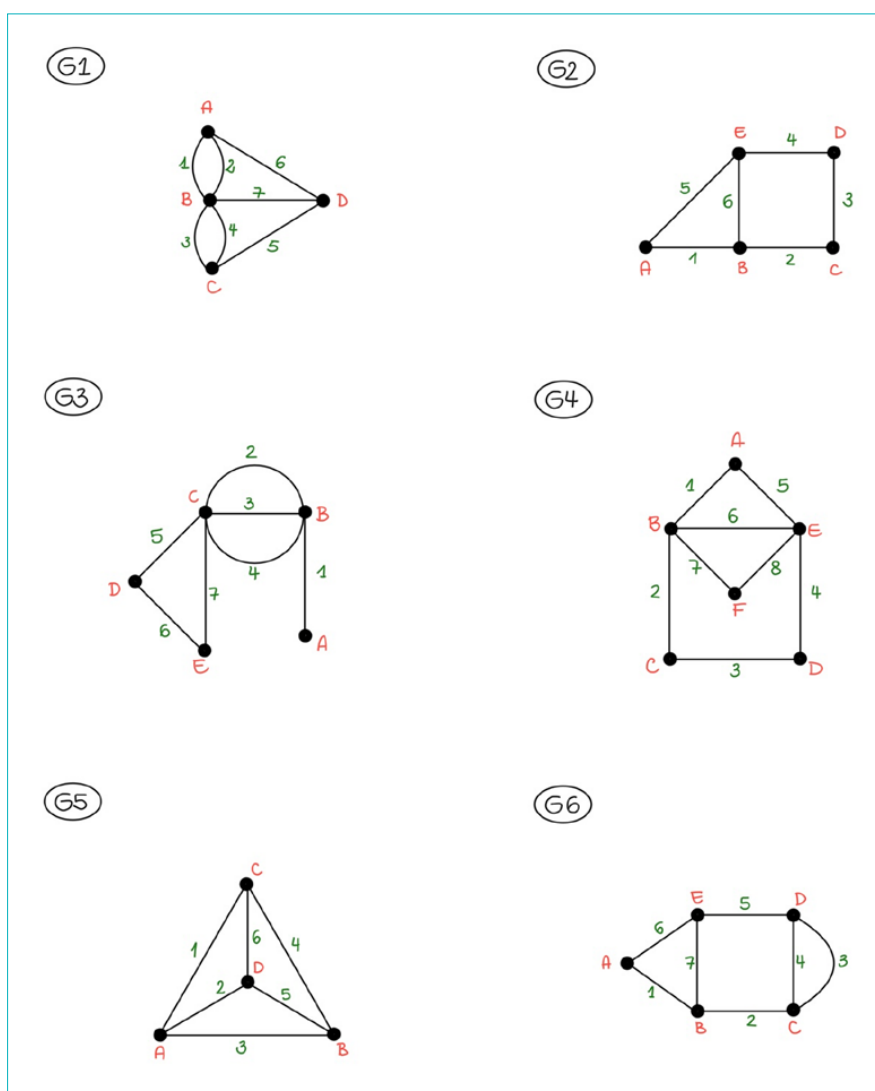


Figura 7. Scheda per la ricerca di cammini euleriani su grafi usata nella terza fase.

La **Figura 7** mostra la scheda che a questo punto del laboratorio è stata distribuita nelle classi, con la richiesta di rispondere alle solite due domande guida nel caso dei grafi. Per avere omogeneità nella rappresentazione simbolica dei cammini euleriani e velocizzare la successiva classificazione dei grafi, si è deciso di etichettare i grafi come G1, ..., G6 e di attribuire a priori lettere e numeri ai vertici e agli archi di ciascun grafo. È stato infatti chiesto di esplorare l'esistenza di possibili cammini euleriani, al variare del vertice di partenza, appuntando su un foglio la rappresentazione simbolica delle soluzioni trovate per ciascun grafo analizzato. Molti dei grafi proposti in questa scheda corrispondono alla schematizzazione di problemi già incontrati nelle fasi precedenti, al fine di sottolineare l'analogia tra le attività svolte nel laboratorio: per esempio, il grafo G1 corrisponde al problema di Eulero in **Figura 1**, il grafo G2 corrisponde allo schema di **Figura 3**, mentre G4 e G5 corrispondono a due degli schemi di **Figura 4**.

I risultati di questa attività sono stati raccolti in due tabelle: una prima tabella (**Tabella 1**, a sinistra) con le risposte alle due domande guida per ogni grafo, una seconda tabella (**Tabella 1**, a destra) con la classificazione dei grafi in funzione di tali risposte (primo, secondo e terzo tipo). In tal modo si sono volute schematizzare le tre situazioni previste dall'enunciato del teorema di Eulero: la classificazione dei grafi introdotta, in grafi del primo (I), secondo (II) e terzo (III) tipo, rispecchia fedelmente le tre parti dell'enunciato del teorema. Per esempio, con riferimento alla scheda riportata in **Figura 7**, G4 è l'unico esempio di grafo che ha tutti i vertici di grado pari (primo tipo), mentre G2 e G3 sono gli unici ad avere soltanto due vertici di grado dispari (secondo tipo); i grafi rimanenti sono tutti del terzo tipo, in quanto ammettono almeno quattro vertici di grado dispari.

Nell'adattamento del progetto per il Liceo Matematico, solo a questo punto si sono evidenziate le differenze tra le soluzioni nei grafi del primo e secondo tipo, sottolineando il collegamento tra la dipendenza dal vertice iniziale e la tipologia delle soluzioni, ovvero il fatto che i cammini euleriani siano o meno dei circuiti.

Grafo	Esistenza cammino euleriano	Dipendenza dai vertici
G1	No	/
G2	Sì	Sì
G3	Sì	Sì
G4	Sì	No
G5	No	/

Tipo	Grafi
I tipo	G4
II tipo	G2, G3
III tipo	G1, G5, G6

Tabella 1. Tabelle per la classificazione dei grafi G1, ..., G6 di **Figura 7**.

Per far emergere il ruolo del grado nei tre differenti tipi di grafo classificati nella **Tabella 1**, ci si è anzitutto focalizzati sui grafi del secondo tipo: l'obiettivo è riconoscere il ruolo del grado dei due vertici *speciali* da cui iniziano e terminano tutti i cammini euleriani. Per facilitare il riconoscimento del ruolo della (dis)parità del grado di tali vertici, è possibile far riflettere sul percorso che si ottiene quando si traccia⁷ un cammino euleriano sul grafo G2, sviluppando un argomento di tipo *entry-exit* nei vertici che si incontrano lungo lo sviluppo del cammino (Ferrarello & Mammana, 2017). Infatti, dai vertici di partenza/arrivo si esce/entra una volta in più di quanto si entri/esca, mentre tutti gli altri vertici sono di

⁷ Come nel gioco in cui si chiede di disegnare la casetta senza mai staccare la matita dal foglio e senza tracciare due volte lo stesso segmento.

passaggio, quindi si entra ed esce lo stesso numero di volte. Dunque, per avere vertice di partenza e di arrivo distinti, questi devono necessariamente avere grado dispari, mentre tutti gli altri devono avere grado pari. Una volta riconosciuto il ruolo discriminante svolto dal grado dei due vertici in questa tipologia di grafo, si procede per confronto con gli altri due tipi di grafi, giungendo alla formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero.

Questo primo momento si è concluso rileggendo il problema della coreografia euleriana alla luce del teorema di Eulero. Da una parte, si è utilizzato il teorema per rispondere nuovamente alle domande guida sugli schemi di Figura 4, lavorando sui grafi corrispondenti. Dall'altro, si è proposto di usare lo stesso teorema per risolvere il problema inverso affrontato all'inizio di questa terza fase: per esempio, nel caso dello schema CG3 di Figura 4, si è visto che il passo può essere aggiunto tra qualunque coppia di vertici, trasformando lo schema di partenza da un grafo del terzo tipo in un grafo del secondo tipo. Infatti, le crew che hanno aggiunto un passo al grafo CG3 hanno sempre realizzato coreografie che partivano e terminavano da due vertici distinti.

4.3.2 Trasformazione e risoluzione del problema dei ponti di Königsberg

Il secondo momento è iniziato con la proposta di usare il teorema per risolvere il problema dei ponti di Königsberg; per collegare la mappa con il corrispondente grafo bisogna infatti identificare ogni regione con un punto (come se fosse un punto a caso da cui partire all'interno della stessa regione) e ogni ponte con un arco (può risultare necessario esplicitare l'analogia tra gli archi che si possono attraversare una e una sola volta, e lo stesso ruolo svolto dai ponti). Effettuata tale trasformazione (nel nostro caso con un'animazione costruita in GeoGebra),⁸ diventa naturale identificare la mappa di partenza con il grafo G1 di Figura 7, concludendo la non esistenza delle soluzioni.

Dopo aver mostrato come esplorare le mappe della prima fase trasformandole in opportuni grafi, è possibile proporre delle sfide conclusive sulle mappe per valorizzare l'efficacia di un'opportuna modellizzazione matematica del problema e dello strumento teorico offerto dal teorema di Eulero. Una variante interessante consiste nell'abbattimento di un ponte e nella sua ricostruzione in modo da rendere risolvibile il problema. È stata quindi posta la domanda: «Nel problema dei ponti di Königsberg è possibile demolire e ricostruire uno dei ponti in un altro punto della mappa, in modo che il grafo corrispondente ammetta dei cammini euleriani? In particolare, dove bisognerebbe ricostruire il ponte se si volesse un grafo del I tipo? E dove se si volesse un grafo del II tipo?». Questa proposta è stata illustrata in alcuni casi attraverso la mappa del problema originale (mappa in alto a sinistra in Figura 2), in altri attraverso la mappa 4 proposta dal sito Mathigon (qui riprodotta in Figura 8), che ammette G5 come grafo associato.

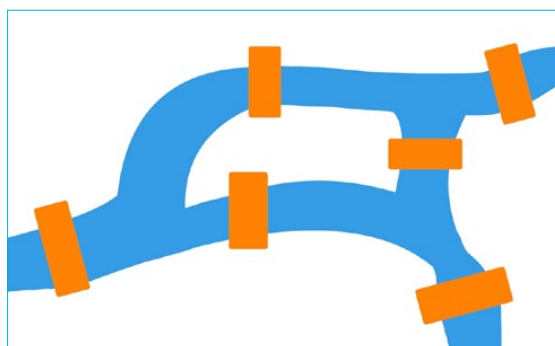


Figura 8. Riproduzione della mappa 4 dell'attività sui ponti di Königsberg proposta dal sito Mathigon.

8. <https://www.geogebra.org/m/yesf6e3s>.

A conclusione dell'intero laboratorio, si è proposto di risolvere il problema dell'esistenza di cammini euleriani su una nuova mappa ispirata alla topografia della città olandese di Leiden (in Figura 9 una mappa di Leiden e la semplificazione proposta, costituita da 8 regioni e 13 ponti), per rinforzare il contrasto tra l'approccio iniziale e la semplicità offerta dal teorema nel mostrare la non esistenza delle soluzioni: la schematizzazione scelta e qui mostrata presenta infatti almeno quattro regioni (E, F, G, H) con un numero dispari di ponti.

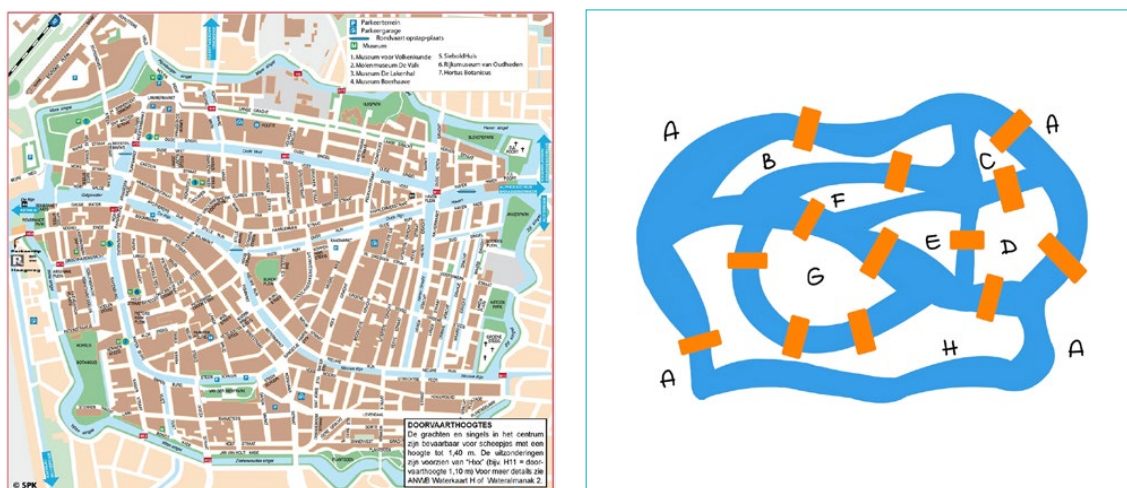


Figura 9. Una mappa della città di Leiden (fonte OnTheWorldMap.com)⁹ e la semplificazione proposta, con 8 regioni e 13 ponti.

5 Risultati della sperimentazione

In questa sezione sono raccolti i principali risultati della sperimentazione del progetto. Sono raggruppati per tematiche; dove significativo, sono messe in luce le differenze tra la sperimentazione fatta nella scuola secondaria di primo grado e quella fatta nelle classi del Liceo Matematico.

5.1 Mappe, ponti e le strategie di *problem solving*

La scelta di iniziare il laboratorio con il problema dei ponti di Königsberg ha permesso a ciascuno studente di creare la propria rappresentazione geometrica del problema e di sviluppare le proprie strategie risolutive (Jonsson et al., 2014; Kapur, 2010, 2011). Ne sono stati la conferma da una parte la rapidità mostrata nel risolvere le successive attività sulle mappe, ma soprattutto i diversi commenti su quali elementi del problema sembrassero costituire l'ostruzione all'esistenza di un cammino euleriano: con riferimento alla mappa in alto a sinistra di Figura 2, riportata in Figura 10 per comodità, per alcuni l'ostruzione sembrava essere rappresentata dal numero dispari di ponti, per altri la mancanza o la presenza di un ponte in eccesso in una specifica posizione della mappa (entrambe manifestazioni di un "errato" grado della regione). Esempi di quest'ultima argomentazione sono state risposte del tipo: «Se tolgo il ponte 4 tra le regioni B e C, riesco a trovare una soluzione che parte da A e finisce in D», che possiamo collegare a una tipica strategia di *problem solving*, ovvero «come modificare i dati in modo da riuscire a determinare l'incognita» (Pólya, 1945, p. 78, traduzione degli autori).

9. <https://ontheworldmap.com/netherlands/city/leiden/leiden-city-center-map.html>.

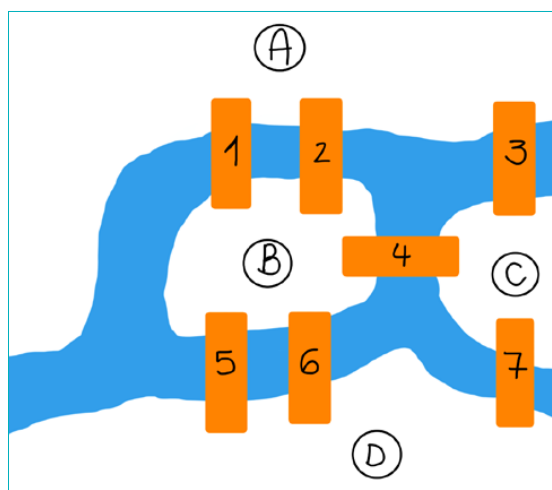


Figura 10. Prima mappa fornita nella fase 1: quella che modella il problema di Königsberg.

Di fronte al problema dell'esistenza di un cammino euleriano nella mappa di Königsberg, tutte le classi si sono sempre sostanzialmente divise in due gruppi: da una parte chi era disposto a scommettere sull'esistenza di un percorso euleriano, che risultava però inaccessibile con la strategia usata, dall'altra chi era ragionevolmente convinto della sua non esistenza, a fronte dei numerosi tentativi falliti. Nel caso del Liceo Matematico, questa seconda posizione era spesso sostenuta da argomenti (non sempre corretti) relativi alla particolare distribuzione dei ponti tra le regioni assegnate; per esempio, una frase del tipo: «Non possono esistere soluzioni perché il numero di ponti nella regione centrale B è dispari», per quanto non sia la corretta spiegazione della non esistenza dei cammini euleriani, anticipa di fatto una congettura sul ruolo del grado di un vertice nel corrispondente grafo. Viceversa, all'interno delle classi della scuola secondaria di primo grado si è riscontrato che *il credere nell'esistenza di una soluzione*, più che una congettura supportata dalla sperimentazione, pareva esser frutto del contratto didattico secondo cui un docente di norma non propone un problema impossibile. Tuttavia, al termine dell'attività sulle tre mappe, una parte significativa degli studenti si è spesso ritrovata a cambiare opinione a favore della non esistenza.

In particolare, la simmetria della seconda mappa in Figura 2 ha ridotto la complessità del problema, consentendo di dedurre il ruolo svolto dalle regioni centrali con una esplorazione parziale di tutti i percorsi ammissibili: ogni percorso costruito a partire da una delle due regioni di destra si "riflette" in un corrispondente percorso che parte da una delle due regioni di sinistra, e viceversa. Questa strategia di semplificazione della ricerca delle soluzioni (Pólya, 1945), è stata riscontrata tanto nella scuola secondaria di primo grado quanto nel contesto del Liceo Matematico. Nella scuola secondaria di primo grado ha però rischiato di spostare l'attenzione su un aspetto secondario del problema: la simmetria è diventata in alcuni casi la proprietà discriminante per l'esistenza di percorsi euleriani con inizio e fine dalle "isole centrali".

5.2 Aspetti di traduzione e di rappresentazione

Nelle prime battute dell'attività sulle mappe vi sono state talvolta delle difficoltà nella comprensione delle due domande guida e della definizione di cammino euleriano: è stato necessario sempre sottolineare il fatto che i cammini dovessero *partire da una regione* e non da un ponte e che questo ultimo dovesse essere *attraversato interamente* da una regione all'altra (questo per evitare che venissero considerate come soluzioni quelle costruite attraversando solo parzialmente un ponte). In tal modo si è chiarito fin da subito il diverso ruolo dei due elementi caratterizzanti il problema, necessario per riconoscere l'analogia tra le tre fasi del laboratorio: vi sono elementi da cui si parte e si arriva, ed elementi che li collegano e che quindi vengono attraversati.

Di fronte alla proposta di usare il teorema di Eulero per risolvere il problema dei ponti, in molti hanno evidenziato l'analogia tra le due situazioni, identificando correttamente regioni-vertici e ponti-archi con affermazioni del tipo «È come se le regioni fossero i vertici e i ponti gli archi». Ovviamente, non sono mancati episodi in cui la reazione istintiva è stata quella di identificare i ponti con i vertici: proprio in questi casi, è stato sufficiente rimarcare quali fossero gli elementi del grafo da "attraversare" una e una sola volta per far rapidamente convergere verso una corretta *traduzione* della mappa di Königsberg nel relativo grafo.

All'interno della prima fase è stata introdotta la rappresentazione simbolica dei cammini, a complemento di quella geometrica. Vi sono state classi in cui tale rappresentazione è emersa spontaneamente fin dalle prime due mappe, soprattutto nel caso delle classi del Liceo Matematico, come necessità di annotare in maniera efficiente le soluzioni trovate. Di norma però, la maggior parte degli studenti ha preferito una rappresentazione geometrica delle soluzioni, tracciando i cammini con colori diversi sulla mappa. Tuttavia, vi sono stati casi isolati dove la rappresentazione simbolica è stata usata per manipolare un circuito: per esempio, nella rappresentazione $A1D6C5B4A3B2A$ (già introdotta come esempio di rappresentazione simbolica di un circuito euleriano per la mappa in basso a sinistra nella Figura 2 del par. 4.1) si può spostare la terna regione-ponte-regione $A1D$ alla fine del percorso e ottenere (senza ripetere due volte la regione A) la soluzione $D6C5B4A3B2A1D$ che ha D come nuova regione di partenza e di arrivo. Più spesso sono emerse considerazioni equivalenti riferite direttamente al circuito tracciato sulla mappa: infatti, la precedente costruzione equivale a dire che il circuito può essere percorso scegliendo liberamente la regione (vertice) da cui partire, mantenendo inalterato l'ordine con cui ponti e regioni vengono attraversati.

5.3 Coreo-Graph ed *embodiment*

Fin dall'inizio vi era la consapevolezza che proporre un'attività legata alla danza avrebbe comportato dei rischi: il rischio intrinseco che, riconoscendo le soluzioni direttamente sullo schema, ragazzi e ragazze non sarebbero stati invogliati a eseguire le coreografie e il rischio che la danza avrebbe potuto creare in alcuni/e una situazione di disagio. La prima difficoltà è stata superata proprio dall'aver previsto in fase di progettazione la separazione tra la fase della ricerca delle soluzioni (e della loro rappresentazione simbolica) da quella motoria, dove tutti gli elementi di ogni *crew* sono stati invitati a riprodurre le coreografie individuate, senza alcuna base musicale. Rispetto alla seconda potenziale difficoltà, si è anzitutto lasciata ad ogni *crew* la possibilità di scegliere solo due ballerini da far alternare nell'esibizione delle coreografie, garantendo loro ampia libertà nella personalizzazione degli stili dei passi. Nonostante alcune iniziali perplessità, si è sempre riscontrato un buon livello di coinvolgimento e di collaborazione tra i membri di una stessa *crew*: qualcuno, magari "disorientato" dalla natura motoria del compito, ha infatti dedicato maggior impegno nella ricerca delle coreografie sugli schemi, e qualcun altro si è proposto di verificare i risultati ballando le coreografie. In particolare, è stata notata una maggior reticenza nelle ragazze della scuola secondaria di primo grado rispetto ai ragazzi, che si sono spesso mostrati più disinvolti e partecipi (contrariamente a possibili attese indotte dai pregiudizi di genere sulla danza). Dal punto di vista dell'*embodiment*, la richiesta di percorrere fisicamente i grafi (qui mascherati da schemi di danza) ha offerto un'esperienza motoria utile a riconoscere le proprietà di apertura e chiusura delle soluzioni. Durante lo svolgimento dell'attività *Coreo-Graph* alcune *crew* hanno infatti mostrato consapevolezza di queste caratteristiche con espressioni del tipo «Le nostre coreografie iniziano e finiscono sempre nelle stesse posizioni» oppure «Quando balliamo finiamo sempre nella posizione di partenza». Questa attività è stata dunque preziosa per associare la differenza tra circuiti/cammini aperti al differente ruolo svolto dalle posizioni di partenza: tale associazione è stata sviluppata per guidare le classi verso la successiva classificazione dei grafi e la formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero.

Aver anticipato l'attività sui cammini euleriani in un grafo, inserendola in un contesto motorio stimolante e coinvolgente, ha fornito a tutti gli studenti un'esperienza a cui attingere per la parte

concettualmente più faticosa del laboratorio, ovvero il riconoscimento del ruolo del grado dei vertici e la formulazione del teorema. È stato evidente come alcuni degli studenti con maggiori difficoltà di concentrazione abbiano vissuto l'attività con carta e penna come poco interessante o faticosa: per questi studenti, la precedente esperienza di doversi spostare fisicamente tra due posizioni con un passo è stato invece un riferimento concreto a cui rifarsi durante la terza fase. Tale esperienza è stata richiamata durante la spiegazione dell'argomento *entry-exit*, per riflettere sulla parità del grado dei vertici di passaggio (ogni abbandono della posizione è compensato da un ritorno, e viceversa), rispetto ai vertici di inizio e fine della coreografia.

Sebbene non sia emersa esplicitamente nelle discussioni, la naturalezza con cui le classi – contrariamente alle aspettative iniziali – hanno spesso trasformato il problema dei ponti di Königsberg nel relativo grafo potrebbe aver beneficiato della mediazione offerta da questa esperienza motoria. L'esecuzione delle coreografie euleriane ha infatti attribuito un significato concreto al concetto di "attraversamento", nella richiesta di compiere fisicamente uno spostamento tra le posizioni (ovvero i vertici) dello schema; ciò potrebbe aver agevolato anzitutto l'associazione logica tra ponti e archi, e quindi la successiva identificazione delle regioni con i vertici del grafo.

5.4 Formulazione dell'enunciato

La terza fase sintetizza tutto il percorso svolto nel laboratorio: dalla ricerca di cammini euleriani, alla riflessione sulla parità del grado dei vertici, fino alla formulazione del teorema di Eulero. Di questi aspetti, la parte che ha creato maggior difficoltà è sicuramente l'identificazione del grado dei vertici come proprietà discriminante all'interno dell'enunciato; infatti, avere a disposizione un numero molto ridotto di esempi a cui riferirsi, nonostante le tre fasi abbiano ripetuto sostanzialmente lo stesso schema, può condurre verso congetture non completamente corrette. Per esempio, è capitato che qualche studente si sia convinto che i grafi del secondo tipo dovessero avere 5 vertici, come G2 e G3, oppure che fosse importante avere più archi che vertici (ma è stato fatto notare che questo vale per tutti i grafi della scheda di Figura 7). Qualcuno si è invece concentrato sulla presenza di triangoli in G2 e G4 come condizione indispensabile per l'esistenza di almeno un cammino euleriano: per quanto la presenza di triangoli possa essere un elemento significativo in un grafo,¹⁰ questa congettura è stata subito abbandonata quando si è fatto notare che esistono triangoli anche in G5 e G6. Focalizzarsi su un numero limitato di esempi specifici può quindi essere fuorviante, e comunque insufficiente a immaginarsi il caso generale di riferimento (Kapur, 2010, 2011). Per ricondurre la narrazione verso la corretta congettura, eliminando di volta in volta falsi candidati, ci si è quindi serviti di esempi aggiuntivi, come quelli in Figura 11.

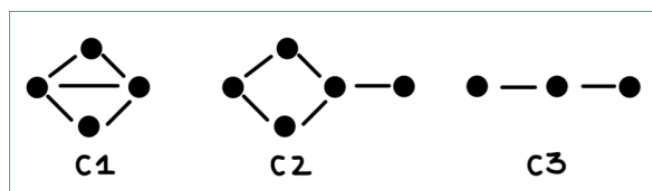


Figura 11. Controesempi: G2 e G3 hanno entrambi 5 vertici, mentre C1 ne ha solamente 4. In G2, G3 e C1 compaiono dei triangoli, mentre in C2 no. In tutti i grafi precedenti c'è un ciclo, in C3 no. Inoltre, C3 è l'unico tra i grafi presentati che ha un numero di vertici maggiore del numero di archi.

Per rendere evidente il ruolo del grado di un vertice rispetto ad altre proprietà del grafo (parità/disparità di vertici o archi), si è insistito sui termini "uscire da" ed "entrare in" un vertice: così, da tutti i

10. Si veda per esempio la condizione equivalente di grafo euleriano come decomponibile in cicli (Harari, 1969, Teorema 7.1.)

vertici di passaggio si entra e si esce lo stesso numero di volte, mentre dal vertice di partenza si esce una volta in più di quante non si rientri e nel vertice di arrivo si entra una volta in più di quante non se ne esca. In questo cruciale passaggio, che porta a riconoscere il ruolo del grado del vertice nell'esistenza e nella tipologia dei cammini euleriani, si è riscontrata una sostanziale differenza tra la scuola secondaria di primo grado e il Liceo Matematico. Nelle classi della scuola secondaria di primo grado, il contenuto dell'enunciato del teorema di Eulero è parso esser stato intuito inizialmente solo da pochi, che hanno poi fatto da guida nell'applicazione dell'enunciato al problema delle mappe. In queste classi, dopo aver ragionato sul grafo G2 come sopra descritto, ci siamo quindi limitati a verificare la validità dell'enunciato applicandolo agli altri tipi di grafo della **Tabella 1**, senza insistere troppo sull'argomento logico-dimostrativo. Diversamente, le classi del Liceo Matematico hanno spontaneamente cercato di estendere l'argomento usato sul grafo G2 agli altri tipi di grafo, con un minimo sforzo da parte degli esperti nel guidarli a intravedere uno schema di (parziale) dimostrazione dell'enunciato.

5.5 Problema diretto e problema inverso

In questo laboratorio si è insistito molto sul far lavorare le classi anche sul problema inverso, proponendolo in almeno due situazioni:

- all'inizio della terza fase è stato chiesto come modificare gli schemi di danza, in modo da avere assegnate coreografie euleriane;
- nell'attività conclusiva della terza fase sul teorema di Eulero è stata proposta la rimozione e ricostruzione di un ponte in una mappa, in modo da avere cammini o circuiti euleriani.

In entrambi i casi, per quanto la prima richiesta sia stata proposta *prima* dell'enunciato del teorema e la seconda *dopo* l'enunciato, l'obiettivo è sempre stato quello di mettere in luce l'esistenza di un legame tra le proprietà delle soluzioni (apertura o chiusura) e il ruolo del vertice di partenza, indirizzando l'attenzione verso il grado del vertice come proprietà discriminante. Per tutta la sperimentazione, entrambe le versioni del problema inverso sono sempre state accolte dalle classi come sfidanti, e hanno rappresentato un importante momento di sviluppo e comprensione dell'attività, anche quando la strategia risolutiva si è discostata dalle aspettative: infatti, nello svolgimento dell'ultima attività sull'abbattimento e ricostruzione di un solo ponte, la maggior parte dei partecipanti (sia per la scuola secondaria di primo grado che per il Liceo Matematico) ha lavorato direttamente sulla mappa, piuttosto che con le operazioni di taglia-incolla di un arco sul corrispondente grafo, mostrando un'evidente preferenza verso una rappresentazione meno astratta del problema. Tuttavia, in entrambi i gradi di istruzione secondaria vi sono stati casi isolati di studenti che hanno introdotto in maniera autonoma il concetto di "grado di una regione": essi hanno modificato direttamente sulle mappe la parità del numero di ponti che collegano le diverse regioni, in modo da garantire l'esistenza del cammino euleriano richiesto. Questo trasferimento del concetto di grado dal grafo alla mappa può essere visto come un esempio dell'efficacia dell'intero percorso proposto, che ha stimolato l'analogia tra le diverse situazioni presentate.

6 Conclusioni e sviluppi successivi

La struttura del progetto, nella sua sequenza di varie fasi laboratoriali che conducono alla teoria dei grafi e alla risoluzione del problema dei ponti di Königsberg, ha confermato la sua efficacia come attività di *problem solving*: infatti, essa ha permesso di coinvolgere le classi dalle prime battute, mantenendo viva la loro curiosità fino agli sviluppi finali e offrendo loro una prospettiva storico-sperimen-

tale della disciplina a cui non sono abituati. Le attività proposte hanno dato l'opportunità di lavorare su un problema in maniera esplorativa, ipotizzando e verificando congetture, e mettendo in atto alcune importanti strategie come l'analogia, l'utilizzo delle simmetrie (quando presenti) e lo studio delle relazioni tra le proprietà delle soluzioni e i dati del problema. Più in generale, questa esperienza ha rafforzato quanto già sostenuto in letteratura circa le potenzialità didattiche della teoria dei grafi per sviluppare nella scuola secondaria di primo grado l'attitudine verso il *problem solving* (Ferrarello & Mammana, 2017; Mammana & Milone, 2010; Robinson, 2006; Santoso, 2018).

Le modifiche e integrazioni al progetto contenuto in Gaio et al. (2020), volte a mettere maggiormente in luce le caratteristiche dei cammini euleriani e il ruolo del grado dei vertici, si sono mostrate utili al fine di far emergere l'enunciato del teorema di Eulero come una naturale sintesi delle esperienze laboratoriali, capace a posteriori di risolvere situazioni ben più complesse di quelle assegnate. Tali modifiche si sono mostrate particolarmente utili nel caso della sperimentazione con le classi del Liceo Matematico che, come riportato nel par. 3.1, hanno svolto il laboratorio presso il Dipartimento di Matematica nell'arco di mezza giornata, senza la possibilità di includere alcuna attività *embodied*. A fronte di uno sviluppo del progetto ridotto e condensato in poche ore consecutive, il risultato è stato comunque molto positivo: le classi del Liceo Matematico hanno spesso mostrato un ottimo livello di coinvolgimento, adattandosi con facilità agli aspetti più formali delle attività (rappresentazione simbolica, teoria dei grafi), talvolta anticipando in maniera intuitiva alcuni aspetti geometrici della struttura del problema (chiusura o apertura dei cammini, ruolo del grado di un vertice).

L'attività motoria *Coreo-Graph*, in accordo con quanto sintetizzato in Smith e Walkington (2019), si è mostrata un'efficace esperienza *embodied* per le classi della scuola secondaria di primo grado: le azioni compiute durante le coreografie hanno sempre avuto piena corrispondenza con i concetti della teoria dei grafi gradualmente proposti nell'ultima fase, offrendo la possibilità di un completo coinvolgimento del corpo e richiedendo la collaborazione dei vari membri della stessa *crew*.

In maniera più specifica, l'attività *Coreo-Graph* ha permesso di anticipare in un contesto motorio-esperienziale gli elementi e i quesiti della teoria dei grafi, facilitandone lo studio più astratto; infatti tale attività ha diluito le difficoltà della terza fase, che altrimenti sarebbe stata troppo densa e faticosa. In particolare, essa ha offerto un costante riferimento tangibile agli aspetti teorici che hanno condotto all'enunciato del teorema di Eulero e alla sua applicazione al problema dei ponti di Königsberg; per esempio nel riconoscimento delle proprietà di apertura e chiusura dei cammini euleriani, nella spiegazione del ruolo del grado dei vertici in un cammino euleriano e nella corretta interpretazione del concetto di eulerianità di un cammino, ovvero nella corretta identificazione di archi e vertici nella trasformazione delle mappe nei corrispondenti grafi.

Ha inoltre offerto alle classi un'esperienza matematica in un contesto differente dalla solita didattica frontale in aula, come quella proposta con carta e penna nella terza fase (la scheda di Figura 7): aver proposto attività tra loro differenti nel contesto, ma analoghe nella struttura del problema, ha permesso di andare incontro alla normale diversità che ci si può attendere in termini di interesse verso la matematica e capacità nel comprenderne i contenuti (Smith & Walkington, 2019).

Questa sperimentazione suggerisce come l'attività *Coreo-Graph* sia stata didatticamente significativa per le classi della scuola secondaria di primo grado, intercettando la richiesta di un'esperienza capace di creare idee matematiche attraverso la pratica laboratoriale. In tal senso, la dimensione del mesospazio che ha caratterizzato la proposta (o altre equivalenti che si possono immaginare e sperimentare) può essere stata più incisiva rispetto alla scelta originale di far lavorare le classi all'interno di un percorso urbano, dove l'osservazione della struttura del cammino e delle sue proprietà è meno diretta. Come già osservato nei paragrafi precedenti, questa dimensione favorisce lo svolgimento durante l'orario curricolare, l'osservazione dei compiti assegnati da parte degli esperti e dei docenti e l'interazione con gli stessi. Inoltre, offre costantemente un duplice punto di vista motorio e percettivo: quello della propria esecuzione della coreografia e quello delle esecuzioni altrui.

Di contro, per le classi del Liceo Matematico l'attività iniziale sulle mappe e i ponti sembra esser stata

sufficientemente propedeutica all'attività teorica sui grafi, probabilmente grazie alla maggior attitudine verso la disciplina e a una capacità di astrazione già più sviluppata in questa fascia d'età. In questo non vediamo necessariamente un ridimensionamento dell'utilità didattica di questa o di altre attività *embodied* nelle classi della scuola secondaria di secondo grado. Infatti, si sarebbe potuto progettare il laboratorio diversamente, anticipando l'attività *Coreo-Graph* come preparatoria alla parte teorica, e spostando l'applicazione al problema dei ponti di Eulero in coda al laboratorio. Una prima indicazione del possibile valore di questa variante viene dalle prime due edizioni dell'evento "Un anno di Licei Matematici",¹¹ svoltesi a conclusione dell'anno scolastico del Liceo Matematico (maggio 2023 e 2024). In tali occasioni, si è proposto ad alcuni gruppi del Liceo Matematico il problema delle coreografie euleriane, a cui si è fatta seguire la formulazione del teorema di Eulero, usando gli schemi di danza come unici esempi rappresentativi dei casi presenti nell'enunciato. Rimane dunque aperta la domanda circa la significatività di un laboratorio *embodied* per le classi della scuola secondaria di secondo grado, sulla quale si concentreranno i possibili sviluppi futuri di questo progetto. Allo stesso tempo, potrebbe essere altrettanto interessante escludere l'attività *Coreo-Graph* dal laboratorio proposto alla scuola secondaria di primo grado, così da verificare l'effettiva rilevanza di questa esperienza *embodied* e ampliare il confronto tra i due diversi gradi di istruzione.

Oltre a proseguire la sperimentazione con queste fasce d'età all'interno degli istituti scolastici del territorio, valutandone possibili estensioni nell'ambito della Computer Science, per il futuro si intende consolidare l'attività *Coreo-Graph* come laboratorio indipendente, sviluppandola eventualmente anche in chiave artistica (come in Gerofsky et al., 2023). È infatti già in corso la proposta di tale attività come strumento per promuovere il *problem solving* anche al di fuori del contesto strettamente scolastico, integrandola nella programmazione di alcuni centri estivi di danza e multisport. Questa estensione sta portando a modificare gli schemi di Figura 4 in modo da renderli più compatibili con l'esistenza di coreografie euleriane costituite da otto passi, che meglio si adattano alla ritmica di alcuni generi musicali frequenti negli stili "urban" (pop, hip-hop, dance, trap ecc.) mostrando l'applicabilità del progetto e la sua efficacia anche in contesti extrascolastici.

Ringraziamenti

Ringraziamo Laura Branchetti, per averci stimolato ed incoraggiato nella stesura di questa sperimentazione, e Giulia Bini, per i preziosi consigli nella lunga fase di revisione. Ringraziamo Alessia Maggioni per la collaborazione durante il suo periodo di tesi, che ha posto le basi per questo progetto. Ringraziamo Sara Gagliani Caputo, per l'invito ed il supporto dato all'evento "Un anno di Licei Matematici". Ringraziamo Maria Luoni, Camilla Pugliese, Giorgia Mazzilli e Beatrice Sacchetti per l'aiuto durante gli incontri con le classi dei licei matematici che si sono susseguite in questi anni. Ringraziamo le insegnanti e le classi dell'Istituto Comprensivo "A. Manzoni" di Ornago e Burago per aver cercato ed accolto questa proposta laboratoriale, e le classi del Liceo Matematico che hanno partecipato con entusiasmo al laboratorio di teoria dei grafi nel biennio 22/23-23/24. Tiziano Penati ringrazia infine Aleksandar Tasovac (in arte Sasko) per il supporto concreto ed i preziosi consigli creativi sull'attività *Coreo-Graph*, e la scuola di danza Danza Passion di Burago di Molgora (MB) per aver accolto la proposta *Coreo-Graph* all'interno della propria programmazione estiva 2024.

Bibliografia

Alibali, M. W., & Mitchell, J. N. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 247–286. <https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446>

11. <https://liceomatematicomilano.unimi.it/>.

- Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (Eds.) (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica (Ciclo secondario)*. Matteoni stampatore.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*. The Macmillan Press Ltd.
- Chamberlin, S. A. (2008). What is problem solving in the mathematics classroom. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 23(1). <https://www.exeter.ac.uk/research/groups/education/pmej/pome23/Chamberlin%20What%20is%20Math%20Prob%20Solving.doc>
- Collins, A., Brown, J. S., & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American Educator*, 6(11), 38–46.
- Edwards, L. D. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 127–141. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9124-6>
- Ferrarello, D., & Mammana, M. F. (2017). Graph theory in primary, middle, and high school. *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research*, 183–200.
- Gaio, A., Capone, R., & Branchetti, L. (2020). Learning math outdoor: Graph theory using maps. In M. Ludwig, S. Jablonski, A. Caldeira & A. Moura (Eds.), *Research on Outdoor STEM Education in the digital Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020* (pp. 95–102). WTM. <https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.12>
- Gerofsky, S. (2011). Seeing the graph vs. being the graph. In G. Stam & M. Ishino (Eds.), *Integrating gestures: The interdisciplinary nature of gesture* (pp. 245–256). John Benjamins Publishing Company. <https://doi.org/10.1075/gs.4.22ger>
- Gerofsky, S. (2013). Learning mathematics through dance. In G. Hart & R. Sarhangi (Eds.), *Proceedings of Bridges 2013: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 337–344). Tessellations Publishing.
- Gerofsky, S., Robertson, S. B., Schaffer, K., & Zharinova, E. (2023). Puppetry, poetry, dance, and sound on the bridges of Königsberg: Embodied work with Euler paths and circuits. In J. Holdener & E. Torrence (Eds.), *Proceedings of Bridges 2023: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 571–578). Tessellations Publishing.
- González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Puertas, M. L. (2021). Characterizing levels of reasoning in graph theory. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(8), em1990. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11020>
- Harari, F. (1969). *Graph Theory*. Addison-Wesley Series in Mathematics.
- Hazzan, O., & Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(3), 255–272.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003>
- Kapur, M. (2010). Productive failure in mathematical problem. *Instructional Science*, 38, 523–550. <https://doi.org/10.1007/s11251-009-9093-x>

- Kapur, M. (2011). A further study of productive failure in mathematical problem solving: Unpacking the design components. *Instructional Science*, 39, 561–579. <https://doi.org/10.1007/s11251-010-9144-3>
- Mammana, M., & Milone, C. (2010). Dal problema al modello: Una sperimentazione sul concetto di grafo nella scuola media. *L'Educazione Matematica*, IX(2), 23–36.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni Nazionali per i licei*. <https://www.gazzettaufficiale.it/gunewsletter/dettaglio.jsp?service=1&datagu=2010-12-14&task=dettaglio&num-gu=291&redaz=010G0232&tmstp=1292405356450>
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf
- Núñez, R. E. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In N. Tadao & K. Masataka (Eds.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–22). PME.
- Núñez, R. E. (2008). Mathematics, the ultimate challenge to embodiment: Truth and the grounding of axiomatic systems. In P. Calvo & T. Gomila (Eds.), *Handbook of Cognitive Science: An Embodied Approach* (pp. 333–353). Elsevier.
- Ortiz, E. (2016). The problem-solving process in a mathematics classroom. *Transformations*, 1(1), 4–13. <https://nsuworks.nova.edu/transformations/vol1/iss1/1>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Robinson, L. A. (2006). *Graph theory for the middle school* [Master's thesis]. East Tennessee State University. <https://dc.etsu.edu/etd/2226>
- Santoso, E. B. (2018). Mathematics classroom activities based on some topics in graph theory to develop critical thinking of primary and secondary school students. *International Journal of Information and Education Technology*, 2(2), 154–160. <https://doi.org/10.24071/ijiet.2018.020207>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). Macmillan.
- Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Smith, C., & Walkington, C. (2019). Four principles for designing embodied mathematics activities. *Australian Mathematics Education Journal*, 1(4), 16–20.
- Way, J., Cartwright, K., & Ginns, P. (2024). A collective approach to embodied learning in early years mathematics (ELEMS Phase 1). In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Herendiné-Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 5173–5180). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/hal-04420789v1>

Dalla descrizione alla definizione: un itinerario didattico sui quadrilateri

From description to definition: an educational path on quadrilaterals

Jessica De Putti Cattaneo

Scuola elementare Davesco-Soragno – Svizzera

✉ jessica.cattaneo@edu.ti.ch

Sunto / Questo articolo descrive un'esperienza didattica sul tema dei quadrilateri condotta in una classe quarta delle scuole elementari. L'obiettivo del percorso è stato favorire il passaggio graduale dalla descrizione alla definizione dei quadrilateri attraverso un approccio interdisciplinare che integra in modo significativo la riflessione sul linguaggio. Dopo una panoramica sul quadro teorico di riferimento, vengono illustrate le diverse fasi del percorso e analizzate le produzioni degli alunni. In allegato sono forniti i materiali didattici utilizzati.

