

DdM

17

## Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Un'esperienza di *Universal Design for Learning*  
in ambito geometrico nella scuola media  
**Stefano Bellini**

GeoGebra e Genially nell'apprendimento attivo  
della matematica: analisi evolutiva delle com-  
petenze geometriche e di problem solving  
**Flavio Manganello, Erica Grassi e Diana Rizzo**

*Dov'è nascosta Betta l'apetta?* Giocare  
con i principi della logica alla scuola dell'infanzia  
e nei primi anni della scuola primaria  
**Raffaele Casi, Cristina Sabena e Carlotta Soldano**

I costrutti che incidono sulle competenze  
in matematica in Svizzera e in Cantone Ticino  
secondo l'indagine PISA 2022  
**Silvia Sbaragli, Miriam Salvisberg,  
Michele Canducci, Alice Ambrosetti  
e Francesca Crotta**

La moltiplicazione di *numeri rotti*:  
un'esperienza didattica sulle frazioni  
ispirata al Liber Abbaci di Fibonacci  
**Silvia Cerasaro e Silvia Salvatori**

“Tu e la matematica”:  
un Padlet per l'attitude nella GenZ  
**Gaia Turconi**

La geometria ricorrente: un percorso  
didattico sul processo ricorsivo in geometria  
**Giovanna Rinchiusa  
e Maria Alessandra Vaccaro**

## **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,  
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI), Svizzera.  
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),  
Repubblica e Cantone Ticino, Svizzera.

### **Direzione scientifica:**

Prof.ssa Silvia Sbaragli, responsabile Centro competenze didattiche della matematica (DDM)  
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.

### **Comitato di redazione:**

Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)  
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.  
Marta Barbero, Michele Canducci, Monica Panero, Silvia Sbaragli  
(Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).

### **Comitato scientifico:**

Gilles Aldon (S2HEP, École Normale Supérieure de Lyon, Francia).  
Samuele Antonini (Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini", Università di Firenze, Italia).  
Gianfranco Arrigo (Società matematica della Svizzera italiana, Svizzera).  
Anna Ethelwyn Baccaglini-Frank (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).  
Marta Barbero (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).  
Giorgio Bolondi (Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano, Italia).  
Gemma Carotenuto (Dipartimento di Scienze Umane, Filosofiche e della Formazione, Università degli Studi di Salerno, Italia).  
Cristina Coppola (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno, Italia).  
Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia).  
Emanuele Delucchi (Dipartimento tecnologie innovative, SUPSI, Svizzera).  
Pietro Di Martino (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).  
Benedetto Di Paola (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo, Italia).  
Pier Luigi Ferrari (Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica, Università del Piemonte Orientale, Italia).  
Elena Franchini (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).  
Athanasios Gagatsis (Faculty of Social Sciences and Education, University of Cyprus, Cipro).  
Juan D. Godino (Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Spagna).  
Telgia Juon (Pädagogische Hochschule Zürich, Svizzera; Alta scuola pedagogica dei Grigioni, Svizzera).  
Colette Laborde (LIG, Université de Grenoble, Francia).  
Salvador Llinares (Departamento Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, Spagna).  
Mirko Maracci (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).  
Claire Margolinas (ACTé, Université Clermont-Auvergne, Francia).  
Maria Alessandra Mariotti (Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Università di Siena, Italia).  
Maria Mellone (Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università di Napoli Federico II, Italia).  
Francesca Morselli (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova, Italia).  
Monica Panero (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).  
Alberto Piatti (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera).  
Cristina Sabena (Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino, Italia).  
George Richard Paul Santi (Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Italia).  
Annarosa Serpe (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Calabria, Italia).

### **Grafica:**

Jessica Gallarate  
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)  
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.

### **Impaginazione:**

Adamo Citraro  
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)  
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Svizzera.



© 2025 by the author(s).

*Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*

è distribuito con Licenza Creative Commons

Attribuzione 4.0 Internazionale

**Maggio 2025**

[Editoriale / Editorial](#)  
I / III

## Riflessione e ricerca

[GeoGebra e Genially nell'apprendimento attivo della matematica: analisi evolutiva delle competenze geometriche e di problem solving](#)

*Flavio Manganello, Erica Grassi e Diana Rizzo*

9

[I costrutti che incidono sulle competenze in matematica in Svizzera e in Cantone Ticino secondo l'indagine PISA 2022](#)

*Silvia Sbaragli, Miriam Salvisberg, Michele Canducci, Alice Ambrosetti e Francesca Crotta*

36

[“Tu e la matematica”: un Padlet per l'attitude nella GenZ](#)

*Gaia Turconi*

66

## Esperienze didattiche

[Un'esperienza di Universal Design for Learning in ambito geometrico nella scuola media](#)

*Stefano Bellini*

89

[Dov'è nascosta Betta l'apetta? Giocare con i principi della logica alla scuola dell'infanzia e nei primi anni della scuola primaria](#)

*Raffaele Casi, Cristina Sabena e Carlotta Soldano*

114

[La moltiplicazione di numeri rotti: un'esperienza didattica sulle frazioni ispirata al Liber Abbaci di Fibonacci](#)

*Silvia Cerasaro e Silvia Salvatori*

132

[La geometria ricorrente: un percorso didattico sul processo ricorsivo in geometria](#)

*Giovanna Rinchiusa e Maria Alessandra Vaccaro*

154

## [Recensioni](#)

175

## Editoriale

La rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* inaugura il 2025 con un numero all'insegna della varietà dei contributi, sia per il livello scolastico a cui si riferiscono, sia per tipologia di contenuti trattati. Da un lato, infatti, la fascia d'età delle ricerche e delle esperienze didattiche presentate negli articoli copre tutti gli ordini scolastici, dalla scuola dell'infanzia fino all'università. Dall'altro, i temi affrontati sono molteplici: l'uso delle tecnologie nel favorire l'apprendimento, l'analisi dei risultati di indagini standardizzate internazionali, l'attenzione all'atteggiamento in matematica, l'applicazione dell'approccio del *Universal Design for Learning* e altro ancora. Questa varietà testimonia un ambiente intellettuale di ricerca e lavoro sul campo estremamente frizzante e ricco di spunti, idee da sperimentare, lavori su cui poter attuare riflessioni teoriche e didattiche. Ricchezza che ci rende contenti di far parte di questa comunità.

Nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli. Il primo presenta due studi che indagano l'uso di strumenti digitali nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria,<sup>1</sup> all'interno di contesti di apprendimento attivo: il primo studio analizza un intervento basato su GeoGebra, finalizzato a potenziare le competenze geometriche degli alunni; il secondo riguarda un intervento che impiega Genially per creare contenuti interattivi volti a sviluppare le capacità di problem solving. I risultati evidenziano un miglioramento delle competenze degli studenti in entrambi i casi, con un impatto più diretto attribuito a GeoGebra e uno più indiretto a Genially. Nel secondo articolo si indagano quali costrutti, rilevati tramite i questionari di contesto dell'indagine PISA 2022, hanno un impatto sulle competenze in matematica dei giovani quindicenni della Svizzera e del Cantone Ticino; tra i costrutti significativi in entrambi i contesti, quelli con effetto positivo maggiore sono, sia in Svizzera sia in Cantone Ticino, il *senso di autoefficacia nella matematica formale e applicata* seguito dalla *condizione socioeconomica*; tra i costrutti significativi in entrambi i contesti, ma con effetto negativo, emergono la *frequenza delle attività relative alle tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) in settimana* e la *frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC*. Tra i costrutti con impatto statisticamente significativo in Svizzera ma non in Cantone Ticino, quello con effetto positivo maggiore è la *familiarità soggettiva con i concetti matematici* e quello con effetto negativo maggiore è la *ricerca di informazioni sul proprio futuro*; risulta inoltre interessante la significatività in Svizzera ma non in Cantone Ticino dei costrutti *genere* e *ansia per la matematica*. Il terzo articolo esplora l'*attitudine* nei confronti della matematica nella GenZ durante la fase di transizione dall'istruzione secondaria a quella terziaria, in una classe del primo anno della Facoltà di Scienze Agrarie e Alimentari; viene descritto l'utilizzo di un Padlet di classe come strumento di raccolta delle narrazioni degli studenti in merito al loro rapporto con la disciplina e viene mostrato come sia possibile inquadrare tali narrazioni in termini di profili di *attitudine* secondo il *Three-Dimensional Model for Attitude*.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Nel primo si descrivono le varie fasi di un percorso didattico sperimentato in una quarta media del Cantone Ticino e incentrato sull'approccio dell'*Universal Design for Learning*. Nel percorso viene dato ampio spazio al primo principio del modello, che si focalizza sul fornire molteplici forme di rappresentazioni dei materiali e dei contenuti della lezione; del percorso viene presentata nello specifico la parte relativa al tema del cono. Nel

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.



secondo articolo vengono presentati un gioco, *Dov'è nascosta Betta l'apetta?*, e una serie di risorse didattiche a esso correlate, progettati per sviluppare il pensiero logico nei bambini tra i 4 e i 7 anni. Il gioco si basa su domande e inferenze riguardanti variabili numeriche, spaziali o percettive, mentre le risorse didattiche includono schede di lavoro, albi e video pensati per supportare un uso didattico del gioco, mirato ad approfondire e avviare discussioni e riflessioni sui principi logici coinvolti. Nel terzo articolo viene descritta un'esperienza didattica svolta presso una scuola secondaria di primo grado<sup>2</sup> sull'uso della storia nella didattica della matematica; nel contributo vengono presentate le attività realizzate con gli studenti in merito alla moltiplicazione tra quelli che Fibonacci denomina nel Liber Abbaci *numeri rotti*, cioè le moderne frazioni, mettendo in luce l'utilizzo di diversi artefatti: la fonte storica, il *vocabolario dei rotti*, aste frazionarie e altro ancora. L'ultimo articolo, infine, descrive un'esperienza didattica sul processo ricorsivo in ambito geometrico, svolta in una classe terza di un liceo scientifico italiano,<sup>3</sup> e avente lo scopo di stimolare l'attivazione di congetture e dell'argomentazione verso il pensiero dimostrativo tramite l'utilizzo del software GeoGebra; nel contributo si mostra come il percorso abbia favorito l'apprendimento di concetti della geometria euclidea e sviluppato le capacità argomentative degli allievi.