Parole chiave: quadrilateri; descrizione; definizione; linguaggio; pensiero geometrico.

Abstract / This article describes a teaching experience on the topic of quadrilaterals conducted in a fourth-grade primary school class. The aim of the educational path was to encourage a gradual transition from the description to the definition of quadrilaterals through an interdisciplinary approach that significantly integrates reflection on language. After an overview of the theoretical framework of reference, the different phases of the path are illustrated and the pupils' productions analyzed. The teaching materials used are attached.

Keywords: quadrilaterals; description; definition; language; geometric thinking.

1 Introduzione

In questo contributo si presenta un percorso didattico svolto in una quarta elementare focalizzato sulla descrizione e definizione dei quadrilateri in cui è stata posta particolare attenzione al linguaggio. Il percorso nasce dall'esigenza di rendere gli alunni¹ protagonisti attivi nella costruzione dei concetti geometrici, partendo da esperienze concrete e sviluppando parallelamente la consapevolezza linguistica necessaria per esprimere con precisione il pensiero geometrico.

L'osservazione delle difficoltà linguistiche riscontrate dagli alunni nelle prime fasi di descrizione e di classificazione dei quadrilateri ha evidenziato quanto il lessico sia fondamentale per una comprensione profonda dei concetti geometrici. A partire da questa consapevolezza, il percorso ha integrato attività di manipolazione, giochi strutturati e momenti di discussione collettiva, con l'obiettivo di stimolare negli alunni una riflessione sia sul significato dei termini utilizzati sia sulle proprietà dei quadrilateri. Attraverso l'uso di strumenti come le carte che indicano proprietà delle figure, diagrammi di Euler-Venn e attività collaborative, gli allievi sono stati accompagnati in un graduale processo di formalizzazione che ha intrecciato il pensiero geometrico con lo sviluppo delle competenze linguistiche. L'interdisciplinarietà tra geometria e linguaggio ha rappresentato non solo uno sfondo metodologico, ma anche un'occasione per promuovere un approccio critico e riflessivo nei confronti della matematica.

2 Quadro teorico

In questo capitolo vengono trattati brevemente alcuni riferimenti teorici che hanno guidato la progettazione a priori del percorso e la riflessione attivata durante e dopo lo svolgimento delle varie attività. Questi riferimenti riguardano da un lato l'interdisciplinarietà tra matematica e italiano nella didattica della matematica, dall'altro il pensiero geometrico.

2.1 L'interdisciplinarietà tra matematica e italiano nella didattica della matematica

Per molti anni si è creduto, e ancora oggi si crede, che tra il pensiero scientifico e il pensiero umanistico non vi sia alcuna comunicazione. Nell'immaginario comune, questa distanza è ancora più marcata nel caso della matematica e della lingua, discipline che facilmente vengono prese come rappresentanti del mondo scientifico da un lato e di quello umanistico dall'altro. In realtà, i due mondi della matematica e della lingua sono strettamente connessi e possono supportarsi e arricchirsi a vicenda. Sbaragli e Demartini (2021) affermano, infatti, che la matematica è caratterizzata da un linguaggio specialistico e che, rispetto al linguaggio della quotidianità, questo linguaggio possiede caratteristiche specifiche quali la precisione, la sinteticità e l'efficacia, che comportano generalmente una grande densità lessicale e informativa. Questo linguaggio ricco di parole nuove, di costrutti linguistici speciali, di attese semantiche diverse e di parole polisemiche può complicare il processo di lettura e comprensione testuale da parte dell'allievo, portandolo a difficoltà nello svolgere processi metacognitivi importanti, come controllare e gestire la propria comprensione. D'altra parte, anche difficoltà nell'acquisizione, nella comprensione e nella gestione del linguaggio quotidiano possono essere tra le diverse cause delle difficoltà in matematica. Se la lingua non è adeguatamente padroneggiata può divenire un ostacolo pervasivo nelle altre discipline. In particolare, dal momento che i significati scientifici sono costruiti dalla lingua, è necessaria una buona padronanza linguistica per poter costruire un sapere scientifico solido e permanente. Inoltre, secondo Dodman (2007) gli allievi spesso percepiscono la matematica in modo negativo perché viene insegnata come una materia isolata, contraddistinta da rigore, precisione e astrazione, senza alcun legame con le altre discipline.

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

Approcciarsi invece a un lavoro interdisciplinare, in cui le singole discipline, matematica e italiano, forniscono il proprio contributo, dà origine a una didattica dalle caratteristiche uniche. Evitando rigide separazioni tra i due ambiti e proponendo percorsi didattici esperienziali che coinvolgono matematica e linguaggio, l'apprendimento diverrà più solido e funzionale per entrambe le discipline (Sbaragli & Demartini, 2021).

Per la sua importanza in termini disciplinari e pedagogici, lo studio della geometria è promosso fin dai primi anni di scolarità e continua lungo tutto il processo di apprendimento della scuola dell'obbligo: in effetti, lo studio della geometria permette di esplorare le caratteristiche e le proprietà dello spazio, e le forme e le relazioni tra gli oggetti. D'altro canto, il linguaggio fornisce i mezzi per descrivere, definire e riflettere sui concetti geometrici in modo chiaro e strutturato. L'integrazione tra questi due ambiti non solo favorisce una comprensione più profonda della geometria, ma stimola anche il pensiero critico. Lavorare su questa connessione consente agli allievi di sviluppare una maggiore consapevolezza delle strutture logiche e degli elementi concettuali alla base della matematica, migliorando sia le competenze linguistiche che quelle geometriche.

Appare quindi estremamente significativo proporre degli itinerari didattici volti all'interdisciplinarietà tra matematica e lingua (Sbaragli & Demartini, 2021). Una delle possibilità da questo punto di vista risiede nel lavoro congiunto riguardante atti linguistici tipici del discorso matematico, quali ad esempio la definizione.

2.1.1 Descrivere e definire

Nella pratica didattica, si utilizzano spesso descrizioni e definizioni che, nell'uso comune della lingua, sono visti come atti linguistici sinonimici. In effetti, entrambi hanno lo scopo di far capire di cosa si sta parlando. In matematica, però, descrivere e definire sono due atti linguistici differenti. Infatti, «l'atto descrittivo è caratterizzato da una certa naturalezza e dall'abbondanza delle proprietà che vengono elencate (solitamente, più qualità di un concetto vengono esposte, più la descrizione è accurata)», mentre «la definizione in senso classico – soprattutto in matematica – ha storicamente assunto alcune caratteristiche più stringenti, rivolte all'essenzialità [...] che ne rendono tutt'altro che banale la formulazione» (Sbaragli & Canducci, 2023, p. 137). L'atto del definire ha dunque delle relazioni ma non è sovrapponibile con quello di descrivere, atto che è invece caratterizzato da una sovrabbondanza di termini ed espressioni volti a ricostruire con verosimiglianza un concetto in modo che il ricevente possa costruirsi un'immagine precisa (Sbaragli, 2020). Gli allievi si trovano frequentemente confrontati con descrizioni e definizioni fin dai primi anni del loro percorso scolastico. Ma se da un lato l'atto descrittivo sembra essere più immediato, le richieste di fornire delle definizioni matematiche risultano tutt'altro che semplici e molti allievi presentano delle difficoltà a livello sia matematico sia linguistico (Sbaragli & Canducci, 2023). Una delle difficoltà nel definire in matematica insorge dal concetto stesso di definizione, in quanto è fondamentale possedere una conoscenza dei termini e dei concetti espressi nell'enunciato per poterla formulare o comprendere. La descrizione delle caratteristiche di un concetto invece risulta più accessibile agli allievi che possono utilizzare più termini specialistici, e non, per delinearli ed eventualmente rappresentarli.

2.2 Il pensiero geometrico

La geometria può essere considerata come uno strumento per comprendere, descrivere e interagire con lo spazio che ci circonda: coglie alcuni elementi dell'esperienza spaziale e li formalizza a livello teorico. Il pensiero geometrico nasce dall'osservazione e interpretazione dello spazio, dei suoi oggetti, delle immagini e delle relazioni tra di essi, includendo le loro possibili trasformazioni (Clements & Battista, 1992).

Per questo motivo i primi approcci alla didattica della geometria, fondamentali per lo sviluppo del pensiero geometrico del bambino ovvero per sviluppare i concetti astratti che gradualmente diventano sempre più rigorosi, formali e generalizzati, dovrebbero basarsi su esperienze senso-motorie

che coinvolgono la vista, il tatto, il movimento e l'interazione con gli oggetti (Gallese & Lakoff, 2005; Sbaragli & Mammarella, 2011). Si passa in seguito ad individuare gli elementi che riguardano la dimensione spaziale e gradualmente si organizzano in maniera autonoma fino ad ottenere una formalizzazione sempre più strutturata e rigorosa (Arrigo & Sbaragli, 2004).

In questo percorso verso la formalizzazione, due componenti fondamentali, la figura e il concetto, devono coesistere in maniera equilibrata ed armoniosa per favorire l'apprendimento geometrico degli allievi (Mariotti, 1992). Per condurre un ragionamento geometrico in termini logici è necessario infatti visualizzare concretamente la figura alla quale ci si riferisce. Il riferimento agli aspetti spaziali può avvenire attraverso il disegno che consente di rappresentare un concetto geometrico attraverso sistemi di tratti grafici organizzati spazialmente. Tuttavia, il disegno geometrico non coincide automaticamente con l'oggetto geometrico che intende rappresentare. La sua interpretazione può infatti variare in base al lettore, alle conoscenze pregresse e al contesto. Già all'epoca di Euclide si era riconosciuto un divario tra i concetti formalizzati e gli oggetti mentali intuitivi. Al tempo stesso, si comprese come le figure tracciate su carta potessero essere utilizzate per rappresentare oggetti geometrici. La relazione tra figura, disegno e oggetto geometrico rimane quindi centrale per la costruzione di corrispondenti oggetti mentali e per la comprensione dei concetti geometrici (Angulo Romero et al., 2024).

Gli aspetti figurali e concettuali degli enti della geometria sono stati integrati da Fischbein (1993) nell'idea di concetto figurale, ovvero nell'idea che ogni "oggetto" della geometria coinvolge sia elementi di concetto (idee astratte) sia rappresentazioni figurali (immagini della figura). Ogni oggetto geometrico è un concetto figurale con delle caratteristiche spaziali legate alla forma, alla posizione e alla grandezza, e con delle caratteristiche più concettuali relative alla sua idea, all'astrazione e alla generalizzazione. È fondamentale che l'insegnante stimoli la costruzione del concetto figurale attraverso una didattica continuativa e sistemica che favorisca un'armonia tra l'aspetto di percezione sensoriale e quello concettuale.

In mancanza di equilibrio tra la componente figurale e concettuale di un determinato oggetto geometrico possono emergere delle misconcezioni (Sbaragli, 2005). In particolare, tale equilibrio non deve diventare una sovrapposizione delle due componenti figurale e concettuale. Se infatti, come sostiene Duval (1993), le rappresentazioni semiotiche (tra cui quella figurale) sono fondamentali per comprendere un oggetto matematico, poiché quest'ultimo non è direttamente accessibile nella percezione o nell'esperienza pratica, d'altro canto gli oggetti matematici non devono mai essere confusi con la loro rappresentazione. A lungo termine, una tale confusione ha delle conseguenze sulla comprensione e sulla conoscenza acquisita, le quali divengono inutilizzabili al di fuori del contesto d'apprendimento poiché sono associate a una rappresentazione inefficace dal punto di vista dell'elaborazione concettuale. Fischbein aggiunge che, tra le due componenti figurale e concettuale, quella che deve assumere un ruolo predominante è quella concettuale.

L'aspetto figurale degli oggetti geometrici, infatti, è fortemente influenzato dalla sfera percettiva. La comprensione percettiva è ciò che riconosce una persona nel primo momento in cui osserva una figura geometrica. A partire dagli stimoli sensoriali esterni, ognuno di noi interiorizza un'immagine soggettiva che va a definire la percezione visiva. È chiaro quindi che la rappresentazione figurale è qualcosa di interpretabile e deve essere studiata con senso critico: è importante sensibilizzare gli allievi alla questione e far prevalere l'aspetto concettuale (Sbaragli, 2006).

È proprio a partire dal livello visivo che si struttura il modello di van Hiele (1986) per lo sviluppo del pensiero geometrico nei bambini. Tale modello, in cui si pone una particolare enfasi sul linguaggio, si compone di cinque livelli che non solo descrivono lo sviluppo del pensiero, ma possono anche essere considerati cinque fasi dell'insegnamento della geometria, utili per promuovere tale sviluppo.

- *Livello visivo*: gli allievi sono in grado di riconoscere le figure in maniera percettiva. Le loro proprietà non appaiono ancora esplicite, ma sono condensate in una figura geometrica di cui hanno avuto esperienza assumendo un carattere simbolico. Grazie alla conoscenza di un numero elevato

di simboli (ad esempio i simboli quadrato, rettangolo, rombo e così via), l'alunno è in grado di organizzare, almeno in parte, il campo di studio.

- *Livello descrittivo-analitico*: il riconoscimento delle figure avviene attraverso le proprietà delle figure in maniera disorganizzata e disordinata. Gli alunni fissano stabilmente le proprietà se possono confrontarle in maniera analoga con altre figure, ma non sono ancora in grado di organizzare le proprietà in termini di definizioni o proposizioni. I simboli (per esempio, il rombo) divengono un insieme di segnali, ovvero tutte le proprietà caratteristiche del simbolo (lati congruenti, due coppie di lati paralleli, due coppie di lati congruenti ecc.). Tra tutti questi segnali ne risalta uno, il segnale significativo, da cui l'allievo sarà in grado di anticipare tutti gli altri.
- *Livello delle deduzioni informali*: gli allievi iniziano a osservare le relazioni dal punto di vista logico, stabiliscono delle interrelazioni di proprietà delle figure e tra le figure. In questa fase lo sviluppo del linguaggio e di una terminologia tecnica risulta fondamentale.
- *Livello deduttivo*: all'interno di una teoria assiomatica parziale, gli allievi sono in grado di formulare delle successioni di affermazioni deducendone una dall'altra. Possono comprendere il ruolo dei termini non definiti, degli assiomi, dei postulati, delle definizioni, dei teoremi e delle dimostrazioni; comprendono inoltre, l'interazione tra condizioni necessarie e condizioni sufficienti.
- *Livello strutturale*: gli alunni mettono in relazione teorie assiomatiche diverse e sanno lavorare in una varietà di sistemi assiomatici, si studia la natura delle leggi logiche. È il livello più alto che van Hiele descrive e che ritiene essere il più raro da raggiungere a livello scolastico.

Il passaggio da un livello all'altro è sequenziale, ovvero avviene solo quando il livello precedente è veramente acquisito, ed è fortemente influenzato dal linguaggio. In tal senso è fondamentale il ruolo dell'insegnante in quanto promuove lo sviluppo di ciascun livello e allo stesso tempo riconosce il livello raggiunto dall'alunno.

Per stimolare il passaggio da un livello all'altro van Hiele propone delle fasi di apprendimento da tenere in considerazione.

Nella prima fase, chiamata *fase d'informazione*, gli allievi prendono familiarità con il materiale didattico e l'argomento di lavoro, sviluppando una base comune su cui potranno comunicare e scambiare opinioni. La fase seguente è definita come *fase di orientazione guidata* ed è caratterizzata dall'esplorazione del campo di studio attraverso l'utilizzo di materiali. Nella terza fase, la *fase di esplicitazione*, gli allievi individuano le relazioni e sono in grado di affiancare alle esperienze un linguaggio adeguato mostrando di sapersi esprimere al riguardo. La *fase di orientazione libera* è caratterizzata dalla scoperta individuale delle relazioni attraverso dei compiti che possono essere affrontati attraverso diversi metodi. Nell'ultima fase, la *fase d'integrazione*, gli alunni sviluppano una visione globale del campo di studio e degli strumenti. Per questo motivo l'insegnante dovrà svolgere un lavoro di sintesi di quanto affrontato precedentemente senza introdurre concetti nuovi. Alla fine di tale percorso d'apprendimento, l'allievo sarà pronto per giungere a un nuovo livello di pensiero (Batini et al., 2004).

3 Metodologia

Il percorso didattico qui proposto si focalizza sul passaggio dalla descrizione dei quadrilateri alla loro definizione e classificazione. L'itinerario è costituito da una sequenza di 11 attività incentrate sulla costruzione dei concetti geometrici dei quadrilateri, attraverso esperienze sensoriali e riflessioni sulla lingua. Le prime otto attività sono state sperimentate in classe con un gruppo di 9 bambini di quarta elementare di una pluriclasse (quarta-quinta) del Luganese, mentre le lezioni seguenti sono state ideate per essere proposte durante l'anno scolastico successivo. Il gruppo di allievi è piuttosto

eterogeneo dal punto di vista delle competenze matematiche e linguistiche, per questo motivo, le attività proposte sono state talvolta differenziate in base alle loro caratteristiche e necessità. Nella presentazione del percorso didattico viene illustrato, se presente, il tipo di differenziazione proposto agli allievi. In particolare, vista l'attenzione posta al linguaggio, sono stati integrati alcuni supporti per un allievo non di madrelingua italiana.

In generale il percorso didattico va a toccare competenze legate alla matematica, all'italiano ma anche alle caratteristiche personali dell'allievo. Le diverse forme e modalità di lavoro delle attività stimolano le competenze trasversali contenute nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022) relative alla comunicazione, alla collaborazione e al pensiero riflessivo e critico. Dal punto di vista più strettamente disciplinare, inoltre, in questo percorso didattico sono sviluppate competenze nell'ambito tematico della geometria che coinvolgono la risorsa cognitiva "sapere e riconoscere" e i processi cognitivi "esplorare e provare", "matematizzare e modellizzare" e "comunicare e argomentare" (DECS, 2022).

4 Il percorso didattico dalla descrizione alla definizione dei quadrilateri

Ogni attività è introdotta con la sua descrizione, seguita da un'analisi preliminare delle possibili difficoltà didattiche e di apprendimento. Le scelte metodologiche vengono motivate in relazione al quadro teorico di riferimento e alle caratteristiche specifiche della classe. In seguito vengono analizzate le produzioni degli allievi discutendole rispetto allo sviluppo del pensiero geometrico e al linguaggio utilizzato.

4.1 Attività introduttiva

Descrizione dell'attività. Occorre precisare che gli allievi avevano già affrontato il tema dei poligoni, i concetti di angolo, rette parallele e perpendicolari.

All'inizio del percorso didattico sui quadrilateri è stato pertanto ripreso il termine "quadrilatero", che era già stato introdotto con il concetto di poligono, attraverso un'attività individuale seguita da una discussione collettiva. Lo scopo finale di questa attività era quello di scrivere una definizione condivisa di quadrilatero.

Inizialmente agli allievi è stato chiesto di scrivere con parole proprie cos'è un quadrilatero e di disegnarne alcuni esempi. Attraverso questa prima attività del percorso didattico, si è voluto introdurre la tematica stimolando l'allievo a verbalizzare e rappresentare le proprie conoscenze pregresse e le proprie idee in maniera spontanea e libera, creando un ambiente sereno dove è stato possibile rilevare numerose informazioni fondamentali per il proseguimento del percorso inerenti le modalità di comunicazione utilizzate dagli allievi (descrizioni, definizioni, esempi, supposizioni ecc.) e le eventuali misconcezioni presenti.

Analisi delle produzioni degli allievi. Tutti i disegni proposti dagli allievi, realizzati a mano libera o con l'aiuto del righello, rappresentavano un quadrilatero convesso. Le spiegazioni a parole invece si differenziavano maggiormente: alcune erano delle descrizioni abbastanza approfondite di quadrilatero (ad esempio «È un poligono, una linea semplice spezzata chiusa, con quattro lati, quattro angoli e quattro vertici»), altre erano delle descrizioni incomplete (ad esempio «Ha quattro angoli e quattro lati»), mentre una piccola parte degli allievi ha tentato di fare delle supposizioni partendo dalla parola stessa "quadrilatero" (ad esempio «Quadri-latero mi fa pensare a quadrato»).

A seguito del lavoro autonomo, si è svolto un momento di condivisione in plenaria riflettendo con gli allievi sul concetto di essenzialità ed efficacia dei concetti nel dare una definizione e arrivando, con la

guida dell'insegnante, a scrivere una definizione concisa e precisa di quadrilatero: «Il quadrilatero è un poligono che ha quattro lati». Nella discussione si è chiarito che esistono altre formulazioni possibili, ovvero che «Il quadrilatero è un poligono che ha quattro angoli» e che «Il quadrilatero è un poligono che ha quattro vertici».

In questa fase iniziale del percorso didattico, gli studenti si collocano tra il primo e il secondo livello del modello di sviluppo del pensiero geometrico di van Hiele: il livello visivo e quello descrittivo-analitico. Tutti gli alunni sono spontaneamente in grado di riconoscere i quadrilateri attraverso l'intuizione visiva, mentre alcuni hanno già identificato alcune proprietà caratteristiche della figura, mostrando così un approccio più analitico e descrittivo.

4.2 Caccia ai quadrilateri

Descrizione dell'attività. La seconda attività del percorso didattico ha previsto l'osservazione puntuale dell'ambiente che circonda gli allievi con lo scopo di individuare i quadrilateri.

In questa attività, gli allievi sono stati invitati a osservare l'ambiente circostante con gli occhi della geometria. Sono poi andati alla ricerca dei quadrilateri nel sedime scolastico e hanno annotato le loro scoperte attraverso un disegno o una fotografia. Inoltre, hanno potuto provare a nominare i quadrilateri trovati. Al termine della caccia, ogni allievo ha presentato brevemente ai compagni le proprie scoperte.

Dal punto di vista didattico quest'attività ha lo scopo di condurre l'alunno verso il livello descrittivo-analitico del pensiero geometrico di van Hiele attraverso le fasi di esplicitazione e d'integrazione dell'apprendimento. Gli allievi vivono esperienze visive e tattili in modo che possano prendere familiarità con l'argomento di lavoro, sviluppare un simbolismo e soprattutto costruirne un senso attraverso un compito aperto e che permette l'individuazione di relazioni tra la geometria e la realtà. La presentazione finale stimola la costruzione di un linguaggio e di espressioni adeguati ed efficaci attraverso la comunicazione orale e l'ascolto.

Analisi delle produzioni degli allievi. In questa prima fase del percorso il linguaggio utilizzato è risultato ancora povero e poco specialistico (ad esempio «Sui lati dei banchi ci sono dei fori a forma di rettangolo messi storti»; «Il carrello delle matite ha dei quadrati allungati»), e sono emerse diverse misconcezioni sia a livello contenutistico sia linguistico (ad esempio «Un libro è un quadrilatero»). È risultato opportuno riflettere insieme agli allievi sull'efficacia comunicativa, costruendo un linguaggio comune e condiviso importante per l'intero percorso. Ad esempio, a partire dall'espressione «Un libro è un quadrilatero», è emersa la necessità di utilizzare un linguaggio più preciso e completo per evitare ambiguità e imprecisioni. L'affermazione, rielaborata insieme al gruppo classe, è stata corretta in: «Un libro è un parallelepipedo con le facce rettangolari».

4.3 Descrizione spontanea dei quadrilateri

L'attività è composta da due momenti diversi: un lavoro di descrizione di alcuni quadrilateri e un momento di gioco, sfruttando la dinamica del memory. In questa lezione si è ritenuto necessario differenziare l'attività creando gruppi di lavoro eterogenei per competenza: gli allievi più competenti hanno ricevuto i quadrilateri più "ricchi" dal punto di vista delle caratteristiche (quadrato e rettangolo o rombo) e gli allievi più in difficoltà hanno descritto i quadrilateri più "poveri" (quadrilatero generico, trapezio e parallelogramma). Inoltre, all'allievo non di madrelingua italiana si è lasciata la possibilità di usare il traduttore per svolgere l'attività.

4.3.1 Descrizione dei quadrilateri

Descrizione dell'attività. Inizialmente gli allievi sono stati suddivisi in gruppi da 3 e ciascun bambino ha ricevuto l'immagine di due quadrilateri che doveva descrivere approfonditamente in maniera libera e spontanea, senza indicazioni da parte della docente relativamente alle modalità di descrizione. Ogni

gruppo, quindi, si trovava ad avere le descrizioni di 6 quadrilateri diversi (ciascun bambino ne descrive 2 senza confrontarsi con i compagni di gruppo) utilizzando la scheda allegata ([Allegato 1](#)): quadrilatero generico, trapezio, parallelogramma, rombo, rettangolo e quadrato. Il deltoide è stato volutamente utilizzato in un secondo momento per proporre un esempio di descrizione in plenaria.

Analisi delle produzioni degli allievi. In generale, come ci si aspettava, si è potuto osservare che gli allievi hanno scelto di affrontare il compito misurando la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli con gli strumenti di misura a loro disposizione. La maggior parte degli allievi ha utilizzato l'immagine del quadrilatero per marcare gli elementi riconosciuti (lati e angoli) utilizzando i colori e per scrivere le misure ottenute come negli esempi in [Figura 1a](#) e [Figura 1b](#), trascrivendo poi a parole le informazioni individuate nella descrizione del quadrilatero.

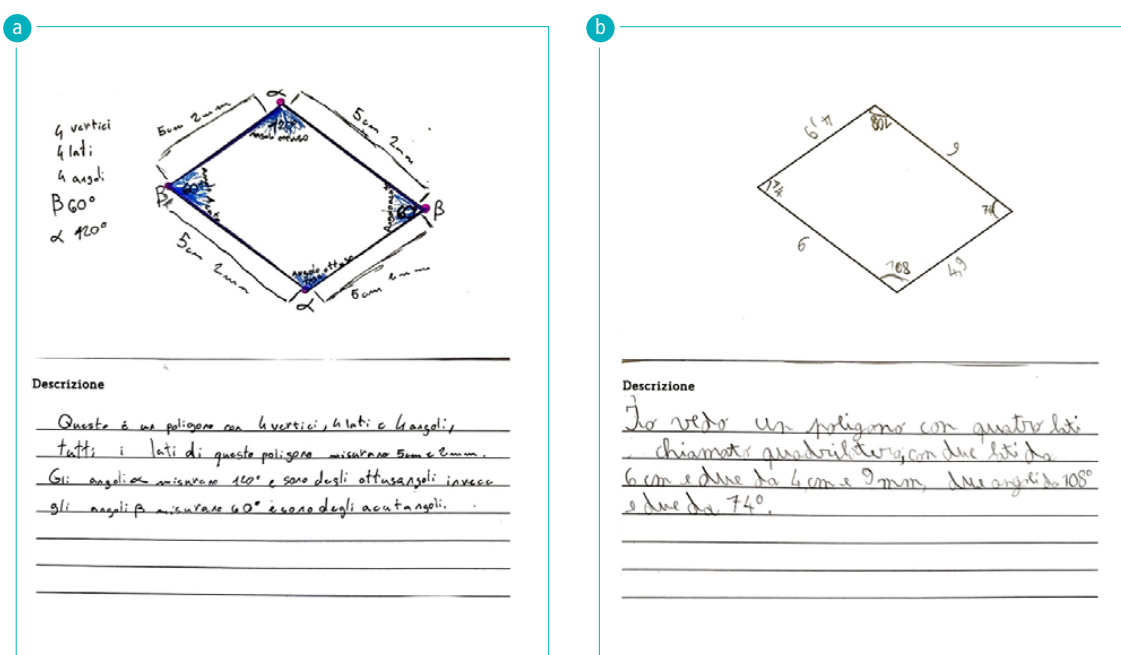


Figura 1a, b. Esempi di descrizioni complete del parallelogramma con informazioni metriche rilevate sulla figura.

Nella descrizione della [Figura 1a](#), l'alunna C. definisce la figura come «un poligono con 4 vertici, 4 lati e 4 angoli» senza utilizzare la parola “quadrilatero”. Misura la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli che infine nomina. Nella descrizione della [Figura 1b](#), invece, l'allievo B. inizia con una definizione appropriata di quadrilatero («un poligono con 4 lati chiamato quadrilatero») continuando con l'elenco delle caratteristiche specifiche del parallelogramma che sta descrivendo. Sul disegno B. indica gli angoli con un archetto e scrive la loro ampiezza e la misura della lunghezza dei lati solo con dei valori numerici tralasciando l'unità di misura, informazioni che sono però state aggiunte nella descrizione. Nel lavoro di altri allievi invece sono presenti molte imprecisioni linguistiche e l'omissione di informazioni come negli esempi in [Figura 2a](#) e [Figura 2b](#).

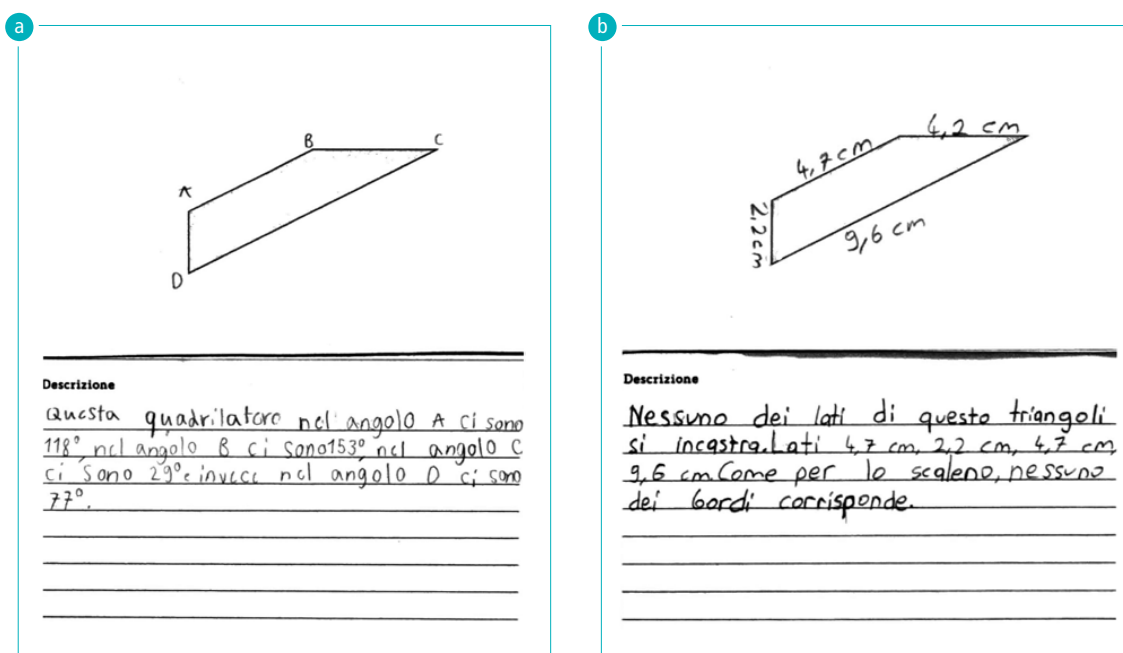


Figura 2a, b. Esempi di descrizioni del trapezio con informazioni incomplete o con imprecisioni linguistiche.

Nella descrizione della Figura 2a l'allievo J. si focalizza unicamente sullo studio degli angoli, usando l'espressione poco corretta «nell'angolo A ci sono 118°», cosa che può sollevare dubbi per quanto riguarda la sua comprensione concettuale di angolo e di ampiezza. Innanzitutto, le lettere che generalmente indicano i vertici del quadrilatero in questo caso vengono utilizzate per nominare gli angoli, e ci si può chiedere se l'allievo confonda il concetto di angolo con il concetto di vertice o se sia la gestione del linguaggio ad averlo messo in difficoltà. È inoltre interessante riflettere sull'espressione «ci sono 118°». Appare subito spontaneo pensare all'influenza del linguaggio meteorologico nella formulazione della descrizione; dato che l'unità di misura utilizzata per la temperatura e per l'ampiezza degli angoli è nominata allo stesso modo a livello linguistico informale, è possibile che J. abbia usato tale espressione per via delle sue interpretazioni personali e delle sue esperienze vissute.

Nella descrizione della Figura 2b, invece, l'allievo I. si concentra unicamente sulla lunghezza dei lati utilizzando una terminologia scorretta: «triangoli» al posto di "trapezio", «si incastra», «bordi» al posto di "lati", «corrisponde» al posto di "congruente".

Tuttavia, è interessante notare che l'allievo sembra aver individuato un'analogia con i triangoli scaleni riconoscendo che le misure delle lunghezze dei lati del trapezio sono tutte diverse come lo sono le misure delle lunghezze dei lati nel triangolo scaleno.

Le ultime due descrizioni presentate in Figura 3a e Figura 3b appaiono corrette a livello linguistico e contenutistico.

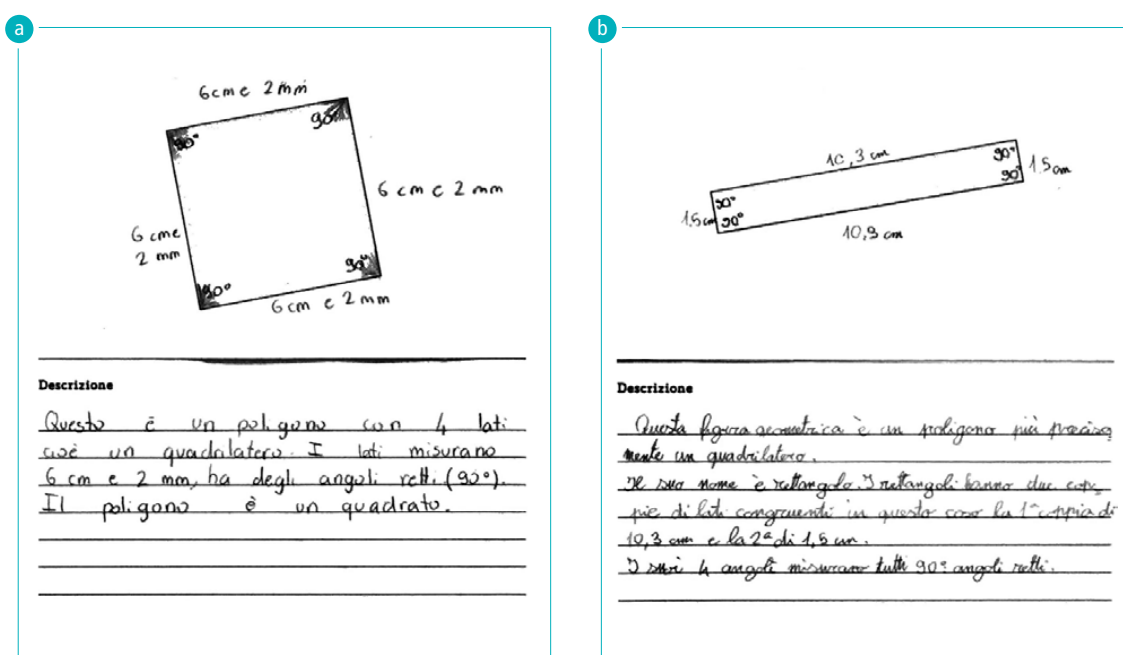


Figura 3a, b. Esempi di descrizioni del quadrato e del rettangolo con alcune imprecisioni linguistiche.

Nella prima parte della descrizione della Figura 3a l'allieva G. riprende la definizione di quadrilatero, seguita dalla descrizione delle misure dell'ampiezza degli angoli e della lunghezza dei lati. Potrebbe essere discutibile l'espressione «Ha degli angoli retti» in quanto ci si potrebbe chiedere: «Quanti? Due? Tre? Quattro... E allora perché non dire tutti?».

Nella descrizione della Figura 3b, invece, l'allieva A. mostra di aver riconosciuto la figura e di saperne indicare il nome. Anche in questo caso, dopo la definizione di quadrilatero, scrive la misura dei lati della figura rappresentata, specificando la proprietà di congruenza di due coppie di lati senza chiarire che le coppie di lati congruenti sono opposte, mostrando di aver compreso in parte la generalizzazione della proprietà caratteristica dei rettangoli. Nella frase finale relativa alla misura dell'ampiezza degli angoli, l'uso del termine «suoi» fa ipotizzare che questa caratteristica sia invece associata solamente al rettangolo specifico disegnato.

4.3.2 Il gioco del memory

Descrizione dell'attività. Al termine di questa prima parte, ritagliando la scheda con gli elaborati degli allievi sono state create due carte per ogni quadrilatero: una carta con la rappresentazione grafica e una carta con la descrizione proposta da un allievo, per un totale di 12 carte per ogni gruppo. Ogni gruppo ha poi ricevuto le carte realizzate da un altro gruppo e si è proposto agli allievi di utilizzarle per giocare al memory a carte scoperte; gli allievi hanno dovuto associare ad ogni immagine una descrizione adeguata. Al termine del gioco si è proposta una riflessione finale da svolgere prima individualmente con una scheda ([Allegato 2](#)) e successivamente con una condivisione collettiva. L'obiettivo era di far riflettere nuovamente gli allievi sull'importanza di sostenere una comunicazione efficace in matematica. Più nello specifico, risultava importante che emergessero le differenze e le similitudini delle proprietà individuate e dei termini utilizzati nelle descrizioni. Infatti, la progettazione di questa seconda parte della lezione – il memory a carte scoperte e la riflessione finale – è stata guidata dalla previsione che gli scritti prodotti dagli allievi presentassero descrizioni ricche di informazioni, ovvero testi caratterizzati da una sovrabbondanza di termini ed espressioni, esattamente come ci si aspetta da una descrizione. D'altra parte, si prevedeva anche la presenza di descrizioni più povere dal punto di vista linguistico e di contenuto.

Analisi delle produzioni degli allievi. Nella fase di gioco del memory tutti i gruppi sono riusciti ad associare la descrizione all'immagine corretta, anche se sono state riscontrate delle difficoltà legate alla completezza e alla precisione delle informazioni fornite nelle descrizioni (come, ad esempio, per la descrizione della Figura 2a), ostacolo in parte superato riconoscendo la grafia dei compagni.

Guardando alle caratteristiche dei quadrilateri approfondite nelle descrizioni dell'attività, tutti i gruppi hanno parlato di lunghezza dei lati, ampiezza degli angoli, numero di lati, vertici e angoli e congruenza dei lati individuando quindi alcuni degli elementi necessari da utilizzare nelle descrizioni dei quadrilateri. Nell'analisi a priori dell'attività, ci si aspettava anche eventualmente qualche indicazione relativa al parallelismo dei lati, alla congruenza e ai diversi tipi di angoli (ottusangolo, acutangolo e rettangolo). Nessun alunno invece ha descritto i quadrilateri dal punto di vista del parallelismo e della perpendicolarità dei lati e della congruenza degli angoli.

In questa fase del percorso, come progettato, la lezione ha stimolato lo sviluppo del pensiero descrittivo-analitico (van Hiele, 1986). In questa attività è risultato fondamentale il riconoscimento delle proprietà delle figure rispetto ai lati e agli angoli, mentre è stato messo in secondo piano il riconoscimento della figura stessa e l'esplicitazione del nome. Con la richiesta di descrivere il quadrilatero, gli allievi sono stati invitati a riconoscere le proprietà delle figure e a comunicarle in forma scritta, stimolando quindi le prime fasi dell'apprendimento in cui si prende familiarità con il campo di studio orientandosi all'esplorazione degli oggetti geometrici.

4.4 Descrivere e nominare i quadrilateri: una riflessione a grande gruppo

Descrizione dell'attività. L'attività successiva si è basata su un dialogo a grande gruppo guidato dalla docente. Il gruppo classe e la docente si sono seduti in cerchio e al centro sono stati esposti 9 quadrilateri colorati (un quadrilatero generico, un deltoide, un trapezio isoscele, un trapezio rettangolo, un trapezio scaleno, un parallelogramma, un rombo, un rettangolo e un quadrato). L'insegnante ha condotto una discussione con e tra gli allievi al fine di far emergere le supposizioni, le intuizioni, le conoscenze, le esperienze e le misconcezioni degli allievi sul tema dei quadrilateri. Le osservazioni degli alunni sono state messe in discussione in modo che potessero essere confermate o smentite e modificate.

Per la discussione, erano previste alcune possibili domande, di seguito riportate, volte a condurre il ragionamento e a stimolare la partecipazione degli allievi durante l'attività.

- «Riconoscete uno di questi quadrilateri?»
- «Cosa ti fa dire che questo quadrilatero è...?», «Questo quadrilatero possiede delle caratteristiche particolari che ti fanno dire che è...?»
- «Se ti chiedessi di disegnare un altro... a quali caratteristiche dovresti fare assolutamente attenzione? [Proporre la possibilità di disegnare il quadrilatero di cui si sta discutendo]».
- «Come potreste distinguere questo quadrilatero da quest'altro? [Eventualmente usare i nomi corretti]».
- «Questi due/tre/... quadrilateri hanno delle caratteristiche in comune? Quali?»
- «Avevi già visto questo quadrilatero? Dove? Cosa ti ricorda?»

L'intento era di accompagnare gli allievi verso lo sviluppo di descrizioni con l'utilizzo di espressioni e di una terminologia tecnica di base in cui emergessero i nomi dei quadrilateri e le proprietà caratteristiche delle figure. Dal punto di vista didattico, in questa lezione si è posto ancora l'accento sullo sviluppo del pensiero analitico-descrittivo, ma questa volta in forma orale e focalizzando l'attenzione sul riconoscimento e sulla nominalizzazione dei quadrilateri.

Analisi delle produzioni degli allievi. L'attività ha fatto emergere i concetti e le osservazioni/riflessioni svolte dai gruppi nell'attività precedente (par. 4.3), portandoli a riflettere sulla correttezza delle proprietà individuate, sulla formulazione linguistica utilizzata e su ulteriori caratteristiche delle figure non individuate in precedenza come il parallelismo dei lati e la congruenza degli angoli.

Per l'insegnante è stato inoltre possibile intuire il livello di pensiero raggiunto dagli allievi e ipotizzare chi era già in grado di stabilire delle interrelazioni tra le proprietà delle figure. Ad esempio, alcune alunne hanno riconosciuto con facilità le caratteristiche comuni tra diversi quadrilateri o gruppi di essi, formulando osservazioni come: «Il rettangolo e il quadrato sono gli unici quadrilateri con tutti gli angoli retti» oppure «Il quadrato e il rombo hanno tutti i lati congruenti». Queste frasi dimostrano che le alunne sono state in grado di individuare relazioni tra le caratteristiche dei quadrilateri e di saperle comunicare con un linguaggio efficace collocandosi quindi nella terza fase d'apprendimento di van Hiele, ovvero quella dell'esplicitazione, avvicinandosi sempre di più al livello del pensiero geometrico delle deduzioni informali. Per alcuni allievi sono emerse difficoltà di espressione linguistica, segno che si trovano in una fase precedente dello sviluppo dell'apprendimento, in cui è fondamentale un orientamento guidato da parte dell'insegnante. In particolare, sono state rilevate espressioni come:

- «Questi lati sono più dritti», per indicare lati perpendicolari;
- «Lato diagonale»;
- «È un quadrato storto», riferendosi al rombo.

Queste frasi, pur non utilizzando una terminologia corretta, rivelano comunque un'osservazione attenta di alcune caratteristiche dei quadrilateri. Ad esempio, definire il rombo come un «quadrato storto» potrebbe indicare che l'allievo ha riconosciuto la congruenza dei lati tra le due figure. In generale, tali espressioni evidenziano una tendenza a descrivere i quadrilateri focalizzandosi soprattutto sulle caratteristiche dei lati, trascurando o non mettendole in relazione con quelle degli angoli.

4.5 Ripresa delle descrizioni a gruppi

Descrizione dell'attività. Successivamente agli allievi è stato chiesto di descrivere nuovamente a gruppi ogni tipo di quadrilatero rilevando ed evidenziando le proprietà di ciascuno. Sulla scheda di lavoro ([Allegato 3](#)) era presente l'immagine di più quadrilateri dello stesso tipo, e non solo un rappresentante, in modo che gli allievi potessero individuarne le caratteristiche e generalizzare la descrizione realizzata in precedenza utilizzando ora un linguaggio più chiaro e completo e una terminologia tecnica. La scelta di fornire per ogni famiglia di quadrilateri più rappresentanti di dimensione e orientamento diversi è stata presa da un lato per fornire rappresentazioni in posizione non convenzionale in modo da contrastare la possibile insorgenza di misconcezioni (Sbaragli, 2005) e dall'altro per dare agli allievi la possibilità di verificare direttamente le loro intuizioni riguardo le caratteristiche che accomunano quella particolare tipologia di quadrilateri. Si è fatta inoltre la scelta di inserire tra le figure solo quadrilateri appartenenti alla specifica tipologia senza, ad esempio, inserire tra le rappresentazioni di trapezio il disegno di un parallelogramma o di un quadrato, anche se potevano sicuramente far parte di tale insieme. È stata fatta questa scelta poiché ci si aspettava che la maggior parte degli allievi si trovasse in una fase dello sviluppo del pensiero geometrico, secondo la teoria di van Hiele (1986), nella quale non si è ancora in grado di considerare adeguatamente le interrelazioni tra le proprietà delle figure geometriche studiate. È stato quindi ritenuto prematuro promuovere un ragionamento di questo tipo. Tuttavia, non si escludeva che alcuni allievi avrebbero potuto già sviluppare considerazioni di tipo relazionale.

In seguito, ogni gruppo ha presentato le caratteristiche di uno dei quadrilateri ed i compagni in ascolto sono intervenuti per aggiungere, o per modificare, alcune informazioni. Nel mentre, l'insegnante ha redatto un cartellone con tutte le informazioni raccolte dai diversi gruppi.

Analisi delle produzioni degli allievi. Durante la discussione sono emerse delle questioni interessanti riguardanti le caratteristiche dei quadrilateri considerati.

Discutendo, ad esempio, delle caratteristiche del trapezio, un gruppo di allievi sosteneva che non fosse necessario specificare che fosse un quadrilatero e un poligono; altri compagni, al contrario, ritenevano fosse importante scriverlo. A questo punto è stato chiesto loro di motivare le proprie idee in maniera convincente. I primi hanno dichiarato che «si sa già che il trapezio è un quadrilatero e di conseguenza il quadrilatero è un poligono». In risposta, i compagni hanno ribattuto dicendo che «bisogna dire che cos'è il trapezio perché ci potrebbe essere qualcuno che non lo sa. Come quando dici, Gianni è un bambino... devi dirlo perché altrimenti non sai di chi si sta parlando».

In questa discussione sono emersi molti concetti interessanti che stanno alla base di una didattica interdisciplinare tra matematica e linguaggio. In primo luogo, sembra nascere un dialogo critico relativo all'essenzialità o all'abbondanza di informazioni. Tra alcuni allievi emerge la necessità di eliminare le ridondanze avvicinandosi quindi al concetto di definizione, mentre per altri appare necessario fornire tutte le informazioni possibili con l'idea di essere più precisi e completi in linea con il concetto di descrizione definito da Sbaragli (2020). In secondo luogo, da questa discussione è emersa l'utilità di ricorrere a un'analogia con lo studio della lingua per chiarire meglio il concetto. Descrivere una figura geometrica, come un trapezio, è simile a presentare una persona in un testo: così come si precisa che «Gianni è un bambino» per fornire un'informazione chiara e completa a chi ascolta o legge, allo stesso modo è importante specificare che il trapezio è un quadrilatero e un poligono, anche se può sembrare scontato. Questo confronto ha aiutato gli allievi a comprendere l'importanza di una comunicazione sovrabbondante e contestualizzata quando si fornisce una descrizione, in quanto lo scopo è di permettere all'interlocutore di costruirsi un'immagine precisa e verosimile dell'oggetto in questione. L'attività, pur concentrandosi sulla geometria, ha quindi evidenziato un forte elemento interdisciplinare con l'ambito linguistico, anche se tale collegamento non è stato esplicitamente dichiarato.

4.6 Gioco “Detective dei quadrilateri” con carte proprietà

Anche questa attività è stata divisa in due momenti: in un primo momento al gruppo classe è stato proposto il gioco “Detective dei quadrilateri”, con lo scopo di favorire il riconoscimento delle proprietà dei quadrilateri; in un secondo momento ogni allievo ha risolto individualmente una scheda basata sugli stessi principi del gioco in modo da consolidare le competenze attivate durante il gioco.

4.6.1 Il gioco “Detective dei quadrilateri”

Descrizione dell'attività. Il gioco descritto in Figura 4 è una variante del gioco dell'*Indovina chi* basato sulle proprietà dei quadrilateri. Le domande che si possono porre infatti sono domande chiuse (a cui si può rispondere solo con un sì o con un no) riguardanti le proprietà dei quadrilateri. A differenza del gioco originale in cui si pongono delle domande spontanee, in questa variante il docente, o il gruppo classe, prepara delle “carte proprietà” su cui sarà indicata una proprietà dei quadrilateri (ad esempio «ha quattro vertici»), ovvero la domanda che verrà posta per cercare di individuare il quadrilatero scelto. Il gioco potrebbe essere proposto anche con altre figure del piano o dello spazio.

DETECTIVE DEI QUADRILATERI

Preparazione del gioco

Sul pavimento sono disposti 9 quadrilateri diversi in una griglia 3×3 . Si definisce un giocatore "ladro" e un giocatore "capo detective", tutti gli altri saranno dei semplici "detective". Il ladro sceglierà segretamente un quadrilatero tra i 9 a disposizione, mentre il capo detective avrà a disposizione il mazzo delle "carte proprietà" con cui porre domande per individuare il quadrilatero in questione insieme alla sua squadra di detective.

Svolgimento

Il gioco inizia con il racconto del contesto narrativo:

In un museo d'arte geometrica un ladro ha rubato un'opera d'arte sostituendola con una falsa. I poliziotti l'hanno arrestato e ora i detective stanno cercando di capire qual è l'opera che ha sostituito. Dopo ore d'interrogatorio il ladro afferma: «Fatemi delle domande geometriche sulle proprietà dell'opera d'arte e io vi risponderò sinceramente solo con un sì o con un no. Vediamo se sarete tanto bravi da trovare l'opera sostituita, in tal caso io ve la restituirò». I detective ci stanno, «Ma a una sola condizione» dice il capo detective, «basta che tu ci dia un'informazione sbagliata e ti mettiamo in carcere!».

Il capo detective gira una carta proprietà e pone la domanda al ladro che risponderà solo con un sì o con un no. Il capo detective, insieme al suo gruppo, cercherà di trovare il quadrilatero giusto scartando ogni volta le figure che possiedono o non possiedono tale proprietà, in base alla risposta data dal ladro. Se i detective non sbagliano a scartare le figure, il gioco va avanti fino al ritrovamento dell'opera.

Al termine del gioco tutti i giocatori controllano che il quadrilatero individuato abbia effettivamente le proprietà affermate dal ladro.

Come si vince?

I detective vincono se trovano l'opera rubata o se il ladro sbaglia a rispondere alle domande. Il ladro vince se i detective scartano l'opera rubata.

Figura 4. Regole del gioco "Detective dei quadrilateri".

In generale risulta importante costruire e modificare il gioco insieme agli allievi, in modo che siano coinvolti nella riflessione sul contenuto e sull'accuratezza linguistica necessari per il suo svolgimento. La lingua diventa così uno strumento di riflessione determinante nella costruzione del sapere (Demartini & Sbaragli, 2022). In quest'ottica, prima di procedere con il gioco, un gruppo di allievi ha realizzato il mazzo delle carte proprietà sulla base delle descrizioni dei quadrilateri create nelle attività precedenti ([Allegato 4](#)). Tali descrizioni sono state poi lasciate a disposizione durante il gioco in modo che chi ne avesse bisogno, soprattutto chi giocava nel ruolo di ladro, potesse consultarle per verificare le informazioni necessarie all'individuazione del quadrilatero. All'inizio, il gioco è stato sperimentato con l'intero gruppo classe in modo che l'insegnante potesse spiegare le regole e guidare le prime partite. Successivamente lo si è svolto a gruppi di 5-6 allievi.

Analisi delle produzioni degli allievi. Il gioco proposto in questa lezione ha permesso agli allievi di riconoscere e di individuare le proprietà dei quadrilateri. Da una parte, attraverso l'"eliminazione" delle figure ad ogni turno, hanno individuato dei quadrilateri con caratteristiche analoghe. Hanno, ad esempio, potuto individuare tutti i quadrilateri «con due coppie di lati paralleli» oppure «con tutti gli angoli retti». D'altra parte il gioco ha permesso di lavorare, almeno in parte, sulla ridondanza di proprietà nelle

descrizioni delle figure in gioco. Dato che ad ogni turno il capo detective doveva girare, e non scegliere, una carta proprietà, gli allievi si sono accorti ben presto che alcune proprietà risultavano inutili ai fini dell'individuazione del quadrilatero: nel momento in cui un'altra proprietà apparsa in precedenza aveva già permesso di individuare un determinato insieme di quadrilateri (ad esempio, «ha due coppie di lati paralleli» comprendeva già la proprietà «ha una coppia di lati paralleli») oppure nel momento in cui una proprietà corrispondeva all'individuazione dell'insieme stesso dei quadrilateri (ad esempio «ha quattro vertici» e «ha quattro lati»).

Durante l'attività sono emerse interessanti discussioni nel gruppo di allievi detective che hanno iniziato a confrontarsi sulle proprietà dei diversi quadrilateri e a mettere in discussione l'utilità e il significato di alcune carte proprietà. Per esempio, si sono subito resi conto che alcune proprietà erano ridondanti e quindi inutili al fine del gioco (se si gioca solamente con i quadrilateri le carte proprietà «ha quattro angoli», «ha quattro lati» e «ha quattro vertici» appaiono inutili). Oltre a ciò, sono emerse delle perplessità attorno alla proprietà «ha due lati congruenti» poiché gli allievi vi attribuivano due significati differenti: per alcuni la proprietà faceva riferimento a un quadrilatero con *esattamente* due lati congruenti, mentre per altri a un quadrilatero con *almeno* due lati congruenti. Tale confusione ha permesso loro di riflettere sul linguaggio utilizzato e sulla necessità di introdurre una distinzione nelle espressioni in modo da evitare fraintendimenti. Sono state definite, con il supporto dell'insegnante, due espressioni distinte: «ha almeno due lati congruenti» e «ha due lati congruenti».

Infine, dalle riflessioni è emerso che era necessario aggiungere alcune carte proprietà che non erano state prese in considerazione durante la stesura delle descrizioni nelle attività precedenti e quindi durante la preparazione del gioco:

- «Ha una coppia di lati congruenti»;
- «Ha due coppie di lati congruenti»;
- «Ha almeno due lati paralleli»;
- «Ha due angoli retti»;
- «Ha almeno un angolo retto»;
- «Ha almeno una coppia di lati adiacenti congruenti»;
- «Ha una coppia di lati adiacenti congruenti».

Infatti, alcuni allievi nel ruolo del ladro si sono ritrovati nella situazione in cui non era possibile far individuare il trapezio isoscele e il trapezio rettangolo in quanto non vi erano le carte con le loro proprietà caratteristiche («ha una coppia di lati congruenti» oppure «ha due angoli retti»).

Osservando gli allievi che hanno ancora incontrato difficoltà nel riconoscere i quadrilateri e nell'individuare facilmente le proprietà, è emersa la necessità di proporre ulteriori esperienze di orientamento guidato e di esplorazione delle relazioni, in linea con la seconda e terza fase del modello di apprendimento di van Hiele. Ciò permetterebbe agli alunni di sviluppare progressivamente un linguaggio più adeguato e di riconoscere in modo più consapevole le principali proprietà dei quadrilateri, come previsto dal livello descrittivo-analitico dello sviluppo del pensiero geometrico.

4.6.2 La scheda finale

Descrizione dell'attività. Dopo aver svolto alcune partite in cui gli allievi assumevano a turno ruoli differenti, diventando quindi partecipanti attivi e acquisendo dimestichezza con il compito, è stata proposta loro in forma individuale una scheda ([Allegato 5](#)) basata sugli stessi principi del gioco.

L'ultimo esercizio della scheda consisteva nello scegliere un quadrilatero qualsiasi tra i nove proposti e fornire delle indicazioni puntuali in modo che un compagno o una compagna in un secondo momento potesse poi individuarlo inequivocabilmente. La scheda di esercizio mira alle fasi di esplicitazione e di orientazione libera dell'apprendimento degli allievi in quanto è richiesto loro di individuare le relazioni tra i quadrilateri e di esplicitarne le caratteristiche chiaramente.

Analisi delle produzioni degli allievi. La risoluzione di questo ultimo esercizio ha suscitato l'interesse per un'analisi dal punto di vista linguistico e geometrico. Come si vede nelle Figure 5a-5d molti degli allievi hanno scelto di descrivere il quadrato, probabilmente per il fatto che è una delle figure maggiormente conosciute.

a

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

- Ha almeno un angolo retto;
- Ha almeno una coppia di lati paralleli;
- Ha tutti i lati della stessa lunghezza.

Che quadrilatero è? Quadrato

b

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha almeno un lato inclinato e verticale;
Ha almeno un angolo retto;
Tutti i lati della stessa lunghezza.

Che quadrilatero è? Quadrato

c

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

- ha almeno un angolo di 90° ;
- ha due coppie di lati paralleli;
- ha tutti i lati congruenti.

Che quadrilatero è? Quadrato

d

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha almeno 1 coppia di lati adiacenti congruenti.
Ha tutti gli angoli retti.
È il quadrato

Che quadrilatero è? quadrato

Figura 5a, b, c, d. Quattro esempi di indicazioni per individuare il quadrato.

È curioso notare come i quattro testi siano tutti differenti, nonostante la figura da individuare fosse sempre la stessa. Le informazioni fornite dalle allieve G. (Figura 5a) e A. (Figura 5c) sono molto simili, sebbene presentino alcune varianti sia linguistiche sia concettuali. Ad esempio, espressioni come «ha almeno un angolo retto» e «ha almeno un angolo di 90° » oppure «ha tutti i lati della stessa lunghezza» e «ha tutti i lati congruenti» trasmettono lo stesso contenuto, ma attraverso formulazioni differenti. Una differenza significativa emerge invece tra le frasi «ha almeno una coppia di lati paralleli» e «ha due coppie di lati paralleli». Pur essendo entrambe corrette nel descrivere alcune proprietà dei quadrilateri, la prima risulta ridondante: non aggiunge informazioni utili per restringere ulteriormente il campo delle figure già selezionate. Infatti, dopo la prima affermazione fornita da G., le figure rimaste in gioco sono il quadrato, il rettangolo e il trapezio rettangolo; tutte con almeno una coppia di lati paralleli. Al contrario, l'affermazione di A. «ha due coppie di lati paralleli» consente di escludere il trapezio rettangolo, affinando così il processo di identificazione. In ogni caso, in entrambe le situazioni, sarebbe stato possibile individuare correttamente il quadrato già con la prima e l'ultima informazione, rendendo superflua l'aggiunta di ulteriori dettagli. Anche le informazioni determinanti fornite da B. (Figura 5b) risultano essere due e le medesime delle allieve G. (Figura 5a) e A. (Figura 5c). A differenza delle compagne, B. fornisce una prima indicazione («Ha almeno un lato adiacente congruente») irrilevante, soprattutto perché risulta poco chiara dal momento che è scorretta linguisticamente. Lo scritto di C. (Figura 5d) appare molto chiaro ed essenziale: con sole due informazioni riesce a rendere la selezione del quadrilatero inequivocabile. In questo caso, pur non potendo ancora parlare di una definizione vera e propria, in quanto manca una formulazione completa e formalmente corretta, si evidenzia comunque una buona capacità di selezione delle proprietà distintive e rilevanti della figura. Questo rappresenta un passo importante verso la costruzione del concetto di definizione geometrica. Nell'esempio riportato in Figura 6, invece, le informazioni fornite non portano a individuare univocamente il quadrilatero indicato (il rombo), ma a selezionarne di più (deltoide, rombo e parallelogramma).

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha due coppie di lati adiacenti.
 Non ha angoli retti.
 Ha due coppie di lati congruenti.

Che quadrilatero è? Rombo

Figura 6. Esempio di indicazioni non complete per individuare il rombo.

La prima indicazione presente nello scritto («ha due coppie di lati adiacenti») è piuttosto irrilevante poiché tutti i quadrilateri possiedono due coppie di lati adiacenti. È possibile perciò intuire che manchi un'informazione, ovvero la parola «congruenti», e/o che vi sia confusione attorno al termine «adiacente». La dicitura «non ha angoli retti» permette di escludere alcuni quadrilateri come il quadrato, il rettangolo e il trapezio rettangolo.

In questo caso si può intuire che l'allieva si colloca ancora nel livello descrittivo-analitico del pensiero geometrico secondo il modello di van Hiele e che ha bisogno di approfondire ulteriormente la fase di esplicitazione dell'apprendimento. Pur essendo in grado di individuare alcune proprietà corrette del quadrilatero scelto, non riesce ancora a selezionare quelle essenziali per una sua identificazione

univoca. Di conseguenza, il suo scritto non fornisce una definizione chiara della figura, ma si limita a offrirne una descrizione parziale.

Nell'esempio proposto in **Figura 7** risalta l'espressione «ha un lato adiacente congruente» poiché non è linguisticamente corretta. Inoltre, le informazioni fornite portano all'individuazione di due quadrilateri (deltoide e quadrilatero generico).

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha almeno 1 angolo
 è un quadrilatero
 Ha 1 lato adiacente congruente
 Non ha lati paralleli

Che quadrilatero è? deltoide

Figura 7. Indicazioni per individuare il deltoide.

L'allievo Y., autore dello scritto in **Figura 7**, ha mostrato alcune difficoltà nell'utilizzo dell'espressione «ha un lato adiacente congruente», difficoltà riscontrate anche in altri compagni negli esercizi delle **Figure 6** e **5b**. Questa espressione era emersa per la prima volta durante una precedente discussione, in risposta al bisogno di descrivere due lati contigui con caratteristiche simili. È positivo notare il tentativo di impiegare termini e concetti appena appresi; tuttavia, l'imprecisione linguistica potrebbe essere indice di una comprensione ancora parziale o non del tutto corretta. È quindi importante intervenire per chiarire il significato e l'uso appropriato di tali termini, al fine di accompagnare l'allievo verso il passaggio al livello delle deduzioni informali del pensiero geometrico, secondo il modello di van Hiele. Come già affermato precedentemente, le indicazioni fornite da Y. portano all'individuazione di due quadrilateri: il quadrilatero generico e il deltoide. È interessante notare che nemmeno la compagna che ha svolto l'esercizio ha individuato l'errore. Una possibile spiegazione potrebbe essere correlata al disegno dei rappresentanti dei due quadrilateri: studiando unicamente la rappresentazione figurale, senza considerare il concetto geometrico, le indicazioni risultano effettivamente parzialmente corrette al fine di definire unicamente il deltoide rappresentato. Valutando invece l'aspetto concettuale di quadrilatero generico e di deltoide, entrambe le descrizioni risultano corrette.

4.7 Gioco “Detective dei quadrilateri” senza carte proprietà

Descrizione dell'attività. In questa lezione, il gioco del “Detective dei quadrilateri” è stato ulteriormente sviluppato per raffinare sempre di più le descrizioni, avvicinandosi sempre di più alle definizioni dei quadrilateri e alla loro classificazione, eliminando le carte proprietà e spingendo i detective a elaborare una strategia efficace nella formulazione di domande mirate sulle caratteristiche dei quadrilateri allo scopo di giungere rapidamente alla soluzione.

L'introduzione di questa modalità di gioco è avvenuta in modo graduale, rispettando i tempi del gruppo classe. Prima della transizione completa, sono state introdotte delle carte bonus, che consentivano ai detective di porre una domanda libera, purché fosse relativa a una proprietà geometrica.

Analisi delle produzioni degli allievi. Durante la fase di gioco si è potuto notare che la maggior parte degli allievi utilizzava termini ed espressioni adeguate, mostrando di conoscerne il significato (ad esempio: «Ha almeno una coppia di lati paralleli?» per sapere se scartare il quadrilatero generico

e il deltoide). I confronti che si sono sviluppati all'interno del gruppo dei detective per scegliere le proprietà da annunciare al ladro hanno evidenziato la sensibilità di alcuni allievi nell'individuare proprietà efficaci al fine di scartare il maggior numero di quadrilateri e arrivare prima alla soluzione (ad esempio, chiedendo «Ha due coppie di lati paralleli?» oppure «Ha due coppie di angoli congruenti?») era possibile scartare o tenere il quadrilatero generico, il deltoide e tutti i trapezi). Per una piccola parte di allievi si è reso ancora necessario il supporto delle descrizioni dei quadrilateri redatti precedentemente, soprattutto quando assumevano il ruolo del ladro.

In questa fase del percorso didattico gli allievi hanno utilizzato sempre più spesso una terminologia specialistica (senza che vi fosse una forte imposizione da parte dell'insegnante) esprimendosi in maniera più puntuale e precisa. Gli allievi sono stati guidati verso il livello del pensiero deduttivo informale, secondo il modello dello sviluppo del pensiero geometrico, attraverso un esercizio progettato per stimolare in particolare la terza e la quarta fase dell'apprendimento. Entrambe le fasi sono state attivate poiché, trattandosi di un'attività ludica condotta in gruppo, da un lato è stata incoraggiata la libera interpretazione e sperimentazione del gioco, dall'altro è stata favorita la costruzione condivisa delle relazioni geometriche grazie al confronto e al supporto tra pari. Malgrado le difficoltà riscontrate nell'attività precedente, anche per J. è stato possibile seguire e partecipare al gioco grazie al confronto con i compagni e il supporto dell'insegnante in caso di bisogno.

È stato importante precisare che i quadrilateri in gioco dovevano essere considerati come dei rappresentanti di ogni "famiglia". Per questo motivo è stato efficace cambiare spesso le figure utilizzate proponendo in turni diversi figure della stessa "famiglia" ma con dimensioni diverse e non metterle in gioco nello stesso turno, in modo da focalizzare il riconoscimento delle proprietà ed evitare affermazioni legate alle misure delle figure.

4.8 Raggruppare i quadrilateri

La lezione è suddivisa in due momenti principali: un'attività di gruppo iniziale seguita da un'attività a coppie. Entrambe hanno lo scopo di ripassare i nomi dei quadrilateri e le loro proprietà, oltre che dare il via alla classificazione.

4.8.1 Attività a grande gruppo

Descrizione dell'attività. Ogni allievo ha ricevuto un quadrilatero diverso e come prima cosa doveva nominare la figura ricevuta comunicandolo al resto del gruppo. Successivamente l'insegnante ha letto ad alta voce delle proprietà sulla base delle carte create nei giochi delle lezioni precedenti. Ogni volta che l'allievo sentiva una proprietà relativa al quadrilatero in suo possesso, si doveva alzare.

Prima di iniziare il gioco, l'insegnante ha chiesto agli allievi di riflettere individualmente su alcune domande e di rispondere su un foglio: «Quale quadrilatero pensi che si alzerà più volte? Quale quadrilatero pensi si alzerà di meno?». Durante l'attività si è discusso sulla correttezza dei risultati e sulle motivazioni di ogni scelta, mentre al termine del gioco si sono prese in mano nuovamente le supposizioni individuali iniziali per verificarne la correttezza.

Analisi delle produzioni degli allievi. Le previsioni iniziali degli alunni si sono rivelate interessanti: la maggior parte degli allievi ha indicato il quadrilatero generico come quello che si sarebbe alzato meno spesso, mentre per quello che si sarebbe alzato più volte hanno scelto il rombo, il quadrato e il rettangolo. Quando è stato chiesto loro di motivare le proprie supposizioni alcuni allievi hanno proposto le seguenti risposte:

- «Mi ricordo che quando ho descritto il quadrilatero generico non ho scritto molto, mentre per il rombo ho scritto molte più proprietà».
- «Il quadrato mi sembra quello più completo».
- «Il quadrilatero generico non ha niente di particolare... è solo un quadrilatero!»

Durante il gioco è apparso significativo osservare le dinamiche tra gli allievi: spesso si consultavano con il compagno di banco prima di alzarsi in piedi oppure si davano delle indicazioni puntuali quando notavano che c'erano degli errori. Infine, la revisione delle supposizioni iniziali ha permesso agli allievi di consolidare i propri pensieri e di incoraggiare il confronto tra compagni. In particolare, è stata ripresa la frase «Il quadrato mi sembra quello più completo», chiedendo a tutti gli allievi di argomentarla meglio alla luce delle scoperte fatte durante l'attività.

L'allieva C. ha spiegato: «Il quadrato è quello più completo perché possiede tutte le proprietà che possiedono anche gli altri quadrilateri. Infatti, il B. [compagno a cui era stato assegnato il quadrato] si alzava quasi sempre». Tale discussione finale ha assunto, soprattutto per alcuni allievi, un ruolo di sintesi e di integrazione dei vari concetti appresi, caratteristiche dell'ultima fase dell'apprendimento prima del passaggio a un livello del pensiero geometrico successivo.

4.8.2 Attività a coppie

Descrizione dell'attività. In seguito, gli alunni hanno svolto un'attività ludica a coppie con lo scopo di classificare i quadrilateri. Gli allievi si sono seduti uno di spalle all'altro e a turno dovevano svolgere due compiti differenti: un compagno enunciava una proprietà e l'altro doveva individuare tutti i quadrilateri corrispondenti. L'allievo che doveva individuare i quadrilateri otteneva un punto se riusciva a identificarli tutti e un punto bonus se li nominava correttamente. Nominati i quadrilateri si cambiava ruolo. Vinceva chi arrivava per primo a 10 punti.

Gli allievi avevano a disposizione i quadrilateri ritagliati come nei giochi precedenti e delle carte proprietà (create dalla docente sulla base dei giochi svolti precedentemente) con la soluzione sul retro, come mostrato nell'esempio della Figura 8.

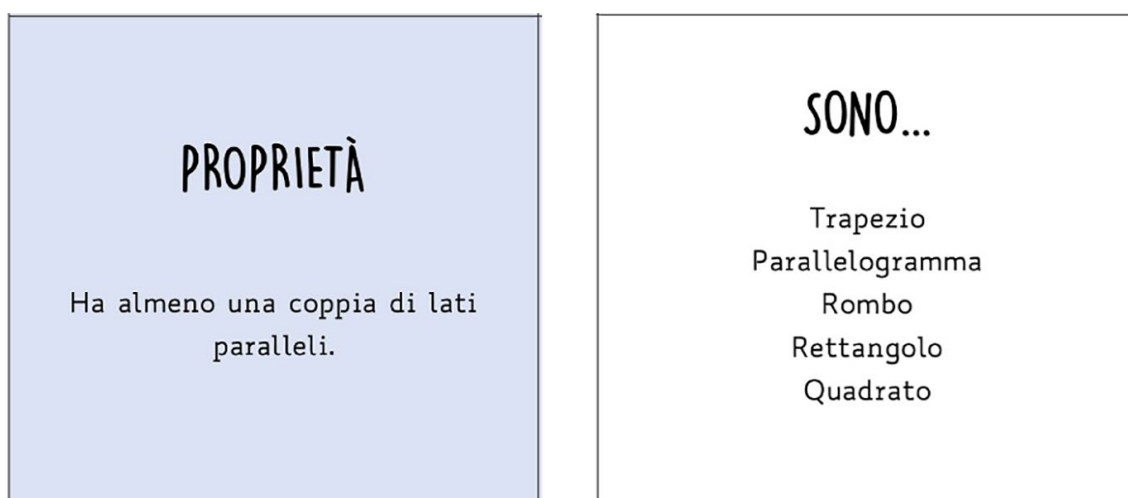


Figura 8. Esempio di carta proprietà fronte-retro.

Analisi delle produzioni degli allievi. L'attività svolta ha rappresentato un'importante occasione per gli allievi di approfondire le loro conoscenze sui quadrilateri, mettendo in gioco la capacità di analizzare e classificare in base alle proprietà delle figure.

All'inizio, gli allievi tendevano a indicare uno o pochi quadrilateri che presentavano le proprietà richieste. Con il tempo, grazie all'esercizio e alla motivazione suscitata dal carattere stimolante del gioco, hanno mostrato un progressivo miglioramento, diventando via via più precisi e completi nelle loro risposte.

Dal punto di vista didattico la lezione si prefiggeva l'obiettivo di condurre gli allievi verso una fase di esplicitazione delle relazioni tra i quadrilateri utilizzando un linguaggio adeguato e attraverso la manipolazione di materiale, tipico del livello deduttivo informale (van Hiele, 1986). Nell'attività ini-

ziale l'attenzione degli allievi si era concentrata sull'analisi di una singola figura, mentre nell'attività a coppie è stato richiesto di confrontare più figure contemporaneamente, individuandone le proprietà comuni e gestendo una maggiore complessità.

4.9 Costruzione dei quadrilateri – La geometria del faraone

Descrizione dell'attività. La lezione si è costruita sulla lettura della storia *La geometria del faraone* di Cerasoli (2013).

La storia narra di un bambino dell'antico Egitto di nome Ames che, grazie al mestiere del padre (tenditore di corde impegnato nella costruzione di una piramide), entra in contatto con i primi concetti geometrici. Durante l'assenza del padre, Ames e i suoi fratelli trovano tra i suoi attrezzi una corda a 12 nodi. Scoprono come tracciare un angolo retto e costruire un quadrato, riuscendo così ad aiutare un vicino a ripristinare i confini del suo orto dopo una piena del Nilo. Grazie all'aiuto fornito al vicino, i ragazzi ricevono una barca per raggiungere il padre a Tebe, dove assistono al tracciamento del vertice della piramide. Colpito dalla storia di Ames e i suoi fratelli, il faraone premia i bambini con uno scarabeo d'oro. L'insegnante ha letto la storia agli allievi (riuniti in cerchio) rendendola interattiva attraverso delle domande stimolo e l'utilizzo di materiale. Nella storia emergono le analogie e le differenze tra un rombo e un quadrato, l'insegnante ha colto l'occasione per ricostruire la situazione esposta nel racconto in modo pratico con un modello dinamico (Figura 9) e per avviare il tema della classificazione dei quadrilateri.

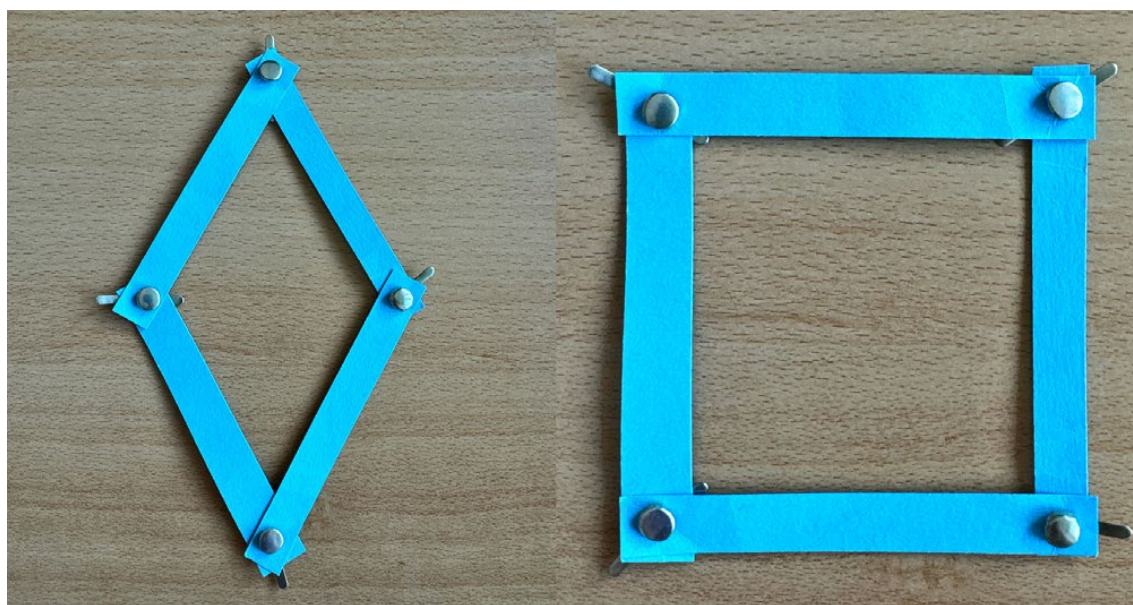


Figura 9. Modello dinamico utilizzato durante la lettura della storia per rappresentare il rombo e il quadrato.

Muovendo il modello, gli allievi possono osservare come cambia il quadrilatero e determinare quali proprietà rimangono invariate e quali invece variano, supportati dalle domande stimolo dell'insegnante («Quali quadrilateri puoi ottenere con questo modello?», «Cosa devi fare e cos'hanno dovuto fare Ames e i suoi fratelli per ottenere un quadrato con le corde che avevano?», «Nella storia, la maestra spiega ai suoi alunni che il quadrato è un rombo un po' speciale, sapresti spiegare perché?»).

Al termine del racconto, gli alunni hanno svolto un'attività (individuale o a coppie) di costruzione e riflessione sui modelli dinamici dei quadrilateri con l'utilizzo di strisce di cartoncino e fermacampioni. Gli allievi avevano a disposizione tutto il materiale necessario (fermacampioni, strisce di diversa lunghezza e colore) e una scheda da seguire ([Allegato 6](#)). L'obiettivo era di costruire, uno per volta, tutti i quadrilateri conosciuti dagli allievi scegliendo opportunamente quattro strisce tra quelle a disposizione.

Riflettendo a priori sull'attività, ci si aspettava che la lettura della storia e la manipolazione dei modelli dinamici dei quadrilateri fossero stimolanti per gli allievi. Per alcuni, avrebbe potuto essere ancora complesso comprendere il discorso relativo alla classificazione dei quadrilateri, sollevato dalla maestra della storia e poi ripreso dall'insegnante di classe. Tuttavia, sarebbe stato utile per la docente cogliere le reazioni e le riflessioni degli alunni per poi sviluppare delle attività incentrate sulla classificazione dei quadrilateri più efficaci e adeguate al contesto classe.

La storia fornisce ulteriori spunti didattici che possono essere approfonditi, come, ad esempio, l'esperienza di costruire un angolo retto utilizzando tre corde come raccontato nella storia. Inoltre, si può riflettere sulla presenza di angoli retti, e di figure come rettangoli e quadrati nella realtà dei giorni nostri e del tempo degli egizi. Infine, la storia è un ottimo stimolo per trattare le diagonali dei quadrilateri. È possibile, infatti, con l'aiuto di elastici studiarle utilizzando i modelli dinamici dei quadrilateri già realizzati.

Per concludere la lezione si è svolta una condivisione in plenaria del lavoro svolto, lasciando che gli allievi potessero descrivere il processo e i risultati ottenuti, oltre che condividere le scoperte fatte.

In questo caso non vengono analizzate le produzioni degli allievi, poiché tutti hanno portato a termine la scheda di lavoro realizzando correttamente i modelli dinamici dei quadrilateri e, inoltre, la lezione si è svolta prevalentemente in forma orale.

4.10 Classificazione dei quadrilateri

La lezione proposta per la classificazione dei quadrilateri si è basata su un'attività presentata nel documento "I quadrilateri e le loro classificazioni" del progetto MaMa (Sbaragli et al., 2023a) e, anche in questo caso, si suddivide in due momenti distinti.

4.10.1 Introduzione al diagramma di Euler-Venn

Descrizione dell'attività. Prima di proporre agli allievi la visualizzazione della classificazione delle figure con i diagrammi di Euler-Venn, si è ritenuto opportuno far vivere agli allievi un'esperienza di classificazione utilizzando un esempio più vicino alla realtà e alle conoscenze enciclopediche degli allievi. L'insegnante ha mostrato agli alunni un diagramma di Euler-Venn vuoto (alla lavagna o su un cartellone) e delle parole/immagini da classificare. Gli allievi hanno discusso in piccoli gruppi e definito in quale insieme collocare le diverse parole. Le parole proposte erano inerenti al tema degli animali: animali, vertebrati, invertebrati, anfibi, rettili, uccelli, mammiferi, pesci, poriferi, celenterati, vermi, artropodi e molluschi. L'argomento è stato scelto perché durante l'anno scolastico si stavano trattando gli invertebrati.

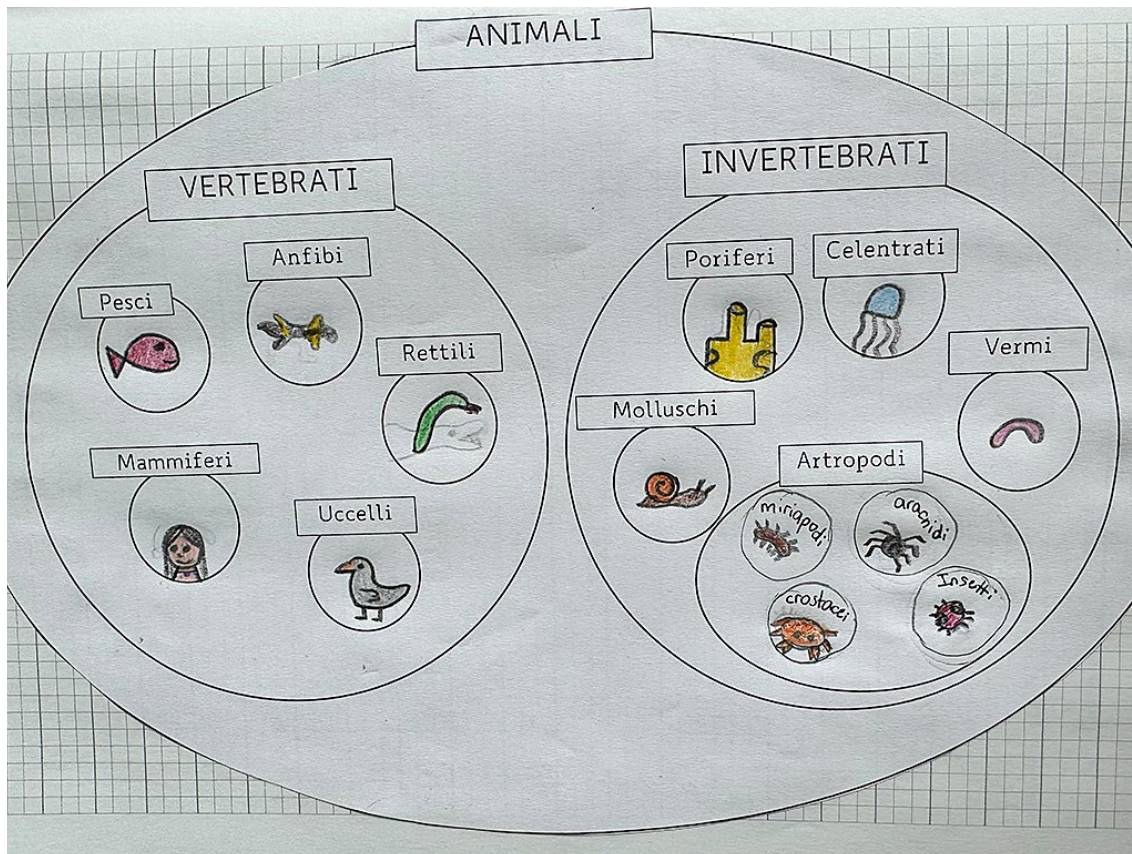
Dopo aver svolto l'esercizio a gruppi, si è svolta una condivisione collettiva in cui è stato chiesto agli allievi di presentare i propri diagrammi e di giustificare le proprie scelte.