Da questa lunga carrellata di contributi di ricerca e di esperienze didattiche risulta evidente la grande varietà di approcci implementati nelle sezioni/classi e di analisi dei processi di insegnamento-apprendimento che uniscono in una linea continua i diversi livelli scolastici e, allo stesso tempo, il mondo della ricerca con l'applicazione in classe.

Prof.ssa Silvia Sbaragli

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

3. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Cantone Ticino.

## Editorial

The *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* journal begins 2025 with an issue marked by the variety of contributions, in terms of both the school level to which they refer and the type of content covered. On the one hand, the students' age range within the research and teaching experiences presented in the articles covers all school levels, from pre-school to university. On the other hand, the topics addressed are varied: the use of technology in fostering learning, the analysis of the results of international standardized surveys, the focus on attitudes towards mathematics, the application of the *Universal Design for Learning* approach, and more. This variety testifies to an intellectual environment of research and fieldwork that is extremely sparkling and rich in ideas to be experimented with, as well as of work on which theoretical and didactic reflections can be developed. A richness that makes us glad to be part of this community.

There are three articles in the *Riflessione e ricerca* section. The first article presents two studies investigating the use of digital tools in the teaching of mathematics in primary school,<sup>1</sup> within active learning contexts: the first study analyses an intervention based on GeoGebra, aimed at enhancing pupils' geometric skills; the second concerns an intervention using Genially to create interactive content aimed at developing problem solving skills. The results show an improvement in pupils' skills in both cases, with a more direct impact attributed to GeoGebra and a more indirect one to Genially. The second paper investigates which constructs, detected by means of the context questionnaires of the PISA 2022 survey, have an impact on the mathematical competences of young 15-year-olds in Switzerland and in the Canton of Ticino; among the significant constructs in both contexts, those with the greatest positive effect are, in both Switzerland and the Canton of Ticino, *the mathematics self-efficacy: formal and applied mathematics* followed by *socio-economic status*; among the constructs significant in both contexts, but with a negative effect, are the *frequency of ICT-related activities during the week* and the *frequency of ICT support or feedback*. Among the constructs with a statistically significant impact in Switzerland but not in the Canton of Ticino, the construct with the greatest positive effect is *subjective familiarity with mathematics concepts* and the construct with the greatest negative effect is the *future study or work information*; the constructs *gender* and *mathematics anxiety* are also interestingly significant in Switzerland but not in the Canton of Ticino. The third paper explores the *attitude* towards mathematics in GenZ during the transition phase from secondary to tertiary education, in a first-year class of the Facoltà di Scienze Agrarie e Alimentari; it is described the use of a class Padlet as a tool to collect students' narratives about their relationship with the discipline, and it is shown how these narratives can be framed in terms of *attitude* profiles according to the *Three-Dimensional Model for Attitude*.

There are four articles in the *Esperienze didattiche* section. The first describes the various phases of a teaching path which has been experimented in a ninth-grade class in the Canton of Ticino and centered on the *Universal Design for Learning* approach. In the path, ample space is given to the first principle of the model, which focuses on providing multiple forms of representation of the materials and contents of the lesson; of the whole path it is presented the part about the geometric topic of the cone. In the second article, a game, called *Dov'è nascosta Betta l'apetta?*, and a series of related teach-

1. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.

ing resources are presented, designed to develop logical thinking in children aged 4 to 7. The game is based on questions and inferences concerning numerical, spatial or perceptual variables, while the teaching resources include worksheets, books and videos designed to support a didactic use of the game, aimed at deepening and initiating discussions and reflections on the logical principles involved. The third article describes a didactic experience carried out in a lower secondary school<sup>2</sup> on the use of history in the teaching of mathematics; the contribution presents the activities carried out with students on the multiplication between those that Fibonacci calls in the *Liber Abbaci* *broken numbers*, i.e. modern fractions, highlighting the use of various artefacts: the historical source, the *vocabulary of broken numbers*, fractional rods, and more. Finally, the last article describes a didactic experience on the recursive process in the field of geometry, carried out in a eleventh grade class of an Italian upper secondary school,<sup>3</sup> and aimed at stimulating the activation of conjectures and argumentation towards demonstrative thinking through the use of the GeoGebra software; the contribution shows how the course favored the learning of Euclidean geometry concepts and developed the students' argumentative skills.

From this long overview of research contributions and teaching experiences, it is clear that there is a great variety of approaches implemented with the students and of analyses of teaching-learning processes that unite the different school levels and, at the same time, the world of research with classroom application in a continuous line.

Prof.ssa Silvia Sbaragli

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Switzerland

2. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.

3. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.

**Riflessione e ricerca**

**DdM**

## GeoGebra e Genially nell'apprendimento attivo della matematica: analisi evolutiva delle competenze geometriche e di problem solving

GeoGebra and Genially in active learning for mathematics: developmental analysis of geometric and problem solving competencies

Flavio Manganello<sup>\*</sup>, Erica Grassi<sup>°</sup> e Diana Rizzo<sup>°</sup>

<sup>\*</sup>Istituto per le Tecnologie Didattiche, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Genova – Italia

<sup>°</sup>Dipartimento di Scienze della Formazione, Università di Genova – Italia

✉ [flavio.manganello@itd.cnr.it](mailto:flavio.manganello@itd.cnr.it), [ericagrassi99@gmail.com](mailto:ericagrassi99@gmail.com), [abc.diana.rizzo@gmail.com](mailto:abc.diana.rizzo@gmail.com)

**Sunto /** Questo articolo esplora l'integrazione di GeoGebra e Genially nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria all'interno di contesti di apprendimento attivo. Vengono presentati due studi: il primo valuta un intervento didattico che utilizza GeoGebra per migliorare le abilità geometriche degli alunni; il secondo esamina un intervento didattico che combina contenuti interattivi realizzati con Genially per promuovere lo sviluppo delle capacità di problem solving matematico. Entrambi gli interventi considerano sia la componente pedagogica sia l'uso della tecnologia nel loro complesso. Dai risultati si evince un miglioramento nelle competenze degli studenti in entrambi gli ambiti, sebbene l'apporto di Genially risulti più indiretto. La ricerca evidenzia l'importanza di strumenti digitali ben allineati agli obiettivi di apprendimento e al livello di competenza degli studenti, suggerendo un approccio personalizzato nell'uso delle tecnologie educative. Anche a causa dei limiti legati alla dimensione del campione e al contesto specifico, si sottolinea la necessità di ulteriori ricerche per valutare l'efficacia a lungo termine dell'uso di questi strumenti nell'apprendimento matematico.

**Parole chiave:** scuola primaria; competenze geometriche; problem solving matematico; software geometrici; tecnologie didattiche.

**Abstract /** This article explores the integration of GeoGebra and Genially into mathematics teaching in primary school within active learning contexts. Two studies are presented: the first evaluates a teaching intervention that uses GeoGebra to enhance students' geometric skills; the second examines a teaching intervention that combines interactive content created with Genially to promote the development of mathematical problem-solving skills. Both interventions consider the pedagogical component and the use of technology as a whole. The results indicate an improvement in student skills in both areas, although Genially's contribution appears to be more indirect. The research highlights the importance of aligning digital tools with learning objectives and student skill levels, suggesting a personalized approach to the use of educational technology. Due to the limitations associated with the sample size and the specific context, the need for further research is underscored to evaluate the long-term effectiveness of the use of these tools in mathematical learning.

**Keywords:** primary school; geometric skills; mathematical problem solving; geometric software; educational technologies.

# 1 Introduzione

---

L'utilizzo delle tecnologie digitali nell'insegnamento della matematica si configura come un'area di crescente interesse e critica rilevanza. Studi recenti hanno analizzato l'uso di questi strumenti nella didattica della matematica, in particolare investigando come essi possano influenzare l'apprendimento e confrontando i loro effetti con quelli delle metodologie tradizionali (si veda, ad esempio, Ball et al., 2018). La ricerca indaga, inoltre, come l'introduzione di strumenti digitali possa non solo migliorare l'*efficienza* del processo educativo ma anche arricchire l'esperienza di apprendimento degli studenti (Bray & Tangney, 2017). In particolare, in linea con il pensiero di Dewey (2004), arricchire l'esperienza di apprendimento si configura come l'istituzione di un ambiente di apprendimento che favorisca una partecipazione attiva dello studente integrando elementi, risorse o approcci *efficaci* al fine di perseguire un apprendimento significativo. Nei contesti formativi istituzionali, infatti, è opportuno distinguere tra *efficienza* ed *efficacia* di una strategia didattica; mentre l'efficienza si può definire come «il raggiungimento nel minor tempo possibile di un risultato ottimale» (Bonaiuti, 2014, p. 163), l'efficacia va intesa, invece, come l'impatto misurabile che le strategie e le metodologie didattiche presentano nei confronti dell'apprendimento degli alunni: una strategia didattica si conferma efficace quando presenta «un numero ragionevole di riconoscimenti positivi e di indagini sperimentali» (Bonaiuti, 2014, p. 11).

Parlando in termini di efficacia, come sottolineato da Geiger e colleghi (2016), gli strumenti digitali hanno il potenziale di trasformare le pratiche di insegnamento e apprendimento in matematica, offrendo nuove opportunità per cambiamenti a livello cognitivo, pedagogico, affettivo e professionale. Questi cambiamenti permettono agli insegnanti di adottare strategie didattiche innovative e più coinvolgenti, mentre gli studenti beneficiano di un apprendimento interattivo e personalizzato che può stimolare la loro curiosità e partecipazione. Allo stesso tempo, l'integrazione della tecnologia può elevare la qualità dell'insegnamento e incoraggiare un approccio costruttivista all'apprendimento, dove gli studenti sono attivamente coinvolti nella costruzione della comprensione dei concetti matematici (Gurevich & Barchilon Ben-Av, 2023).

In tale contesto, questo articolo presenta i risultati di due studi aventi lo scopo di esaminare l'uso di due strumenti digitali nell'educazione matematica nella scuola primaria.<sup>1</sup> Il primo studio esamina l'impiego di materiali didattici interattivi elaborati con GeoGebra, noto software che consente di costruire e manipolare rappresentazioni dinamiche di oggetti geometrici, utilizzati per rafforzare le competenze geometriche degli studenti in un intervento didattico specifico. Il secondo studio, invece, esplora l'uso di risorse didattiche interattive create con Genially, un'applicazione web per la creazione di contenuti visuali e interattivi, con l'obiettivo di potenziare le abilità di problem solving matematico degli studenti mediante uno specifico intervento didattico. Entrambi gli studi non si limitano a valutare l'efficacia degli strumenti tecnologici, ma considerano l'intervento didattico nel suo complesso, integrando la componente pedagogica con l'uso strategico della tecnologia, per promuovere un apprendimento attivo e coinvolgente.

I risultati di questi due studi si inseriscono in un contesto di ricerca che ha evidenziato come la tecnologia, pur avendo un ruolo positivo, esercita un effetto di entità moderata (Cohen, 2013) sull'apprendimento in matematica (Chauhan, 2017). Questa osservazione suggerisce che l'impatto delle tecnologie educative può variare a seconda di fattori quali il tipo di strumento utilizzato, la durata dell'intervento e l'ambiente di apprendimento. Pertanto, i risultati dei due studi saranno analizzati considerando l'uso di strumenti digitali specialistici e non specialistici nell'educazione matematica, con l'obiettivo di offrire una comprensione più approfondita del ruolo delle tecnologie nella didat-

---

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.

tica della matematica, in un contesto di apprendimento attivo. In questo modo, il presente lavoro si propone di contribuire a delineare un quadro più chiaro dell'impatto derivante dall'uso di specifici strumenti digitali nell'educazione matematica alla scuola primaria, fornendo spunti significativi per la pratica educativa e la scelta di strumenti didattici adeguati.

## 2 Quadro teorico

---

### 2.1 Apprendimento attivo in ambito matematico: strategie e strumenti per promuoverlo

L'apprendimento attivo, definito da Prince (2004, p. 223) come «qualsiasi strategia didattica che coinvolge gli studenti in attività significative, richiedendo loro di riflettere su ciò che stanno facendo», promuove una partecipazione attiva degli studenti al proprio processo di apprendimento. Attraverso strategie di didattica esperienziale, gli studenti sono coinvolti in attività di esplorazione, scoperta e interazione diretta con i materiali didattici. Questo approccio si dimostra particolarmente efficace nell'educazione matematica, dove, come evidenziato da Fuchs e colleghi (2003), favorisce una migliore comprensione dei concetti e lo sviluppo di abilità di problem solving grazie alla partecipazione attiva ad attività pratiche e collaborative.

Per promuovere l'apprendimento attivo in matematica, è fondamentale dunque coinvolgere gli studenti in attività didattiche dinamiche, quali scrittura, simulazioni e giochi (Kerrigan, 2018). Questo approccio richiede un ruolo proattivo da parte degli insegnanti, che dispongono di numerosi strumenti e metodologie per attuare tali strategie. Tuttavia, diversi ostacoli possono limitare l'efficacia di queste pratiche, tra cui l'insufficienza di una formazione specifica per i docenti e problematiche strutturali come carichi di lavoro elevati e classi numerose (Michael et al., 2023). La ricerca svolge un ruolo cruciale nell'identificare modalità per sostenere gli insegnanti, consentendo loro di dedicare più tempo a interazioni individuali o di gruppo e offrire un feedback formativo di qualità (Shaw, 2019).

Tra le metodologie attive, i laboratori di matematica rappresentano uno strumento particolarmente efficace per coinvolgere direttamente gli studenti. D'Amore (1999) evidenzia come questi spazi di sperimentazione permettano agli studenti di formulare idee, costruire significati e sviluppare competenze. Il laboratorio diventa un "luogo" (anche inteso in senso metaforico) in cui «mettere in moto e orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive, volitive e utilizzare le risorse esterne in modo coerente e fecondo» (Pellerey, 2004, p. 12). Attraverso situazioni problematiche esplorative, i laboratori stimolano la motivazione degli studenti, migliorando l'efficacia dell'apprendimento (Bonaiuti, 2014).

Nell'educazione matematica alla scuola primaria, le strategie di apprendimento attivo comprendono una varietà di pratiche che favoriscono il ragionamento e la risoluzione di problemi. Compiti con diversi punti di ingresso o strategie di soluzione, analisi di esempi e controesempi, e valutazione di molteplici strategie sono strumenti didattici fondamentali (Litster et al., 2020). Tali attività incoraggiano il pensiero critico e creativo, spingendo gli studenti a esplorare possibilità diverse e a trovare soluzioni innovative. Un altro elemento chiave è la promozione di un discorso matematico significativo, sia in discussioni di classe che in piccoli gruppi. Questo approccio permette agli studenti di condividere idee, riflettere sul pensiero altrui e costruire collettivamente conoscenza matematica, migliorando al contempo le loro abilità comunicative e sociali (Di Martino, 2017). Inoltre, l'enfasi sul problem solving e sull'argomentazione arricchisce la formazione degli studenti e fornisce agli insegnanti strumenti per individuare e affrontare eventuali difficoltà.

### 2.2 L'importanza del problem solving nella costruzione del pensiero matematico

Secondo le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012, in seguito denominate Indica-

zioni Nazionali), la costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo, che coinvolge l'intreccio dinamico di concetti, abilità, competenze e atteggiamenti. Come sottolineato dalla ricerca e si ritrova specificato, ad esempio, in Aldon (2021), l'apprendimento della matematica, che implica la manipolazione dell'astratto, dei simboli e della logica, può essere efficacemente guidato attraverso la risoluzione di problemi, permettendo agli studenti di esplorare attivamente la disciplina. Lo sviluppo delle abilità di problem solving, dunque, emerge come un elemento centrale nella didattica della matematica. L'integrazione del modello di Polya (1973) con le categorie comportamentali di Schoenfeld (1985) fornisce un quadro di riferimento efficace per promuovere il pensiero critico e il ragionamento logico degli studenti. Polya definisce un modello in quattro fasi: comprendere il problema, ideare un piano, eseguire il piano e rivedere il processo e il risultato. Questo approccio guida gli studenti attraverso un percorso strutturato che favorisce l'elaborazione di strategie e una riflessione critica nella risoluzione di problemi complessi.

L'efficacia di questo modello è ulteriormente amplificata dall'integrazione delle categorie di Schoenfeld (1985), tra cui risorse, euristiche, controllo e sistemi di credenze. In particolare, il controllo, inteso come monitoraggio e adattamento delle strategie, migliora la metacognizione, un aspetto cruciale per affrontare problemi complessi. Thiangthung (2016) conferma che l'adozione combinata dei modelli di Polya e Schoenfeld non solo potenzia le competenze matematiche, ma favorisce anche un atteggiamento positivo verso la risoluzione dei problemi. I risultati del suo studio, in particolare, mostrano che l'80% degli studenti del campione preso in esame ha superato i test sommativi e oltre il 90% ha applicato con successo le prime tre fasi del modello di Polya, evidenziando come questi approcci strutturati rafforzino le capacità tecniche e la fiducia degli studenti, promuovendo un apprendimento matematico significativo.

Un ulteriore contributo alla comprensione del problem solving è offerto dal modello cognitivo di Lucangeli e colleghi (1998), che identifica cinque componenti principali: *comprensione del testo*, *rappresentazione*, *categorizzazione*, *pianificazione* e *autovalutazione*. La *comprensione del testo* costituisce il punto di partenza, consentendo di identificare e organizzare le informazioni quantitative e le relazioni rilevanti. Un ruolo essenziale nella comprensione dei problemi matematici espressi attraverso il testo è rivestito dalla lettura: come evidenziano Demartini e Sbaragli (2019), l'uso della lettura intensiva, combinato con l'analisi delle fasi di risoluzione dei problemi e l'adattamento delle modalità di lettura al tipo e scopo del testo, costituisce una pratica didattica fondamentale per migliorare sia l'insegnamento che l'apprendimento della matematica. La *rappresentazione* traduce le informazioni estrapolate dalla lettura in schemi o diagrammi che facilitano l'elaborazione visiva e simbolica. La *categorizzazione*, come evidenziato da Lucangeli e Cornoldi (1995), permette di riconoscere la struttura profonda del problema, indipendentemente dagli aspetti superficiali, mentre la *pianificazione* stabilisce le fasi necessarie per raggiungere la soluzione. Infine, l'*autovalutazione* incoraggia una riflessione critica sull'intero processo, promuovendo lo sviluppo metacognitivo.

Questi modelli teorici trovano conferma nella letteratura internazionale, che riconosce il problem solving come una strategia chiave per sviluppare il pensiero matematico e le competenze analitiche (Santos-Trigo & Gooya, 2015). Quando integrati in approcci didattici ben strutturati, consentono di potenziare le capacità critiche necessarie per affrontare problemi complessi. Inoltre, un approccio basato sul problem solving non solo stimola la formulazione di strategie, ma incoraggia anche gli studenti a formulare congetture, testare ipotesi e lavorare in gruppo, rafforzando abilità collaborative e sociali fondamentali.