A priori l'insegnante aveva stilato una lista delle considerazioni che era importante emergessero durante la condivisione a grande gruppo:

- Ogni linea curva chiusa rappresenta un insieme (uso anche del termine "gruppo" per chiarire il concetto) di elementi;
- Ogni insieme può contenere altri insiemi (ad esempio, l'insieme degli animali comprende l'insieme dei vertebrati e l'insieme degli invertebrati);
- Gli elementi di un insieme contenuto in un altro insieme possiedono tutte le caratteristiche dell'insieme più grande e inoltre alcune caratteristiche più specifiche (ad esempio, i mammiferi sono degli animali vertebrati che si distinguono per l'allattamento della prole; si può quindi affermare che i mammiferi sono un caso particolare di vertebrati);

Al termine dell'attività collettiva, è stato chiesto agli allievi di completare individualmente una scheda ([Allegato 7](#)) contenente il diagramma precedentemente elaborato insieme. Ogni alunno doveva rap-

presentare graficamente o verbalmente un elemento per ciascun insieme e aggiungere nuovi sottoinsiemi relativi agli artropodi, tema affrontato in quel periodo del percorso didattico. Per concludere l'attività, gli allievi dovevano inoltre formulare cinque affermazioni relative al diagramma e altre cinque corredate da una giustificazione.



Classificazione degli animali con il diagramma di Euler-Venn

I poriferi sono invertebrati.

I miriapodi sono artropodi e invertebrati.

I pesci sono animali.

I molluschi non sono vertebrati.

I mammiferi sono animali.

I rettili sono vertebrati perché hanno la colonna vertebrale.

Gli insetti sono artropodi perché hanno le zampe.

I vermi sono invertebrati perché non hanno la colonna vertebrale.

I crostacei sono artropodi perché hanno le zampe.

I mammiferi sono animali che allattano i loro piccoli.

Figura 10. Esempio di classificazione degli animali con il diagramma di Euler-Venn e frasi associate.

Analisi delle produzioni degli allievi. La Figura 10 riporta un esempio di esercizio svolto. L'intera attività si è svolta come previsto, senza particolari difficoltà. Gli allievi sono riusciti a ricostruire correttamente il diagramma degli animali e a motivare le proprie scelte. Ad esempio, hanno osservato che l'insieme più esterno doveva essere quello degli animali, poiché tutte le altre categorie rappresentavano tipi specifici di animali e, quindi, dovevano essere contenute al suo interno.

Maggiore attenzione è stata dedicata alla costruzione delle frasi con giustificazione. L'insegnante ha invitato gli alunni a riflettere sulla diversa struttura delle affermazioni, distinguendo tra frasi come: «I crostacei sono artropodi perché hanno le zampe» e «I mammiferi sono animali che allattano i loro piccoli» (Figura 10).

È stato interessante analizzare le differenze tra queste due formulazioni, dal punto di vista sia linguistico sia concettuale. La prima frase impiega un «perché» (congiunzione causale) che funge da spiegazione e giustifica l'inclusione dell'insieme dei crostacei in quello degli artropodi. La seconda, invece, utilizza un «che» (pronome relativo) per evidenziare una caratteristica distintiva dell'insieme dei mammiferi, mettendolo in relazione con altri insiemi all'interno della classificazione.

Dal punto di vista didattico, questa attività iniziale di classificazione di elementi non inerenti alla geometria aveva lo scopo di far capire agli allievi il significato dei diagrammi di Euler-Venn e il funzionamento della loro rappresentazione. Gli alunni hanno costruito in questo modo un modello di paragone per la classificazione dei quadrilateri.

L'approfondimento sulla lingua ha permesso di approfondire il significato concettuale del diagramma di Euler-Venn e di ragionare in maniera più approfondita sulla costruzione e sulla comprensione del linguaggio.

4.10.2 Diagramma di Euler-Venn con i quadrilateri

Descrizione dell'attività. Dopo aver compreso il funzionamento del diagramma di Euler-Venn, l'insegnante ha guidato gli alunni alla classificazione dei quadrilateri attraverso delle domande stimolo e utilizzando una rappresentazione degli insiemi già disegnata alla lavagna. La discussione è stata supportata dalle figure ritagliate e dai cartelloni appesi in aula realizzati in precedenza.

Successivamente, gli allievi divisi in gruppetti eterogenei hanno costruito un cartellone riassuntivo e scritto delle affermazioni con giustificazione sulla base degli esempi della lezione precedente.

Le domande stimolo sono state le seguenti:

- «C'è un quadrilatero che potete collocare con sicurezza in un insieme?»
- «Quale caratteristica possiedono i quadrilateri contenuti in questo insieme?»
- «Quale quadrilatero possiede le stesse caratteristiche dei quadrilateri di questo insieme ma con una particolarità in più?»

Analisi delle produzioni degli allievi. Gli alunni sono riusciti a completare il diagramma di Euler-Venn disegnato alla lavagna senza troppe difficoltà e grazie alle domande stimolo dell'insegnante. Il primo quadrilatero che si sono sentiti sicuri di collocare era il quadrato giustificando la scelta dicendo che era la figura con più proprietà di tutti gli altri.

La Figura 11 mostra i due cartelloni che sono stati realizzati dai gruppi di allievi.

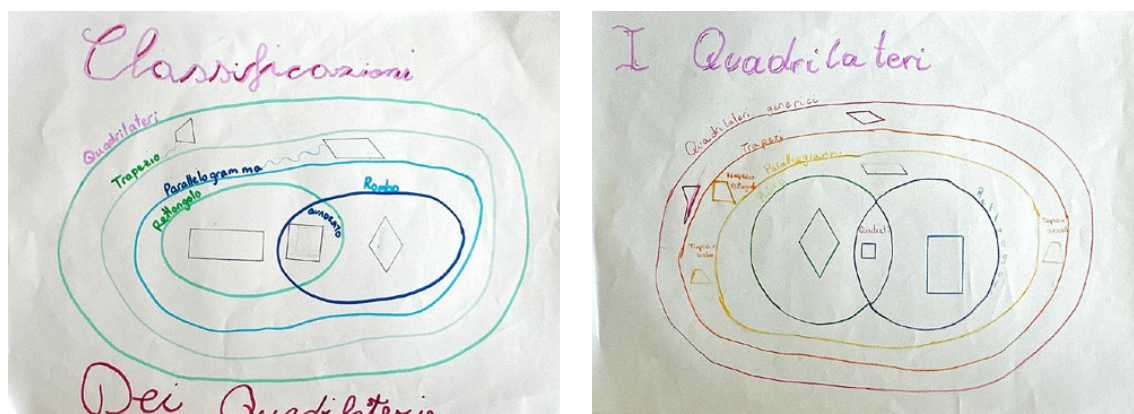


Figura 11. Cartelloni con la classificazione dei quadrilateri secondo il diagramma di Euler-Venn realizzati dagli allievi.

Si riportano di seguito alcune delle affermazioni scritte individualmente dagli allievi:

1. «I quadrati sono trapezi perché hanno almeno un lato parallelo».
2. «I quadrati sono rettangoli che hanno 4 lati congruenti».
3. «Il parallelogramma è un quadrilatero con due coppie di lati paralleli».
4. «I quadrati sono rombi con 4 lati della stessa lunghezza».
5. «I trapezi sono quadrilateri con una coppia di lati paralleli».
6. «Il rombo è un quadrilatero perché ha 4 lati».
7. «I rombi sono parallelogrammi con 4 lati congruenti».
8. «Il quadrato è un rettangolo perché ha 4 angoli retti».
9. «Il rombo è un parallelogramma con due coppie di angoli congruenti».

È possibile osservare che alcune di queste frasi, oltre a essere corrette, costituiscono vere e proprie definizioni (ad esempio le frasi 2, 3, 5, 7). Altre, come le frasi 4, 6 e 8, pur essendo corrette dal punto di vista sia linguistico sia concettuale, non rappresentano definizioni ma affermazioni di tipo giustificativo. La frase 1 risulta invece linguisticamente scorretta, in quanto fa riferimento a «un lato parallelo» anziché a «una coppia di lati paralleli», concetto fondamentale nella classificazione dei trapezi.

Infine, la frase 9 è solo parzialmente corretta: l'uso della preposizione «con» suggerisce che la presenza di due coppie di angoli congruenti sia un'aggiunta, mentre si tratta in realtà di una caratteristica già propria del parallelogramma, e quindi non distintiva del rombo rispetto ad esso.

Attraverso questa lezione gli allievi sono stati portati a scoprire le relazioni esistenti tra i quadrilateri e le loro proprietà attraverso un compito libero che può essere affrontato in modi diversi, esattamente come prevede la quarta fase dell'apprendimento di van Hiele. Spontaneamente gli alunni hanno iniziato ad organizzare le informazioni in termini di definizioni con una terminologia tecnica, avvicinandosi al livello delle deduzioni informali del pensiero geometrico. In questa attività gli alunni si sono allontanati dal concetto di descrizione, la quale prevede una sovrabbondanza di termini e di informazioni, e si sono avvicinati sempre più a una frase precisa, chiara ed essenziale come dovrebbe essere una definizione (Sbaragli, 2020).

4.11 Dalla descrizione alla definizione

4.11.1 Detective dei quadrilateri con le carte È e le carte HA

Descrizione dell'attività. Il passaggio dalla descrizione alla definizione è avvenuto attraverso la ripresa e l'ampliamento del gioco "Detective dei quadrilateri".

Inizialmente, si è riflettuto con gli allievi sul fatto che le carte proprietà create in precedenza indicassero *cos'ha* una determinata figura ("carte HA") e si è chiesto loro di creare delle carte che indicassero invece *cos'è* una determinata figura ("carte È"). Il compito prende spunto dal gioco MaMa "Definisci i quadrilateri" (Sbaragli et al., 2023b).

L'insegnante ha proposto alla classe di giocare a una nuova versione del "Detective dei quadrilateri" utilizzando le carte È e le carte HA (un esempio nella Figura 12) create dagli allievi. L'insegnante aveva individuato delle ulteriori carte HA da mettere in gioco nel caso fosse stato necessario o interessante arricchire l'attività.



Figura 12. Esempio di carte È e carte HA tratte dal materiale MaMa (Sbaragli et al., 2023b).

In questa versione del gioco i detective non fanno più alcuna domanda, ma è il ladro stesso a fornire le indicazioni attraverso l'impiego delle carte. Dopo ogni indicazione fornita, i detective devono scartare le figure incoerenti. La determinazione del vincitore avviene secondo le regole originali del gioco. Dopo che gli allievi hanno preso un po' di dimestichezza con la nuova versione del gioco si sono introdotte delle condizioni, come ad esempio:

- si può utilizzare una sola carta È;
- si possono utilizzare un massimo di 4 carte;
- si possono utilizzare un massimo di 3 carte;
- bisogna utilizzare esattamente/almeno 5/6/... carte.

Analisi delle produzioni degli allievi. Le diverse partite al gioco hanno suscitato delle riflessioni interessanti sia da parte degli allievi durante il gioco stesso sia da parte dell'insegnante a posteriori. Lo svolgimento delle partite è qui riportato attraverso delle tabelle in cui sono indicate le carte scelte dal ladro per fornire le informazioni ai detective, le azioni dei detective ed eventuali commenti registrati durante il gioco.

Nella prima partita, riportata in Tabella 1, i detective sono riusciti a individuare il quadrilatero grazie alle corrette indicazioni del ladro, malgrado fosse stata utilizzata una carta che non forniva alcuna indicazione ulteriore e utile allo scopo del gioco.

Carta scelta dal ladro	Azioni dei detective	Eventuali commenti
«Ha due coppie di lati paralleli».	Scartano il quadrilatero generico, il deltoide e tutti i trapezi.	
«È un trapezio».	Non scartano quadrilateri.	D.: «È inutile questa carta, non puoi scartare niente». Insegnante: «Per quale motivo?» D.: «Sono tutti dei trapezi».
«Non ha angoli retti».	Scartano il rettangolo e il quadrato.	
«Ha due coppie di lati congruenti non adiacenti».	Scartano il rombo e individuano il parallelogramma.	

Tabella 1. Partita 1 – Quadrilatero scelto dal ladro: parallelogramma.

Nella seconda partita, riportata in Tabella 2, l'insegnante ha posto la condizione di utilizzare esattamente 5 carte.

Carta scelta dal ladro	Azioni dei detective	Eventuali commenti
«Ha una coppia di lati paralleli».	Scartano il quadrato, il rettangolo, il rombo, il parallelogramma, il deltoide e il quadrilatero generico.	
«Ha 4 vertici».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha 4 lati».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha 4 angoli».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha due coppie di lati congruenti».	Scartano il trapezio scaleno e il trapezio rettangolo individuando il trapezio isoscele.	

Tabella 2. Partita 2 – Quadrilatero scelto dal ladro: trapezio isoscele.

L'allievo ladro è riuscito a far individuare il trapezio isoscele utilizzando esattamente 6 carte. Al termine della partita l'insegnante ha chiesto all'allievo ladro di spiegare la strategia utilizzata e ai compagni di commentarla. L'allievo ha spiegato di aver scelto una prima carta in grado di scartare molti quadrilateri per poi dare tante carte inutili e, infine, fornire quella determinante. I compagni hanno ritenuto che fosse una strategia vincente perché «ha funzionato bene».

In questa versione del gioco gli alunni hanno fatto esperienza con la ridondanza delle informazioni tipica delle descrizioni e hanno la possibilità di mettere in relazione le proprietà, com'è tipico nel livello delle deduzioni informali nello sviluppo del pensiero geometrico. Hanno potuto infatti notare che la presenza o l'assenza di una proprietà considera o esclude un'altra proprietà (ad esempio la proprietà «ha almeno una coppia di lati paralleli» tiene in considerazione tutte le figure con «ha una coppia di lati paralleli» e «ha più di una coppia di lati paralleli»).

Nella terza partita, riportata in **Tabella 3**, l'insegnante ha posto la condizione di utilizzare esattamente 3 carte.

Carta scelta dal ladro	Azioni dei detective	Eventuali commenti
«Ha quattro lati congruenti».	Scartano tutti quadrilateri tranne il quadrato e il rombo.	
«Ha 4 angoli».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha 4 angoli retti».	Scartano il rombo e individuano il quadrato.	

Tabella 3. Partita 3 – Quadrilatero scelto dal ladro: quadrato.

Anche in questo caso, l'allievo "ladro" è riuscito a rispettare la consegna, facendo individuare il quadrato mediante l'utilizzo esatto di tre carte proprietà. Al termine della partita, l'insegnante ha colto l'occasione per approfondire ulteriormente l'argomento proponendo alcune domande stimolo. In primo luogo ha chiesto alla classe se fosse possibile individuare il quadrato utilizzando solo due carte, e in tal caso, quale delle tre utilizzate potesse essere considerata superflua. Tutti gli allievi hanno concordato sul fatto che la carta eliminabile fosse quella con la proprietà «ha 4 angoli», considerata non determinante ai fini dell'individuazione univoca della figura.

Successivamente, l'insegnante ha proposto una nuova sfida: individuare il quadrato utilizzando esattamente due carte, più precisamente una carta È e una carta HA. Dopo una breve riflessione individuale, due allieve hanno proposto soluzioni diverse ma entrambe corrette:

- «È un rombo» e «Ha 4 angoli retti»;
- «È un rettangolo» e «Ha 4 lati congruenti».

Attraverso questa attività, le allieve sono riuscite a formulare due definizioni corrette di quadrato, mostrando un buon livello di comprensione concettuale e una progressione nel pensiero geometrico.

4.11.2 La definizione

All'inizio della lezione, l'insegnante ha esplicitato chiaramente l'obiettivo didattico: formulare progressivamente le definizioni dei diversi quadrilateri. Per favorire una comprensione consapevole del processo, ha chiesto agli alunni di riflettere su cosa significhi "definizione" e di esprimere le proprie idee in merito. Eccone alcune:

- Y.: «Una definizione è quando dici cos'è una cosa».
- C.: «Secondo me è una spiegazione precisa, ti dice di cosa si tratta esattamente».
- A.: «È come una descrizione, ma più corta e più precisa».

Per supportare questa riflessione, l'insegnante ha raccolto e trascritto alla lavagna parole-chiave emerse dal confronto con gli allievi e ha chiesto loro di proporle ulteriori. Sono emerse le seguenti parole-chiave: «che cos'è», «precisa», «esatta», «corta», «non lascia dubbi», «completa».

Dopo la raccolta delle prenosconze degli allievi e prima di avviare l'attività principale, l'insegnante ha introdotto la distinzione tra descrizione e definizione, evidenziando come una definizione debba essere precisa, essenziale e non ambigua. Una descrizione ha invece lo scopo di fornire il maggior

numero di informazioni possibili al fine di favorire la costruzione di un'immagine completa e chiara di ciò di cui si sta parlando.

Descrizione dell'attività. L'attività principale si è svolta a coppie o in piccoli gruppi eterogenei. Ogni coppia ha ricevuto tutte le carte È e le carte HA utilizzate in precedenza, con l'eventuale aggiunta delle carte mancanti a discrezione dell'insegnante.

L'attività prevedeva che ogni gruppo selezionasse il minor numero di carte possibile per definire ciascun quadrilatero in modo univoco. In un secondo momento, gli allievi sono stati invitati a trasformare le definizioni in descrizioni, ovvero a riformulare le frasi utilizzando il maggior numero di carte. Ciò allo scopo di favorire l'analisi degli elementi essenziali e di quelli ridondanti per permettere di comprendere maggiormente le caratteristiche di una definizione e di una descrizione.

Per rendere la lezione più coinvolgente, l'attività è stata proposta sotto forma di sfida ed è stato incoraggiato il confronto tra gruppi, in modo da favorire la condivisione delle strategie e dei risultati emersi.

Analisi delle produzioni degli allievi. In un primo momento, alcune coppie di allievi hanno utilizzato esclusivamente carte HA per definire un quadrilatero (ad esempio, «ha quattro angoli retti» e «ha tutti i lati congruenti» per identificare il quadrato). Per chiarire che ciò non costituiva una vera definizione, l'insegnante ha ripreso le parole-chiave emerse durante la discussione collettiva, tra cui il concetto di "cos'è".

Una compagna ha offerto un esempio efficace per spiegare meglio: «Se io dico: Tom ha il pelo nero e lungo e ha le orecchie a punta, tu capisci subito di cosa sto parlando? Devo specificare che Tom è un gatto!». A partire da questo esempio, l'insegnante ha invitato gli allievi a riformulare la frase in modo corretto e completo, che è diventata: «Tom è un gatto che ha il pelo nero e lungo e le orecchie a punta». Dalla discussione è emerso che una definizione efficace deve contenere almeno una carta È e una carta HA, per specificare chiaramente l'appartenenza a un insieme e le sue caratteristiche.

In seguito, gli allievi sono riusciti a formulare definizioni corrette, anche se talvolta dimenticavano proprietà essenziali (ad esempio, dicendo «Il rombo è un quadrilatero con due coppie di lati paralleli» si ottiene la definizione di parallelogramma; per definire il rombo sarebbe necessario aggiungere che «ha quattro lati congruenti»), oppure inserivano elementi ridondanti (come in «Il rettangolo è un parallelogramma con due coppie di lati congruenti e tutti gli angoli retti», dove l'informazione sui lati congruenti è ridondante, essendo già implicita nella definizione di parallelogramma).

Durante l'attività, molti allievi hanno trovato utile fare costante riferimento alla classificazione dei quadrilateri rappresentata nel diagramma di Euler-Venn costruito precedentemente. Un'allieva ha osservato e condiviso con la classe che le definizioni più sintetiche si ottengono scegliendo, come carta È, l'insieme più ampio e immediatamente più prossimo rispetto al quadrilatero da definire.

Per quanto riguarda le descrizioni, invece, è risultato più semplice per gli allievi utilizzare un numero elevato di carte. È emerso fin da subito che, quanto più un quadrilatero si collocava all'interno di numerosi insiemi nel diagramma di Euler-Venn, tanto maggiore era il numero di carte che gli si potevano attribuire. Alcuni allievi hanno osservato che i "quadrilateri più speciali" possedevano un maggior numero di carte, cioè più proprietà distintive. A parole proprie gli allievi sono riusciti a spiegare una caratteristica fondamentale dei quadrilateri dimostrando comprensione concettuale e dimostrando di riuscire a osservare delle relazioni logiche tra le figure e tra le proprietà, caratteristica del livello delle deduzioni informali del pensiero geometrico. L'attività mirava infatti alla fase di orientazione libera in cui gli allievi scoprono individualmente le relazioni attraverso un compito che può essere svolto in diversi modi. Si potrebbe dire che in piccola parte l'attività ha stimolato anche la fase d'integrazione, in quanto ha permesso lo sviluppo di una visione globale del campo di studio e degli strumenti a disposizione (cartelloni, carte e figure dei quadrilateri) (Batini et al., 2004).

5 Riflessioni globali sul percorso

Al termine di questo contributo è possibile fare delle considerazioni globali sul percorso didattico in relazione all'interdisciplinarietà tra lingua e geometria.

L'uso del gioco ha facilitato l'introduzione e il consolidamento dei concetti geometrici in modo dinamico e coinvolgente, favorendo al contempo il dialogo matematico e lo sviluppo di una comunicazione efficace. I momenti di confronto, sia tra pari sia con l'insegnante, hanno contribuito alla costruzione di un linguaggio condiviso e sempre più preciso, ponendo le basi linguistiche e concettuali necessarie per il proseguimento del percorso. Le diverse situazioni comunicative sono quindi state veramente delle occasioni di apprendimento in cui si è potuto ragionare sulla lingua e sui concetti geometrici.

La matematica, e in questo caso la geometria, è ricca di termini specialistici basati su dei concetti ben precisi. La padronanza di tali vocaboli favorisce la comprensione concettuale e lo sviluppo del pensiero geometrico descritto da van Hiele. Un esempio all'apparenza semplice, ma tutt'altro che scontato, riguarda l'espressione "lati paralleli": senza una comprensione chiara e corretta del concetto di parallelismo, non è possibile cogliere né applicare alcune delle proprietà fondamentali dei quadrilateri.

Si è potuto notare che nel complesso le competenze linguistiche e concettuali degli allievi sono evolute in maniera progressiva durante il percorso. Inizialmente, dal punto di vista linguistico, i più grandi ostacoli riscontrati all'interno del gruppo classe erano legati al lessico e alla semantica. In particolare, durante il dialogo della quarta attività (par. 4.4), è emersa la difficoltà nel realizzare oralmente atti linguistici chiari ed efficaci per la mancanza di un bagaglio lessicale preciso e adeguato («questi lati sono più dritti»). Gli allievi che hanno mostrato maggiori difficoltà sono coloro che presentano già delle lacune linguistiche dovute a svariati motivi (dislessia, disortografia, poca conoscenza della lingua ecc.). Più nello specifico gli errori linguistici che sono stati individuati hanno fatto pensare che, sicuramente, non vi era un controllo consapevole dell'utilizzo della lingua e che probabilmente vi erano delle lacune concettuali e degli ostacoli d'apprendimento di varia natura.

Durante il percorso didattico, gli allievi hanno arricchito e affinato il proprio lessico e le proprie conoscenze concettuali, dimostrando una crescente volontà di utilizzare termini nuovi e più precisi. Un esempio significativo è l'introduzione e la comprensione del termine "adiacente", che ha fornito la possibilità di individuare e formulare delle proprietà dei quadrilateri in grado di caratterizzarli in maniera più precisa, contribuendo a rendere le espressioni linguistiche più accurate e a veicolare con maggiore chiarezza i concetti geometrici. Non sono più comparse espressioni colloquiali o ambigue, come «il lato è storto». Tuttavia, anche nelle fasi finali del percorso, si sono ancora riscontrate formulazioni linguisticamente scorrette, pur contenendo termini e concetti corretti dal punto di vista geometrico (ad esempio, «ha un lato parallelo»).

Il passaggio dalla descrizione alla definizione è avvenuto in modo graduale e ha messo in luce la maggiore facilità degli allievi nel formulare descrizioni piuttosto che definizioni. Pur avendo dimostrato di aver compreso il significato di definizione in matematica, molti hanno incontrato difficoltà nel rendere le loro formulazioni essenziali ed evitare ridondanze, come si è potuto osservare anche nell'ultima lezione del percorso (par. 4.11.2).

Dal punto di vista della didattica della geometria, i materiali raccolti durante le attività hanno permesso all'insegnante di cogliere i segnali relativi al livello dello sviluppo del pensiero geometrico degli allievi. Al termine delle undici fasi del percorso didattico proposto, tutti gli allievi hanno potuto raccogliere diverse esperienze nell'acquisizione del livello descrittivo-analitico e alcuni di essi si possono sicuramente collocare già nel livello delle deduzioni informali (van Hiele, 1986).

È, inoltre, emerso il forte legame tra concetto e figura geometrica alla base del concetto figurale (Fischbein, 1993). Alcuni allievi hanno mostrato più volte il bisogno del supporto visivo e di un riassunto delle informazioni raccolte precedentemente per poter definire le proprietà dei quadrilateri. Ciò con-

fermava la loro fragilità concettuale e quindi la necessità di esplorare e di consolidare ulteriormente i nuovi apprendimenti attraverso, per esempio, nuove forme di rappresentazione.

D'altra parte, è emerso come la rappresentazione figurale possa risultare ambigua e non sempre offrire un'immagine completa del concetto geometrico, rischiando così di influenzare negativamente la costruzione di una definizione concettuale dell'oggetto stesso.

5.1 Possibili sviluppi ulteriori e di revisione

Riflettendo retrospettivamente sul percorso proposto, emergono possibili revisioni e sviluppi futuri.

In particolare, l'approccio pluridisciplinare ha posto un forte accento sulla riflessione relativa all'uso del linguaggio, con l'obiettivo di favorire una comprensione più profonda dei concetti matematici. Gran parte delle attività hanno previsto momenti di comunicazione, sia orale sia scritta, mirati a sviluppare l'efficacia espressiva e l'uso appropriato della terminologia.

Un possibile ampliamento potrebbe includere attività specifiche dell'area linguistica applicate a contenuti matematici. Ad esempio, la creazione di cruciverba, testi narrativi o fumetti basati sui quadrilateri potrebbe rappresentare un'opportunità per rafforzare il legame tra matematica e italiano. Esistono numerose strategie didattiche che, enfatizzando l'interdisciplinarietà, permettono di rendere ancora più evidente e vissuto il rapporto tra le due discipline.

Il percorso didattico potrebbe proseguire oltre le undici unità proposte, approfondendo ulteriormente lo studio dei quadrilateri. In particolare, sarebbe utile introdurre concetti come le diagonali e le simmetrie, ampliando così la comprensione delle proprietà geometriche.

Una volta consolidata la classificazione tramite gli insiemi di Euler-Venn e compresa l'importanza di una definizione rigorosa, gli allievi potrebbero affrontare con maggiore facilità l'analisi delle relazioni tra ulteriori proprietà dei quadrilateri.

Un aspetto non esplorato in questo percorso didattico è il disegno dei quadrilateri, che, come sostengono Angulo Romero et al. (2024), rappresenta un elemento fondamentale per la costruzione di un apprendimento solido. È quindi importante in un futuro offrire agli alunni la possibilità di sperimentare diverse modalità di rappresentazione grafica, sia attraverso strumenti tradizionali come carta e matita, sia mediante strumenti digitali come, ad esempio, Zukei Puzzle o GeoGebra. Questo approccio favorisce lo sviluppo di un pensiero visuo-spaziale e rafforza il concetto figurale dei quadrilateri.

6 Conclusione

L'itinerario proposto vuole essere un esempio di approccio didattico interdisciplinare in cui risalta l'interconnessione tra geometria e linguaggio.

Il percorso ha stimolato una riflessione sull'uso del linguaggio e delle strategie comunicative nella costruzione dei concetti, ma ha anche confermato l'importanza di costruire i concetti geometrici in modo graduale ed esperienziale, favorendo così un apprendimento più efficace.

Uno degli aspetti più rilevanti emersi durante il percorso riguarda il ruolo del linguaggio nella comprensione concettuale. Le attività di descrizione e confronto tra pari hanno evidenziato come gli allievi tendano inizialmente a utilizzare un linguaggio quotidiano, caratterizzato da ridondanze o imprecisioni, per poi affinare progressivamente le loro espressioni grazie al supporto di discussioni guidate e giochi strutturati. Il lavoro sul linguaggio ha contribuito non solo a migliorare la capacità di espressione, ma anche a sviluppare una maggiore consapevolezza dell'importanza della comunicazione efficace nella matematica.

D'altra parte, il percorso ha anche messo in luce alcune criticità. Alcuni alunni hanno riscontrato difficoltà nel riconoscere proprietà specifiche dei quadrilateri in autonomia e senza alcun supporto,

soprattutto quando il riconoscimento richiedeva un ragionamento più astratto e deduttivo. Questo suggerisce la necessità di integrare ulteriori momenti di riflessione sulle relazioni tra i quadrilateri, magari attraverso altre attività di manipolazione concreta e l'impiego di strumenti digitali e non, come GeoGebra, geoplano ecc.

La prosecuzione di questo lavoro potrà consolidare ulteriormente le competenze acquisite e stimolare negli allievi un atteggiamento sempre più critico e consapevole nei confronti del sapere matematico.

Bibliografia

- Angulo Romero, A., Rengifo Silva, F. E., Santacruz Espinoza, A., Ttito Quispe, J., López Castillo, A. C., & Berrocal Huarcaya, F. D. (2024). *Hans Freudenthal: Perspectives in mathematics education and phenomenological analysis* (Second edition). Editorial Mar Caribe. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED661552.pdf>
- Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria*. Carocci.
- Batini, M., Cannizzaro, L., Cavallaro, B., De Santis, C., Lombardi, V., Menghini, M., & Percario, L. (2004). *Figure geometriche e definizioni. Un itinerario guidato per l'inizio della scuola secondaria*. Dipartimento di matematica, Università di Roma "La Sapienza".
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420–464). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2022). Il processo "Comunicare e argomentare" in matematica. *Progetto "Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare – 2022"*. Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI. <https://www.mateval.ch/wp-content/uploads/2022/08/Il-processo-Comunicare-e-argomentare-in-matematica-.pdf>
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Divisione della scuola, DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>
- Dodman, M. (2007). Competenze linguistico-comunicative nella costruzione del sapere matematico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Allievi, insegnanti, sapere: La sfida della didattica della matematica* (pp. 11–18). Pitagora Editrice.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22(3–4), 455–479. <https://doi.org/10.1080/02643290442000310>
- Mariotti, M. A. (1992). Immagini e concetti in geometria. The figural and the conceptual components of geometrical concepts. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 15(9), 863–885.

- Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni inevitabili e misconcezioni evitabili. *La matematica e la sua didattica*, 1, 57–71.
- Sbaragli, S. (2006). L'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali. In S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno* (pp. 257–260). Carocci Editore.
- Sbaragli, S. (2020). La complessità nel definire in matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica disciplina scientifica per una scuola efficace* (pp. 19–22). Pitagora Editrice.
- Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023a). I quadrilateri e le loro classificazioni. *MaMa: matematica per la scuola elementare – Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1231
- Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023b). Definisci i quadrilateri. *MaMa: matematica per la scuola elementare – Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1232
- Sbaragli, S., & Canducci, M. (2023). L'importanza di un percorso esplicito dalla descrizione alla definizione in matematica. *Archimede*, 3, 137–142.
- Sbaragli, S., & Demartini, S. (Eds.) (2021). *Italmatica: Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica*. Edizioni Dedalo.
- Sbaragli, S., & Mammarella, I. C. (2011). Insegnare e apprendere la geometria. *Difficoltà in matematica*, 8, 65–82.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic press.

Un parco giochi da scoprire e ricostruire

Exploring and rebuilding a playground

Pamela Martinetti

Scuola dell'infanzia di Avegno; Gruppo Matematicando, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

✉ pamela.martinetti@edu.ti.ch

Sunto / L'esperienza didattica qui presentata ha coinvolto i bambini di una scuola dell'infanzia del Cantone Ticino nella progettazione di un nuovo parco giochi che sostituisse quello ormai segnato dall'usura del tempo. L'esperienza si è sviluppata attraverso differenti contesti di apprendimento con una visione educativa sostenibile, legata al territorio, all'educazione ambientale e alla cittadinanza. A partire dall'esplorazione del parco giochi, il percorso ha coinvolto i bambini in attività di osservazione, costruzione di plastici, mappatura e progettazione partecipata, con un focus sull'area matematica. Il lavoro ha favorito lo sviluppo di competenze geometriche, in particolare legate alla visualizzazione, al passaggio dallo spazio al piano e ai diversi punti di vista. Attraverso fasi di ricerca, confronto tra pari e dialogo con operatori e tecnici comunali, i bambini sono diventati protagonisti di un processo creativo e collaborativo, in cui la matematica si è rivelata strumento per comprendere e trasformare il reale.

Parole chiave: progettazione partecipata; situazioni autentiche; passaggio spazio-piano; punti di vista; scuola dell'infanzia.

Abstract / The didactic experience presented here involved children from a pre-school in the Canton of Ticino in designing a new playground to replace the old one, which had become worn out over time. The experience developed through various learning contexts, guided by a sustainable educational vision connected to the local environment, environmental education, and active citizenship. Starting with an exploration of the playground, the project engaged the children in activities such as observation, model building, mapping, and participatory design, with a particular focus on mathematics. The work supported the development of geometric skills, especially those related to visualisation, shift from three-dimensional space to two-dimensional representations, and adopting different points of view. Through research, peer collaboration, and dialogue with municipal staff and technicians, the children became active participants in a creative and collaborative process in which mathematics emerged as a tool for understanding and transforming reality.

Keywords: participatory design; authentic situations; space-plane shift; viewpoints; pre-school.

1 Introduzione

Da oltre trent'anni, il parco giochi protagonista di questo articolo è un luogo di gioco e spensieratezza: è lo spazio all'aperto della scuola dell'infanzia, appena fuori dall'aula. Nel tempo, pur restando sempre conforme alle normative vigenti e oggetto di alcuni interventi migliorativi, i materiali hanno cominciato a mostrare i segni dell'usura, e lo spazio ha perso parte del suo potenziale attrattivo. Parallelamente, sono evolute le esigenze educative, sociali e urbanistiche, spingendo il Municipio e i responsabili¹ del settore a proporre una revisione completa del parco, in linea con una visione più ampia e attuale del suo ruolo.

Il Municipio ha quindi manifestato l'intenzione di migliorare e rinnovare il parco giochi del quartiere, offrendo così un'occasione concreta di ripensamento degli spazi a misura di bambino. All'interno del contesto scolastico si è colta questa opportunità per avviare un percorso didattico che intrecciasse la partecipazione attiva degli alunni con un lavoro individuale in ambito matematico, connesso alla sperimentazione in corso nel *gruppo Matematicando*.² Così è nata una sfida reale, concreta, vissuta: progettare un nuovo parco giochi insieme ai bambini, in linea con i regolamenti attuali, ma anche con una visione educativa sostenibile, legata al territorio e ricca di significato. Il gruppo docenti si è messo in gioco con entusiasmo e responsabilità, cogliendo questa opportunità come un'occasione di apprendimento autentico, che potesse diventare parte viva del percorso educativo dei bambini.

Lavorare su un progetto reale, che coinvolge il Municipio, le famiglie e le aspettative dei bambini, ha dato senso e direzione alle azioni intraprese. I bambini, visti come protagonisti e portatori di idee, sono diventati parte attiva di una rete che cresce intorno alla scuola, coerentemente all'idea che sia importante far vivere esperienze di apprendimento in cui si lavora insieme per trovare idee o soluzioni utili per la classe, la scuola, il quartiere o gli artigiani locali. Uscendo dall'aula si creano così reti e legami al di fuori della scuola, grazie ai quali le idee diventano stimoli per iniziare percorsi comuni, in cui gli studenti partecipano attivamente e diventano parte di un cambiamento.

L'esperienza è stata svolta nella scuola dell'infanzia di Avegno con bambini dai 3 ai 6 anni, coinvolgendoli in molteplici campi di esperienza: giochi percettivi, attività ludico-spaziali, passaggi dallo spazio al piano e viceversa, progettazione, combinazione di idee, narrazioni e risoluzione di problemi. Un intero anno dedicato a costruire, raccontare, documentare con video, foto, plastici. Alla fine, i bambini si sono sentiti davvero «costruttori di parco giochi», come hanno detto alcuni di loro. Le idee iniziali, a volte fantasiose, si sono via via modellate attorno a bisogni reali, in armonia con lo spazio e con le possibilità offerte dal contesto, in un'ottica di progettazione partecipata.

2 La progettazione partecipata in ambito didattico

Questo paragrafo si apre con una citazione delle parole di Lamedica (2003, p. 20): «Perché i bambini dovrebbero progettare? Per diventare attori delle proprie idee, elaborare bisogni e desideri, crescere come cittadini consapevoli e utili alla comunità. Un'occasione di crescita e un modo ricco per imparare sperimentando».

Con questo obiettivo, la progettazione partecipata consiste in un approccio alla progettazione (di spazi, imprese, strutture culturali e sociali, ecc.) che «introduce nel sistema dialettico fra due sostan-

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

2. Il *gruppo Matematicando*, attivo dal 2013, è composto da docenti di scuola dell'infanzia, elementare e media, direttori e ispettori del Cantone Ticino, accomunati dall'interesse di progettare e sperimentare percorsi didattici innovativi nell'ambito della matematica. Responsabile prof.ssa Silvia Sbaragli.

ziali interlocutori (*il progettista e gli elettori forti* costituiti dal mercato, dalle imprese ecc.) una terza parte: quella degli abitanti» (Lamedica, 2003, p. 16).

Questo approccio può essere utilizzato anche da istituzioni preposte all'organizzazione di spazi ad uso comune, al fine di coinvolgere i cittadini nel ripensare i luoghi in cui vivere la socialità in modo da avvicinare le scelte dei decisori alle esigenze degli abitanti.

In quest'ottica, la progettazione partecipata attivata con i cittadini più piccoli può rappresentare un approccio che valorizza un'educazione ambientale e alla cittadinanza; in effetti,

«progettare con i più piccoli fa bene alla città perché le permette di rinnovarsi qualificandosi, perché la arricchisce di nuove radici e prospettive, e fa bene ai bambini stessi perché diviene per loro un'occasione di crescita e un modo diverso e ricco per imparare sperimentando».

(Lamedica, 2003, p. 20)

A partire da un contesto e una situazione reali, il primo passo verso la progettazione consiste nel riconoscere il luogo su cui bisognerà operare, imparando al contempo a «esprimerne attraverso parole, disegni o quant'altro i connotati» (Lamedica, 2003, p. 4). Guardare questo luogo con gli occhi dei bambini significa imparare a vedere anche quello che rischia di essere invisibile agli occhi dell'adulto: ciò che manca, ciò che può essere trasformato, ciò che può rendere uno spazio più inclusivo, più giocabile, più vivo. Dal punto di vista didattico, la progettazione partecipata può rappresentare un'occasione per implementare nelle dinamiche di apprendimento degli allievi contenuti disciplinari, ma anche competenze trasversali: non solo geometria, disegno, misura, ma anche ascolto, confronto, negoziazione. Nel lavoro progettuale, infatti, ogni proposta, ogni osservazione, anche la più semplice, viene accolta e presa in considerazione. Tutte queste idee possono poi prendere una forma progettuale attraverso modelli concreti, fatti ad esempio di cartone, e realizzati grazie all'immaginazione e alla cooperazione.

«In sintesi, la progettazione partecipata rappresenta uno strumento indispensabile per capire le necessità e i desideri dei bambini. Lavorando insieme a loro si segue un percorso che parte dall'osservazione del mondo esterno, passa per l'analisi critica (svolta da loro) e per le proposte individuali di ciascun bambino, fino ad arrivare alla redazione di un progetto finale collettivo e alla costruzione di un plastico che rappresenta, in questo modo, la concretizzazione delle loro aspettative».

(Lamedica, 2003, p. 19)

Per il docente, questo processo richiede una duplice cura: sul piano didattico, per offrire strumenti utili all'analisi e alla rappresentazione; e sul piano relazionale, per creare uno spazio di parola autentica. È importante restituire valore alle idee dei bambini, anche quando appaiono fantasiose o inusuali, perché in esse si riflette il loro modo unico di osservare il mondo.

Infine, anche la fase conclusiva del progetto – quella del confronto con tecnici e operatori esterni – richiede un delicato lavoro di mediazione. Da una parte, la voce diretta e genuina dei bambini, che devono saper comunicare le idee avute e il progetto nelle sue parti; dall'altra, l'esigenza di rispettare vincoli e normative, che obbliga a fare i conti con quel che si può o non si può fare. È qui che il ruolo dell'insegnante si è fatto ponte: tra immaginazione e realtà, tra sogno e fattibilità.

2.1 Apprendere la matematica in situazioni autentiche

Oggigiorno sono molte le esperienze che si muovono verso un'integrazione organica tra scuola e contesti territoriali. Queste esperienze rientrano in quel «processo di osmosi tra scuola e realtà esterna che moltiplica le opportunità formative e rivitalizza i contenuti culturali che caratterizzano tradizionalmente il curriculum scolastico» (Castoldi, 2020, p. 135). Sullo sfondo di questo orientamento sono

possibili diverse tipologie di esperienze formative, caratterizzate dal movimento prevalente in questa relazione tra dentro e fuori la scuola. Nel caso qui presentato, ci troviamo in un *movimento da fuori a dentro la scuola*, che identifica «quelle esperienze formative finalizzate allo sviluppo di una cittadinanza attiva da parte dei propri allievi che assumono le opportunità e le risorse del territorio come “palestra” nella quale promuovere queste competenze» (Castoldi, 2020, p. 135). Tali occasioni si configurano cioè come esempi di «apprendimento in situazione, occasioni di educare a una cittadinanza attiva attraverso esperienze di relazione autentica con soggetti e/o problematiche esterne, attraverso sia interazioni dirette, sia mediate dalle nuove tecnologie» (Castoldi, 2020, p. 135). In questo modo, il fuori scuola diventa «una risorsa formativa da portare dentro la scuola, per conferire maggiore vitalità e autenticità ai contenuti di apprendimento» (Castoldi, 2020, p. 135).

Esperienze formative di questo tipo sono in linea con il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese, in cui si invita a privilegiare situazioni autentiche di apprendimento in relazione con situazioni di vita, reali o simulate, e che possono rappresentare per gli alunni sfide «complesse, problematiche, aperte a più soluzioni, nelle quali sperimentare le proprie risorse e svilupparle nell'interazione con gli altri allievi, con l'insegnante e con i diversi soggetti implicati nella situazione posta» (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022, p. 28). Situazioni di questo tipo stimolano «un approccio attivo e partecipativo, teso all'esplorazione, alla sperimentazione, alla progettazione e alla riflessione sull'esperienza didattica» (DECS, 2022, p. 43), contribuendo a formare negli allievi l'attitudine ad effettuare scelte e azioni consapevoli, critiche e costruttive rispetto al proprio contesto di riferimento.