### 2.3 Tecnologie e apprendimento attivo nella matematica

L'integrazione della tecnologia nell'apprendimento attivo in matematica ha aperto nuove prospettive per l'educazione nella scuola primaria. Bass (2006) ha evidenziato cinque aree chiave dell'insegnamento matematico supportate dalla tecnologia, tra cui la creazione di grafici, il tracciamento degli errori e la facilitazione dell'interazione tra studenti e insegnanti. Gli strumenti digitali hanno dimostrato



di migliorare i risultati di apprendimento nell'educazione matematica (Hillmayr et al., 2020), fornendo opportunità per un apprendimento attivo ed efficace che prepara gli studenti per la vita e il lavoro futuri (Muranov et al., 2023). Inoltre, la tecnologia può influenzare positivamente le convinzioni e le emozioni degli studenti (Albano & Ferrari, 2008), offrendo opportunità uniche per l'apprendimento personalizzato e flessibile (Ferrari, 2011). Tuttavia, è fondamentale che gli insegnanti ricevano una formazione adeguata sull'integrazione efficace di questi strumenti nelle loro pratiche didattiche (Hillmayr et al., 2020).

Nell'uso delle tecnologie nella didattica della matematica, è utile distinguere tra strumenti tecnologici orientati all'apprendimento e strumenti tecnologici ad uso generale. Come affermato da Chauhan (2017), le tecnologie orientate all'apprendimento sono progettate appositamente per raggiungere obiettivi educativi, mentre le applicazioni ad uso generale – come, ad esempio, Microsoft Excel e PowerPoint – si riferiscono a quelle applicazioni tecnologiche che non sono state progettate specificamente per scopi didattici.

Nei due paragrafi seguenti approfondiremo l'una e l'altra categoria di strumenti tecnologici. Conoscere le singole caratteristiche permette di sviluppare strategie didattiche più mirate ed efficaci, ottimizzando le risorse disponibili e offrendo maggiori opportunità di apprendimento per gli studenti.

### **2.3.1 Strumenti digitali orientati allo sviluppo delle competenze geometriche**

Gli strumenti tecnologici orientati all'apprendimento, di tipo quindi specialistico, come i *computer algebra system* (CAS) e altri strumenti dinamici e grafici, essendo progettati per applicazioni matematiche particolari, offrono funzioni avanzate per la risoluzione di problemi complessi e l'esplorazione di concetti matematici in profondità, fornendo interazione diretta e feedback immediato allo studente. In questo contesto si inseriscono gli strumenti digitali interattivi, ossia programmi informatici (software tradizionali o app per dispositivi mobili) specificamente progettati per consentire agli utenti di interagire direttamente con il contenuto, fornendo comandi, input e ricevendo feedback in tempo reale. Tra gli strumenti tecnologici specialistici, in particolare tra quelli digitali interattivi, gli Ambienti di Geometria Dinamica (AGD) giocano un ruolo cruciale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Gli AGD facilitano la manipolazione delle figure geometriche e la formulazione e verifica di congetture. Studi come quello di Miragliotta et al. (2017) hanno dimostrato che gli AGD possono sia alleggerire sia potenziare la memoria di lavoro visuo-spaziale, mostrandosi come strumenti preziosi soprattutto per gli studenti con Disturbi Specifici di Apprendimento (DSA). Robotti e Bionaz (2016) hanno approfondito questo aspetto, evidenziando come l'AGD di GeoGebra possa fungere da strumento compensativo per le difficoltà prassiche, supportando la percezione visiva e la pianificazione nella soluzione dei problemi. GeoGebra e strumenti simili, come evidenziato da Crompton e colleghi (2018), migliorano l'insegnamento della geometria permettendo agli studenti di visualizzare e interagire con modelli matematici. Questi strumenti hanno portato a un cambio di paradigma: da un insegnamento centrato sull'uso dei computer per risolvere problemi matematici, a un ambiente che attiva e sviluppa il pensiero matematico degli studenti. Questa transizione si inserisce nel contesto del costruzionismo, teoria dell'apprendimento sviluppata da Papert (1980), che enfatizza l'importanza di creare ambienti di apprendimento che stimolano gli studenti a costruire attivamente la loro conoscenza attraverso l'interazione con la tecnologia e, più in generale, con "artefatti cognitivi".

Per massimizzare le potenzialità degli AGD, è essenziale avere obiettivi di apprendimento chiari e una progettazione didattica accurata. Come sottolineato da Baccaglini-Frank e colleghi (2017), la flessibilità del software richiede agli educatori di definire in modo specifico gli obiettivi e i traguardi di apprendimento delle attività che ne fanno uso. GeoGebra, in particolare, è un software di geometria dinamica che supporta l'esplorazione di vari ambiti della matematica, dalla geometria all'algebra, fornendo strumenti per la rappresentazione grafica, la geometria interattiva, il calcolo algebrico e la programmazione. Inoltre, il software offre possibilità di condivisione e collaborazione. In questo senso, le risorse messe a disposizione da GeoGebra consentono di realizzare attività didattiche del tutto

coerenti con le Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012).

Le Raccomandazioni del consiglio sulle competenze chiave per l'apprendimento permanente (Consiglio dell'Unione Europea, 2018) inoltre enfatizzano l'importanza della competenza digitale, sottolineando la necessità per gli individui di comprendere i principi generali e il funzionamento di vari dispositivi e software. In questo contesto, GeoGebra emerge come uno strumento versatile che arricchisce il panorama didattico contribuendo alla formazione delle competenze digitali degli studenti.

### **2.3.2 Strumenti digitali ad uso generale nella promozione del problem solving matematico**

Le applicazioni ad uso generale, sebbene non progettate specificamente per la matematica, offrono una vasta gamma di possibilità per creare contenuti educativi, esercizi interattivi e presentazioni didattiche, contribuendo così a un approccio più dinamico e partecipativo all'apprendimento.

Nell'educazione primaria, l'uso di dispositivi hardware come tablet e computer, in combinazione con software e applicazioni ad uso generale, favorisce l'apprendimento attivo della matematica grazie alla loro flessibilità e accessibilità. Peria (2013) ha evidenziato che l'introduzione dei tablet nelle aule scolastiche offre vantaggi significativi, tra cui la possibilità di personalizzare i percorsi di apprendimento e promuovere l'interazione con contenuti didattici attraverso un'interfaccia intuitiva e tattile. Questo approccio supporta l'apprendimento individualizzato, particolarmente utile in contesti eterogenei, dove le esigenze degli studenti possono variare considerevolmente.

Tra gli strumenti digitali ad uso generale, un ruolo cruciale è svolto dalle *connected classroom technology*, che facilitano il monitoraggio in tempo reale del lavoro e dei progressi degli studenti. Come sottolineato da Shirley e Irving (2015), questi sistemi non solo consentono agli insegnanti di adattare immediatamente le loro strategie didattiche alle necessità degli studenti, ma favoriscono anche un'interazione più ricca e significativa sia tra studenti e insegnanti sia tra gli studenti stessi. Inoltre, l'uso condiviso di risorse digitali stimola la collaborazione, un elemento chiave per il problem solving matematico, rendendo l'ambiente di apprendimento più inclusivo e partecipativo.

In questo panorama, le applicazioni per la creazione di contenuti multimediali e interattivi rappresentano un complemento fondamentale, offrendo versatilità nella produzione di materiali didattici che arricchiscono l'esperienza educativa. Strumenti come Genially consentono di sviluppare presentazioni dinamiche, quiz interattivi e giochi educativi, stimolando l'impegno degli studenti e rendendo più coinvolgente l'apprendimento della matematica nella scuola primaria. Come evidenziato da Jiménez e colleghi (2020), l'integrazione di escape room digitali con Genially ha dimostrato di migliorare conoscenze, motivazione e abilità collaborative tra gli studenti.

Secondo Corte-Rojas e Enciso (2023), Genially permette a insegnanti e studenti di lavorare con risorse interattive che vivacizzano il processo di insegnamento-apprendimento. Questo, combinato con strategie attive e innovative, crea ambienti di apprendimento dinamici, critici e riflessivi, contribuendo a rafforzare i legami tra insegnanti e studenti, migliorando l'interesse per la materia e il rendimento accademico. Queste applicazioni segnano un passaggio verso una gamma più ampia di strumenti digitali interattivi, che includono giochi educativi, strumenti didattici avanzati e metodologie di apprendimento basate su problemi. Tali strumenti sono particolarmente efficaci nel coinvolgere gli studenti di scuola primaria nell'apprendimento della matematica attraverso attività di problem solving, combinando interattività ed elementi ludici. Un'applicazione come Genially può potenziare significativamente la risoluzione di problemi matematici offrendo diverse funzionalità utili. Ad esempio, permette di scomporre un problema complesso in sotto-problemi più gestibili, facilitando la comprensione passo dopo passo. Inoltre, Genially consente di fornire feedback immediati e suggerimenti in ogni fase del processo risolutivo, aiutando gli studenti a procedere nella loro indagine con maggiore sicurezza e autonomia. Questo approccio non solo migliora le competenze matematiche degli studenti, ma promuove anche lo sviluppo di abilità di pensiero critico e risoluzione di problemi, fondamentali per il loro successo accademico futuro.

## 2.4 Valutazione del potenziale degli strumenti digitali nell'educazione matematica

Bray e Tangney (2017) sottolineano la necessità di ulteriori ricerche per valutare il potenziale degli strumenti digitali nell'educazione matematica. In particolare, gli autori evidenziano l'importanza di condurre studi più approfonditi e pratici che possano colmare il divario tra il potenziale teorico della tecnologia educativa e la sua effettiva implementazione in classe. Attraverso l'adozione di metodologie rigorose e la quantificazione degli effetti, è possibile confrontare i risultati tra diversi studi e contesti, fornendo evidenze solide e generalizzabili per informare la pratica educativa e le decisioni politiche.

Per realizzare una valutazione accurata e comprensiva dell'impatto degli strumenti digitali nell'educazione matematica, la ricerca quantitativa offre strumenti statistici che, tramite misure standardizzate dell'efficacia degli interventi, consentono di comparare i risultati tra diversi studi e di interpretare in modo pratico l'entità dei cambiamenti prodotti. Una di queste misure è l'effetto dimensionale (*effect size*), una statistica utilizzata per quantificare l'entità di una differenza o relazione, indipendentemente dalla dimensione del campione.