È naturale che anche l'insegnamento della matematica segua, almeno nelle indicazioni istituzionali, questi principi di fondo, e che quindi debba avvenire «in modo tale che gli apprendimenti formali acquistino senso, innescandosi su quelli informali così da creare un legame con la realtà esterna alla scuola» (DECS, 2022, p. 129). Lavorando didatticamente in quest'ottica si sviluppa un atteggiamento positivo nei confronti della matematica fin dalla scuola dell'infanzia, offrendo contemporaneamente all'allievo

«la possibilità di imparare gradualmente ad affrontare con creatività, positività e determinazione situazioni-problema di varia natura, a fare congetture e applicare possibili strategie risolutive, a rappresentarle in diversi modi, a controllare il proprio processo risolutivo, a confrontare la pertinenza dei risultati con la situazione proposta».

(DECS, 2022, p. 137)

3 Alcuni aspetti di didattica della matematica del percorso

Nel progetto qui presentato, la matematica è diventata dunque uno strumento concreto al servizio dell'esperienza: esplorazioni spaziali e costruzione di plastici hanno favorito lo sviluppo di competenze geometriche in modo naturale e motivante, consentendo di lavorare sia sul passaggio dallo spazio al piano e viceversa, sia sulla visualizzazione e i punti di vista.

3.1 Passaggi dallo spazio al piano e viceversa

Per i bambini è fondamentale partire dall'esperienza concreta, vissuta con il corpo. Fin dai primi giorni di scuola, è importante proporre attività percettivo-motorie che li aiutino a conoscere e orientarsi negli spazi che frequentano, sia dentro che fuori dall'aula. Come sottolineato anche in Sbaragli et al. (2023a), queste attività non solo favoriscono l'ambientamento, ma aiutano a sviluppare competenze importanti

come la localizzazione e l'orientamento nello spazio, attraverso un linguaggio sempre più preciso.

La realtà che i bambini vivono è tridimensionale, fatta di oggetti, ambienti e movimenti. Per questo è utile partire dalla geometria 3D, che è quella che loro percepiscono in modo naturale. Sbaragli (2005, p. 35) lo afferma chiaramente: «per i bambini della scuola dell'infanzia risultano più "naturali" modelli ed attività che rientrano nella geometria 3D».

Un buon modo per iniziare a lavorare su questi concetti è costruire plastici e solidi con materiali semplici, come scatole o cartoni. Questo tipo di attività permette ai bambini di ricreare e osservare in scala ridotta spazi conosciuti, come ad esempio l'aula o il giardino. Osservare il plastico dall'alto li aiuta a vedere lo spazio da un altro punto di vista, più distaccato, e li avvicina alla rappresentazione schematica che costituisce un primo passo verso la modellizzazione, favorendo inoltre «un decentramento della prospettiva con cui viene vista, letta e interpretata la realtà» (Sbaragli et al., 2023a, p. 1). È proprio in questo momento che si può introdurre, in modo graduale, la rappresentazione bidimensionale: disegnare una mappa a partire dal plastico osservato dall'alto.

Dal punto di vista linguistico, questo tipo di percorsi stimolano i bambini ad usare termini come *davanti-dietro*, *sopra-sotto*, *vicino-lontano*, e a considerare le proporzioni tra gli oggetti. Questo lavoro di passaggio tra tridimensionale e bidimensionale, tra esperienza concreta e rappresentazione, può continuare anche alla scuola elementare, dove – come dicono ancora Cottino e Sbaragli (2005) – è importante «questo gioco di passaggi», per costruire passo dopo passo una solida base, «una sistemazione e razionalizzazione del sapere geometrico» (Sbaragli, 2005, p. 18).

3.2 Visualizzazione e punti di vista

Un altro aspetto importante dello sviluppo del pensiero spaziale nei bambini è la capacità di vedere le cose da punti di vista diversi. Nella scuola dell'infanzia, questa consapevolezza si costruisce poco alla volta, partendo da esperienze vissute con il corpo e in movimento. I bambini scoprono che, anche se un oggetto rimane lo stesso, la sua forma o disposizione può sembrare diversa in base all'osservatore, e che «da una certa posizione si possono vedere alcune parti degli oggetti, ma altre no, e le cose ci appaiono diverse a seconda di dove ci posizioniamo per guardarle» (Sbaragli et al., 2023b, p. 4). In sostanza, questo tipo di attività aiutano i bambini a capire che il modo in cui si guarda qualcosa ne modifica la percezione: cambiare posizione rispetto a un oggetto o osservare il corpo da diverse angolazioni, possono essere stimoli efficaci per introdurre riflessioni su questi aspetti. Si tratta di una base utile anche per quando passeranno alla rappresentazione grafica.

Anche in questo contesto, il plastico è uno strumento prezioso: osservandolo dall'alto, i bambini cominciano a collegare l'esperienza reale a una visione più astratta. Come si sottolinea ancora in Sbaragli et al. (2023b, p. 5), «solo dopo aver vissuto alcune esperienze tridimensionali "in formato ridotto", i bambini possono passare con più facilità alla lettura, gestione e rappresentazione di una mappa bidimensionale». In questo tipo di attività si iniziano a introdurre anche concetti legati alla misura e alla proporzione. Alcuni bambini notano quanto sono grandi o distanti le cose, altri si concentrano su quante ne devono rappresentare. Tutti però iniziano a costruire, con i loro tempi, una visione più complessa e consapevole dello spazio.

4 Descrizione del percorso

Il percorso didattico, concepito come un percorso di apprendimento esperienziale, ha coinvolto i bambini dalla fase iniziale di osservazione, passando dalla presentazione del progetto finale in Municipio, fino a giungere ai lavori di realizzazione del parco giochi, completato due anni dopo la consegna del progetto.

Fase 1. Osservazione del parco giochi esistente

Il percorso inizia con l'esplorazione del parco giochi della scuola, attraverso un approccio esperienziale e sensoriale. I bambini vengono coinvolti in attività che prevedono l'uso del corpo e dei sensi per entrare in relazione diretta con l'ambiente. Toccano, attraversano, percorrono gli spazi in modo sia libero sia guidato, sperimentando materiali, forme e strutture.

Queste esperienze offrono l'opportunità di esplorare dimensioni, proporzioni e distanze, favorendo una comprensione concreta dello spazio tridimensionale. Attraverso il movimento – correre, arrampicarsi, superare ostacoli – i bambini potenziano le proprie capacità di orientamento spaziale, iniziando a utilizzare un lessico specifico per descrivere le relazioni spaziali: sopra-sotto, dentro-fuori, destra-sinistra, vicino-lontano, davanti-dietro.

Osservazione sensoriale e punti di vista

Il primo approccio alla scoperta dei giochi presenti nel parco avviene anche attraverso stimoli percettivi e motori mirati. A occhi bendati, i bambini esplorano i giochi servendosi del tatto, cercando di riconoscerne materiali e forme attraverso i dettagli.

Un'attività successiva consiste nel gioco del "compagno guida" (Figura 1). Un bambino, bendato, deve superare un ostacolo o affrontare un percorso, mentre il suo compagno, posizionato in un punto differente, gli dà indicazioni spaziali per guidarlo. Le indicazioni sono legate a termini spaziali come "avanti", "destra", "sinistra", "sali", "scendi", "dietro". Questo esercizio permette di sviluppare la capacità di ascoltare e interpretare le indicazioni spaziali, ma anche la consapevolezza della posizione nel percorso, e stimola un forte legame tra il linguaggio spaziale e il movimento fisico.



Figura 1. Giochi percettivi: riconosco il gioco al tatto e il materiale. Spiego al mio compagno cosa deve fare per affrontare e superare il gioco.

Successivamente, l'attenzione si sposta sull'osservazione da diversi punti di vista. I bambini scoprono come gli oggetti cambino aspetto a seconda della posizione dell'osservatore: alcune parti diventano visibili, altre si nascondono.

Un'attività particolarmente significativa è quella di scattare fotografie da diverse angolazioni e, in un secondo momento, identificare il punto di scatto (Figura 2). Questo esercizio rafforza la consapevolezza che la percezione dello spazio varia in base alla prospettiva, e che ogni punto di vista offre una rappresentazione diversa della realtà.



Figura 2. Il gioco osservato da più punti di vista: le fotografie mostrano come cambia l'aspetto dell'oggetto a seconda della posizione da cui lo si guarda.

Rappresentazione spaziale

I bambini vengono invitati ad osservare il parco giochi da più punti di vista: seduti vicino al cancello d'entrata, dal muretto, dalle finestre del piano terra e da quelle del piano superiore. Ogni posizione offre una visione diversa: a volte si riescono a vedere le scale dello scivolo, altre no, perché alcuni elementi strutturali restano nascosti dietro ad altri.

L'attività osservativa è stimolata dalle seguenti domande esplorative: «Cosa notiamo? Quali elementi caratteristici si vedono da una certa angolazione, e cosa invece manca? Perché?». I bambini disegnano il parco giochi come prima attività: nasce così l'esigenza di lasciare una traccia dei giochi sul prato. Lavorando in piccoli gruppi, utilizzano una scatola per rappresentarlo (Figura 3), che diventerà poi il primo modello di plastico.



Figura 3. Rappresentazione grafica del parco giochi all'interno di una scatola di cartone: primo plastico condiviso, realizzato in piccoli gruppi di 2-3 bambini.

Durante gli scambi di osservazioni e la visione delle prime rappresentazioni nasce una prima richiesta. I bambini si accorgono che, dal primo piano della scuola, si riesce a vedere il parco giochi dall'alto e ne notano la forma: «È come una L», dicono. La scatola utilizzata in precedenza, però, non corrisponde alla forma reale del parco che si vuole modellizzare. Così, insieme ai bambini, si percorre a piedi tutto il confine del nostro parco giochi (Figura 4) per capire cosa si intende per "contorno": ciò che delimita lo spazio dentro cui si dovrà posizionare o ricreare il plastico.



Figura 4. I bambini percorrono in fila tutto il contorno del parco giochi per comprenderne la forma e i confini reali.

Successivamente si sceglie la scatola più adatta per rappresentare il parco giochi in uno spazio delimitato. I bambini propongono che debba avere la forma di una "L", proprio come il contorno del parco visto dall'alto. Non si trovano subito scatole con quella forma, ma vengono recuperate alcune grandi scatole per torte con coperchio. Si inizia così a trasformarle: si ritagliano le parti superflue e, utilizzando altri pezzi di cartone, si incolla e si ricrea il "contorno" dello spazio da rappresentare. Alla fine, si ottiene una struttura a forma di "L", simile a due rettangoli uniti, proprio come il parco giochi (Figura 5).

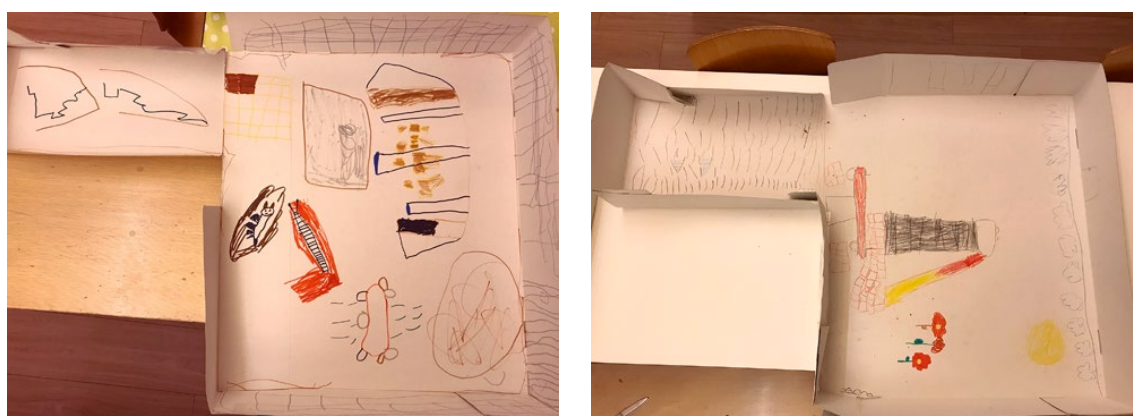


Figura 5. Due esempi di scatole adattate a forma di "L", con le rappresentazioni del parco giochi realizzate da piccoli gruppi di lavoro (2-3 bambini).

Fase 2. Progettazione tridimensionale e modellazione

In questa fase, ai bambini viene spiegato che l'obiettivo è costruire un plastico, cioè un modello in scala ridotta del parco giochi, ma con elementi tridimensionali che riproducano i giochi presenti nella realtà. Si comunica loro che possono utilizzare scatole di varie dimensioni e altri materiali per modellare e creare i giochi nel plastico. I bambini hanno a disposizione diversi materiali riciclati e scatole ricoperte con carta da pacco.

La progettazione tridimensionale stimola i bambini a riflettere su quali materiali e forme siano più adatti per rappresentare gli oggetti all'interno del plastico. Si inizia con esperimenti pratici, accostando i materiali per creare modelli di giochi che siano proporzionati e significativi. In questo modo, i bambini sviluppano una maggiore comprensione delle dimensioni, delle proporzioni e della spazialità. L'approccio iniziale è molto libero: i bambini provano a creare diversi elementi senza restrizioni precise, esplorando materiali e cercando di rendere il plastico il più rappresentativo possibile.

Un momento significativo di questa fase è quando i bambini, posizionati all'esterno, di fronte al parco

giochi reale, cercano di riprodurre la disposizione degli elementi nel plastico. Alcuni bambini posizionano direttamente la costruzione sopra il disegno che avevano realizzato precedentemente, mentre altri partono dalle scatole vuote, integrando e rappresentando graficamente alcuni dettagli che non avevano potuto costruire fisicamente con le scatolette. Questo confronto tra pari stimola il dialogo e la riflessione su come le proporzioni e gli spazi si adattino ai modelli realizzati.

Il plastico comincia a prendere forma e diventa tridimensionale. Durante il processo, emerge una difficoltà significativa legata alle dimensioni. Infatti, alcuni giochi risultano troppo grandi rispetto allo spazio disponibile nel plastico, occupando l'intera scatola. In questa fase, i bambini si rendono conto che, per farci stare tutti gli elementi strutturali (i giochi tridimensionali), occorre rivedere le proporzioni e adattare i modelli. Alcuni decidono di mantenere la rappresentazione grafica dei giochi e inserire solo alcuni elementi strutturali tridimensionali per rendere il plastico più equilibrato (Figura 6a).

Questa fase, dunque, non solo rappresenta una sfida materiale, ma offre ai bambini l'opportunità di esprimere la loro creatività, risolvere problemi pratici insieme agli altri e comprendere meglio come le dimensioni e gli spazi influenzano la progettazione e la realizzazione di un ambiente tridimensionale (Figura 6b).

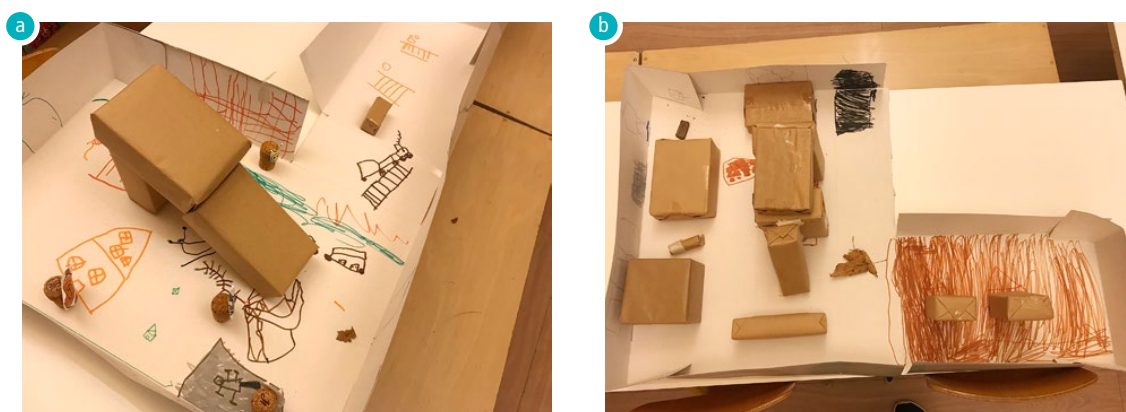


Figura 6. a) Scivolo costruito in 3D, con mantenimento delle rappresentazioni grafiche per gli altri giochi; b) Più elementi inseriti nel plastico, con un maggiore rispetto delle proporzioni.

Fase 3. Giochi spaziali: inserimento degli elementi-gioco nel plastico

Il lavoro prosegue con alcune attività all'aperto, volte a rafforzare la comprensione delle posizioni nello spazio. I bambini osservano il posizionamento di un personaggio rispetto a un gioco-ostacolo, per cogliere le diverse relazioni spaziali: davanti, dietro, vicino, sotto, sopra. Successivamente, si porta questo gioco anche dentro il plastico.

Si utilizzano piccoli personaggi, costruiti insieme ai bambini con turaccioli trasformati in animali, che si "nascondono" nel parco giochi. La docente ne posiziona uno nel parco reale, senza farlo vedere, e contemporaneamente un altro nel plastico (Figura 7). I bambini devono individuare dove si trova nel parco, osservando il plastico e confrontandolo con la realtà.



Figura 7. La docente utilizza il plastico come strumento per aiutare i bambini a ritrovare il personaggio nascosto nel parco reale, posizionando al suo interno un secondo personaggio nello stesso punto.

Questa attività diventa un gioco tra pari: i bambini si alternano nel nascondere i personaggi e nel dare indizi. Per aiutarsi, utilizzano indicazioni verbali come: «È vicino allo scivolo», «Guarda sotto la torre», «È dietro alla barca». Il confronto tra il plastico e il parco reale stimola riflessioni continue: «Ma qui manca la scaletta!», «Non capisco qual è la torre nel plastico...», «Forse dovremmo costruirlo meglio!».

Inizia così un processo di modifica e arricchimento del plastico: alcuni elementi vengono ricostruiti in modo più preciso, più simili alla realtà. I bambini comprendono che è fondamentale riconoscere ogni “scatoletta” e associarla chiaramente a un gioco vero, altrimenti diventa difficile orientarsi. La difficoltà più grande è legata agli oggetti rappresentati in modo troppo semplificato: non sempre una scatoletta basta a “raccontare” un gioco complesso come una torre o un’altalena.

Alcuni gruppi che avevano scelto una rappresentazione prevalentemente bidimensionale (solo con disegni) si sono trovati in difficoltà: non riuscivano a posizionare correttamente i personaggi nel plastico, soprattutto quando dovevano essere “nascosti sotto” o “dietro” a un gioco. Questo ha fatto emergere chiaramente i limiti del bidimensionale rispetto al tridimensionale.

L’attività ha portato a nuove modifiche: alcuni elementi sono stati ricostruiti in 3D, con maggiore cura e attenzione, per rendere il plastico più leggibile e vicino alla realtà del parco. Il gioco è così diventato più significativo e stimolante, anche grazie alla capacità dei bambini di trovare soluzioni, di mettersi d’accordo e di osservare con attenzione lo spazio che li circonda.

Fase 4. Costruzione dei giochi esistenti con materiale di fortuna

L’entusiasmo cresce, soprattutto nel gruppo dei bambini più grandi, che subito stabiliscono: «I giochi devono essere più simili a quelli veri!». Da qui parte una nuova fase creativa: ogni gioco presente nel parco viene osservato con attenzione e poi ricostruito utilizzando scatolette, cartone, legnetti, cordicelle e altri materiali di fortuna (Figura 8).



Figura 8. Laboratorio allestito per la costruzione dei giochi in 3D: i bambini utilizzano materiali di recupero per modellare strutture simili a quelle reali presenti nel parco.

Durante questa fase emerge una forte componente narrativa: ogni elemento del plastico prende vita anche attraverso le parole dei bambini, che accompagnano la costruzione con racconti personali e descrizioni ricche di significato: «A questo scivolo ho fatto gli scalini, però non so se sono proprio lo stesso numero...» (Figura 9a), «Sull'altalena ci siamo io e il mio amico S. che possiamo andare veloci, vedi che ho fatto la corda che si muove?» (Figura 9b).

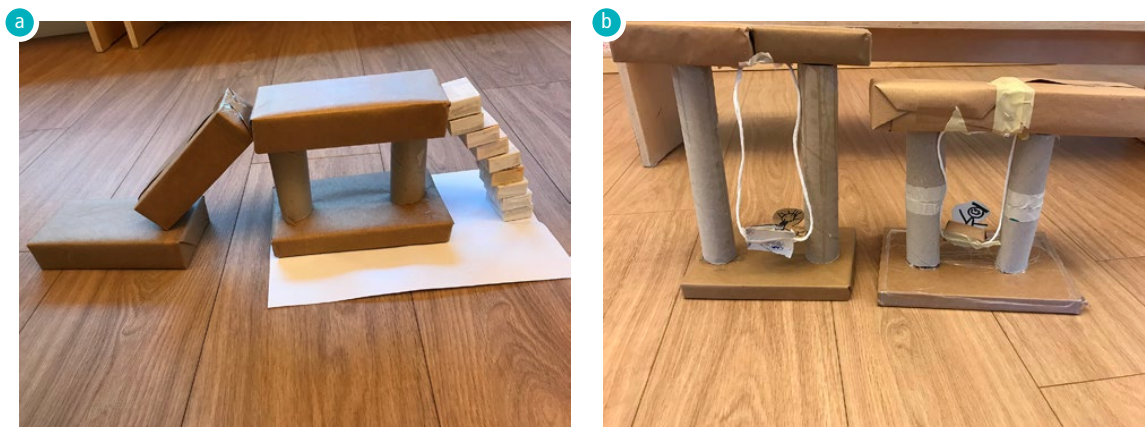


Figura 9. a) Scivolo; b) Altalene.

Ogni gioco costruito non è solo un oggetto, ma una piccola storia, un frammento di esperienza reale trasformato in modellino. L'attenzione ai dettagli cresce, e con essa anche la complessità delle costruzioni (Figura 10).



Figura 10. Alberi, bilzo-balzo, nave.

Proprio questa ricerca di realismo porta a una nuova difficoltà: i giochi, ora così ricchi e precisi, diventano troppo grandi. Il loro ingombro supera i limiti del plastico in cartone. Le scatole utilizzate fino a questo momento non bastano più. I bambini si trovano quindi ad affrontare una nuova situazione-problema: come fare a ricostruire il parco giochi se gli elementi non ci stanno più?

La discussione è aperta e stimolante: occorre trovare una nuova soluzione, forse un plastico più grande, forse una nuova modalità di rappresentazione. La sfida continua.

Fase 5. Il piano di lavoro – plastico

Il passo successivo prevede un'espansione del plastico iniziale: i bambini si trovano a dover creare un modello su due tavoli disposti a forma di "L", per rendere il progetto ancora più realistico e dettagliato. La difficoltà è concreta, ma la determinazione non manca. Gli operai comunali, che con grande pazienza contribuiscono alla realizzazione, costruiscono due tavoli di lavoro. Il compito che spetta ai bambini è chiaro: posizionare i tavoli e formare la "L" (Figura 11).

I bambini si trovano a dover affrontare difficoltà, confrontare le loro idee, misurare con il metro. Nonostante le buone intenzioni, orientare i tavoli nella giusta direzione si rivela una vera sfida. L'utilizzo del metro si rivela più un'occasione di gioco che uno strumento realmente funzionale alla misurazione: i bambini lo impiegano per tracciare, indicare e confrontare, divertendosi a esplorare lo spazio. Sebbene l'uso non sia tecnicamente corretto, diventa comunque un prezioso pretesto per familiarizzare con i numeri, verbalizzarli e leggerli.

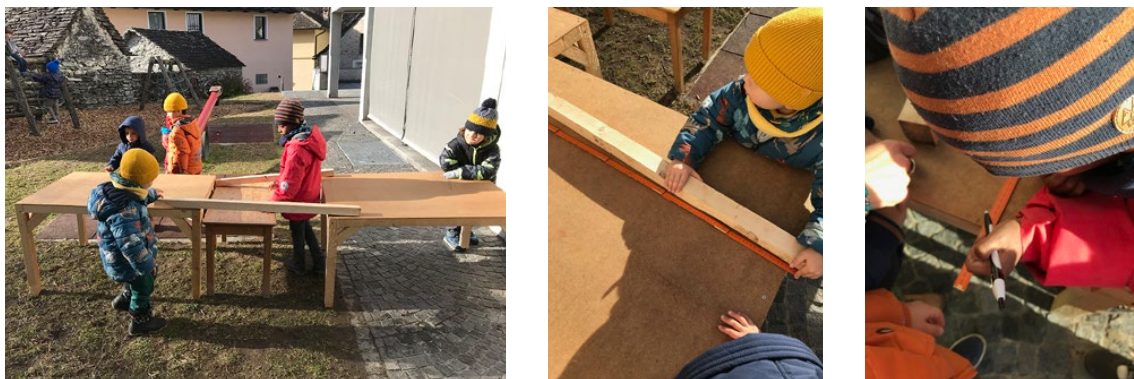


Figura 11. Momento in cui i bambini orientano e misurano i tavoli per costruire il piano di lavoro a forma di "L".

«Ma non è una L!» esclama una bambina, notando con grande attenzione che il risultato non corrisponde proprio a quello che avevano definito inizialmente. Nonostante gli sforzi, la forma non è ancora perfetta.

Dopo varie prove, si aggiunge un tavolino di fortuna, e finalmente il piano di lavoro prende la forma immaginata: a forma di "L" (Figura 12).

Anche se non è perfetta, la base per il plastico ora è verosimile, e i bambini possono finalmente iniziare a posizionare i giochi in maniera più accurata, risolvendo, passo dopo passo, le problematiche che emergono.



Figura 12. Si trova una soluzione per formare un piano di lavoro a forma di "L".

Posizionare i modelli costruiti diventa un gioco di condivisione, di espressione creativa e di risoluzione comune del problema (Figura 13). Si discute, si sposta, si osserva l'ambiente esterno (anche se a questo punto quasi tutti i bambini sanno le posizioni dei giochi esterni a memoria). Questa attività favorisce la comprensione delle proporzioni e delle relazioni spaziali.



Figura 13. I bambini posizionano i modellini dei giochi.

Un problema assilla i bambini: il plastico è stato allestito all'esterno (Figura 14a), e se cominciassero a piovere o se il vento facesse volar via tutto? Che fare? I bambini trovano come prima soluzione quella di fare una foto per ricordarci bene come poter riposizionare i giochi. Per proteggere tutto il plastico, presto capiscono di dover affrontare anche il problema di dover spostare il tutto dentro la scuola. Ai bambini si chiede di lasciare traccia dei differenti giochi sulla carta, e si decide di fare il contorno della parte appoggiata (Figura 14b). Questo ci permetterà di togliere gli elementi per proteggerli dal brutto tempo o dal vento e di ritrovare la posizione stabilita per un'ulteriore attività futura, eventualmente anche all'interno.

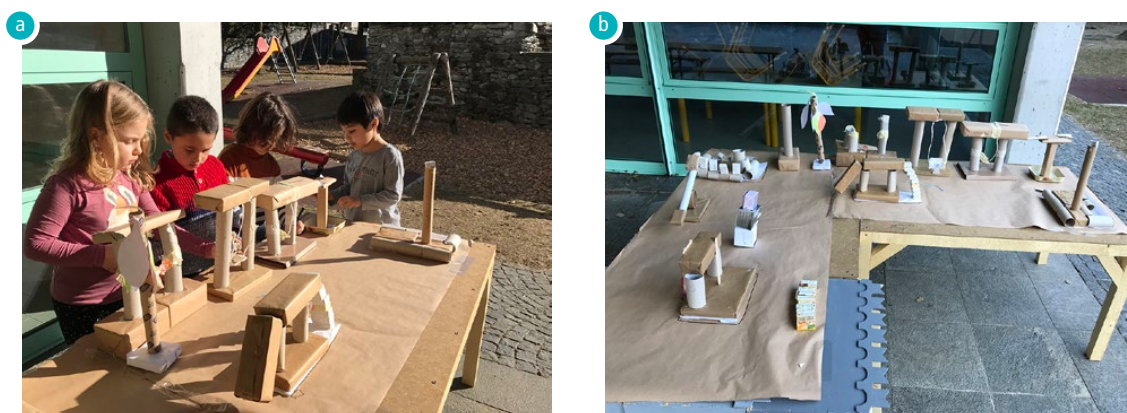


Figura 14. a) Il plastico completo; b) I bambini lasciano traccia (contorno) dei modellini dei giochi sul foglio.

Fase 6. Elaborazione di una mappa e verifica

Attraverso il contorno degli elementi posizionati, i bambini sviluppano una rappresentazione cartografica del parco giochi.

Lasciando la traccia degli elementi con il pennarello nero i bambini scoprono un nuovo disegno. Quando si tolgono gli elementi, i bambini si accorgono che il foglio è come una mappa (Figura 15)! Si chiede loro se sanno dire cosa c'era posizionato sopra, se sanno ritrovarsi sulla mappa.



Figura 15. Il contorno delle scatole lasciato sulla carta fa pensare a una mappa.

Lo spazio di lavoro si è trasformato: la mappa (un grande foglio di carta pacco con i contorni dei giochi disposti al suo interno) viene spostata nella sezione al piano superiore, cambiando ancora una volta la visione del parco giochi. Ora, per ricostruire il plastico, i bambini devono osservarlo da un nuovo punto di vista. Riconoscere le figure (rettangoli) lasciate sulla carta non è così immediato. Alcuni elementi del parco giochi sono stati realizzati e incollati su cartoncino per dare maggiore stabilità, ma così i contorni dei singoli "giochi", tracciati con il pennarello, appaiono molto simili tra loro. Questo porta a un confronto tra i bambini, che arrivano alla conclusione che la foto scattata nella fase precedente possa rivelarsi utile. Per verificare la corretta posizione dei giochi sulla "nuova mappa", viene invitato un operatore esterno esperto nell'uso del drone (Figura 16). Spiega ai bambini il funzionamento della telecamera e le diverse possibilità che offre. Si scopre che può scattare foto dall'alto e, allo stesso tempo, trasmettere in diretta tutto ciò che riprende. Si approfitta dell'occasione per giocare: i bambini si muovono nello spazio del parco giochi, osservano come il drone li filma e provano a nascondersi per non farsi vedere. Alcuni bambini capiscono subito che basta mettersi sotto un tavolo o sotto lo scivolo per sparire dall'inquadratura, mentre altri corrono a nascondersi dietro lo stabile. Quando si riguarda il filmato, si scopre che chi ha scelto di correre dietro l'edificio è stato ripreso per tutto il tempo, rendendosi conto che il drone, dall'alto, vede ogni movimento. Insieme si verbalizza quanto osservato: dall'alto il drone può vedere tutto, tranne ciò che si trova sotto un oggetto.



Figura 16. I bambini ascoltano le spiegazioni e seguono il drone.

Fase 7. Verifica e nuova mappa

Con l'aiuto del drone, i bambini hanno osservato il parco giochi dall'alto, confrontando la loro mappa con la realtà. Questa fase ha permesso loro di verificare le proporzioni e la disposizione dei giochi, sviluppando competenze di orientamento e rappresentazione grafica. La visione dall'alto ha consolidato la loro comprensione dello spazio, in linea con le indicazioni riguardo alla mappatura come strumento educativo per il pensiero spaziale nei bambini.

Si proiettano ora le immagini del drone su una parete (Figura 17a), permettendo ai bambini di confrontare la loro mappa con la realtà e di riprodurre gli elementi mantenendo le giuste proporzioni. Tuttavia, la proiezione su una superficie verticale rende il gesto grafico più complesso. Per facilitare il lavoro, la proiezione viene abbassata a livello dei bambini, in modo che possano tracciare direttamente il calco degli elementi del parco giochi (Figura 17b). Questo permette un confronto visivo chiaro e un momento di scambio comune.

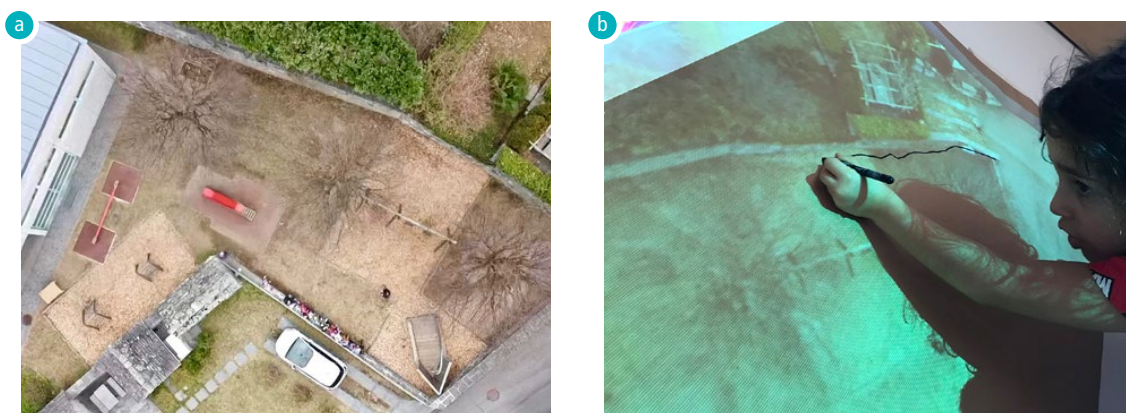


Figura 17. a) La fotografia dall'alto fatta con il drone diventa una nuova mappa;
b) Proiezione su un piano orizzontale, che facilita il ricalco dei contorni.

Il confronto tra la prima mappa, quella realizzata ricostruendo i giochi con solidi, e la nuova, basata sulla proiezione dell'immagine fatta dal drone, suscita diverse riflessioni. Il primo passo è individuare il contorno dell'intero parco giochi. Osservando la vista dall'alto, i bambini notano i sagomati che delimitano le zone di gioco e li riproducono. Si accorgono che alcuni giochi, come il bilzo-balzo, le altalene e lo scivolo, appaiono spesso come semplici linee.

A questo punto, il lavoro si concentra sul nuovo punto di vista: la visione dall'alto, che rappresenta una sfida complessa per bambini di questa fascia d'età. La nuova mappa permette di valutare le distanze tra i vari giochi e lo spazio che occupano nel piano. Ora si ha una base su cui lavorare per il progetto finale.

Fase 8. Giochi di orientamento spaziale: dal plastico alla nuova mappa, e viceversa

L'attività inizia con il posizionamento di un personaggio nel plastico: prima viene collocato fisicamente nello spazio e poi segnato sulla nuova mappa, quella ottenuta dalla fotografia del drone, e viceversa. Questo esercizio aiuta i bambini a sviluppare la capacità di orientarsi tra la rappresentazione tridimensionale e quella grafica.

Quando il personaggio inizia a muoversi nel plastico, il suo percorso viene seguito con attenzione. Un bambino lo guida fisicamente, lasciando dietro di sé un filo colorato che disegna il tragitto. Intanto, un compagno ascolta e trasforma le indicazioni verbali in segni sulla nuova mappa plastificata, cercando di riprodurre fedelmente il percorso raccontato (Figura 18). In questo passaggio, i bambini iniziano a usare termini precisi per descrivere lo spazio: «Gira attorno all'albero», «Va' sotto lo scivolo», «Sale sopra la torretta», «Si nasconde dietro la barca».



Figura 18. Un bambino muove il personaggio nel plastico lasciando una traccia con il filo lungo il percorso, mentre l'altro, ascoltando le indicazioni, cerca di disegnarlo sulla mappa con il pennarello.

Il filo rappresenta una verifica concreta e immediata: permette di confrontare la traccia lasciata sulla mappa con il percorso effettivamente svolto nel plastico. Certo, non mancano le difficoltà: infilare il filo sotto uno scivolo, salire su una torretta o fare lo slalom tra gli alberi richiede pazienza e precisione. A volte i giochi si spostano, perché non sono incollati, e il percorso rischia di cambiare forma. Ma anche questo fa parte dell'esperienza: si aggiusta, si riprova, si cerca insieme la soluzione. Se lo spazio lo consente, si consiglia di realizzare un plastico più stabile o di fissare alcuni elementi, per rendere il tracciamento più accurato e agevole.

Questa attività non solo aiuta i bambini a rappresentare e comprendere lo spazio, ma li mette anche di fronte a difficoltà pratiche che devono affrontare e risolvere insieme, favorendo il lavoro di squadra e la consapevolezza spaziale. Per i bambini è più semplice individuare e indicare con sicurezza sulla mappa il punto di partenza (A) e quello di arrivo (B) piuttosto che descrivere nel dettaglio il percorso intermedio, ossia la "strada" tracciata dal filo, con tutte le sue tappe e svolte. La presenza chiara dei due punti di riferimento – inizio e fine – rappresenta per loro un ancoraggio rassicurante: sapere di arrivare nel posto giusto, anche senza riuscire a spiegare ogni passaggio, li sostiene e incoraggia a riprovare e migliorare.

Fase 9. Selezione dei nuovi giochi

A questo punto si lavora sulla nuova mappa risultato della proiezione della foto scattata con il drone. Ora manca solo l'inserimento delle nuove idee di gioco. I bambini si mettono al lavoro con una ricerca mirata, sfogliando riviste specializzate, esplorando il web e raccontando esperienze vissute in altri parchi. Con entusiasmo, condividono ciò che li ha colpiti di più: un bambino descrive una torre su cui si sale e che gira velocemente, un altro sogna una casetta sull'albero dove rifugiarsi, mentre qualcuno ricorda un percorso sensoriale che lo ha affascinato (Figura 19).



Figura 19. I bambini spontaneamente raffigurano ciò che desiderano.

Inizia a questo punto una nuova fase progettuale. Supportati da cataloghi e immagini online (Figura 20), i bambini esprimono le proprie preferenze: castelli, treni, altalene, case sull'albero, percorsi sensoriali. Qualcuno stila liste personali, altri lavorano in piccoli gruppi, confrontandosi su cosa li attira e con chi potrebbero giocareci.³ La selezione si fa via via più articolata: i giochi vengono ritagliati, osservati, messi a confronto, combinati fra loro. Ma il numero delle proposte è davvero elevato e ognuno vorrebbe vedere accolte le proprie scelte.



Figura 20. Ricerca su cataloghi e ritagli di possibili nuovi giochi da esterno da inserire nel parco: i bambini selezionano, ritagliano e organizzano i giochi trovati, suddividendoli per categorie.

Nasce una nuova sfida: ridurre e selezionare. Si spiega allora ai bambini che i giochi scelti saranno strutture stabili, fissate al terreno da operai specializzati, capaci di valutare anche l'idoneità rispetto all'età dei bambini della scuola dell'infanzia.

Per sostenere questo momento di scelta e orientare meglio i desideri, viene proposta un'uscita di studio per confrontare altre realtà vicine alla nostra. I bambini vivono e sperimentano nuovi spazi gioco, osservano con attenzione, si confrontano tra loro e portano nel gruppo idee e suggestioni (Figura 21). Si avvia così una nuova fase: i bambini progettano giochi che conoscono bene, che hanno sperimentato in altri contesti. Osservano immagini più dettagliate, si confrontano con modelli reali, cercano soluzioni più concrete. Provano a riprodurre alcune strutture, anche complesse, ispirandosi a ciò che hanno visto e vissuto.



Figura 21. Uscita e sperimentazione di nuovi giochi che potrebbero piacere ai bambini, osservando da vicino strutture e modalità di gioco da portare nel progetto.

3. In questo video <https://vimeo.com/1097360043/f17fb97a2b?share=copy> si può osservare il processo con cui un bambino elenca gli elementi del parco giochi segnando con numeri quelli presenti, con "X" quelli da rimuovere o inesistenti e con il segno di spunta ("✓") quelli già presenti.

I bambini iniziano a costruire i modelli tridimensionali dei giochi selezionati, utilizzando materiali di recupero: scatolette, rotoli di cartone, fili, legnetti. Questo passaggio permette loro di dare forma concreta alle loro proposte, sperimentare soluzioni creative e immaginare il futuro parco giochi in modo tangibile (Figure 22a e 22b).

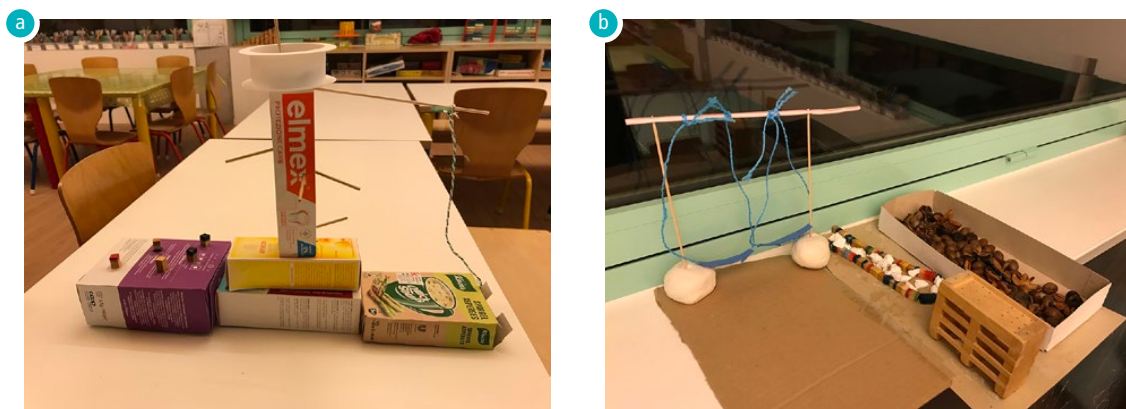


Figura 22. a) La nave con l'albero e la torretta con la carrucola per trasportare acqua e sabbia; b) Altalene e il percorso sensoriale, con la torretta per arrampicarsi.

Fase 10. Progetto da consegnare e presentare al Municipio

Il lavoro prende forma a più mani, ed è costruito nel tempo grazie alle idee, ai desideri e alle preferenze emerse durante il percorso.

La base del progetto da consegnare e presentare al Municipio è un grande cartellone di carta da pacco, su cui viene tracciato il contorno in scala del parco giochi, ottenuto dalla proiezione della foto con il drone. Lo spazio interno al contorno rappresenta il limite entro cui muoversi, un vincolo che guida ma anche stimola la creatività. I bambini, in piccoli gruppi, selezionano immagini ritagliate da cataloghi o disegnano i giochi che desiderano. Insieme li posizionano sul cartellone, discutendo su dove metterli, quale gioco accostare a un altro, come riempire lo spazio a disposizione (Figura 23).



Figura 23. Posizionamento dell'immagine del gioco direttamente sulla mappa disegnata precedentemente.

È un momento di confronto e contrattazioni. Non è facile trovare immagini della giusta misura, né orientarle correttamente rispetto alla mappa (Figura 24a): spesso i bambini preferiscono la spontaneità del gesto. E le distanze? Per loro non sono un problema. I giochi prendono posto più per vicinanza emotiva che per esigenze tecniche.

Il compito dell'insegnante è quello di raccogliere il materiale selezionato insieme ai bambini e cercare di riorganizzarlo in una versione più leggibile da allegare alla proposta ufficiale da inviare al Municipio (Figura 24c). Ma la mappa creata dai bambini resta quella più vera: è il risultato di un processo collettivo, nato dal confronto, dall'immaginazione e dalla gioia di progettare insieme uno spazio da vivere (Figura 24b).

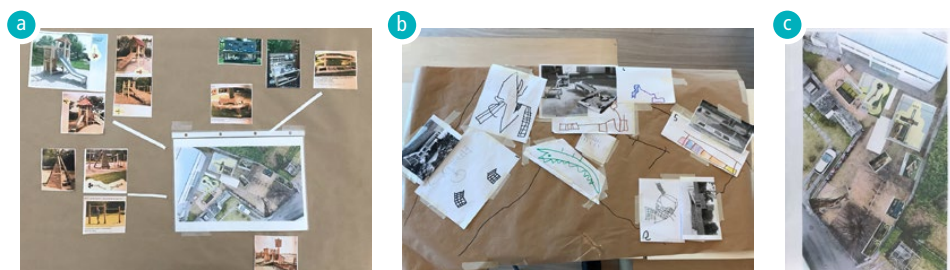


Figura 24. a) Ritagli di giochi selezionati dai bambini; b) La piantina creata spontaneamente dai bambini; c) Mappa ricreata dalla docente con il contributo dei bambini.

I bambini preparano una lettera per invitare gli esperti del Municipio a scuola (Figura 25). È una lettera semplice, scritta insieme, per chiedere di venire a vedere il progetto del nuovo parco giochi.

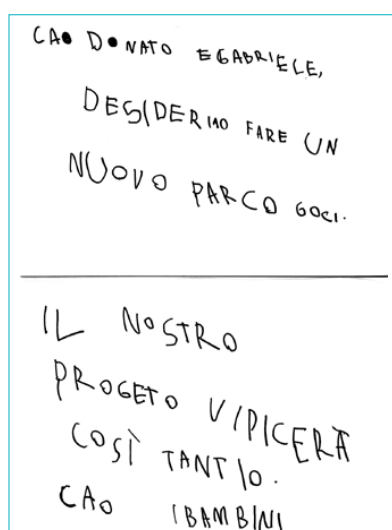


Figura 25. Lettera scritta dai bambini per invitare gli esperti del Municipio in sezione.

E quando finalmente arriva il momento di presentare la loro mappa, l'entusiasmo si accende. I bambini raccontano con orgoglio tutto il percorso fatto: le scelte, le idee, i disegni, i giochi ritagliati e sistemati con attenzione sul grande cartellone. Ognuno vuole dire qualcosa, ricordare un passaggio, mostrare il proprio contributo. È un momento speciale, condiviso, in cui il loro lavoro prende voce e spazio, pronto a essere ascoltato davvero.

Sapendo che l'intervento complessivo sul parco giochi si sarebbe affrontato più avanti – perché, si sa, le decisioni in Municipio devono essere prima valutate e approvate – viene comunque accolta una richiesta espressa da alcuni bambini durante il percorso: quella di poter coltivare, giocare con la terra, scavare e fare esperienze sensoriali. Per fortuna, si tratta di un desiderio facilmente realizzabile in tempi brevi, e che può essere subito risolto grazie all'intervento degli operai comunali.

Su indicazione del Municipio, gli operai si mettono al lavoro e, entro la fine dell'anno, realizzano per i bambini delle fioriere da inserire nel nuovo progetto (Figura 26a).

Questo intervento permette di dare forma a un piccolo sogno: avere a scuola un angolo verde con erbe profumate. I bambini si prendono cura di sistemare nelle cassette apposite le piantine di rosmarino, salvia, menta e timo, segnando un primo passo del loro grande progetto (Figura 26b).

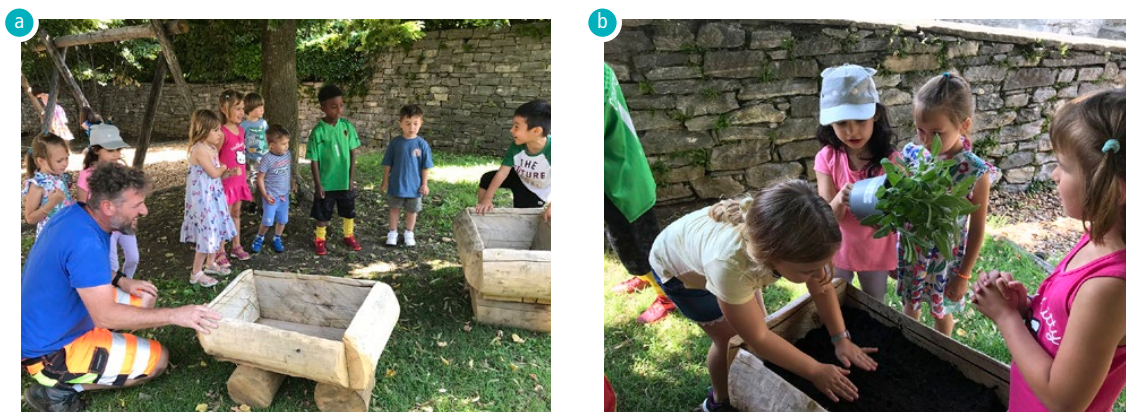


Figura 26. a) I bambini esplorano le cassette di legno e comprendono che serviranno per contenere le piantine profumate; b) I bambini collaborano nel trapianto delle erbe aromatiche all'interno delle cassette.

Un anno dopo...

L'attesa è stata lunga. I bambini si aspettavano l'inizio dei lavori già dopo il lungo periodo di vacanze estive. Ma le decisioni in Municipio, si sa, richiedono tempo e coinvolgono molti attori. La richiesta è stata valutata da diversi esperti e, dopo aver consultato una ditta specializzata in giochi per bambini, i lavori sono iniziati a novembre dell'anno successivo. Solo alcuni bambini, quelli che nell'anno di svolgimento del progetto avevano 3 anni, hanno potuto vedere realizzato pienamente il loro desiderio. Altri lo hanno osservato da lontano, passando la sera a vedere i lavori, ormai già in prima o seconda elementare.

L'emozione al momento dei lavori è stata grandissima. Dapprima gli scavi, con piccole ruspe, poi la grande gru che ha posato la torre proprio sotto i loro occhi (Figure 27a e 27b). E poi, uno dopo l'altro, lo scivolo, le altalene e il cestone. Il cocodrillo, desiderio di un bambino, è stato inserito come piccolo dondolo per i più piccolini.

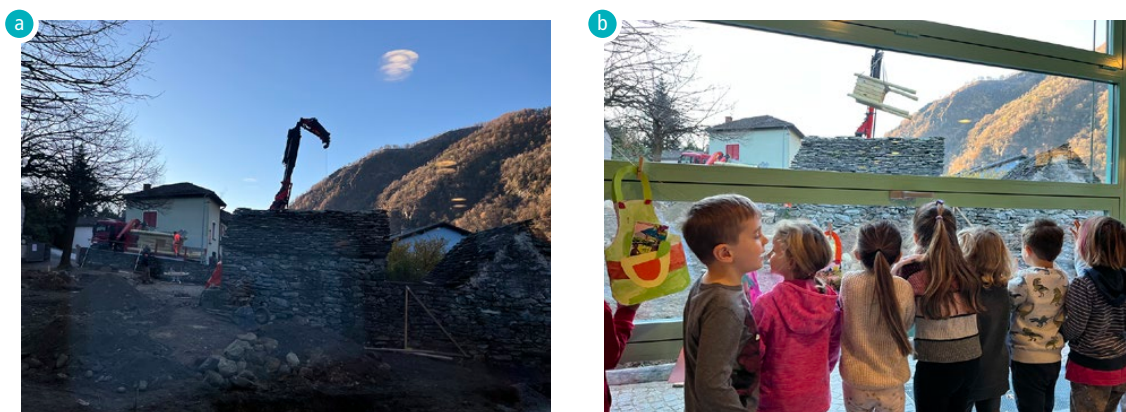


Figura 27. a) Gli scavi e il lavoro della gru; b) I bambini felici commentano l'arrivo dei giochi.

Per questioni legate al dislivello e alle distanze dal muro non è stato possibile realizzare la casa sull'albero; al suo posto, sono state inserite due grandi torri collegate da un ponte sospeso e da mura con all'interno dei rifugi che fungono da nascondigli. Ci sono le palestre per scalare le torri, una rete per arrampicarsi e un palo da pompieri per scendere (Figure 28a e 28b).

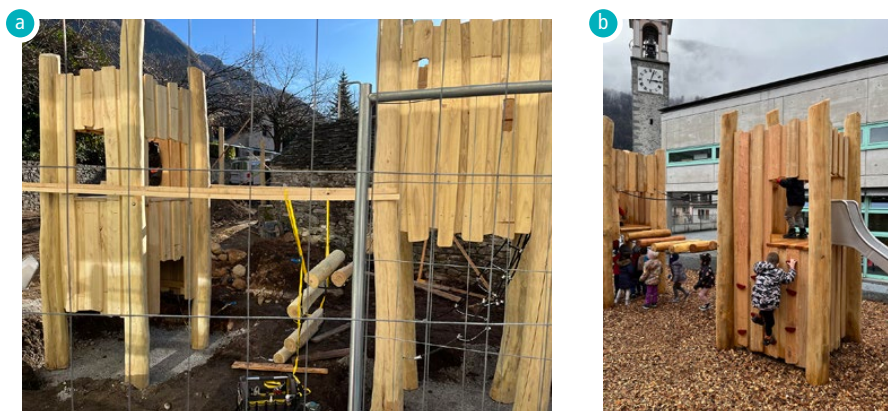


Figura 28. a) La sistemazione dei giochi; b) Prima uscita e prime scoperte.

Tutti i desideri dei bambini sono lì: ci sono anche gli orti sospesi con le erbe profumate che tanto desideravano alcuni di loro. Le aiuole, già predisposte nel giardino, sono ora parte integrante del progetto: ospitano le piantine aromatiche che crescono anno dopo anno, diventando un riferimento stabile e vivo nel parco. Arriverà a breve il gioco della sabbia, le panchine ricavate da un tronco gigante e, per finire, un piccolo orto didattico.

Un vero parco in cui sperimentare nuove conoscenze e passare un bel momento in felicità. I bambini lo adorano, e anche le famiglie vivono con partecipazione quello che è divenuto un luogo di feste, di gioco, in cui tutto il truciolo a terra infonde calma e tranquillità alle maestre e ai genitori che sanno che anche un piccolo inciampo è un rialzarsi e una nuova partenza!

5 Conclusioni e sviluppi futuri

L'intero percorso ha aiutato i bambini a prendere confidenza con lo spazio in tanti modi diversi: dai giochi con gli elementi esterni, alla costruzione dei plastici, alla realizzazione della mappa arricchita da disegni, fino alla presentazione del progetto. Hanno iniziato a raccontare, rappresentare e trasformare lo spazio con uno sguardo nuovo.

Si è lavorato molto sul punto di vista, osservando come cambia il mondo se ci spostiamo, se lo guardiamo dall'alto oppure se ci decentriamo – usando un personaggio esterno nel plastico, e noi stessi nello spazio reale.

In modo spontaneo, sono emersi concetti legati all'orientamento, alla proporzione e alla misura – anche se quest'ultima è rimasta un po' sullo sfondo, più come intuizione che come oggetto esplicito. Si è provato a capire come si costruisce un ambiente coerente, cosa vuol dire progettare pensando alle esigenze di tutti.

Il progetto ha mostrato come la matematica, intrecciata all'esperienza concreta e al vissuto dei bambini, possa diventare non solo uno strumento di apprendimento, ma anche un mezzo per osservare il mondo da prospettive nuove.

Il momento conclusivo, con la presentazione del progetto al Municipio e alla direzione scolastica, è stato una vera occasione di condivisione e valorizzazione. I bambini hanno mostrato capacità di pianificazione, comunicazione e collaborazione, diventando protagonisti attivi di un processo di crescita che li ha coinvolti su più piani: cognitivo, relazionale e creativo.

Guardando al futuro, questo tipo di esperienza può aprirsi a nuovi sviluppi, come la creazione collaborativa di una guida per “bambini progettisti”, utile ad altri contesti educativi che vogliano intraprendere un percorso simile: un quaderno di progetto dove raccogliere esperienze, soluzioni creative, materiali utilizzati e difficoltà incontrate, trasformando l’attività vissuta in uno strumento di trasmissione tra pari.

Un’ulteriore prospettiva interessante potrebbe essere l’integrazione di strumenti tecnologici innovativi, come la realtà aumentata, per arricchire la visualizzazione e la progettazione degli ambienti ludici. Come nell’immagine finale che chiude il percorso – uno sguardo capovolto sullo spazio, dal punto più alto di un gioco (Figura 29) – i bambini imparano che, a volte, per comprendere meglio, è sufficiente guardare le cose da un punto di vista diverso.



Figura 29. Il parco visto da un altro punto di vista, quello dei bambini!

Spesso, ciò che sembra complesso si fa più semplice o meno lontano dal loro sapere, se lo si osserva da angolazioni diverse. È così che i bambini riescono a vedere la realtà sotto nuove prospettive, per capirla davvero.

E forse anche noi adulti, insegnanti, possiamo fare lo stesso: metterci in ascolto, ribaltare lo sguardo e lasciarci sorprendere. Perché l’educazione è un cammino condiviso, fatto anche di sguardi nuovi.

Ringraziamenti

Un grande ringraziamento a tutti i collaboratori, Donato e Gabriele in particolare, che si sono prestati ad ascoltarci, venire spesso in sede a vedere il percorso e le novità, e raccogliere i desideri dei bambini. Un ringraziamento sentito va anche agli operai comunali, sempre disponibili e attenti, che con grande professionalità hanno accompagnato l’intero processo, ascoltando con cura le richieste di maestre e bambini e contribuendo in modo fondamentale alla realizzazione del progetto.

Un grande grazie al Municipio, che ha sostenuto il progetto finanziandolo e credendo alle nostre proposte.

E ai futuri cittadini, i piccoli bambini, che con grande pazienza e volontà hanno saputo affrontare con estrema passione e competenza le richieste che questo grande progetto richiedeva.

Bibliografia

- Castoldi, M. (2020). *Ambienti di apprendimento. Ripensare il modello organizzativo della scuola*. Carocci editore.
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch/>
- Lamedica, I. (2003). *Conoscere e pensare la città. Itinerari didattici di progettazione partecipata*. Erikson.
- Sbaragli, S. (2005). Dallo spazio al piano... *Infanzia, Aprile 4*, 35–38.
- Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023a). Percorsi, plastici e mappe. *MaMa: matematica per la scuola elementare – Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiali-didattico/?ds_id=1210
- Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023b). Punti di vista e relazioni spaziali nel I ciclo. *MaMa: matematica per la scuola elementare – Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1204

In viaggio con la matematica: esperienza didattica nel mondo dei trasporti e della logistica

Traveling with mathematics: an educational experience in the world of transport and logistics

Lucia Piccaluga Dodero

Scuola media di Caslano – Svizzera

✉ lucia.piccaluga@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo descrive un'esperienza didattica condotta in una seconda media del Cantone Ticino, incentrata sull'apprendimento della matematica attraverso contesti realistici legati al mondo dei trasporti. Il tema è stato scelto da un lato per incentivare la motivazione degli studenti all'apprendimento della disciplina, dall'altro per valorizzare la precedente esperienza professionale della docente nel settore logistico, trasformandola in risorsa educativa. L'itinerario comprende dieci attività che spaziano dalla pianificazione di viaggi alla logistica aziendale, promuovendo l'applicazione concreta di concetti matematici. L'approccio, coerente con il *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022), ha favorito il coinvolgimento attivo degli studenti, migliorando le loro competenze e la percezione della matematica in termini di utilità, senso e piacere.

Parole chiave: contesto di realtà; trasporti; logistica; scuola media.

Abstract / The article describes a teaching experience carried out in a seventh grade class of lower secondary school in the Canton of Ticino, focusing on learning mathematics through realistic contexts related to the world of transport. The topic was chosen on the one hand to encourage students' motivation to learn the subject, and on the other hand to enhance the teacher's previous professional experience in the logistics sector, transforming it into an educational resource. The program includes ten activities ranging from travel planning to business logistics, promoting the practical application of mathematical concepts. The approach, consistent with the *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022), encouraged the active involvement of students, improving their skills and perception of mathematics in terms of usefulness, meaning, and enjoyment.

Keywords: real-life context; transport; logistics; lower secondary school.

1 Introduzione

Questo articolo nasce dal desiderio di progettare e realizzare un percorso didattico per allievi¹ della scuola media che fosse strettamente legato a un contesto pratico e reale, capace di coinvolgere gli studenti nel processo di apprendimento e allo stesso tempo che fosse vicino all'attività professionale pregressa della docente la quale, prima di diventare insegnante di scuola media, ha maturato sedici anni di esperienza nel settore dei trasporti. Si è dunque deciso di proporre questo tema agli studenti di una seconda media di Caslano in Cantone Ticino, con l'intento sia di trasferire l'esperienza professionale in ambito didattico, sia di proporre un tema concreto, grazie al quale far sperimentare agli studenti una matematica utile nella realtà. I trasporti, infatti, non sono soltanto un aspetto logistico della nostra società; essi sono interconnessi con questioni di sostenibilità, economia e pianificazione urbana, che li rendono un campo di studio ricco di opportunità per applicare concetti matematici. Gli studenti possono infatti comprendere l'importanza della matematica in contesti concreti e attuali, attraverso l'analisi di dati sul traffico, il calcolo di percorsi ottimali o lo studio del consumo energetico dei diversi mezzi di trasporto. In sostanza, l'intento è quello di far vivere agli studenti uno dei lati della matematica: la sua utilità, intesa come possibilità di servirsene come strumento per interpretare, formalizzare e risolvere problemi reali. Se è infatti vero che la matematica ha anche un lato "inutile" che deve essere proposto e perseguito in ambito didattico (Sbaragli & Canducci, 2025), è altrettanto vero che approcciare la matematica attraverso situazioni rilevanti nella vita concreta può contribuire a stimolare l'interesse e la motivazione ad apprendere la disciplina da parte degli studenti. Per comprendere meglio questa prospettiva, è interessante dare qualche indicazione teorica, riferita in questo contributo all'utilizzo di contesti realistici nella didattica della matematica.

Il presente contributo è stato elaborato a partire da un più ampio lavoro di tesi Master,² a cui si rimanda in caso di interesse dei lettori, nel quale si sono valutati i cambiamenti nella percezione della matematica da parte degli studenti dopo aver vissuto il percorso didattico qui presentato.

2 I contesti realistici nell'apprendimento della matematica

Il termine "contesto" deriva dal latino *contextus* che significa "intreccio, connessione", ed è il participio passato di *contexere*, ovvero "tessere insieme". In origine il contesto era usato in senso linguistico «per indicare le parti di un discorso che circondano una parola o un passaggio e possono gettar luce sul suo significato» (Merriam-Webster Inc., 2003).³

Klassen (2006) definisce il termine "contesto" come «l'insieme di entità che si collegano o circondano un'entità focale e contribuiscono al significato complessivo di quella entità» (p. 35).

Questa definizione mette in evidenza come il contesto sia costituito da un sistema di elementi interconnessi che influenzano la comprensione di un determinato fenomeno. In questo senso, qualsiasi concetto o esperienza non può essere considerato in modo isolato, ma deve essere interpretato alla luce delle relazioni tra l'individuo, il contenuto e il contesto stesso.

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

2. Lavoro di Diploma di Lucia Piccaluga Doderò (2025), intitolato "L'apprendimento della matematica attraverso contesti di realtà. Applicazione nel mondo dei trasporti", svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatori: Silvia Sbaragli e Michele Canducci. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: <https://doi.org/10.71910/supsi.12437>.

3. Tratto da: www.merriam-webster.com/dictionary/context.

Uno dei principali teorici dell'educazione matematica, Hans Freudenthal, ha sottolineato l'importanza del contesto nell'apprendimento della matematica. Egli ha affermato che la matematica non dovrebbe essere vista come un sistema chiuso di regole e formule, ma come un'attività umana, in cui gli studenti partecipano attivamente alla costruzione della conoscenza sotto la guida degli insegnanti.

Un concetto chiave introdotto da Freudenthal è quello di *matematizzazione*, ovvero il processo attraverso cui gli studenti utilizzano la matematica per comprendere e risolvere problemi reali (Freudenthal, 1973). Questo principio è alla base della *Realistic Mathematics Education* (RME), un approccio sviluppato nei Paesi Bassi a partire dagli anni Sessanta. La RME enfatizza l'uso di *contesti realistici* come punto di partenza per l'apprendimento matematico: tali contesti non devono necessariamente derivare dal mondo reale, ma devono essere situazioni che gli studenti possano immaginare e rendere significative nella loro mente. Attraverso questo approccio, il contesto non è solo un supporto per l'apprendimento, ma diventa un elemento centrale del processo educativo, permettendo agli studenti di collegare la matematica alla loro esperienza e sviluppare una comprensione più profonda dei concetti.

La RME si fonda su sei principi chiave (Lerman, 2020):

- *Principio della realtà*: l'insegnamento parte da problemi significativi per gli studenti, che possono essere sia reali sia verosimili. Questo principio riflette l'idea che si possano creare contesti di apprendimento grazie ai quali sviluppare e applicare concetti matematici, rendendo la disciplina più concreta e motivante.
- *Principio dell'attività*: gli alunni sono partecipanti attivi nel processo di apprendimento. Questo principio riflette l'idea che la matematica si apprenda "facendo matematica" sottolineando l'importanza dell'esplorazione e della sperimentazione diretta.
- *Principio dei livelli*: gli alunni progrediscono attraverso diversi livelli di comprensione, passando da soluzioni informali a modelli sempre più astratti e generalizzati. Questo principio riflette l'idea che un processo graduale favorisca un apprendimento solido e duraturo.
- *Principio di interconnessione*: i diversi ambiti matematici (numeri, geometria, statistica ecc.) non sono considerati separati, ma intrecciati in problemi complessi che richiedono l'uso di strumenti e conoscenze diverse. Questo principio si riflette in un approccio che aiuta a sviluppare una visione ampia e strutturata della disciplina.
- *Principio dell'interattività*: l'apprendimento è visto come un'attività sociale che include discussioni di gruppo e scambi di idee tra studenti e insegnanti. Questo principio riflette l'idea che il confronto tra pari favorisce la riflessione e la costruzione collettiva del sapere.
- *Principio della guida*: i docenti svolgono un ruolo attivo nel facilitare la "reinvenzione guidata" della matematica da parte degli studenti, progettando percorsi di apprendimento coerenti e stimolanti. La guida dell'insegnante è quindi essenziale per bilanciare autonomia e supporto didattico.

Come si dirà nel prossimo paragrafo, questi principi, e l'approccio RME in particolare, sono in linea anche con l'impostazione pedagogica e didattica del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022).

2.1 L'utilizzo di contesti realistici nell'apprendimento della matematica nel Cantone Ticino

Il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2022; di seguito denominato Piano di studio) rappresenta il riferimento curricolare per la scuola dell'obbligo in Cantone Ticino, ed è orientato a chiarire le «attese formative caratterizzate da aspetti educativi e culturali indispensabili all'esercizio di una cittadinanza attiva, che rappresentano gli orizzonti verso cui tendere e orientare le diverse scelte didattiche» (DECS, 2022, p. 13). Il concetto chiave su cui vengono costruiti i traguardi formativi è quello di competenza, intesa come «combinazione di conoscenze, abilità e atteggiamenti che un soggetto attivo per far fronte ad una situazione di apprendimento e di vita» (DECS, 2022, p. 13).

In quest'ottica, nella parte legata all'impostazione metodologica e didattica, si invita a privilegiare situazioni autentiche di apprendimento in relazione con situazioni di vita, reali o simulate, e che possono rappresentare per gli alunni sfide «complesse, problematiche, aperte a più soluzioni, nelle quali sperimentare le proprie risorse e svilupparle nell'interazione con gli altri allievi, con l'insegnante e con i diversi soggetti implicati nella situazione posta» (DECS, 2022, p. 28). Situazioni di questo tipo stimolano «un approccio attivo e partecipativo, teso all'esplorazione, alla sperimentazione, alla progettazione e alla riflessione sull'esperienza didattica» (DECS, 2022, p. 43), contribuendo a formare negli allievi l'attitudine a effettuare scelte e azioni consapevoli, critiche e costruttive rispetto al proprio contesto di riferimento.

Anche l'area della matematica presentata nel Piano di studio segue questi principi di fondo: nella scuola, la matematica

«è chiamata a fornire le risorse necessarie per affrontare con successo situazioni sia concrete, attinenti alla vita quotidiana, sia più astratte, attraverso la capacità di descrivere scientificamente il mondo tramite la matematizzazione e la modellizzazione dei fenomeni che lo caratterizzano».

(DECS, 2022, p. 129)

In questo modo viene incentivato un approccio alla didattica della matematica che sia pertinente, coinvolgente e connesso a «situazioni-problema efficaci, significative, impregnate di senso e stimolanti, a volte più vicine alla vita quotidiana a volte più intrinseche alla matematica stessa» (DECS, 2022, p. 137), al fine di sviluppare nei ragazzi un atteggiamento attivo e positivo verso questa disciplina. È infatti lavorando didatticamente in quest'ottica che si sviluppa un atteggiamento positivo nei confronti della matematica, offrendo contemporaneamente agli allievi

«la possibilità di imparare gradualmente ad affrontare con creatività, positività e determinazione situazioni-problema di varia natura, a fare congetture e applicare possibili strategie risolutive, a rappresentarle in diversi modi, a controllare il proprio processo risolutivo, a confrontare la pertinenza dei risultati con la situazione proposta».

(DECS, 2022, p. 137)

Questo approccio permette agli studenti di sviluppare la capacità di applicare concetti, principi e metodi matematici per analizzare, interpretare e rappresentare la realtà in modo strutturato; inoltre, favorisce una comprensione consapevole dei fenomeni, stimolando l'uso di diverse rappresentazioni e modelli, la formalizzazione, la generalizzazione dei contenuti e l'interpretazione critica delle informazioni acquisite (Franchini et al., 2017). Da questo punto di vista, l'uso di contesti realistici sui quali innestare attività didattiche consente anche di lavorare in modo significativo sul processo cognitivo *matematizzare e modellizzare*, uno degli aspetti di competenza della matematica che si riferisce

«[all']utilizzare concetti, principi e metodi specifici della matematica per comprendere, spiegare, esaminare domini reali o ideali. Descrivere e rappresentare tali domini con modelli che utilizzano in modo consapevole il linguaggio della matematica e che possono essere espressi tramite diverse forme di rappresentazione».

(DECS, 2022, p. 132)

3 Il percorso didattico

3.1 Il contesto

L'esperienza didattica è stata condotta in una classe seconda media di Caslano in Cantone Ticino composta da 18 alunni, 11 femmine e 7 maschi, e si è sviluppata nell'arco di cinque mesi da novembre a marzo.

Il percorso è stato inserito all'interno di una struttura di sperimentazione, legata alle domande di ricerca del già citato lavoro di tesi. In particolare, la ricerca si è articolata in tre fasi sequenziali: un questionario iniziale, somministrato inizialmente agli studenti per raccogliere dati sulle loro percezioni rispetto alla matematica e sul loro interesse verso contesti reali; il percorso didattico, progettato e implementato in aula, basato su un'attività introduttiva e su nove attività contestualizzate nel settore dei trasporti; un questionario finale, somministrato a conclusione dell'intervento didattico per valutare cambiamenti nelle percezioni degli studenti nei confronti della matematica.

In questo articolo si presenta la parte centrale della sperimentazione ovvero il percorso didattico, le cui fasi sono descritte nel prossimo paragrafo (par. 3.2). Dopo averne riassunto la strutturazione generale, vengono presentate le attività che ne hanno costituito l'ossatura. Per ciascuna di queste attività vengono chiariti gli obiettivi, viene fornita una descrizione puntuale e viene offerto un resoconto nel quale vengono commentati i punti di forza e le criticità emerse. Alcune risposte al questionario finale sono state utilizzate per scrivere un bilancio dell'esperienza (par. 4). Per una panoramica completa sui risultati dei questionari si rimanda al lavoro di tesi citato (Piccaluga Dodero, 2025).

3.2 Le fasi

Il percorso didattico è stato suddiviso nelle seguenti tre aree tematiche ed è stato riassunto nella Tabella 1:

- *Trasporto di persone*: analisi delle modalità di trasporto pubblico e privato, con attenzione agli aspetti legati alla mobilità sostenibile e alla pianificazione di itinerari.
- *Trasporto di merci*: panoramica sulle modalità di trasporto merci dalla scala locale a quella globale e problemi di stivaggio merce per ottimizzare i costi di trasporto.
- *Logistica in azienda*: approfondimento sul funzionamento della logistica interna alle imprese, dalla gestione del magazzino all'ottimizzazione delle risorse, con un focus sul ruolo della matematica nella pianificazione operativa.

Nei prossimi sottoparagrafi per ciascuna attività vengono esplicitati gli obiettivi, una breve descrizione e il resoconto di quanto avvenuto in classe. Tutte le schede di attività sono disponibili negli allegati, che vengono puntualmente richiamati nella descrizione di ciascuna attività.

	Titolo attività	Breve descrizione	Unità didattiche
	Quanto conosco il mondo dei trasporti?	Quiz introduttivo per valutare il grado di conoscenza del mondo dei trasporti di persone e merci.	0,5
Trasporto di persone	Organizzo il mio viaggio in treno!	Esercizio sulla pianificazione di un viaggio in treno da Caslano a Mendrisio con sosta a Lugano.	1
	Come si muovono gli abitanti residenti nel Malcantone?	Raccolta dati tramite questionario, creazione di un database e rappresentazione grafica in Excel dei risultati, confronto con i dati di Svizzera e Ticino.	6
	Ti aiuto a scegliere!	Analisi dell'offerta TPL (biglietti singoli, abbonamenti mensili e Arcobaleno annuale) per trasporto da Caslano a Lugano.	1
	Quanto inquinano quando viaggiano?	Analisi a gruppi dei costi di viaggio da Lugano a una destinazione europea, durata del viaggio e inquinamento causato a seconda del mezzo di trasporto utilizzato (auto, treno, aereo).	2
Trasporto di merci	Introduzione del tema del trasporto a cura di un ospite	Intervento a cura del responsabile dell'Ufficio Shipping di Casale SA sul tema del trasporto di merci (modalità, tempi di transito, dogana, sostenibilità).	1,5
	Kahoot! – La matematica nei trasporti	Undici quesiti matematici applicati al trasporto di merci.	0,5
	Sfida all'ultimo pacco!	Ottimizzazione di un piano di carico di un camion standard con e senza sovrapposizione dei pacchi (con artefatto in scala).	2
La logistica in azienda	Problemi... della logistica!	Descrizione delle attività di logistica all'interno di un'azienda e attività di progettazione di un imballo in cartone.	1
	Visita alla fabbrica Alprose SA	Visita al Museo del cioccolato Alprose di Caslano, visione del filmato sul ciclo produttivo e incontro con il responsabile della logistica.	2

Tabella 1. Struttura del percorso didattico.

3.2.1 Attività 1: quanto conosco il mondo dei trasporti?

Obiettivo. Gli allievi attivano e manifestano le proprie conoscenze pregresse su concetti e situazioni legate al mondo dei trasporti, al fine di contribuire alla costruzione condivisa del percorso didattico.

Descrizione dell'attività. L'attività consiste in un questionario cartaceo da svolgere individualmente ([Allegato 1](#)), suddiviso nelle seguenti quattro sezioni:

- A. *Trasporto locale*: viene proposta un'indagine sulla tipologia del mezzo di trasporto più adatto nel corto raggio (tra Caslano e Lugano) con confronto tra mezzi di trasporto in termini di durata del viaggio, costo e sostenibilità.
- B. *Trasporto regionale*: comprende quesiti relativi alla realizzazione del tunnel di base del Monte Ceneri all'interno del progetto Alptransit.
- C. *Trasporto nazionale di merci*: il quesito verte sulla classificazione dei mezzi di trasporto merci dal più al meno utilizzato in territorio elvetico.
- D. *Trasporto globale*: domande a risposta chiusa sulla stima del tempo di viaggio di alcune tipologie merceologiche dal luogo di origine a destinazione.

Resoconto dell'attività. Tutti i ragazzi hanno risposto correttamente alla prima parte relativa al trasporto locale, compresa la stima chilometrica tra Caslano e Lugano. Si riporta in [Figura 1](#) un esempio di risposte.

A. TRASPORTO LOCALE

Questa sera alle 21 devi andare ad un concerto in Piazza della Riforma a Lugano.
Sai quanti km dista casa tua dal luogo del concerto?.....11 km

Secondo te con quale mezzo è meglio spostarti insieme ad un genitore se:

- Vuoi impiegare meno tempo possibile: il treno FLP
Perché? perché in macchina c'è sempre coda
- Vuoi scegliere quello più economico: La bicicletta / i piedi
Perché? perché non costa nulla
- Vuoi scegliere quello più sostenibile (che inquina meno) bicicletta / piedi / FLI
Perché? perché non inquinano / perché è un Trasporto pubblico

Figura 1. Le risposte di un allievo alla sezione A.

È emerso che tutti gli allievi ignorano la recente realizzazione del tunnel di base del Monte Ceneri, che, oltre ad altri molteplici benefici, annovera la riduzione del tempo di percorrenza della tratta passeggeri Lugano-Locarno ([Figura 2](#)).

B. TRASPORTO REGIONALE

Nel 2019 per andare con il treno da Lugano a Locarno si impiegava circa 1 ora;
oggi 32 minuti.

Sai perché? *Il treno è più veloce di prima*

Quale infrastruttura è stata costruita nel frattempo permettendo
un'abbreviazione del tempo di viaggio? *Barth?*

Figura 2. Le risposte di un allievo alla sezione B.

Nella terza sezione del questionario, dieci allievi hanno riconosciuto il camion come il mezzo più utilizzato per il trasporto merci in Svizzera, mentre coloro che hanno risposto errato hanno indicato l'aereo al primo posto.

Nella quarta sezione del questionario in media gli allievi hanno individuato correttamente un tempo di viaggio sui tre proposti; in particolare il quesito che ha maggiormente tratto in inganno è stato l'ultimo, relativo a un trasporto aereo dalla Svizzera alla Cina: gli allievi infatti non hanno considerato i tempi per lo sdoganamento della merce in *export* e in *import* ma solo il tempo effettivo del volo.

3.2.2 Attività 2: organizzo il mio viaggio in treno!

Obiettivi. Questa attività ha diversi obiettivi:

- Analizzare e tradurre situazioni della vita quotidiana in linguaggio matematico tenendo in considerazione le grandezze in gioco, al fine di modellizzare la situazione.
- Interpretare e riflettere sulla veridicità di un procedimento o un risultato, personale o altrui, ricorrendo al calcolo, all'eventuale conversione di unità di misura o al confronto con la realtà.
- Presentare e descrivere i procedimenti risolutivi in modo comprensibile agli altri, tenendo in considerazione le caratteristiche delle grandezze in gioco.

Descrizione dell'attività. L'attività propone agli allievi divisi a coppie un problema reale di pianificazione di un viaggio in treno ([Allegato 2](#)); consultando gli orari delle linee ferroviarie FLP e FFS per calcolare i tempi di viaggio e pianificare le tappe, gli allievi devono trovare la soluzione ottimale per:

1. partire da Caslano e raggiungere Lugano per una commissione, con un tempo massimo di sosta di un'ora;
2. arrivare puntuali a Mendrisio per una visita medica alle 15:00 di un mercoledì.

L'orario FLP riporta esclusivamente la prima e l'ultima corsa diurna per ciascuna fermata, insieme alla frequenza delle corse. Al contrario, l'orario FFS è strutturato in una tabella dove ogni riga corrisponde a una fermata e ogni colonna rappresenta un treno.

Resoconto dell'attività. Tutte le coppie sono arrivate a individuare la partenza migliore da Caslano per arrivare in tempo a destinazione e a descrivere dettagliatamente il programma di viaggio (Figure 3 e 4). La principale difficoltà è stata leggere e interpretare l'orario FLP; alcuni studenti si sono basati sulla propria esperienza, ricordando gli orari di partenza dei treni da Caslano, poiché utilizzano frequentemente il servizio durante la settimana, chi per il tragitto casa-scuola, chi per le attività sportive.

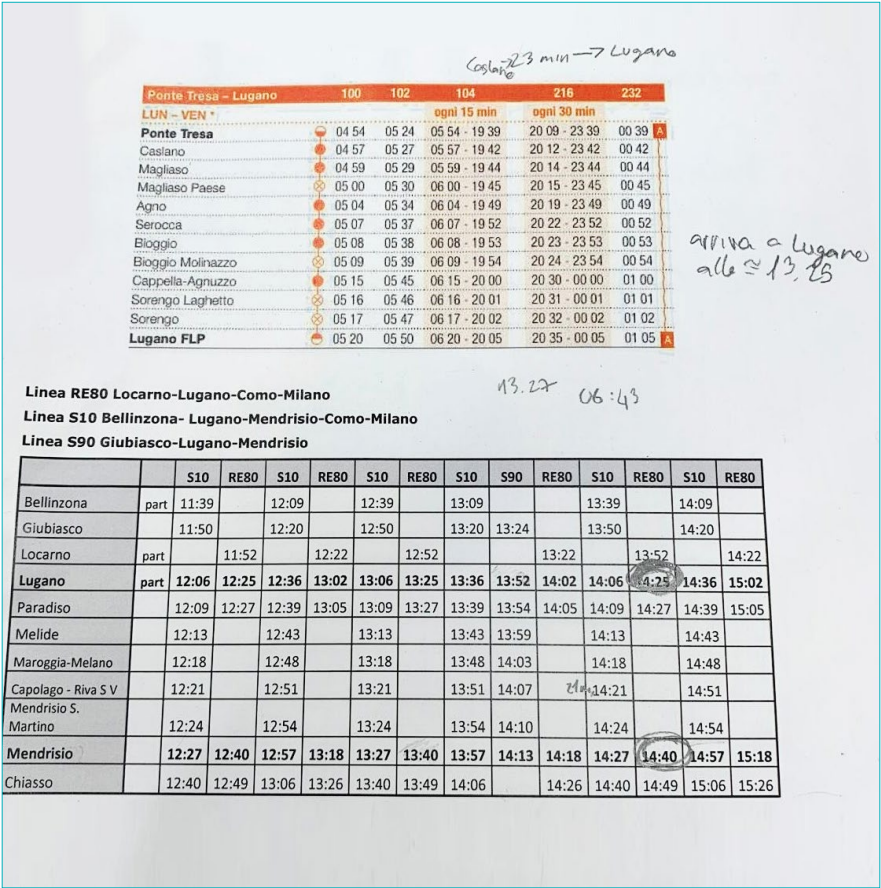


Figura 3. Appunti presi da una coppia di allievi per arrivare alla soluzione ottimale.

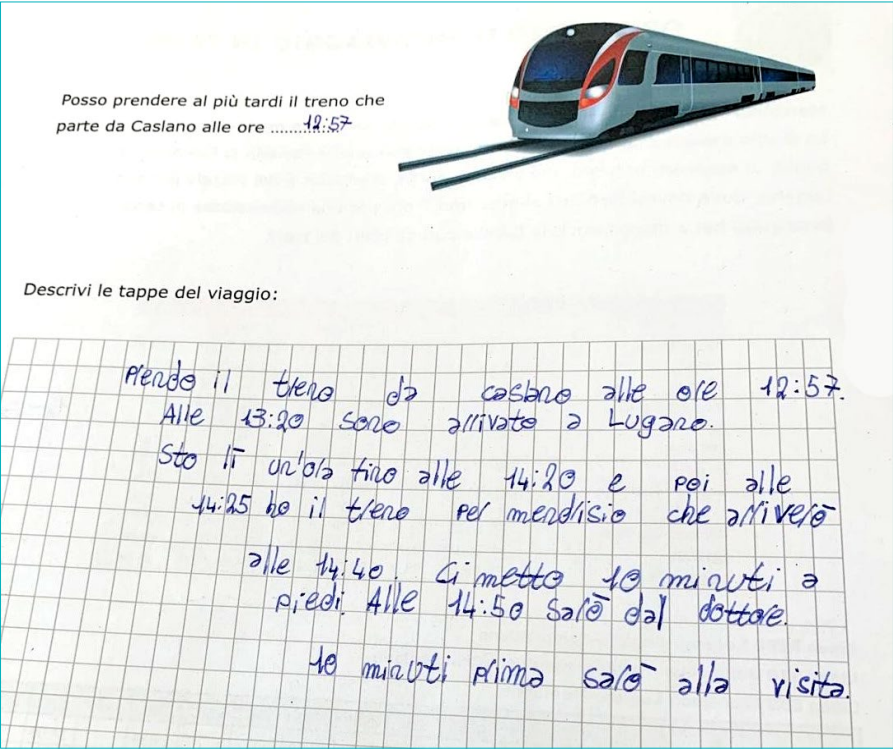


Figura 4. Descrizione dettagliata delle tappe del viaggio elaborata da una coppia di allievi.

3.2.3 Attività 3: come si muovono gli abitanti residenti nel Malcantone?

Obiettivi. Anche in questo caso gli obiettivi sono molteplici:

- Raccogliere, ordinare e trattare dati pertinenti di un'indagine e costruire una tabella ricorrendo a un foglio di calcolo, sviluppando così abilità in statistica descrittiva.
- Calcolare i valori centrali di un'indagine statistica (moda, media, mediana).
- Calcolare frequenza assoluta e relativa con cui ciascuna modalità si manifesta in un'indagine statistica.
- Rappresentare i dati di un'indagine statistica mediante il grafico più appropriato (areogrammi e istogrammi) in Excel promuovendo l'utilizzo consapevole degli strumenti digitali.
- Confrontare dati provenienti da due indagini statistiche per individuare analogie e differenze.

Descrizione dell'attività. La realizzazione di un'indagine statistica si svolge durante le ore di laboratorio e copre sei unità didattiche (UD) con l'obiettivo di avvicinare gli studenti alla metodologia dell'indagine attraverso un progetto autentico e significativo ([Allegato 3](#)). Il tema è stato scelto per la sua rilevanza territoriale: le abitudini di mobilità della popolazione residente nel Malcantone.