Tra le misure di *effect size* più comuni vi è la  $d$  di Cohen (Cohen, 2013), che esprime la differenza tra due medie in termini di deviazioni standard.<sup>2</sup> È importante notare che il già citato Chauhan (2017) ha utilizzato proprio la  $d$  di Cohen nel suo studio meta-analitico per quantificare l'impatto degli strumenti digitali sull'apprendimento matematico nella scuola primaria. Valori della  $d$  pari a 0,2, 0,5 e 0,8 indicano rispettivamente effetti piccoli, medi e grandi, sebbene questi valori possano variare in base al contesto di studio. Nel suo studio, Chauhan conclude che l'impatto delle tecnologie sull'apprendimento in matematica per gli studenti di scuola primaria è di entità *moderata*, con un effetto medio ( $d$  di Cohen = 0,546). Questo valore indica un miglioramento significativo ma non eccessivo, in linea con la classificazione di Cohen (2013), secondo cui un effetto medio rappresenta un cambiamento apprezzabile, ma non radicale, nelle performance. In particolare, il risultato è influenzato da variabili moderatrici come la durata delle attività, il tipo di applicazione tecnologica e l'ambiente di apprendimento, che condizionano l'efficacia complessiva dell'intervento.

Chauhan, inoltre, evidenzia che gli strumenti tecnologici specialistici, progettati specificamente per scopi educativi, risultano particolarmente efficaci nei contesti in cui il loro utilizzo è mirato a sviluppare competenze specifiche. Nel caso delle applicazioni orientate all'apprendimento, come piattaforme dedicate e software educativi, l'effetto medio è stato superiore ( $d = 0,565$ ) rispetto a quello delle applicazioni generiche ( $d = 0,488$ ), suggerendo che la progettazione mirata consente un miglioramento significativo delle performance degli studenti. Tuttavia, le applicazioni generiche, sebbene offrano maggiore versatilità e accessibilità, necessitano di una progettazione didattica più accurata per adattarle ai bisogni formativi e per massimizzare l'impatto sull'apprendimento. Questi risultati sottolineano l'importanza di integrare gli strumenti tecnologici in modo consapevole e strategico all'interno della didattica.

L'*effect size* è fondamentale perché permette di confrontare direttamente i risultati di studi diversi, fornendo una misura della rilevanza pratica dei risultati e supportando la sintesi delle evidenze in meta-analisi. Hattie (2012), sviluppando un metodo per sintetizzare gli effetti in diverse meta-analisi in base alla loro dimensione (misurata tramite la  $d$  di Cohen), ha classificato 138 diverse tipologie di effetti sui risultati dell'apprendimento. In particolare, l'autore ha rilevato che la dimensione dell'effetto medio degli interventi studiati era pari a 0,40 e, conseguentemente, ha proposto di valutare il successo degli effetti rispetto a questo punto critico. Nel contesto di questo articolo, risultati particolarmente rilevanti emersi dallo studio di Hattie includono l'uso della tecnologia con studenti delle scuole elementari ( $d = 0,44$ ), l'uso della tecnologia nell'insegnamento della matematica ( $d = 0,33$ ) e l'uso di materiali manipolativi in matematica ( $d = 0,30$ ). Sebbene solo il primo risultato possa essere

2. Altre misure di *effect size* sono la  $g$  di Hedge (Hedge & Olkin, 1985) e il coefficiente di correlazione  $r$  di Pearson.

considerato efficace secondo la soglia stabilita da Hattie, è importante notare che, dal punto di vista statistico, tutti e tre i valori riportati della  $d$  indicano un effetto dimensionale medio. Pertanto, pur variando in intensità, tutti e tre i risultati possono avere implicazioni pratiche significative a seconda del contesto specifico e delle circostanze educative.

### 3 Obiettivi e domande di ricerca

---

Come sottolineato nei paragrafi precedenti, l'apprendimento basato su problemi con materiali manipolativi e in ambienti digitali interattivi promuove un approccio attivo all'apprendimento, permettendo agli studenti di esplorare concretamente i concetti matematici. La sinergia di strumenti come GeoGebra e Genially può creare un ambiente di apprendimento stimolante, dove gli studenti possono immergersi in esperienze educative che favoriscono la creatività, la riflessione critica e una comprensione approfondita dei concetti matematici.

Questo articolo esplora l'impiego di strumenti digitali nell'insegnamento della matematica alla scuola primaria attraverso due studi distinti: il primo indaga l'uso di attività didattiche create con GeoGebra per potenziare competenze geometriche, mentre il secondo l'uso di contenuti interattivi creati con Genially per potenziare il problem solving matematico. Inoltre, con l'obiettivo di promuovere un apprendimento attivo nella matematica, l'utilizzo dei due strumenti digitali, GeoGebra e Genially, è stato integrato in attività didattiche progettate per entrambi gli studi. Queste attività miravano a permettere agli studenti di lavorare insieme, scambiarsi idee e apprendere attraverso l'esperienza diretta e l'interazione con i propri compagni e con i software.

La presentazione congiunta dei due studi mira, pertanto, a offrire una comprensione più completa dell'uso degli strumenti digitali nell'educazione matematica analizzando sia le performance specifiche pre- e post-intervento sia la correlazione di tali prestazioni con le competenze specifiche degli studenti misurate prima dell'intervento sperimentale. Questo approccio consente di evidenziare se e come diversi strumenti possano contribuire all'incremento delle competenze matematiche, sottolineando l'importanza di considerare un'integrazione olistica delle tecnologie didattiche nel curriculum matematico.

In particolare, sono state definite le due seguenti domande di ricerca.

**[RQ1] Valutazione dell'effetto dell'intervento didattico con l'uso di GeoGebra sulle competenze geometriche.** In che modo un intervento didattico strutturato, che integra l'uso di GeoGebra in un contesto di apprendimento attivo della matematica, influisce sulle competenze geometriche degli studenti di scuola primaria? Nel dettaglio, si è puntato a rispondere alle seguenti domande di ricerca:

- **[RQ1.a]** Come variano le prestazioni degli studenti in test specifici di geometria prima e dopo l'intervento?
- **[RQ1.b]** Esiste una correlazione tra il cambiamento nelle prestazioni degli studenti e i loro livelli iniziali di competenza geometrica?

**[RQ2] Valutazione dell'effetto dell'intervento didattico con l'uso di Genially sulle competenze di problem solving matematico.** In che modo un intervento didattico strutturato, che integra l'uso di Genially in un contesto di apprendimento attivo della matematica, incide sulle competenze di problem solving matematico degli studenti di scuola primaria? Nel dettaglio, si è puntato a rispondere alle seguenti domande di ricerca:

- **[RQ2.a]** Quali sono i cambiamenti nelle prestazioni degli studenti in test specifici di problem solving matematico prima e dopo l'intervento?
- **[RQ2.b]** È possibile identificare una correlazione tra il cambiamento nelle prestazioni degli studenti e i loro livelli iniziali di competenza in problem solving matematico?

Ciascuna domanda di ricerca mira a fornire un'analisi dettagliata e olistica dell'effetto degli strumenti didattici digitali su queste due diverse aree dell'apprendimento matematico, puntando ad approfondire la comprensione del ruolo che queste tecnologie possono svolgere nell'educazione matematica alla scuola primaria.

Le prove di studio pre- e post-implementazione, insieme ai test specifici di valutazione delle competenze, forniscono un mezzo efficace per quantificare l'impatto dell'utilizzo di questi strumenti digitali sul potenziamento delle competenze specifiche. L'analisi dei punteggi derivati da questi test fornisce non solo una misura quantitativa del progresso degli studenti, ma anche una comprensione più profonda delle aree specifiche in cui gli strumenti digitali hanno maggior impatto. Correlare i risultati delle prove di studio con i test di valutazione delle competenze permette di tracciare un legame diretto tra l'uso degli strumenti didattici digitali e il miglioramento effettivo nelle abilità matematiche degli studenti.

## 4 Metodologia

---

Le due sperimentazioni condotte rientrano nella categoria della ricerca empirico-sperimentale, con l'obiettivo di valutare in modo sistematico e controllato gli effetti di specifici interventi didattici. È importante sottolineare che entrambi gli studi adottano un disegno quasi-sperimentale, in quanto i campioni non sono stati selezionati attraverso metodi probabilistici. Questo approccio è frequentemente adottato in ambiti di studio educativo e psicologico e, più in generale, nel contesto delle scienze sociali (Shadish et al., 2002).

Il cuore di questa ricerca è una co-progettazione attenta tra ricercatori e insegnanti, che si focalizza sull'analisi delle attività svolte in due classi, una quinta (studio 1) e una quarta (studio 2), in due diverse scuole primarie di Genova. In ciascuna di queste due classi è stato implementato un intervento didattico appositamente calibrato per il contesto specifico.

Nello specifico, i due studi si sono concentrati sui due gruppi sperimentali, senza il ricorso a gruppi di controllo. Ogni gruppo è stato valutato mediante una prova di studio iniziale (PS1) e una finale (PS2), svolte rispettivamente prima e dopo gli interventi didattici e valutate su una scala di punteggio da 1 (livello minimo) a 4 (livello massimo). Le prove di studio hanno permesso di misurare gli effetti degli interventi. Parallelamente, gli altri test somministrati nella fase iniziale dello studio ("Geometria Test" per la classe quinta e "Test SPM - Abilità di soluzione dei problemi matematici" per la classe quarta, come si vedrà più avanti nello specifico) sono stati utilizzati per fornire una linea di base per le competenze degli studenti prima degli interventi didattici e a supporto di un'analisi più completa e dettagliata dei risultati.

Le attività si sono svolte per entrambe le classi nell'arco di circa quattro mesi, da febbraio a maggio 2023, con dieci lezioni della durata di due ore ciascuna con cadenza settimanale. Ogni lezione è stata condotta in compresenza, con la partecipazione di almeno un ricercatore e un insegnante curricolare per classe. Dal punto di vista dell'apprendimento attivo, entrambi gli studi hanno integrato elementi essenziali della didattica attiva, come l'apprendimento collaborativo, l'interazione diretta con materiali e strumenti digitali, l'indagine e la riflessione critica, rendendo gli studenti protagonisti del loro processo di apprendimento.