Gli studenti vengono suddivisi in piccoli gruppi (massimo 3 membri) per favorire la collaborazione tra pari. L'attività permette di integrare strumenti digitali nella didattica, in linea con le indicazioni del Piano di studio, e si compone di quattro fasi:

1. *Raccolta dei dati tramite questionario:* ciascun allievo somministra un questionario a cinque persone, registrando le risposte su una scheda cartacea.
2. *Elaborazione dei dati:* i dati raccolti vengono organizzati in una tabella Excel. Gli studenti hanno modo di calcolare frequenze, medie, mode e mediane utilizzando le funzioni del foglio di calcolo.
3. *Rappresentazione grafica dei dati:* i gruppi hanno la possibilità di produrre artefatti digitali sotto forma di grafici (istogrammi, areogrammi, ecc.), utili a rappresentare visivamente i risultati dell'indagine.
4. *Confronto con dati ufficiali:* i risultati dell'indagine della classe vengono messi a confronto con le statistiche cantonali e federali pubblicate dall'Ufficio federale di statistica.

Resoconto dell'attività. Il coinvolgimento attivo degli allievi è stato elevato; la scelta di un tema locale ha favorito la motivazione degli studenti, rendendo l'attività significativa e contestualizzata. Nella prima fase ciascun allievo si è confrontato con la raccolta diretta dei dati, sviluppando capacità relazionali e di osservazione. In Figura 5 si riportano due esempi.

FASE 1: LA RILEVAZIONE DI DATI

Noi utilizzeremo un questionario come strumento per la raccolta di dati. Raccogli le informazioni di 5 persone all'interno del tuo nucleo familiare, vicini di casa, amici e conoscenti entro una settimana.

Quanti km percorsi al giorno di solito, con quali mezzi e in quanto tempo?

NOME	MEDIA KM AL GIORNO*	MEZZI DI TRASPORTO	TEMPO DI VIAGGIO
1. a. papà	20 Km	X auto ☐ moto ☐ bici ☐ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	30 min
2. b. papà	15 Km	☐ auto ☐ moto ☒ bici ☐ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	40 min
3. c. papà	2,5 Km	☐ auto ☐ moto ☐ bici ☒ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	30 min
4. d. papà	30 Km	☐ auto ☐ moto ☐ bici ☐ a piedi ☐ ☒ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	60 min
5. e. papà	18 Km	☐ auto ☐ moto ☐ bici ☐ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	60 min

*Si intende media aritmetica dei km percorsi nei giorni lavorativi (da lun a ven)

FASE 1: LA RILEVAZIONE DI DATI

Noi utilizzeremo un questionario come strumento per la raccolta di dati. Raccogli le informazioni di 5 persone all'interno del tuo nucleo familiare, vicini di casa, amici e conoscenti entro una settimana.

Quanti km percorsi al giorno di solito, con quali mezzi e in quanto tempo?

NOME	MEDIA KM AL GIORNO*	MEZZI DI TRASPORTO	TEMPO DI VIAGGIO
1. ENEA	20 Km	☐ auto ☒ moto ☐ bici ☐ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	20 min
2. AMELIE	30 Km	☐ auto ☐ moto ☐ bici ☐ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	30 min
3. CRISTINA	10 Km	☐ auto ☐ moto ☐ bici ☒ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	30 min
4. ANDREA	76 Km	☐ auto ☐ moto ☐ bici ☐ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	10 min
5. GAIA	2 Km	☐ auto ☐ moto ☐ bici ☐ a piedi ☐ ☐ treno ☐ bus ☐ monopattino ☐ altro	12 min

*Si intende media aritmetica dei km percorsi nei giorni lavorativi (da lun a ven)

Figura 5. Due esempi di questionari compilati da due allievi diversi.

Nella seconda e terza fase dell'attività è emersa la criticità più marcata: per molti si è trattato della prima esperienza con Excel, motivo per cui è stata dedicata una parte della lezione all'introduzione degli elementi di base e delle funzioni elementari del programma.

Le Figure 6, 7 e 8 si riferiscono alla creazione degli artefatti digitali che rappresentano i risultati dell'indagine statistica.

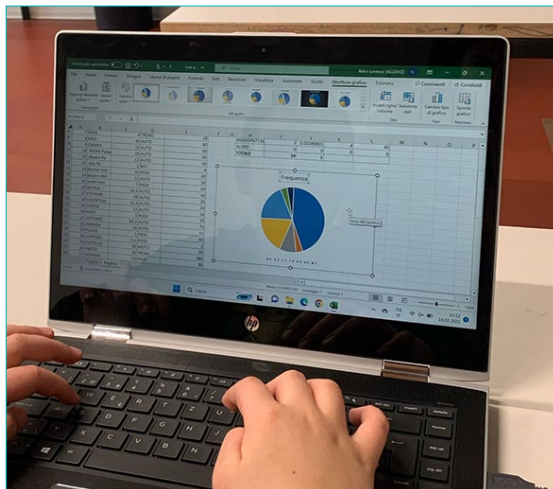


Figura 6. Elaborazione di un areogramma.

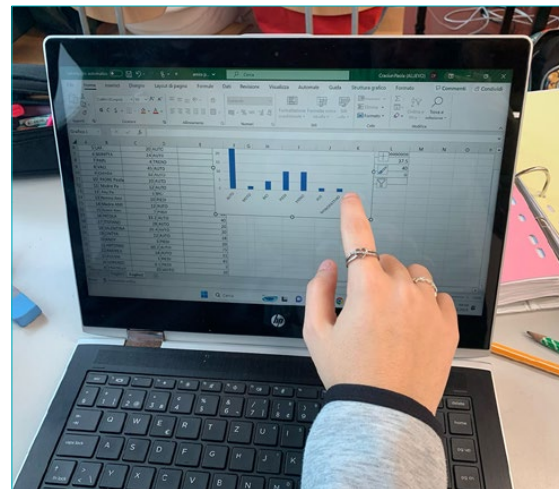


Figura 7. Elaborazione di un istogramma.

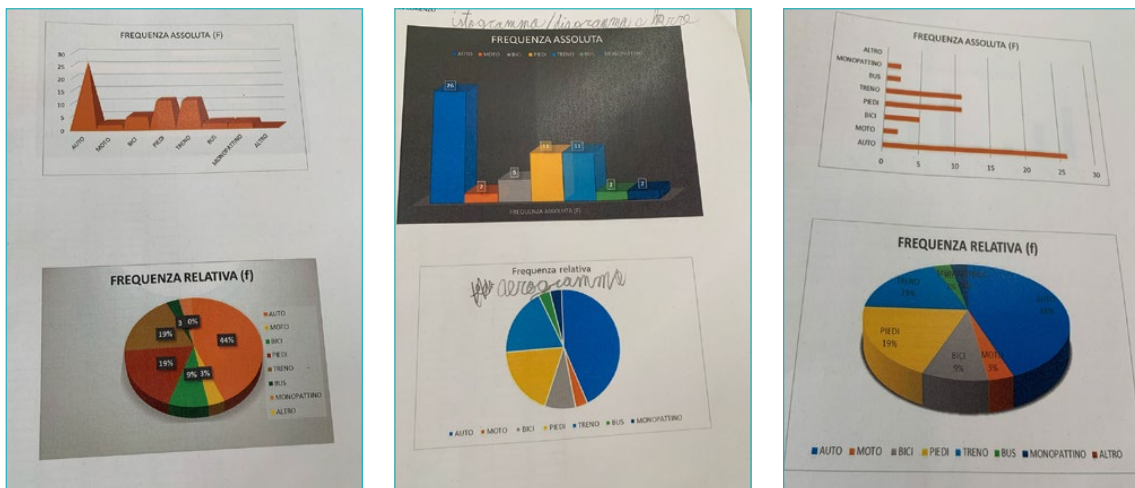


Figura 8. Stampe di grafici prodotti dai diversi gruppi di lavoro.

Nell'ultima fase il parallelismo con l'attività svolta da un ente ufficiale come l'Ufficio federale di statistica ha dato valore al lavoro degli studenti, aumentando il loro senso di responsabilità e la soddisfazione per ciò che si è realizzato (Figura 9).

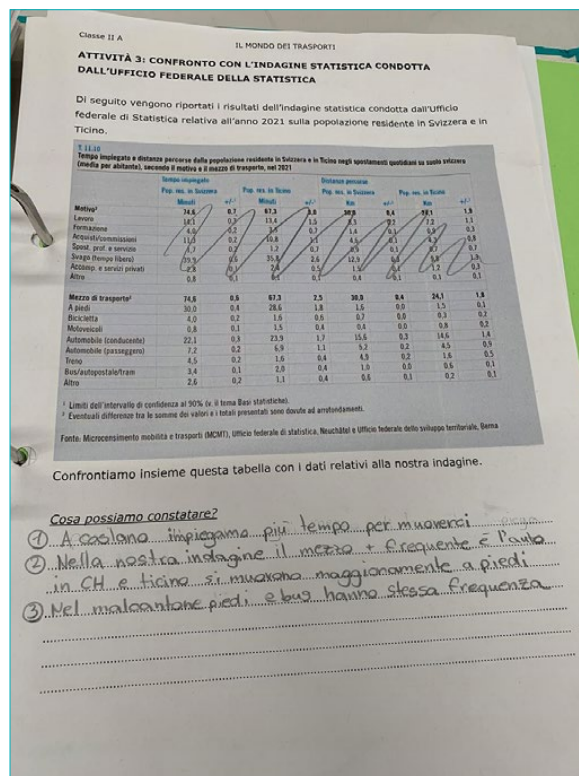


Figura 9. Elaborato di un allievo.

3.2.4 Attività 4: ti aiuto a scegliere!

Obiettivi. Questa attività ha un duplice obiettivo:

- Analizzare congetture e ipotesi per compiere una scelta consapevole.
- Argomentare una scelta, motivandola in modo chiaro.

Descrizione dell'attività. Gli allievi sono chiamati a svolgere un compito di realtà: aiutare un amico a scegliere la soluzione economicamente più vantaggiosa per raggiungere la pista di ghiaccio della Resega a Lugano utilizzando il trasporto pubblico locale (Arcobaleno TPL) (Allegato 4). È necessario quindi individuare, tra le diverse opzioni tariffarie disponibili, quella che comporta il minor costo complessivo annuale, considerando l'utilizzo del servizio solo 3 giorni a settimana durante l'anno scolastico ed escludendo i giorni di vacanza.

Resoconto dell'attività. L'aspetto più critico dell'attività è derivato dal fatto che le informazioni sui giorni di allenamento e la durata del periodo scolastico non sono numericamente esplicitate, quindi la classe ha faticato a reperire i dati mancanti (ad esempio, quante settimane ci sono da settembre a giugno escluse le vacanze scolastiche). La messa in comune ha messo in luce la varietà di punti di vista degli allievi, che si sono orientati su due opzioni diverse – abbonamento annuale e biglietto singolo – offrendo spunti interessanti per riflettere sulla validità delle diverse strategie argomentative.

Al termine del dibattito, alcuni allievi hanno rivisto la propria posizione iniziale, riconoscendo come più fondate le argomentazioni dei compagni. È il caso, ad esempio, mostrato nella Figura 10: uno studente che inizialmente aveva indicato come preferibile l'opzione del biglietto singolo, ha successivamente modificato la propria scelta, rimuovendo il segno di preferenza (una stellina) e attribuendolo all'abbonamento annuale, ritenuto, dopo il confronto, più vantaggioso.

Classe II A

IL MONDO DEI TRASPORTI

c) Abbonamento Arcobaleno mensile al prezzo di 55 Fr al mese come indicato in tabella.

	24 h	48 h	72 h
1 zona	51,00	87,00	36,00
2 zone	77,00	131,00	55,00
3 zone	119,00	193,00	80,00
4 zone	146,00	249,00	102,00
5 zone	178,00	303,00	128,00

Aiuta Rafael ad individuare la soluzione più conveniente!

Consiglio a Rafael l'opzione ☐ A ☒ B ☐ C

Motiva la tua scelta.

★ a) $(55 \cdot 3) \cdot 2,6 \cdot 2 = 546 \text{ f. r.}$

★ b) 443 f. r.

c) $55 \cdot 10 = 550 \text{ f. r.}$

Figura 10. Allievo che inizialmente aveva scelto l'opzione A e dopo il dibattito ha cambiato la sua opinione.

3.2.5 Attività 5: quanto inquinio quando viaggio?

Obiettivi. Di seguito si riportano gli obiettivi dell'attività:

- Interpretare e verificare l'attendibilità di dati reperiti in rete mediante ricerca digitale, sviluppando la competenza trasversale *tecnologia e media* volta a promuovere l'uso consapevole delle fonti.
- Progettare un itinerario analizzando distanze, costi, tempi ed emissioni di anidride carbonica attraverso ricerche guidate.
- Rappresentare sinteticamente i risultati in forma grafica e testuale mediante l'elaborazione di un artefatto.
- Riflettere sulle alternative sostenibili nel settore dei trasporti, contesto di Formazione generale del Piano di Studio.

Descrizione dell'attività. Il lavoro si apre con la lettura guidata di un articolo informativo tratto da "Il Sole24Ore" sull'impatto ambientale causato dai diversi mezzi di trasporto ([Allegato 5](#)). Seguono riflessioni sull'inquinamento prodotto da auto, aerei, navi e treni, con dati quantitativi di riferimento. Gli allievi, suddivisi in gruppi, hanno il compito di:

1. Organizzare un viaggio internazionale verso una città europea estratta a sorte da effettuare il giorno 19 giugno dell'anno in corso con tre modalità di trasporto differenti (auto, treno, aereo).
2. Calcolare per ciascun mezzo di trasporto il tempo complessivo di viaggio, il costo di sola andata e l'emissione di CO_2 per passeggero.
3. Rappresentare i risultati in un cartellone riassuntivo.

L'attività presenta una forte valenza interdisciplinare, coinvolgendo matematica, scienze e geografia, e stimolando il pensiero critico degli studenti in merito alla sostenibilità dei trasporti.

In linea con il Piano di studio, che valorizza l'educazione allo sviluppo sostenibile attraverso una visione integrata e sistemica del mondo, questa attività vuole accompagnare gli allievi nella comprensione di come le scelte quotidiane, in ambito di mobilità, possano influenzare l'ambiente e la società, grazie all'analisi di dati concreti e situazioni reali.

Resoconto dell'attività. La classe ha accolto con entusiasmo l'attività durante le ore di laboratorio, poiché per la prima volta è stata proposta la realizzazione di un cartellone che ha permesso agli allievi di integrare competenze matematiche con abilità grafiche e creative.

La criticità più diffusa è stata il reperimento di dati attendibili in rete su costi e tempi per ciascun mezzo di trasporto. La docente ha fornito la lista di alcuni siti affidabili, su cui restringere la ricerca poiché spesso gli allievi tendevano ad aprire il primo risultato che compare nel motore di ricerca anche se si tratta di pubblicità. In Figura 11 sono mostrati i cartelloni prodotti da ciascun gruppo di lavoro, che sono stati appesi in aula al termine del laboratorio (Figura 12).



Figura 11. Elaborati dei gruppi di lavoro.



Figura 12. Esposizione dei cartelloni in aula.

3.2.6 Attività 6: introduzione del tema del trasporto delle merci a cura di un ospite

Obiettivi. Di seguito si riportano gli obiettivi dell'attività:

- Conoscere le principali tipologie e modalità di trasporto delle merci a livello globale, distinguendo tra trasporto terrestre, marittimo, ferroviario e aereo, e identificandone le caratteristiche principali.
- Ascoltare attivamente una testimonianza di un esperto del settore, cogliendo le informazioni principali, formulando domande pertinenti e rielaborando in modo critico quanto appreso attraverso un questionario conclusivo.
- Applicare concetti matematici a situazioni professionali reali, come il calcolo di tempi di percorrenza, costi di trasporto, ottimizzazione dei percorsi e valutazione dell'impatto ambientale, con attenzione agli aspetti di sostenibilità.

Descrizione dell'attività. Poco prima delle vacanze di carnevale la classe ha ospitato Pier Giorgio Pintus, il responsabile della sezione Logistica di Casale SA,⁴ che ha offerto una panoramica sul trasporto delle merci ([Allegato 6](#)), illustrando le varie modalità a seconda della tipologia di merce (containerizzabile, alla rinfusa, a temperatura controllata e fuori sagoma) e le pratiche doganali relative al trasferimento merce dal paese di origine (*export*) a quello di destino (*import*).

Resoconto dell'attività. L'intervento del Dr. Pintus (Figura 13) ha stimolato l'interesse e la partecipazione attiva di diversi studenti, alcuni dei quali hanno rivolto domande per approfondire i temi affrontati. L'incontro ha offerto spunti anche sul tema delle pratiche doganali, argomento poco noto ai ragazzi, e ha rappresentato un'opportunità per far cogliere agli allievi la trasversalità della matematica, sottolineando come essa sia uno strumento indispensabile nella realtà lavorativa. È stato interessante notare che argomenti affrontati durante l'anno scolastico in corso, come percentuali e volumi geometrici, vengano applicati quotidianamente per scopi pratici, nella negoziazione di contratti di trasporto o nell'ottimizzazione degli spazi in *container* o bilici.

4. Casale SA è un'azienda con sede a Lugano, attiva a livello internazionale nel settore dell'ingegneria industriale e della chimica applicata. Fondata nel 1921, è specializzata nella progettazione e fornitura di impianti per la produzione di ammoniaca, urea, metanolo, nitrati e fertilizzanti chimici, operando in più di 100 paesi nel mondo. Casale SA è nota per il suo impegno verso l'innovazione sostenibile, l'ottimizzazione dei processi produttivi e la riduzione dell'impatto ambientale, anche attraverso una gestione logistica efficiente e responsabile.

La distribuzione dei *gadget* gentilmente omaggiati dalla società Casale SA ha suscitato entusiasmo tra gli allievi, rafforzando il senso di partecipazione e lasciando un segno positivo e tangibile dell'incontro.



Figura 13. Intervento del Dr. Pintus (Casale SA) in merito al trasporto di merci.

3.2.7 Attività 7: Kahoot! – La matematica nei trasporti

Obiettivi. L'attività 7 ha un triplice obiettivo:

- Risolvere problemi matematici legati al settore dei trasporti, come il calcolo dei tempi di transito, il consumo di carburante e la determinazione dell'IVA all'importazione, utilizzando strategie appropriate.
- Riconoscere l'importanza della matematica nei processi logistici, comprendendo l'utilità delle competenze matematiche per risolvere problemi pratici in ambito professionale.
- Partecipare attivamente a un'attività di *gamification*, dimostrando coinvolgimento e capacità di riflessione rapida su quesiti matematici presentati in forma ludica e interattiva.

Descrizione dell'attività. L'attività si svolge sotto forma di quiz interattivo su Kahoot!, articolato in undici domande a scelta multipla, ciascuna delle quali propone quesiti matematici ambientati nel mondo del trasporto merci ([Allegato 7](#)).

Gli allievi hanno modo di confrontarsi con problemi realistici e stimolanti, tra cui il calcolo dei tempi di transito su diverse tratte, la stima del consumo di carburante di una nave cargo, il calcolo dell'IVA su merci importate e la gestione delle temperature nei contenitori refrigerati, fondamentali per il trasporto di prodotti deperibili.

L'utilizzo della piattaforma Kahoot! introduce dinamiche di *gamification*, favorendo un clima di sana competizione e rendendo l'esperienza di apprendimento più coinvolgente, motivante e divertente. Grazie al formato ludico e alla rapidità richiesta nelle risposte, l'attività stimola la prontezza mentale, la collaborazione tra pari e la riflessione sull'applicazione concreta della matematica in ambito professionale.

Resoconto dell'attività. Gli studenti hanno partecipato attivamente e collaborato tra compagni di banco per risolvere il quiz.

Grazie al *feedback* immediato offerto da Kahoot!, l'attività ha permesso agli studenti di riflettere subito sugli errori commessi e di comprenderne la correzione. È emerso chiaramente come la pressione del tempo e la fretta di rispondere abbiano portato molti allievi a sbagliare, anche su quesiti alla loro portata. Questo ha rappresentato un'occasione preziosa per sviluppare consapevolezza sull'impor-

tanza della concentrazione e della gestione del tempo, anche in contesti ludici.

L'attività ha mostrato anche alcune ulteriori criticità: l'eccessivo entusiasmo generato dalla componente competitiva, accentuato dall'avvicinarsi delle vacanze di carnevale, ha spinto alcuni alunni più vivaci ad assumere comportamenti turbolenti, causando momenti di confusione e perdita di attenzione. Questo ha richiesto più interventi mirati per cercare di ristabilire un clima di lavoro sereno e rispettoso delle regole.

In Figura 14 sono riportate le statistiche delle risposte fornite dagli allievi.

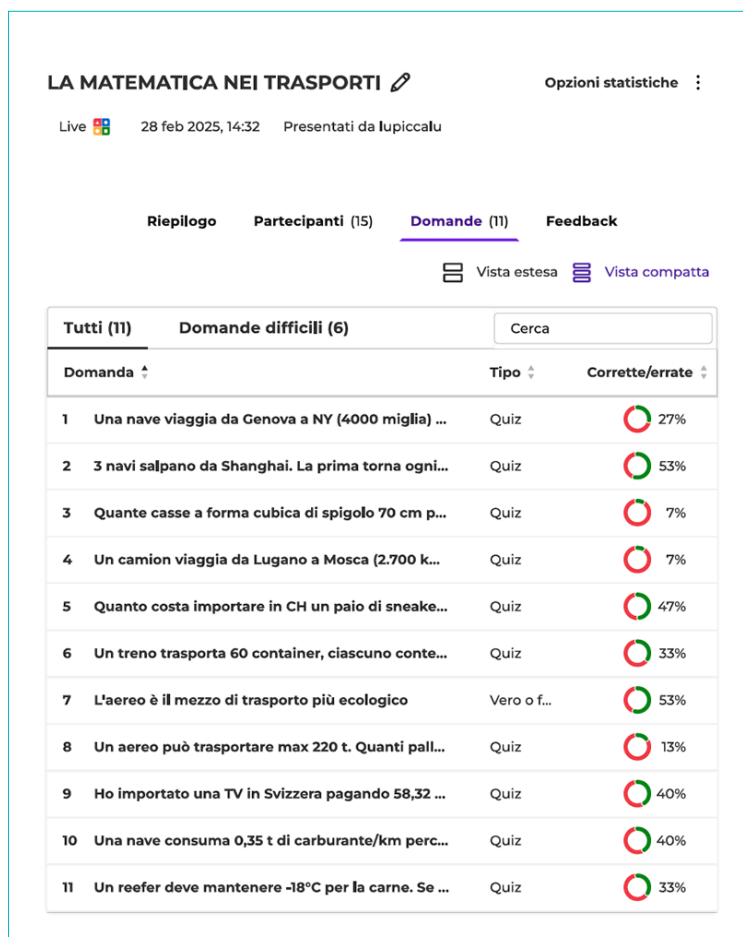


Figura 14. Statistiche delle risposte degli allievi scaricate dal sito <https://kahoot.com/it/>.

3.2.8 Attività 8: sfida all'ultimo pacco!

Obiettivi. Questa attività ha diversi obiettivi:

- Applicare il concetto di ottimizzazione di superficie e volume in un contesto pratico, individuando soluzioni efficaci per l'organizzazione di oggetti all'interno di uno spazio definito.
- Sviluppare strategie risolutive per problemi geometrici tridimensionali, attraverso l'esplorazione manipolativa, la rappresentazione grafica e il calcolo di volumi e superfici.
- Collaborare in modo efficace all'interno di un gruppo di lavoro, condividendo idee, confrontando strategie e contribuendo alla costruzione collettiva di una soluzione.
- Argomentare e giustificare le scelte effettuate durante il processo risolutivo, utilizzando un linguaggio matematico appropriato e partecipando attivamente al confronto tra pari.

Descrizione dell'attività. L'attività, svolta in due unità didattiche di laboratorio, consiste nell'individuare la configurazione più efficiente di pacchi all'interno di un camion in scala, tenendo conto delle dimensioni dei colli, della superficie del pianale e dello spazio disponibile ([Allegato 8](#)). Si tratta di due sfide della durata di 20 minuti, ciascuna strutturata come segue:

1. Comprensione dell'attività e consegna degli artefatti (parallelepipedi rettangoli) in scala.⁵
2. Fase esplorativa: i gruppi hanno la possibilità di maneggiare i parallelepipedi, esplorando diverse configurazioni.
3. Fase della rappresentazione e formalizzazione: ciascun gruppo rappresenta su carta la configurazione ottimale trovata e calcola la superficie del pianale e il volume del camion occupati.
4. Fase argomentativa: durante una breve messa in comune ciascun gruppo espone il proprio progetto, la classe confronta le diverse proposte e viene eletta la configurazione ottimale.

Nella prima sfida il compito è trovare la configurazione ottimale di carico del camion con il vincolo della non sovrapposibilità dei colli e dell'utilizzo di tutte le tipologie di parallelepipedi in dotazione. Nella seconda sfida viene proposto un compito in cui si lavora sul volume: individuare la configurazione migliore di carico con la possibilità di sovrapporre e ruotare i colli per ottimizzare il volume del mezzo.

L'elemento centrale dell'attività è l'utilizzo di parallelepipedi rettangoli e di un camion in scala come supporto alla risoluzione del problema ([Figure 15 e 16](#)).

Nell'attività proposta i parallelepipedi facilitano la conversione tra registri semiotici diversi: dalla manipolazione concreta alla rappresentazione grafica, fino alla formalizzazione simbolica del calcolo di superfici e volumi.



Figura 15. Artefatti utilizzati durante l'attività.



Figura 16. Parallelepipedi rettangoli.

Resoconto dell'attività. L'attività ha ottenuto una risposta molto positiva da parte della classe. I ragazzi si sono mostrati motivati, coinvolti e desiderosi di trovare soluzioni efficaci.

Durante la messa in comune molti hanno evidenziato la difficoltà nel tradurre la configurazione fisica in una rappresentazione grafica, ma proprio tale passaggio ha rappresentato un momento cruciale di apprendimento.

L'attività di laboratorio ha inoltre svolto un ruolo importante nel promuovere l'inclusione: ha permesso di ridurre le disparità tra gli allievi, valorizzando competenze non strettamente disciplinari.

5. Gli artefatti sono stati gentilmente prestati dalla Scuola professionale artigianale e industriale (SPA) di Bellinzona.

Un esempio emblematico è stato il successo del gruppo vincitore, composto da due studenti con un rendimento generalmente debole, che però hanno potuto esprimere le loro potenzialità grazie alla componente pratica e manipolativa dell'attività.

Le strategie messe in atto dai gruppi di lavoro evidenziano un approccio pratico e creativo alla risoluzione del problema; di seguito qualche esempio:

- La riproduzione del pianale di carico direttamente sul banco con nastro adesivo di carta mostra una volontà di rappresentare in scala reale lo spazio disponibile, facilitando così la percezione delle dimensioni e dei vincoli fisici. Questo approccio ha permesso agli studenti di sperimentare direttamente il concetto di superficie (Figura 17).

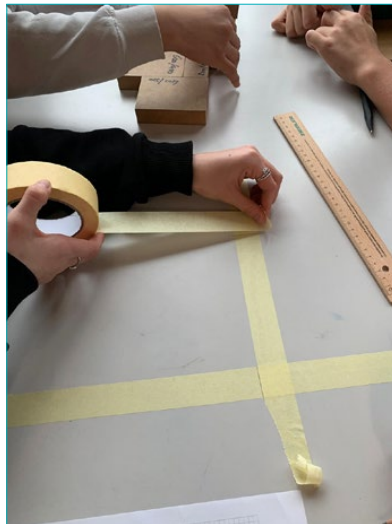


Figura 17. Un gruppo di lavoro ha riprodotto il pianale di carico sul banco con nastro adesivo di carta.

- L'uso del nastro adesivo di carta per unire i parallelepipedi rivela un'attenzione alla stabilità della configurazione e alla necessità di ragionare in termini di compattezza e ordine, elementi fondamentali nei problemi di ottimizzazione spaziale (Figura 18).



Figura 18. Per comporre la configurazione gli allievi hanno unito i parallelepipedi con nastro adesivo di carta.

- La configurazione del gruppo vincitore nella sfida sull’ottimizzazione della superficie mostra un’efficace occupazione del piano, frutto di numerosi tentativi e aggiustamenti (Figura 19).



Figura 19. Configurazione del gruppo vincitore della sfida di ottimizzazione della superficie di carico.

- L’elaborazione progettuale del gruppo in vista dell’ottimizzazione del volume mostra nelle Figure 20 e 21 un passaggio intermedio importante: la fase di progettazione. Essa riflette un pensiero strategico, con attenzione al miglioramento progressivo della soluzione, e un’efficace collaborazione tra pari.

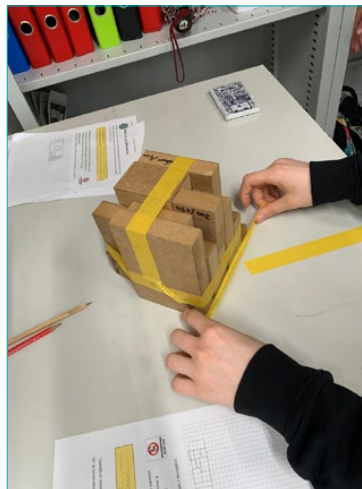


Figura 20. Progettazione di un gruppo di lavoro della configurazione ottimale del volume di carico.



Figura 21. Configurazione del gruppo vincitore della sfida di ottimizzazione del volume di carico.

La Figura 22 mostra alla lavagna i risultati delle sfide.

	CEPL	LNGE	IGHA	LANL
①	450 cm^2	446 cm^2	450 cm^2	455 cm^2
②	6975 cm^3	6300 cm^3	7056 cm^3	6300 cm^3

Figura 22. Risultati delle due sfide.

3.2.9 Attività 9: problemi... della logistica!

Obiettivi. L'attività ha un triplice obiettivo:

- Approfondire i concetti di superficie, volume e sviluppo del parallelepipedo rettangolo.
- Sviluppare il pensiero spaziale attraverso la visualizzazione e rappresentazione tridimensionale.
- Formulare domande pertinenti per approfondire la connessione tra contenuti matematici e contesto professionale reale.

Descrizione dell'attività. Dopo una breve introduzione sulle attività di logistica industriale, con riferimento concreto all'azienda locale Alprose SA,⁶ agli allievi viene assegnato il compito di supportare un ipotetico addetto alla logistica nella progettazione di un imballaggio in cartone per 100 tavolette di cioccolato da 100 g ciascuna ([Allegato 9](#)). L'imballaggio deve avere la forma di un parallelepipedo rettangolo e non deve presentare spazi vuoti, per garantire la massima protezione del contenuto durante il trasporto. L'attività prevede il calcolo delle dimensioni dell'imballo, il disegno del suo sviluppo e il calcolo dell'area di cartone necessaria per la realizzazione.

La scheda termina con la richiesta di formulazione di una domanda aperta da rivolgere a un addetto della logistica di Alprose SA, con l'obiettivo di stimolare la riflessione e dare significato alla visita aziendale prevista per la settimana successiva.

Resoconto dell'attività. Il lavoro è stato svolto a coppie tra compagni di banco; curioso è stato notare che alcune idee iniziali poco realizzabili (ad esempio un unico strato composto da 100 tavolette) siano state revisionate e autocorrette in corso d'opera mediante la discussione tra compagni.

La difficoltà più diffusa è stata la visualizzazione tridimensionale; alcuni studenti hanno trovato complesso immaginare come disporre le tavolette in modo compatto e calcolare le dimensioni dell'imballo. Alcuni progetti sono riportati nelle Figure 23 e 24.

6. Alprose SA è un produttore svizzero di cioccolato con sede a pochi passi dalla scuola media. Fondata nel 1957 con il nome di Titlis-Chocolat, l'azienda ha assunto la denominazione attuale nel 1983. Produce una vasta gamma di prodotti a base di cioccolato ed esporta i suoi prodotti in tutto il mondo. L'azienda è impegnata nella produzione sostenibile, dichiarando una produzione a impatto neutro di CO₂.

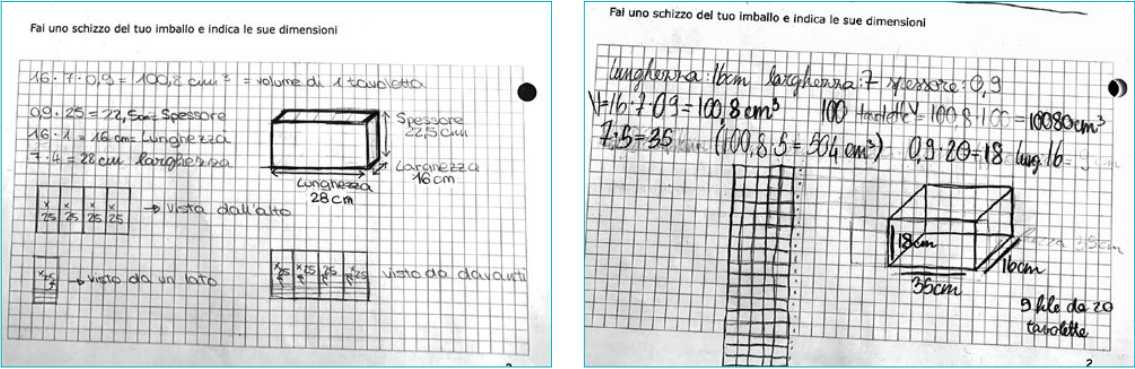


Figura 23. Progetti di due coppie di allievi.

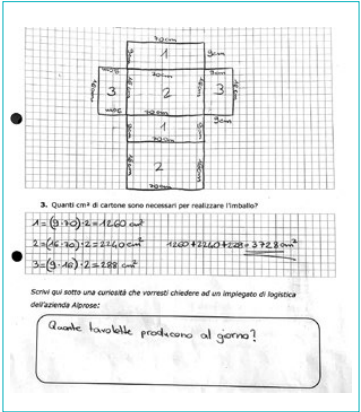


Figura 24. Sviluppo dell'imballo progettato da una coppia di allievi.

Le curiosità sulle attività di logistica emerse dagli allievi sono sintetizzate nella Tabella 2.

	Domande per Alprose SA
1	Quante tavolette vengono prodotte al giorno?
2	Dove spedite?
3	Per ogni viaggio quanti imballaggi trasportate su un camion?
4	È un lavoro appagante? Lo stipendio è buono? Ti trovi bene con i colleghi?
5	Quante tavolette vendete al giorno?
6	Quanto lavori?
7	L'Alprose SA c'è solo a Caslano?
8	C'è qualcuno che assaggia il cioccolato per verificare se è buono?
9	Quale è il carico più pesante che vi è arrivato?
10	Dove conservate il cioccolato? A che temperatura? Per quanto tempo?
11	Quanto tempo avete impiegato per trovare il modo che utilizzate adesso per fare gli imballi e distribuire il cioccolato?
12	Quanto cioccolato potete trasportare?
13	Cosa succede se tutte le tavolette si rompono durante una spedizione?
14	Si può trasportare la merce senza un congelatore/frigo o comunque senza un ambiente freddo?
15	Quanti viaggi fate per trasportare la merce?

Tabella 2. Domande raccolte dagli allievi per Alprose SA.

3.2.10 Attività 10: visita alla fabbrica Alprose SA

Obiettivi. Anche per questa attività sono previsti tre obiettivi:

- Riconoscere le fasi principali di un sistema produttivo reale, dalla materia prima al prodotto finito, attraverso l'osservazione diretta di un contesto industriale.
- Collegare concetti matematici (volume, misure, tempi, processi) a situazioni reali osservate durante la visita aziendale.
- Sviluppare consapevolezza rispetto alle professioni legate al mondo della produzione e della logistica, anche in ottica orientativa.

Descrizione dell'attività. Il giorno 25 marzo 2025 la classe si è recata in visita presso Alprose SA. Presso lo stabilimento di Caslano, l'azienda Alprose SA gestisce un centro visitatori e un museo inaugurato nel 1991, che offre l'opportunità di osservare da vicino il processo di produzione del cioccolato attraverso un corridoio sopraelevato. Il museo presenta mostre interattive sulla storia del cioccolato e sulla storia dell'azienda. La visita ha lo scopo di illustrare come funziona un processo produttivo dall'approvvigionamento della materia prima alla consegna del prodotto finito al cliente finale e l'impatto dei trasporti e della logistica nella catena di approvvigionamento aziendale.

Resoconto dell'attività. Grazie alla disponibilità del reparto marketing di Alprose SA, è stato possibile organizzare in via eccezionale un incontro con i responsabili dei reparti di produzione e logistica, offrendo agli studenti l'opportunità di porre direttamente le domande preparate nella fase precedente del percorso didattico (Tabella 2). Questo momento di confronto si è rivelato particolarmente significativo: gli studenti hanno mostrato curiosità e attenzione e le loro domande hanno evidenziato un reale interesse per il funzionamento del sistema produttivo e logistico aziendale (Figura 25). Nonostante la vivacità che li contraddistingue in aula, i ragazzi hanno saputo mantenere un comportamento rispettoso e partecipativo durante tutta la visita. Questo ha contribuito a creare un clima positivo e ha favorito un'interazione autentica con il personale dell'azienda, che si è mostrato molto disponibile e competente.



Figura 25. Incontro con i responsabili di produzione e logistica di Alprose SA.

4 Bilancio dell'esperienza

Il percorso didattico è stato generalmente accolto in modo positivo dagli studenti, i quali hanno potuto vivere un approccio alla matematica legato al suo utilizzo in contesti di realtà. Questo ha portato ad alcuni risultati positivi rispetto a tre dimensioni: il piacere associato all'apprendimento della matematica, la percezione degli studenti riguardo al senso di imparare la matematica, e la percezione dell'utilità della matematica. Questi risultati sono stati raccolti tramite questionari, le cui analisi puntuali e approfondite sono presentate nel già citato lavoro di tesi. Qui si riportano a titolo di esempio alcuni protocolli significativi tratti dal questionario finale.

Nella Figura 26, ad esempio, uno studente scrive che, rispetto all'inizio (dell'anno scolastico), in cui veniva proposta una matematica più slegata da contesti realistici, le attività svolte durante l'itinerario hanno aumentato il senso di piacere associato alla disciplina.

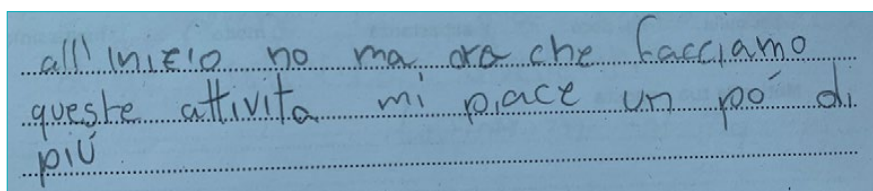


Figura 26. Motivazione di un allievo associata a un livello medio di piacere per la matematica.

In Figura 27, invece, un altro studente dichiara che sia molto utile imparare la matematica, sia per la sua utilità nella vita di tutti i giorni, sia per motivi legati alla capacità di ragionamento che si sviluppa con lo studio della disciplina.

3. Pensi che sia utile imparare la matematica?

☐ per nulla ☐ poco ☐ abbastanza ☐ molto ☒ moltissimo

Motiva la tua risposta

Perché spiega molte cose che sono utili ed interessanti. Inoltre insegna a ragionare con la propria testa

Figura 27. Motivazione di un allievo associata a un livello alto di utilità della matematica.

In Figura 28 è riportata la risposta di uno studente in merito all'utilità dell'apprendimento della matematica; nel protocollo emerge il riferimento a contesti applicativi e professionali, con l'esempio specifico dell'itinerario svolto in classe.

3. Pensi che sia utile imparare la matematica?

☐ per nulla ☐ poco ☐ abbastanza ☐ molto ☒ moltissimo

Motiva la tua risposta

*Si usa in tante cose giornaliere
e in tantissimi lavori come visto oggi
nella fabbrica di cioccolato.*

Figura 28. Motivazione di un allievo associata a un livello alto di utilità della matematica.

L'impostazione dell'itinerario basato su contesti di realtà ha favorito, per diversi alunni, una comprensione più approfondita della matematica. La Figura 29 raccoglie tre protocolli in cui gli alunni esplicitano le ragioni associate a una maggiore comprensione della disciplina: emergono motivazioni legate al capire di più, ma anche alla maggiore motivazione e alla maggiore partecipazione. Sembra dunque che il contesto di realtà riesca ad attivare meccanismi motivazionali che favoriscono la comprensione.

perche si capisce di più

Si perché così mi motiva a continuare

Perché ti rende più Partecipe.

Figura 29. Opinione di tre allievi in merito alla maggiore comprensione della matematica al termine dell'itinerario didattico.

In prospettiva futura, sarebbe stimolante estendere l'approccio basato sui contesti di realtà ad altri ambiti della matematica – come la geometria o la probabilità – e a diversi livelli scolastici, per verificare la trasferibilità e valutare inoltre l'impatto nel lungo periodo.

5 Conclusioni

L'esperienza didattica descritta in questo articolo, incentrata sull'applicazione della matematica nel contesto concreto dei trasporti e della logistica, ha offerto preziose intuizioni sull'efficacia di un approccio metodologico che va oltre la mera astrazione. Il progetto ha dimostrato in modo tangibile quanto sia cruciale fornire agli studenti occasioni dirette per "toccare con mano" la matematica e vi-

verla come una componente intrinseca e funzionale della realtà circostante. L'integrazione di concetti matematici in contesti realistici ha permesso di costruire esperienze di apprendimento autentiche, significative e capaci di lasciare un segno duraturo nella comprensione e nell'atteggiamento degli studenti. Tale approccio non solo ha stimolato un maggiore interesse e una motivazione intrinseca verso la disciplina, ma ha anche facilitato la comprensione dei concetti matematici stessi. Gli studenti hanno potuto constatare direttamente come numeri, relazioni, calcoli e modelli siano strumenti per analizzare, interpretare e operare nel mondo reale, superando la percezione della matematica come un insieme di regole astratte e slegate dalla quotidianità; inoltre, hanno compreso che dietro a decisioni pratiche, come la pianificazione di un viaggio, la gestione di un magazzino o la determinazione di una tariffa, si possono celare processi matematici.

L'efficacia di questo approccio, coerente con le indicazioni del Piano di studio, risiede nella sua capacità di promuovere il coinvolgimento attivo e la partecipazione diretta degli studenti. Trasformare la matematica da materia passiva a strumento di indagine e risoluzione di problemi reali ha non solo migliorato le loro competenze procedurali e concettuali, ma ha anche potenziato la loro percezione della disciplina in termini di utilità, senso e piacere. Gli studenti sono diventati protagonisti attivi dei processi di matematizzazione e modellizzazione, acquisendo una maggiore consapevolezza del valore della matematica nella loro vita e nelle future scelte professionali. In sintesi, questa esperienza rafforza la convinzione che un insegnamento della matematica contestualizzato e basato su situazioni significative sia fondamentale per aumentare la motivazione verso l'apprendimento della matematica e per farla percepire come una risorsa utile e potente, non solo come una materia scolastica.

Si auspica che esperienze didattiche di questo tipo possano essere replicate e ulteriormente sviluppate in altri ambiti e livelli scolastici, per continuare a dimostrare e valorizzare il ruolo insostituibile della matematica nella comprensione e nella trasformazione del mondo che ci circonda.

Bibliografia

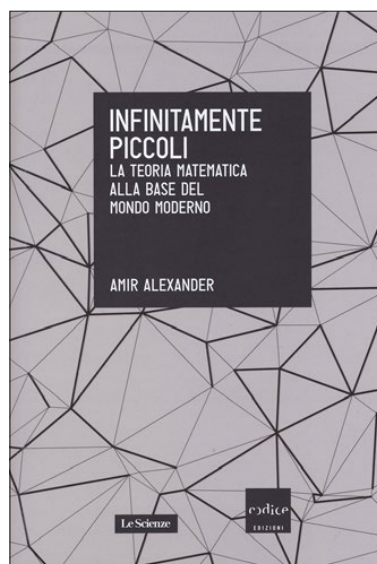
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>
- Franchini E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 38–63. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.3>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel.
- Klassen, S. (2006). A Theoretical Framework for Contextual Science Teaching. *Interchange*, 37(1–2), 31–62.
- Lerman, S. (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.
- Merriam-Webster Inc. (2003). *Dizionario WWWebster*. <http://www.merriamwebster.com/dictionary>
- Piccaluga Dodero, L. (2025). *L'apprendimento della matematica attraverso contesti di realtà. Applicazione nel mondo dei trasporti*. Tesi Master. Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. <https://doi.org/10.71910/supsi.12437>
- Sbaragli, S., & Canducci, M. (2025). Utilità e inutilità della matematica nel XXI secolo. In D. Antognazza (Ed.), *Funamboli del cambiamento. Competenze per mantenere l'equilibrio in un mondo che si trasforma* (pp. 57–66). Meridiana.

Recensioni

DdM

Recensioni¹

Alexander, A. (2015). *Infinitamente piccoli. La teoria matematica alla base del mondo moderno*. Le Scienze, Codice Edizioni.



Infinitamente piccoli è un saggio narrativo che intreccia biografie di matematici, istituzioni secolari come la Compagnia di Gesù e fenomeni sociali e politici, seguendo l'evolversi di un'idea, quella degli *infinitesimi*, attraverso i secoli. Si tratta di una "preistoria del calcolo" in cui gli *infinitesimi* e, soprattutto, il *metodo degli indivisibili*, diventano il punto di frizione tra due diverse visioni del mondo. Occorre chiarire, prima di proseguire, che per *infinitesimi* si intendono grandezze arbitrariamente piccole usate per ragionare sul continuo e sulla sua composizione, mentre il *metodo degli indivisibili* di Cavalieri propone di considerare una linea come somma di punti, una superficie come somma di linee e un solido come somma di superfici, così da ricavare lunghezze dall'unione di punti, aree dall'unione di linee e volumi dall'unione di superfici. Le due visioni del mondo che si considerano sono, da un lato, l'ordine deduttivo e gerarchico promosso dai Gesuiti, coerente con l'aristotelismo scolastico e con una matematica "costruttiva", che si sviluppa a partire da principi chiari e immutabili; dall'altro, una matematica "sperimentale", che si confronta con problemi irrisolti e, grazie a questo confronto, sposta i confini della disciplina stessa. Nel libro incontriamo i matematici Cavalieri, Galileo, Guldin, Clavius, Wallis e Hobbes, oltre agli echi delle guerre civili inglesi e alle tensioni della Controriforma. Il libro racconta come l'accoglienza o il rifiuto degli indivisibili in matematica siano legati non solo al costituirsi e allo svilupparsi interno alla disciplina, ma riflettano e alimentino divergenze culturali e politiche legate al modo di concepire ragione, autorità e libertà intellettuale.

La tesi del libro è la seguente: i dibattiti sugli indivisibili plasmarono non solo la matematica, e in particolare il calcolo, soprattutto nelle forme in cui oggi viene studiato nella scuola media superiore, ma anche la nascita della modernità scientifica stessa. Il volume segue due linee narrative principali. In Italia, i Gesuiti contrastano gli indivisibili di Cavalieri fino al 1632, anno in cui vengono vietate tutte

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

le pratiche di insegnamento che propongano la tesi per cui il continuo (linee, superfici, solidi) risulti composto da indivisibili (punti senza estensione, linee senza larghezza ecc.). In Inghilterra, la lunga polemica tra John Wallis e Thomas Hobbes, nata attorno al *De Corpore* (1655) e ai tentativi hobbesiani di ridurre la matematica a una geometria euclidea rigorosa, diviene il simbolo dello scontro tra un'etica "*liberal*", sperimentale, aperta a metodi nuovi e potenti come quello degli indivisibili, e una visione tradizionalista che difende ordine unitario, rigore classico e diffidenza verso quelle stesse innovazioni.

Muovendosi con piglio divulgativo, Alexander insiste sul nesso tra pratica matematica e ordine sociale, mostrando come le tecniche del continuo "sfilacciato" (linee come composti di punti infinitesimi, superfici come composti di linee ecc.) minassero l'ideale di un cosmo perfettamente regolato. I capitoli del libro sono brevi, il ritmo narrativo è buono e la storia dei personaggi è avvincente. Non è un manuale di storia della matematica, né una monografia filologica: si tratta piuttosto di una storia culturale che, senza trattazioni matematiche formali, rende palpabile perché il metodo degli indivisibili potesse apparire "pericoloso".

Le scelte narrative fatte rendono questo testo particolarmente adatto a insegnanti² e studenti interessati a collegare contenuti matematici e dimensione storico-epistemologica della disciplina. La scelta divulgativa, tuttavia, espone ad alcune criticità, da tenere in considerazione nel trattare l'argomento con gli studenti: quella principale è legata all'utilizzo di infinitesimi e indivisibili quasi come sinonimi, laddove la storiografia distingue i due concetti (e i documenti gesuiti citati nel testo condannano specificamente gli indivisibili).

Al di là di questo aspetto, il libro ha il pregio di mostrare come la matematica sia soprattutto una pratica sociale, che si sviluppa grazie allo sforzo collettivo di matematici che vivono in epoche storiche che limitano o promuovono determinati tipi di esplorazioni. Ad esempio, la scelta di accettare una tecnica euristica potente ma "sospetta" come il metodo degli indivisibili, non è una scelta individuale, ma dipende da comunità, istituzioni, regole e standard che mutano nel tempo. Il calcolo nasce nonostante (e grazie a) strumenti imperfetti, e prendere atto di questo nel contesto classe supporta una visione epistemologicamente corretta dello svilupparsi della matematica come fatto umano. L'oscillazione fra "pratiche che funzionano", come il metodo degli indivisibili, e la loro formalizzazione successiva data dall'analisi infinitesimale, diventa un buon studio di caso per riflettere in classe sul rapporto tra problemi, metodi risolutivi e giustificazioni formali: confrontare estratti di Cavalieri con pagine di calcolo moderno può alimentare discussioni su cosa sia accettabile come dimostrazione.

Sul piano editoriale, l'edizione italiana, a cura di Laura Servidei, mantiene lo stile scorrevole e coinvolgente dell'originale. Rende con chiarezza i passaggi tecnici senza appesantirli e mantiene una resa terminologica generalmente attenta. Il testo può essere letto a diversi livelli: la narrazione storica si segue anche senza essere specialisti in matematica, mentre per alcuni passaggi più tecnici una formazione matematica può essere d'aiuto.

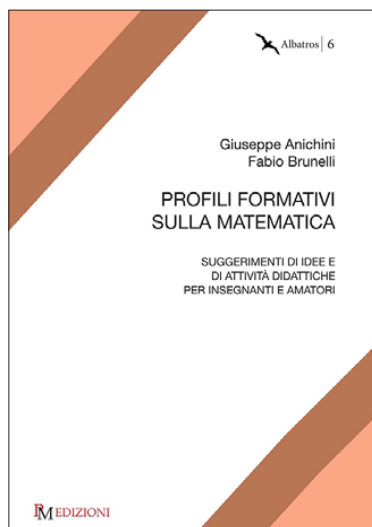
Il libro è nel complesso una storia delle idee capace di intrecciare vicende biografiche, istituzioni e pratiche matematiche senza cadere nel tecnicismo né nell'aneddotica; un quadro chiaro dei conflitti che hanno accompagnato la nascita del calcolo, con qualche inevitabile semplificazione, ma con una tesi coerente e argomentata. Un contributo solido e leggibile, che restituisce con buona precisione il profilo di una stagione in cui la matematica, e con essa una certa idea di modernità, stava prendendo forma.

Marzia Garzetti

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

2. Il genere maschile viene usato in questa sezione della rivista per designare persone, indipendentemente dal genere.

Anichini, G., & Brunelli, F. (2025). *Profili formativi sulla matematica: Suggerimenti di idee e di attività didattiche per insegnanti e amatori*. PM Edizioni.



Scrivendo Gilbert K. Chesterton, nella sua *Autobiografia* (Chesterton, 1936), che tutti i bambini hanno una curiosità e una voglia di sapere che li muove, che li spinge a fare domande e ascoltare le risposte che gli adulti riescono a dare, e che poi questa spinta a un certo punto si spegne. Con il suo spirito molto *British*, Chesterton aggiungeva che, in questo processo di spegnimento, la scuola ha un suo ruolo rilevante. Giuseppe Anichini e Fabio Brunelli partono dalla constatazione che questo è vero, in particolar modo, per la matematica. Questo libro vuole proporre degli esempi di situazioni in cui i lettori (o i loro allievi) si mettono in gioco e provano per davvero a fare matematica: vale a dire, si incuriosiscono e si pongono delle domande, esplorano dei casi particolari, cercano dei collegamenti, scoprono delle proprietà generali, delle relazioni, delle somiglianze e delle differenze tra cose diverse. Paul R. Halmos (1985) diceva che la matematica non è una scienza deduttiva, quello è un *cliché*. Al di là della provocazione, questa frase ci porta a considerare il rapporto tra il fare matematica e l'organizzare la matematica: sono due cose strettamente legate, in cui l'argomentazione che deve sempre accompagnare il fare trova il suo compimento e la sua sistemazione nelle dimostrazioni con cui il discorso matematico viene organizzato e validato. Nella scuola, troppo spesso viene proposto (o imposto) agli allievi il prodotto finito, metabolizzato da secoli di cultura e di trasmissione.

In situazioni che spaziano dalla scuola elementare alla matematica del liceo scientifico, gli autori accompagnano il lettore in questa dinamica di scoperta, riprendendo e dando significato a parole chiave come didattica laboratoriale (tutti, troppi ne parlano senza fondamento e facendo più danni che altro!), matematica nella realtà, apprendimento condiviso. I quattro "classici" ambiti del curriculum matematico delle Indicazioni Nazionali (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012) – Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni – sono tutti presenti, permettendo all'insegnante di trovare spunti immediati per il proprio lavoro di classe. La lunga esperienza come insegnanti e formatori, in diversi livelli di insegnamento, di Giuseppe Anichini e Fabio Brunelli è una garanzia di validità delle attività proposte.

La lettura, come per altri libri degli stessi autori, è piacevole, con un sottofondo di arguzia e leggerezza toscana che non fa mai male.

Un libro, quindi, che trova il suo posto nello scaffale di ogni insegnante che voglia stimolare la curiosità dei propri allievi.

Bibliografia

Chesterton, G. K. (1936). *Autobiography*. Hutchinson & Co.

Halmos, P. R. (1985). *I want to be a mathematician: An automathography*. Springer.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Giorgio Bolondi

Facoltà di Scienze della Formazione
Libera Università di Bolzano, Italia

Kitagawa, K., & Revell, T. (2024). *Matematici segreti. Storia inaspettata della matematica e dei suoi pionieri sconosciuti*. Aboca.



Diversi mesi fa mi è capitato di portare qualche bottiglia di vino romagnolo a una sommelier e proprietaria di un'enoteca del Cantone Ticino: l'intento era di farle conoscere quella che io ritenevo essere un'eccellenza enologica del mio territorio natio, e allo stesso tempo favorirne l'inserimento tra le proposte del locale. Arrivai con un paio di bottiglie: un trebbiano e un'albana nera. La proprietaria prese la bottiglia di trebbiano, la girò e rigirò fra le mani, infine esclamò: «Bella etichetta!». Poi ovviamente la aprì, e dopo averlo odorato e maneggiato per qualche secondo affermò: «Ottimo tappo!». Nella piacevole degustazione e conversazione che seguì, mi raccontò diverse cose interessanti sul mondo dei vini; tra le altre, mi disse che la cura dell'etichetta e il tipo di tappo e di bottiglia utilizzati possono suggerire molto riguardo alla qualità della bevanda contenuta all'interno nel vetro. Qualità che – *ça va sans dire!* – deve poi essere testata sul campo rigoroso e severo del palato e del gusto (per i curiosi: il trebbiano le piacque, meno l'albana nera).

Tutto questo per dire che se da un lato è vero che l'abito non fa il monaco e che la forma non è sostanza, dall'altro dobbiamo ammettere che spesso ci facciamo un'idea del monaco dall'abito, e della sostanza dalla forma. A chi poi volesse giudicare questo atteggiamento umano come leggero, approssimativo e immaturo, risponderei citando il celebre aforisma di Oscar Wilde in cui si afferma che «solo le persone superficiali non giudicano dalle apparenze».

Ecco, con i libri io credo succeda un po' la stessa cosa. Quando per la prima volta prendo in mano un testo mi soffermo qualche minuto sul suo involucro: leggo la copertina, il retro di copertina, la terza e la quarta di copertina, e soppeso le prime informazioni fornite. È come guardare l'etichetta di un vino o annusarne il tappo, e così farsi un'idea della bevuta.

In questo caso, nella parte di copertina che segue il sottotitolo si legge: «La storia della matematica che ci siamo fin qui raccontati è incompleta, condizionata dall'eccessiva centralità data all'antica Grecia».

Questa affermazione iniziale mi lascia perplesso: a chi si riferisce quel «ci siamo fin qui raccontati»? Agli specialisti? Alla popolazione scolastica? Al grande pubblico? Si tratta di tre uditori distinti che possono coinvolgere gradi di precisione diversi. Per ovvi motivi di semplificazione del messaggio, ad esempio, ai libri divulgativi solitamente vengono concesse delle licenze che vengono negate ai libri accademici. Questo fa un po' di differenza, perché affermazioni riguardanti una presunta incompletezza della storia della matematica «che ci siamo fin qui raccontati» non potrebbero essere sostenute

con leggerezza se gli autori si confrontassero, ad esempio, con pietre miliari della storiografia della matematica come la *Storia della matematica* di Boyer (prima edizione originale del 1968) o la *Storia del pensiero matematico* di Kline (prima edizione originale del 1972). Il confronto potrebbe prendere in considerazione anche solo il numero di pagine di questi testi: il libro di Kitagawa e Revell ne ha 394; l'edizione del Boyer che ho a casa 925 (scritte in piccolo) e quella del Kline 1526 (divise in due volumi). Mi pare superfluo aggiungere altri elementi su questo aspetto, ma si potrebbero ad esempio considerare i contenuti di ogni capitolo dei tre volumi per rendersi conto che, se proprio bisogna parlare di incompletezza, non si deve certo cercarla nella «storia della matematica che ci siamo fin qui raccontati». Ma andiamo al tappo...

Si afferma subito dopo che questa presunta incompletezza sia stata «condizionata dall'eccessiva centralità data all'antica Grecia». Dunque, si prende per dato di fatto la centralità del pensiero matematico greco, ma allo stesso tempo si giudica eccessiva l'importanza attribuitagli. Ora anche questo aspetto a me pare gettato con leggerezza, e soprattutto attraverso una formulazione che non lascia margini di opinione, ma è presa come certa: si dà per assodata una sopravvalutazione dell'importanza della matematica greca. La questione è sicuramente complessa, e io non ho le competenze né questa è la sede per affrontarla. Tuttavia, mi chiedo che senso abbia partire con un'ipotesi come questa per la costruzione di un libro di storia, seppure a vocazione divulgativa. Perché si considera "eccessiva" l'importanza della matematica greca data dalla storia della matematica? Perché relativizzare quello che tanti hanno definito "miracolo greco", e cioè il primato greco di aver fatto della matematica una disciplina logico-deduttiva da cui tutte le culture successive hanno attinto? Tra l'altro questo non vuol dire che altre civiltà non abbiano dato contributi, altrettanto importanti: ad esempio il sistema di numerazione utilizzato oggi, che deriva da quello dell'antica India; oppure l'algebra moderna, i cui prodromi vanno ricercati tanto nel lavoro di Diofanto di Alessandria del III-IV secolo d.C. quanto nel lavoro del matematico arabo al-Khwārizmī, vissuto nel IX secolo d.C.; senza considerare che furono proprio i matematici indiani e arabi a custodire e ampliare l'eredità dei Greci dopo il declino della scuola di Alessandria. A mio avviso questi riconoscimenti culturali non sono in contraddizione con l'ammettere anche la peculiarità del pensiero matematico greco, a cui va il merito di aver trasformato la matematica da sapere pratico, utile per i calcoli o per la geometria di base, a scienza vera e propria, capace di partire da principi generali per arrivare a verità universali e necessarie. Riconoscere questo primato non significa sminuire il valore degli altri contributi, ma essere aderenti a quello che è stato il posto del pensiero greco nella grande storia dell'umanità.

Il testo in copertina continua e si conclude così: «La storia vera, invece, è più simile a una saga avvincente, un'impresa autenticamente globale dove sono sempre le idee a essere in primo piano, ma non si possono separare dalle persone che le hanno avute».

Tralasciando l'avverbio «invece», che sembra voler nuovamente indurre il lettore a pensare di essere stato finora ingannato, la frase conclusiva della copertina mi trova d'accordo; questo perché è chiaro a chiunque abbia un po' di dimestichezza con l'evoluzione del pensiero e delle idee della matematica (ma non solo della matematica) che lo sviluppo di questa disciplina abbia coinvolto il mondo intero, e che si sia arricchito e tuttora si stia arricchendo di contributi da parte di molti esseri umani, con le loro storie personali e le loro culture d'origine.

La ricognizione dell'etichetta e del tappo di questo vino fatto di parole non sarebbe conclusa, ma più o meno lo stile e il contenuto degli altri elementi esterni è sulla falsa riga di quanto già analizzato (nella seconda di copertina si legge, ad esempio, che «*Matematici segreti* è una nuova appassionante e *finalmente completa* ricognizione sulla storia della matematica», corsivo mio).

Veniamo quindi alla degustazione vera e propria; degustazione che è a mio avviso molto più interessante dell'etichetta e del tappo. Infatti, a dispetto della perplessità suscitata dal suo apparato editoriale di presentazione, il libro ha delle qualità da diversi punti di vista. Innanzitutto, la scorrevolezza della scrittura, che lo rende di una fruizione immediata: anche se in parte dovuta alla scelta di non presentare molta matematica, ma piuttosto la storia delle idee e delle persone che lungo i secoli

L'hanno fatta, questa fluidità rende la lettura del libro gradevolissima. Lodevole è inoltre il tentativo di dar luce ad alcuni fatti o persone poco conosciuti: si parla di matematica antica, di sistemi di numerazione sumero, babilonese, egiziano; si parla della matematica cinese dei *Nove capitoli sull'arte della matematica*, testo di riferimento della matematica orientale la cui redazione è sostanzialmente contemporanea a quella degli *Elementi* di Euclide; si parla di alcune delle donne che hanno contribuito allo sviluppo della disciplina (Ipazia, certo, ma anche Elisabetta di Boemia, Émilie du Châtelet, Sof'ja Kovalevskaja, Laura Maria Caterina Bassi Veratti, Emmy Noether). E poi ancora la trattazione di alcuni temi in modo originale e trasversale: il Capitolo 4 intitolato *La nascita del tempo*, ad esempio, affronta la questione dei calendari antichi, per poi passare ai sistemi di misurazione del tempo tramite orologi, concludendo con la prospettiva einsteiniana della relatività del tempo; oppure il Capitolo 7, intitolato *Il sogno impossibile*, in cui si propongono le storie di alcune grandi ambizioni dell'umanità, dal desiderio di volare a quello di poter prevedere il futuro, e il ruolo della corrispondenza epistolare come strumento di dialogo e confronto tra le menti del XVI e XVII secolo. Infine, la presenza di temi classici raccontati con chiarezza: ad esempio la nascita e l'evoluzione del numero zero (Capitolo 5), dalle prime intuizioni del sistema numerico maya e babilonese al "puntino" utilizzato dai matematici indiani del periodo Gupta, fino all'arrivo del numero anche in Europa, avvenuto grazie al lavoro di Leonardo Fibonacci; oppure la nascita dell'analisi matematica (Capitolo 8), in cui si racconta anche la storia della scuola di Kerala, in India, nella quale furono elaborati metodi e strumenti tipici di quella che sarebbe poi divenuta, un paio di secoli più tardi, l'analisi matematica di Newton e Leibniz;³ o ancora la rivoluzione delle geometrie non euclidee (Capitolo 12), raccontata attraverso gli aneddoti della vita di János Bolyai e Nikolai Lobachevsky.

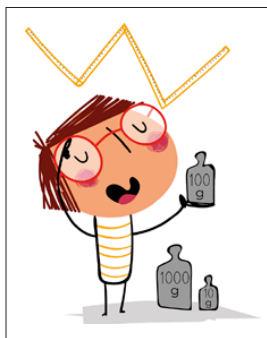
L'impostazione del volume è quella di intrecciare la tradizione occidentale con i contributi di culture indiane, arabe e cinesi. A tratti questa alternanza può sembrare un po' artificiosa, ma l'intento di restituire un quadro più inclusivo della storia della matematica è interessante, e ha il merito di invitare il lettore a considerare la matematica come un'impresa corale, arricchita nei secoli da civiltà diverse. In definitiva, *Matematici segreti* non è una "storia completa" della matematica, come talvolta promette l'apparato editoriale, ma una narrazione divulgativa ben scritta e accessibile, capace di dare voce a personaggi e vicende poco trattate. Se il contenitore può lasciare qualche dubbio, il contenuto offre invece un'esperienza di lettura piacevole, che stimola curiosità e apre prospettive nuove per chiunque abbia interesse verso questa disciplina, siano essi insegnanti, studenti, o semplicemente amatori. Insomma: un vino dall'etichetta discutibile, ma dal gusto intrigante.

Michele Canducci

Liceo Scientifico "A. Einstein" di Rimini, Italia

3. I due autori scelgono di non dare lo stesso spazio (anzi, non ne viene dato affatto) alla storia di altri antesignani, questa volta greci, del pensiero infinitesimale: Democrito e lo sviluppo di tecniche di calcolo di volumi con considerazioni sugli infinitesimi, ad esempio; oppure Eudosso e il metodo di esaustione; o ancora Archimede, che perfezionò il metodo di Eudosso e anticipò i concetti di limite e di somma illimitata di termini.

Sbaragli, S., Barbero, M., Bettoni, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2025). *MaMa: matematica per la scuola elementare – Grandezze e misure*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. <https://mama.edu.ti.ch/>



Sulla piattaforma del progetto “MaMa – Matematica per la scuola elementare” (<https://mama.edu.ti.ch/>) sono disponibili da fine ottobre più di 260 nuovi materiali, tra pratiche didattiche, giochi, supporti e schede per l'allievo, relativi all'ambito “Grandezze e misure”. I documenti, accessibili gratuitamente, arricchiscono una cospicua raccolta (circa 200 materiali per i docenti e 1300 schede per gli allievi) creata per supportare gli insegnanti della scuola elementare nella progettazione e sperimentazione di significativi ed efficaci percorsi e attività di matematica rivolti all'apprendimento dei loro allievi. I materiali per i docenti sono di diversa natura e sono pensati per orientare la progettazione a differenti livelli di granularità: 11 contesti di senso, 82 pratiche didattiche, 8 documenti relativi alla proposta di problemi in aula, 61 giochi, 29 supporti. Questi numeri sembrano già impressionanti, ma non è finita qui: aprendo ognuna di queste proposte, ci si imbatte in documenti ricchi e articolati che descrivono centinaia di attività o percorsi in progressione di difficoltà, con l'aggiunta di possibili varianti. Le proposte sono pensate per favorire la partecipazione attiva degli allievi e offrire al docente un ventaglio di opzioni tra cui scegliere, permettendo di alternare nella propria didattica momenti di scoperta a fasi di consolidamento. Inoltre, il docente ha l'opportunità di editare facilmente i testi, i valori numerici, e le immagini delle schede per l'allievo, gli allegati di alcune pratiche, alcuni giochi e supporti in modo che possano essere differenziati seguendo le esigenze del gruppo classe e dei singoli allievi. I materiali MaMa, dunque, pur essendo stati progettati in modo coerente con le indicazioni del Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022), si rivelano utili ed efficaci anche per i docenti di scuola primaria italiani. E ciò vale anche per il nuovo ambito pubblicato, “Grandezze e misure”, che non corrisponde a uno specifico nucleo delle Indicazioni Nazionali italiane (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012), ma che è trasversale ai vari ambiti matematici: le proposte MaMa di questo ambito matematico, infatti, possono essere integrate con flessibilità all'interno di percorsi sui vari ambiti previsti dalle rispettive indicazioni curriculari.

Anche per i materiali dell'ambito “Grandezze e misure” (che si raggiungono attraverso l'apposito filtro per argomenti e contenuti) si può notare l'attenzione posta nella scelta della tipologia e della sequenzialità delle proposte, del linguaggio utilizzato e delle rappresentazioni grafiche. Tale cura deriva dall'osservazione delle prassi didattiche efficaci degli insegnanti del territorio ticinese e italiano arricchite, validate e supportate dagli spunti derivanti dalle ricerche in didattica della matematica.

I materiali sono suddivisi a seconda della grandezza trattata, spaziando tra grandezze legate prevalentemente all'ambito geometrico (lunghezza, area, ampiezza, volume e capacità) a quelle più generali (massa, tempo, valore monetario), dando inoltre spazio ad argomenti come le relazioni tra grandezze, in particolare tra perimetro e area, e a altre particolari grandezze tra cui rientrano anche quelle meno trattate dal punto di vista matematico alla scuola elementare (temperatura, umidità, pressione atmosferica, densità ecc.). A ogni grandezza tradizionalmente trattata a scuola sono dedicate una o più pratiche e diverse schede per l'allievo e a queste si accompagnano alcune altre pratiche didatti-

che che trattano aspetti generali e trasversali. All'interno di ogni pratica dedicata a una determinata grandezza si può osservare una sequenzialità ricorrente nelle attività che vengono descritte: dalle prime proposte pensate per lavorare con i più piccoli in modo intuitivo, per poi passare ad attività di confronto qualitativo (diretto e indiretto, ovvero senza e con mediazione di un intermediario) e quantitativo con unità di misura non convenzionali (prima non condivise e poi condivise), per finire con le attività per gli allievi più grandi relative all'introduzione delle unità di misura convenzionali (con eventuali cenni alla loro storia) e alle conversioni tra unità di misura.

Anche le pratiche relative a temi trasversali risultano particolarmente ricche e prestano particolare attenzione alla gradualità delle proposte presentate. In particolare, "Scopriamo le grandezze e le misure" punta l'attenzione su attività pensate per introdurre e distinguere i concetti di grandezza e misura, ripercorrendo in generale le tappe essenziali per trattare una grandezza e approfondendo alcuni aspetti trasversali, tra cui la stima, l'approssimazione, l'uso di strumenti e l'incertezza di misura. Un'altra preziosa risorsa per i docenti è la pratica didattica "Formule delle aree dei poligoni", nella quale si insiste sull'importanza di scoprire insieme agli allievi le formule delle aree dei poligoni a partire dall'area del rettangolo e di mettere a confronto diverse strategie utilizzate, valorizzandole e condividendole.

In linea con i materiali dell'ambito "Geometria", anche per questo ambito si può apprezzare la particolare attenzione alle figure proposte, alla scelta del linguaggio utilizzato, alla simbologia dei sistemi di rappresentazione, e al modo per indicare nei formulari i diversi enti matematici, con lo scopo di limitare l'insorgere di misconcezioni. I documenti relativi alle grandezze geometriche, nello specifico, sono fortemente basati sulle concezioni e conoscenze geometriche fondamentali, già trattate nel materiale relativo all'ambito "Geometria". Per questi documenti il team di progetto ha scelto di non utilizzare termini che, pur diffusi nel linguaggio comune, non trovano riscontro nel lessico matematico e rischiano di indurre una visione rigida delle figure o inficiare il loro riconoscimento in posizione non convenzionale. Ne sono un esempio l'area del rettangolo espressa come «lunghezza di un lato per la relativa altezza» al posto del diffuso «base per altezza», oppure per l'area del trapezio l'espressione «somma delle lunghezze di due dei suoi lati paralleli» al posto di «base maggiore più base minore», oppure ancora nell'area del rombo espressioni come «lunghezza della diagonale 1 x lunghezza della diagonale 2» al posto di «diagonale maggiore x diagonale minore» per non usare aggettivi come minore/maggiore o lungo/corto in riferimento agli enti geometrici.

E questa è solo una parte dei materiali dell'ambito "Grandezze e misure" che completano il progetto MaMa, su cui il team di progetto è al lavoro da ormai 6 anni. Una news sul sito, infatti, dichiara che sono in arrivo altri materiali che verranno pubblicati nei prossimi mesi, tra cui pratiche, giochi, supporti e documenti relativi alla risoluzione di problemi. La piattaforma sarà a quel punto una fonte completa, autorevole e gratuita di proposte per docenti e allievi di scuola elementare nonché un archivio e un riferimento molto prezioso per i formatori di futuri insegnanti che, come me, mi auguro lo sfrutteranno a pieno negli anni a venire.

Chiara Giberti

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche
Università di Modena e Reggio Emilia, Italia

Bibliografia

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Biografie di matematici

Alberto Saracco

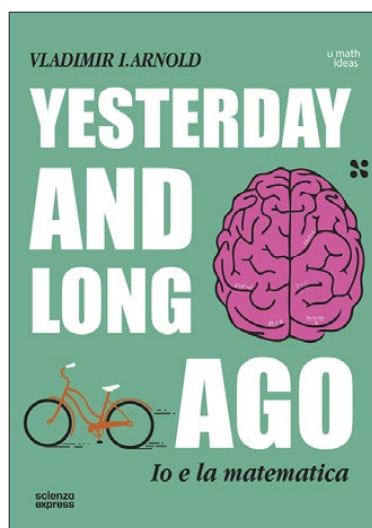
Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma – Italia

Introduzione

Marco Abate, nel suo articolo *Narrare matematica nel fumetto* (Abate, 2003), ci mette in guardia: «Inserire della matematica in un contesto narrativo non è un'operazione semplice» (p. 1). Il rischio è sempre quello di usare la matematica solo come sfondo della vicenda narrata, senza una reale importanza, e magari solo per un suo potere simbolico, evocativo.

In queste pagine, vorrei raccontare tre tentativi diversi tra loro di parlare di matematica (e di matematici) in un contesto narrativo. Due dei tre libri (è difficile catalogarli come saggi, racconti o romanzi... sono un po' tutte queste cose e un po' nessuna) sono scritti da matematici di professione, Vladimir Arnold (*Yesterday and long ago. Io e la matematica*) e Cédric Villani (*Il teorema vivente. La mia più grande avventura matematica*), mentre il terzo è di una scrittrice che – per sua stessa ammissione – non amava la matematica da studentessa, Deborah Gambetta (*Incompletezza. Una storia di Kurt Gödel*). Nei tre libri vengono fatte scelte diverse per raccontare la matematica e a mio parere – forse sorprendentemente – le scelte più efficaci risultano quelle della non matematica. Tre letture interessanti, piacevoli e che gettano luce sulla matematica, ma con approcci molto diversi tra loro.

Arnold, V. I. (2007). *Yesterday and long ago. Io e la matematica*. Scienza Express.

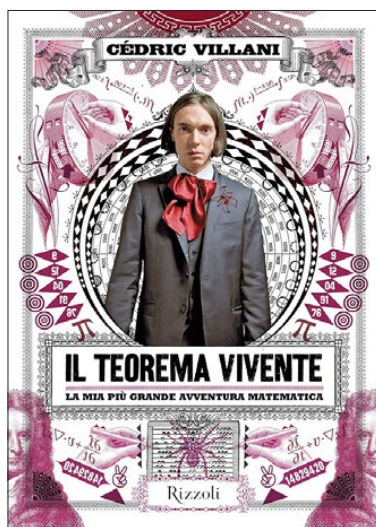


Nella primavera del 1999 Vladimir Arnold (1937-2010), matematico russo di grande fama, solutore del XIII problema di Hilbert, ha un incidente in bicicletta. Perde i sensi e dopo qualche settimana si risveglia in ospedale. Non riconosce la moglie, ma sa perfettamente da quanti anni sono sposati. Gli vengono diagnosticati sei mesi di vita e gli viene proibito di dedicarsi alla matematica. Gli è però concesso di scrivere lettere ai suoi amici. Inizia allora una corrispondenza in cui racconta aneddoti della sua vita, intervallati inevitabilmente a della matematica. Fin dall'infanzia era stato a contatto con vari fisici e matematici di primo piano, amici dei suoi genitori.

I sei mesi passano, Arnold sopravvive e si riprende, e dopo anni ritrova le brutte copie delle sue lettere. Riprende e amplia le storie che ha scritto, ne aggiunge altre ed è così che nasce *Yesterday and long ago*, pubblicato in Italia da Scienza Express nella traduzione di Nicola Ciccoli col sottotitolo *Io e la matematica*. Il libro può ricordare nello stile e nell'impostazione il famoso *Stascherzando, Mr. Feynman* dell'istionico fisico Richard Feynman (2007). Tanti aneddoti e racconti, sul filo tra il vero e l'inventato, con personaggi tra i protagonisti della scienza di punta del Novecento. Arnold si concentra soprattutto sui giganti della matematica, della fisica e della scienza sovietica e ci porta all'interno di famose accademie e centri di ricerca. Ma salta di frequente su argomenti molto distanti dalla scienza, come quando ci parla di personaggi storici (Alessandro di Macedonia, Maria Antonietta, Caterina I ecc.) o di guerre (da quelle di Cesare a quella di Crimea). Alterna racconti sulle tigri Tamil a quelli sui leoni di montagna nei pressi di Stanford. Le sue visite alle più prestigiose università del mondo sono raccontate con un senso dell'umorismo particolare. Personalmente mi sento più affine al senso dell'umorismo di Feynman che a quello di Arnold, di stampo sovietico.

A ciò si alternano riflessioni sulla matematica, sulla sua storia e sui suoi protagonisti (il sistema assiomatico, Bourbaki, le origini della matematica, la topologia, Ramanujan, Hardy, Weierstrass, Sof'ja Kovalevskaja ecc.). Dai racconti di Arnold traspare in maniera chiara la sua visione della matematica (dichiaratamente anti-bourbakista), ma saltando di qua e di là, inevitabilmente la profondità di riflessione ne risente. E spesso si ha la sensazione che la matematica sia utilizzata soprattutto per il suo potere simbolico ed evocativo.

Villani, C. (2013). *Il teorema vivente. La mia più grande avventura matematica*. Rizzoli.



Diverso è l'approccio con cui Cédric Villani, medaglia Fields nel 2010 e come Arnold dotato di una forte e particolare personalità, racconta la sua storia. Ne *Il teorema vivente*, edito da Rizzoli, racconta – come promette il sottotitolo – *La mia più grande avventura matematica*, ovvero la dimostrazione del teorema che gli è valso la medaglia Fields.

Lo scopo di Villani è provare a raccontare la quotidianità del ricercatore di matematica e il processo con cui si arriva a scrivere un articolo scientifico. È lo stesso autore a dire nell'introduzione «Tra questi due momenti [la prima idea e la pubblicazione], il cammino del ricercatore, lungi dal seguire una linea retta, procede per un sentiero fatto di ostacoli e deviazioni» (p. 2).

Il racconto scorre in maniera piacevole e a mio parere raggiunge appieno il risultato prefissato: rende

molto evidenti gli entusiasmi e le disperazioni che colgono il matematico nel proprio lavoro, i punti morti, gli errori (anche banali) e le idee geniali che permettono di superare un'empasse.

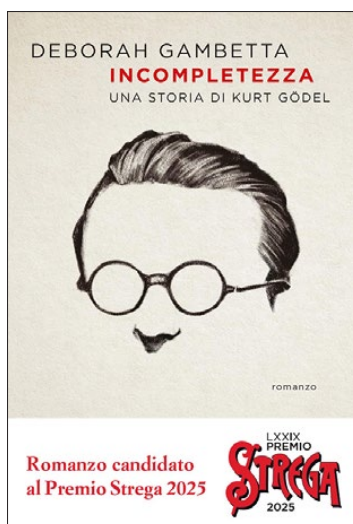
Il racconto intreccia la matematica alla vita quotidiana (ad esempio, ci viene raccontato della scuola che frequentano i figli quando è in visita a Princeton) e ci presenta anche numerosi protagonisti della matematica mondiale, con cui Villani si interfaccia nei suoi viaggi di lavoro.

La particolarità maggiore del racconto è che non ci nasconde nulla, anzi farebbe la felicità di uno storico, mostrandoci molte delle mail che Villani e Mouhot – suo ex studente e coautore del teorema raccontato – si scambiano ad ogni ora del giorno e della notte e in ogni giorno dell'anno, piene di emozioni, commenti e codice LaTeX, oltre a lunghi, lunghissimi stralci di matematica vera, dura e pura. Per fare un esempio, da pagina 154 a pagina 164 possiamo leggere integralmente il Teorema 7.7 (Controllo di crescita tramite stime integrali) e la sua dimostrazione, in una sequenza impressionante di stime integrali, appunto.

Quando ho incontrato Cédric Villani a un suo seminario a Milano quest'estate, mi ha però messo in guardia dal leggere le parti di matematica. Io l'ho rassicurato (non avevo ancora letto il libro e quindi ero stato ingenuo!) «Sono anche io un matematico» e lui mi ha spiegato «Proprio per quello! I matematici tendono a voler leggere la matematica, ma la matematica non è nel libro per essere letta, deve essere intesa più come una figura decorativa». Non posso giurare sulle sue esatte parole, ma il senso era quello. E posso confermare: se mai avessi voglia di leggere quel risultato, lo farei sull'articolo originale, non sul libro. Qui il significato di metterla è solo far capire (ai non matematici, ai matematici è già chiaro) di cosa si tratta veramente quando si parla di "stime integrali".

Quindi Villani usa la matematica per il suo potere simbolico ed evocativo, ma al contempo la matematica è al centro della storia. Leggendo *Il teorema vivente* si percepisce perfettamente come è il lavoro del matematico. E ne dà davvero un'ottima immagine, poetica, ma al contempo realistica, non nascondendo il fatto che a rari e isolati momenti di esaltazione corrispondono molto più frequenti momenti di disperazione e senso di impotenza. Come in tutte le grandi imprese, è la strada dura a dare il senso a ciò che si ottiene.

Gambetta, D. (2024). *Incompletezza. Una storia di Kurt Gödel*. Ponte alle Grazie.



Veniamo ora a *Incompletezza* di Deborah Gambetta (Ponte alle Grazie), nella cinquina finalista al Premio Strega 2025. Già il fatto che la biografia di un matematico venga candidata al premio letterario più importante d'Italia è un qualcosa di straordinario.

Ancora più impressionante se consideriamo che l'autrice, per sua stessa ammissione, da ragazza non amava la matematica. Nel lavoro decennale di studio e documentazione che sta dietro alla scrittura di questo libro ha imparato ad apprezzarla, da adulta.

Il racconto si muove in maniera molto particolare, mescolando la storia personale e sentimentale dell'autrice, le sue motivazioni per scrivere il libro stesso e la vita e i risultati matematici di Gödel.

Anche la numerazione dei capitoli è *sui generis*... Si parte dal capitolo 0 (la base e il fondamento dei numeri naturali, dell'insiemistica e della logica) a salire fino al capitolo 27 per poi ridiscendere fino a un nuovo capitolo 0. Ciò a simboleggiare la parabola della vita di Kurt, che arriva all'apice con i suoi teoremi di completezza e incompletezza per poi scivolare pian piano nella follia che lo farà morire di inedia nel terrore di essere avvelenato, dopo aver visto morire tutti i suoi più cari amici.

Non dobbiamo pensare però che questa sia una storia che fa del suo perno la lucida follia del matematico, anzi. Cerca in tutti i modi di farci vedere come tutti noi (l'autrice per prima) possiamo immedesimarci nelle vicende di Gödel. La storia del matematico austriaco è piena di alti e bassi e profondamente toccante: ognuno può trovare qualcosa della propria esperienza nel racconto. Gambetta è molto brava nel farci immedesimare e provare empatia e non pena per il suo destino.

La cosa più straordinaria del libro è però la matematica, vera coprotagonista del racconto: Gambetta non si limita a citare i risultati di Gödel o a dire due frasi fatte sul loro significato. Studia, cerca di capire, approfondisce e infine cerca di spiegare quello che lei stessa ha capito di un argomento così complicato che richiederebbe un'enorme fatica anche a un matematico di professione. Se riesca sempre o meno a spiegare le idee matematiche dietro ai risultati di Gödel se ne può discutere, ma quello che è innegabile è il messaggio di amore per la matematica che fa trasparire nel suo racconto e il tentativo nobile (ancor più se appare come una lotta donchisciottesca contro i mulini a vento destinata a fallire) di spiegare quella logica matematica moderna di tanto difficile comprensione. E questo messaggio passa ancora più forte per il fatto che – a differenza di Arnold e Villani – è portato avanti da una ex studentessa che odiava la matematica.

La matematica si può imparare ad amare e apprezzare anche in età adulta. E questo romanzo è un ottimo modo per far passare questo amore anche a chi non avrebbe mai aperto un libro in cui si parli di matematica. La candidatura al Premio Strega non solo è meritatissima, ma è un grande aiuto alla difficile impresa di comunicazione della matematica al grande pubblico.

Bibliografia

Abate, M. (2003). Narrare matematica nel fumetto. *International Journal of Science Communication*, 7, 1–10.

Feynman, R. P. (2007). *Sta scherzando, Mr. Feynman! Vita e avventure di uno scienziato curioso*. Zanichelli.