Per quanto riguarda gli strumenti tecnologici, una classe ha lavorato con GeoGebra, l'altra con Genially. È importante sottolineare che le due classi non avevano mai lavorato prima né con GeoGebra né con Genially. In preparazione alle attività e alla raccolta dati, sono state ottenute le necessarie autorizzazioni dai genitori degli studenti, attraverso la firma di specifiche liberatorie. Tutti i dati raccolti sono stati poi soggetti a un processo di pseudonimizzazione, per garantire la privacy degli studenti. In questa procedura, le identità reali degli studenti sono state sostituite con codici alfa-numerici, permettendo soltanto agli insegnanti di conoscere l'identità dei partecipanti rispetto alle prove svolte e assicurando così la protezione dei dati personali e la riservatezza delle informazioni. Tutti gli strumenti somministrati agli alunni sono stati realizzati nel font "OpenDyslexicAlta" (<https://opendyslexic.org/>) per agevolare la lettura a studenti con disturbi dell'apprendimento.

Per l'analisi dei dati raccolti in entrambi gli studi, i dati sono stati trattati come parametrici. La verifica dell'assunzione di normalità è stata effettuata analizzando i valori di asimmetria e curtosi, considerati accettabili se compresi tra  $-3$  e  $3$  (Blanca et al., 2013). Successivamente, è stato impiegato il test  $t$  per campioni appaiati per identificare differenze significative nei punteggi pre- e post-intervento. Inoltre, è stata condotta un'analisi correlazionale per esaminare la relazione tra i miglioramenti osservati e i livelli di competenza iniziali degli studenti, garantendo così la validità e l'affidabilità dei risultati ottenuti. I dati raccolti sono stati analizzati attraverso l'utilizzo del programma JASP (v. 0.19.0).

#### **4.1 Studio 1: trasformazioni geometriche con GeoGebra**

##### **4.1.1 Partecipanti**

Lo studio 1 è stato condotto in una classe quinta primaria di un Istituto Comprensivo nel centro di Genova, composta da 24 studenti (23 effettivamente partecipanti alla sperimentazione), con un'età compresa tra i 10 e gli 11 anni. Il gruppo include 9 femmine e 15 maschi, tra i quali due alunni con disturbi specifici dell'apprendimento e due studenti con disabilità, uno con disturbo dello spettro autistico ad alto funzionamento e l'altro con disabilità intellettiva. In classe, durante la sperimentazione, oltre all'insegnante curricolare e al ricercatore, era presente un insegnante di sostegno o un'operatrice socio-educativa. L'ambiente di apprendimento era caratterizzato da un clima disteso e positivo, con frequenti attività di gruppo che favorivano la cooperazione e il confronto tra gli studenti. L'aula, ampia e ben attrezzata con due PC, una LIM e un monitor grande, oltre a un laboratorio informatico separato, supportava l'integrazione di una didattica digitale. L'intervento didattico sperimentale era in linea con l'offerta formativa dell'istituto, che enfatizza l'uso responsabile dei mezzi di comunicazione virtuale e lo sviluppo di competenze digitali.

##### **4.1.2 Strumenti di raccolta dati**

Per misurare le competenze geometriche degli studenti è stato usato il "Geometria Test" (Mammarella et al., 2012). Suddiviso in sezioni su conoscenze geometriche, problemi geometrici e abilità visuo-spaziali, il test valuta aspetti come lessico, proprietà delle figure, formule geometriche e ragionamento produttivo. Questo test richiede dai 70 ai 90 minuti per essere completato.

Per valutare i progressi degli studenti rispetto agli apprendimenti disciplinari, sono state utilizzate due prove di studio, PS1 ([Allegato 1](#)) e PS2 ([Allegato 2](#)). Le prove sono state progettate *ad hoc* per garantire una struttura uniforme, assicurare lo stesso aspetto grafico, e mantenere coerenza nella formulazione delle richieste. Al fine di fornire un esempio esplicito si riporta il quarto quesito di entrambe le prove (Figura 1 e Figura 2).

Un bambino vuole creare un mosaico con delle tessere a forma di rombo, posiziona la prima tessera ha calcolato di dover sistemare la seconda seguendo il vettore DE. Disegna la seconda tessera nella posizione corretta.

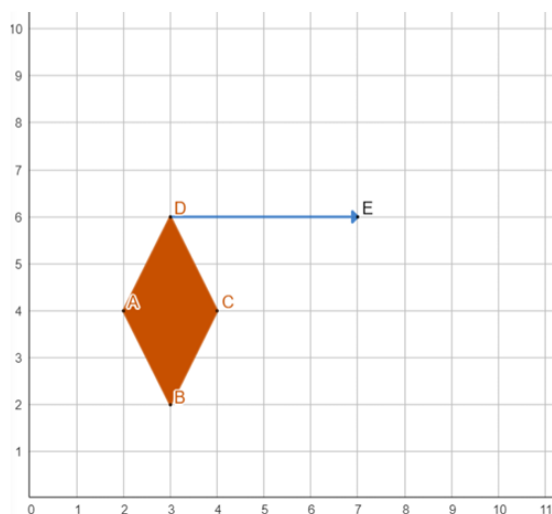


Figura 1. Quesito 4 PS1 – Studio 1.

Un piastrellista lavora su un pavimento, con delle piastrelle bianche e nere, tra una piastrella nera e l'altra deve lasciare lo spazio per una bianca, ha calcolato che le piastrelle nere devono essere spostate del vettore EF. Disegna la seconda piastrella che dovrà posizionare.

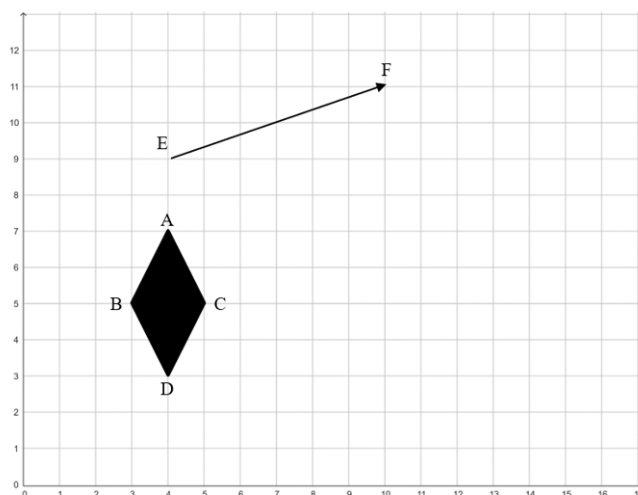


Figura 2. Quesito 4 PS2 – Studio 1.

Come si evince dalle figure (Figura 1 e Figura 2), i due quesiti condividono diverse caratteristiche strutturali e tematiche: in particolare, entrambi richiedono di effettuare la traslazione di un rombo all'interno del primo quadrante del piano cartesiano. I due disegni risultano molto simili dal punto di vista grafico e forniscono le medesime informazioni iniziali per poter svolgere il compito. La differenza tra le due rappresentazioni è data dall'inclinazione dei vettori, nel quesito relativo alla PS1 (Figura 1) il vettore rappresentato risulta parallelo all'asse  $x$ , richiedendo uno spostamento diretto e lineare. Nel quesito relativo alla PS2 (Figura 2), invece, il vettore preso in considerazione presenta sia una componente



X che una componente Y, ciò richiede quindi il corretto riconoscimento di entrambe. Inoltre, nella PS1 il vettore di traslazione è posizionato in modo che il suo punto di applicazione sia uno dei vertici del rombo (Figura 1), mentre nella PS2 il vettore non ha punti in comune con il rombo ed è l'allievo a doverne immaginare uno parallelo a quello dato per applicarlo poi ai punti della figura (Figura 2). Le valutazioni sono state progettate in linea con gli obiettivi di apprendimento predeterminati relativi alla matematica e adottano criteri di valutazione omogenei, definiti tramite le rubriche di valutazione per la scuola primaria sulla base dei seguenti obiettivi di apprendimento delineati all'interno delle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012, p. 51) per la classe quinta:

- «Riprodurre una figura in base a una descrizione utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria).
- Utilizzare il piano cartesiano per localizzare i punti. [...]
- Riconoscere [e rappresentare] figure ruotate, traslate e riflesse».

#### 4.1.3 Descrizione del design sperimentale

Il processo è stato avviato con una fase di valutazione iniziale che ha compreso la PS1 iniziale e l'impiego del "Geometria Test" per valutare le abilità geometriche degli studenti. Nella fase successiva, l'intervento ha visto l'introduzione di GeoGebra nell'insegnamento della matematica, con un'enfasi particolare sul rafforzamento delle competenze geometriche degli studenti. Il percorso di apprendimento è stato integrato nelle attività curriculari per consentire agli studenti di esplorare i concetti geometrici attraverso l'uso interattivo del software che, come già detto, non era mai stato usato dagli studenti di questa classe. Le prime tre lezioni si sono concentrate sulle trasformazioni geometriche del piano, affrontando rispettivamente la simmetria assiale, la traslazione e la rotazione. Queste lezioni sono state strutturate con un brainstorming iniziale per attivare le preconoscenze degli studenti, seguito da un'esposizione multimediale tramite PowerPoint sulla LIM, dove sono stati mostrati video e immagini costruiti con GeoGebra. In queste sessioni, gli studenti hanno lavorato a coppie per eseguire disegni di figure soggette a trasformazioni geometriche, sfruttando sia i loro quaderni (si veda un esempio in Figura 3) sia la LIM, sotto la supervisione dell'insegnante.

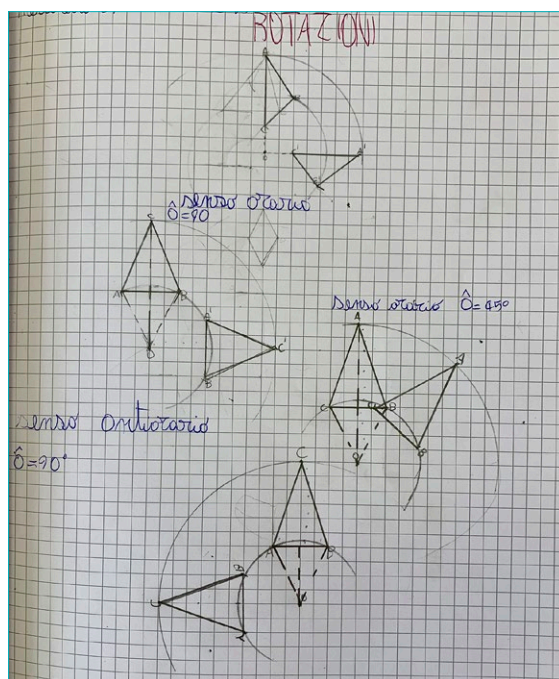


Figura 3. Esecuzione delle rotazioni sul quaderno.



Successivamente, gli studenti hanno partecipato a un'attività laboratoriale di *cooperative learning*, dove hanno lavorato in gruppi creati secondo il criterio di eterogeneità per quanto riguarda il genere, il livello di prestazione evidenziato dai pre-test e sulla base di osservazioni relative alle dinamiche relazionali tra gli studenti. Lo scopo dell'attività era quello di eseguire le trasformazioni geometriche tramite materiali fisici, ovvero forme geometriche su cartoncini e un cartellone plastificato come rappresentazione del piano cartesiano (Figura 4). Tale predisposizione del materiale ha permesso agli alunni di procedere per prove ed errori, dando loro la possibilità di correggere in qualsiasi momento ciò che avevano disegnato e riprovare con un nuovo tentativo. Quando gli alunni erano soddisfatti delle trasformazioni che avevano effettuato hanno segnato sui quaderni le coordinate cartesiane dei vertici delle figure individuate. Questa attività ha permesso loro di esplorare concretamente i concetti geometrici, favorendo al contempo lo scambio e il confronto tra gli alunni.

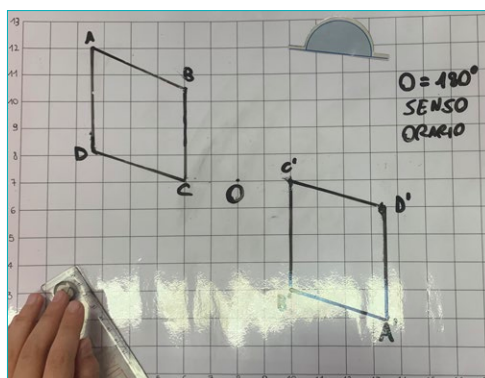


Figura 4. Rotazione di  $180^\circ$  in senso orario di un rombo rispetto al punto O.

Le tre lezioni successive hanno visto gli studenti impegnati nell'uso di GeoGebra. Divisi in gruppi, hanno prima familiarizzato con il software esplorando le sue funzioni e strumenti. In seguito, hanno eseguito varie trasformazioni geometriche sul PC (un esempio in Figura 5), iniziando con attività guidate e passando poi a esercizi più liberi e creativi. Nello specifico, gli alunni si sono confrontati con i comandi di "simmetria assiale", "traslazione" e "rotazione" al fine di compiere le trasformazioni del piano, in particolare il software ha permesso di sperimentare la funzione di "trascinamento dei punti". Queste sessioni hanno dato modo agli studenti di osservare visivamente le regole delle trasformazioni geometriche e di acquisire una maggior dimestichezza con il software utilizzato. L'ultima lezione svolta mediante l'impiego di GeoGebra ha permesso di verificare le "ipotesi di trasformazioni" effettuate dagli alunni durante l'attività laboratoriale con il piano cartesiano plastificato, riprendendo quindi le coordinate dei punti segnate sui quaderni; ciò ha favorito ulteriori momenti di confronto e di ragionamento sull'argomento affrontato.

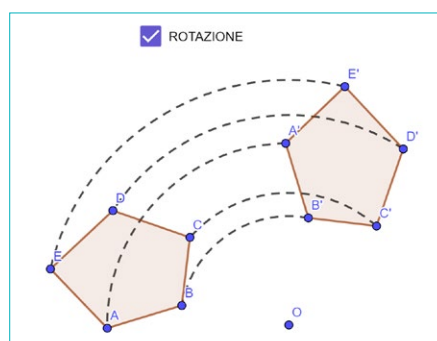


Figura 5. Attività GeoGebra – Rotazione.

I due incontri finali sono stati dedicati a un ulteriore approfondimento delle conoscenze acquisite e alla valutazione finale, inclusa la verifica sommativa delle loro competenze geometriche (PS2) per valutare l'efficacia dell'intervento rispetto al miglioramento delle competenze geometriche degli studenti a seguito dell'intero percorso proposto con l'uso di GeoGebra.

## **4.2 Studio 2: problem solving con Genially**

### **4.2.1 Partecipanti**

Lo studio 2 è stato condotto in una classe quarta primaria di un Istituto Comprensivo situato vicino al centro di Genova, in una posizione che copre un ampio bacino di popolazione. La scuola è ben attrezzata con tecnologie moderne, con ogni aula dotata di LIM e computer collegati. La classe è composta da 19 studenti (13 maschi e 6 femmine), di età compresa tra i 9 e i 10 anni, e presenta una notevole eterogeneità sia culturale che di apprendimento. In particolare, vi sono dieci alunni stranieri di seconda generazione e un alunno arrivato dal Perù ad anno scolastico avviato, oltre a tre studenti tutelati dalla legge 104<sup>3</sup> e tre studenti con BES per disagi socioeconomici, emotivi e familiari.

La classe è seguita, oltre che dal docente titolare di matematica, anche da una docente di ambito umanistico e da un'insegnante di sostegno. Durante le ore di sperimentazione, insieme al ricercatore, erano sempre presenti sia l'insegnante di classe di matematica che l'insegnante di sostegno. Nell'analisi preliminare del contesto di sperimentazione, si è osservato che l'attenzione degli studenti era generalmente più alta nelle prime ore del mattino e tendeva a calare nella seconda parte della giornata. Per massimizzare l'efficacia dell'esperienza di apprendimento, le attività sperimentali sono state quindi programmate dalle 8 alle 10 del mattino.

### **4.2.2 Strumenti di raccolta dati**

Il "Test SPM - Abilità di soluzione dei problemi matematici" (Lucangeli et al., 1998) è stato impiegato per valutare le abilità di problem solving pregresse degli studenti della classe quarta. Composto da una serie di problemi matematici, il test misura competenze come comprensione, rappresentazione, categorizzazione, pianificazione, esecuzione dei calcoli e autovalutazione, offrendo quattro tipi di risposte: irrilevante, errata, parziale e corretta. In particolare, nella letteratura relativa alla risoluzione di problemi matematici, si definisce la capacità di categorizzazione come l'abilità di identificare problemi risolvibili mediante approcci simili come appartenenti alla medesima "categoria" (Lucangeli et al., 1998). La capacità di categorizzazione emerge come un elemento cruciale nella predizione dell'abilità di risoluzione di problemi (Lucangeli & Cornoldi, 1995). Studi precedenti come quello di Usai et al. (2018) e Gratani et al. (2021) hanno sottolineato l'utilità del Test SPM nella valutazione delle abilità di problem solving. Analogamente, Babazadeh e Frigerio (2021) hanno utilizzato questo test per valutare l'impatto delle escape room sulle competenze di problem solving.

Eguale a quanto avvenuto per lo studio 1, le prove di studio PS1 ([Allegato 3](#)) e PS2 ([Allegato 4](#)) sono state impiegate per misurare i risultati di apprendimento. In particolare, le due prove di studio sono state progettate *ad hoc* in linea con gli obiettivi di apprendimento predeterminati relativi alla matematica e adottano criteri di valutazione omogenei. Nella progettazione delle prove PS1 e PS2 è stato adottato un approccio strutturato, ispirato alla raccomandazione di Thiangthung (2016), secondo cui strutture ben definite rafforzano sia le capacità tecniche che la fiducia degli studenti, favorendo un apprendimento significativo. Per la PS2, è stato implementato il modello proposto da Lucangeli e colleghi (1998), che guida gli studenti nel problem solving matematico attraverso un processo graduale e sistematico, dalla comprensione del testo all'autovalutazione. Tuttavia, le prove sono state concepite in modo flessibile, consentendo agli studenti di completare esclusivamente le

3. La Legge 104/1992, nota come "Legge-quadro per l'assistenza, l'integrazione sociale e i diritti delle persone handicappate", è una normativa italiana che tutela i diritti delle persone con disabilità. In ambito scolastico, garantisce diritti e tutele agli studenti con disabilità, promuovendo la loro integrazione e partecipazione attiva nel contesto educativo.

sezioni necessarie per risolvere il problema. Questa scelta progettuale è stata adottata per evitare che la struttura imponesse un carico cognitivo eccessivo ad alcuni allievi, assicurando un equilibrio tra il supporto metodologico e la libertà operativa.

Si riportano in Figura 6, a titolo esemplificativo, due problemi matematici, rispettivamente tratti dalla prova iniziale adottata come pre-test (PS1) e dalla prova finale utilizzata come post-test (PS2), progettati appositamente per essere esplicitamente paragonabili. Infatti, entrambi i problemi, presentano la medesima struttura profonda (Lucangeli et al., 1998). Tuttavia, nella PS2 il livello di difficoltà è stato incrementato attraverso l'introduzione del calcolo con numeri decimali, mentre nella PS1 sono stati impiegati esclusivamente numeri interi, in linea con gli obiettivi di progressione didattica.

| PS 1 - Problema 1                                                                                                                                                                                                                                    | PS2- Problema 1                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Luca invita Sara al cinema per festeggiare il suo anniversario. Entrambi comprano un biglietto per il film da 12€, ma Sara non prende il pop-corn come invece fa Luca. Il pop-corn costa 5€.</p> <p>Quanto sarà il costo totale per entrambi?</p> | <p>Marco invita Carla in pizzeria per festeggiare il suo compleanno. Entrambi ordinano una Quattro stagioni da 8,50 €, ma Carla non prende il dolce, come invece fa Marco. Il dolce costa 4,50 €.</p> <p>Quale sarà il conto finale della cena?</p> |

Figura 6. Confronto tra problema 1 PS1 e problema 1 PS2.

Le valutazioni delle prove di studio sono state definite tramite rubriche di valutazione create sulla base dei traguardi per lo sviluppo delle competenze da conseguire alla fine della classe quinta primaria, scelti dalle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012, p. 49), in particolare:

- «L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale [...].
- Riesce a risolvere facili problemi [...]. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria».

#### 4.2.3 Descrizione del design sperimentale

Analogamente alla classe quinta, la classe quarta ha iniziato con una valutazione preliminare, in cui la PS1 è stata usata per misurare le conoscenze e le competenze iniziali in ambito disciplinare, con focus sul mettere in relazione dati e fare previsioni, mentre il "Test SPM" è stato usato per misurare le capacità iniziali di problem solving matematico degli studenti. Nella successiva fase di intervento, Genially – che non era mai stato usato precedentemente da questa classe – è stato introdotto come strumento per la fruizione di contenuti interattivi, mirando al potenziamento delle abilità di problem solving matematico degli studenti.

La sperimentazione è iniziata con una lezione introduttiva sull'uso dei tablet, durante la quale gli studenti hanno appreso le nozioni di base per un utilizzo sicuro e corretto dei dispositivi. Questa fase preliminare è stata essenziale per garantire l'autonomia degli studenti nelle lezioni successive. Nel secondo incontro, gli studenti hanno affrontato un problema interattivo creato con Genially, scomposto in cinque componenti di base per la risoluzione dei problemi matematici, con focus sulle componenti cognitive dell'abilità di soluzione dei problemi previste dal "Test SPM" (Lucangeli et al., 1998): comprensione, rappresentazione (in formato digitale), categorizzazione, pianificazione e svolgimento del problema, e valutazione con un feedback immediato per stimolare la riflessione sugli approcci

risolutivi adottati. Inoltre, sono stati proposti esercizi individuali per esercitare la comprensione del testo dei problemi (Figura 7). In quest'ultima fase, quindi, gli alunni hanno potuto consolidare le abilità conseguite nella lezione precedente, chiarendo gli ultimi dubbi sull'uso di questo strumento.



Figura 7. Esempio di esercizio relativo alla comprensione nella quale si chiede allo studente di identificare lo stesso problema, ma espresso con parole diverse.

Le lezioni successive (terzo e quarto incontro) si sono concentrate sulla categorizzazione dei problemi, un aspetto del "Test SPM" che ha messo in evidenza maggiori difficoltà per gli studenti. Adottando l'approccio del *peer tutoring*, sono state create coppie eterogenee selezionate in base alle prestazioni rilevate dai pre-test e alle osservazioni concernenti le interazioni relazionali tra gli alunni. Gli alunni hanno così effettuato alcuni esercizi come: confronti tra problemi, l'invenzione di problemi o la comprensione di alcuni passaggi risolutivi comuni (un esempio di esercizio in Figura 8).

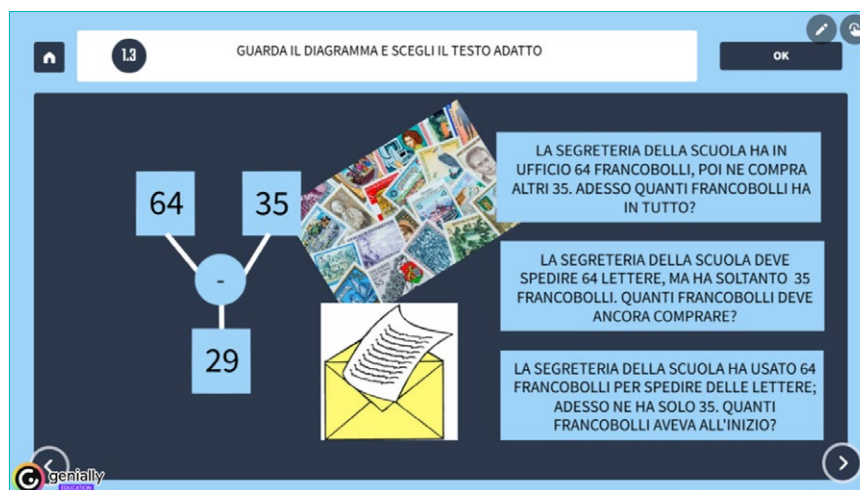


Figura 8. Esempio di esercizio relativo alla categorizzazione: partendo dal diagramma si chiede di individuare il testo corrispondente.

Nelle lezioni seguenti (quinto, sesto e settimo incontro), sono state proposte sia attività di rinforzo sulla categorizzazione (per lavorare sulla struttura profonda di un problema) sia relative alla pianificazione e alla rappresentazione. In particolare, nel settimo incontro gli studenti sono stati divisi in due

gruppi in base alle loro prestazioni nel "Test SPM", concentrandosi sul potenziamento delle abilità di rappresentazione per un gruppo e di pianificazione per l'altro (un esempio di esercizio di rappresentazione in Figura 9; un esempio di esercizio di pianificazione in Figura 10). Questo approccio ha permesso di personalizzare l'intervento didattico in base alle esigenze specifiche di ciascun gruppo.

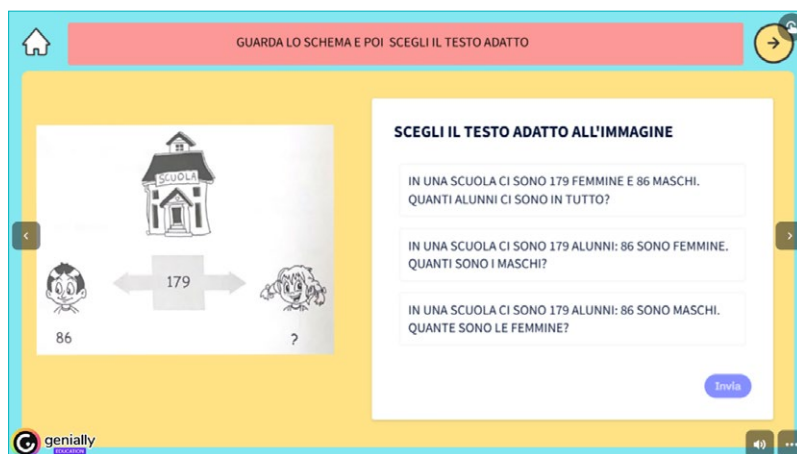


Figura 9. Esempio di esercizio relativo alla rappresentazione.

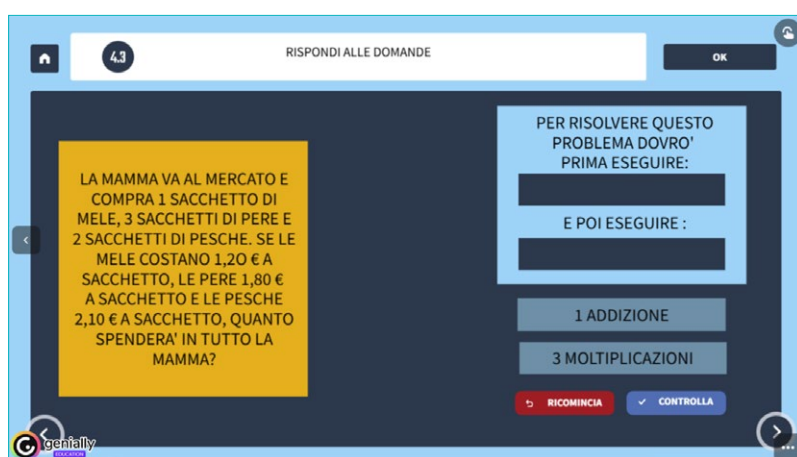


Figura 10. Esempio di esercizio relativo alla pianificazione.

Nell'ottava lezione, per favorire lo sviluppo delle abilità relative allo svolgimento, è stato presentato un problema in modalità interattiva, con un focus sull'osservazione delle autonomie acquisite dagli studenti nell'utilizzo degli strumenti tecnologici e sullo sviluppo delle competenze digitali. Inoltre, è stata richiesta la creazione individuale di problemi partendo da rappresentazioni date. La nona lezione si è concentrata sull'autovalutazione e il monitoraggio, incoraggiando gli studenti a riflettere sulle proprie strategie risolutive attraverso compiti ed esercizi che contenevano errori da identificare e correggere. Le attività sono state proposte in modalità individuale, consentendo un'attenta personalizzazione delle stesse. Ogni studente ha lavorato sulle aree più carenti per ciascuno, identificate nel pre-test e attraverso le osservazioni effettuate durante gli incontri precedenti.

L'ultimo incontro ha incluso una generale analisi e riflessione sulle diverse attività svolte nel corso del progetto e ha previsto la somministrazione della PS2 per valutare i progressi degli studenti nel problem solving matematico a seguito dell'intero percorso proposto con l'uso di Genially.

## 5 Risultati

### 5.1 Studio 1: trasformazioni geometriche con GeoGebra

In questo paragrafo sono presentati i risultati dello studio 1 relativi all'impiego di GeoGebra e al suo impatto sulle competenze geometriche degli studenti della classe quinta. L'analisi si basa sui dati raccolti dalle prove di studio condotte prima (PS1) e dopo (PS2) l'intervento didattico con GeoGebra (RQ1.a). Si esplora, inoltre, la relazione tra i risultati ottenuti e i punteggi specifici nella competenza geometrica degli studenti ("Geometria Test") (RQ1.b). Tali risultati vengono discussi nel par. 6 in relazione alle domande di ricerca. In **Tabella 1** sono riportate le statistiche descrittive dei punteggi relativi alle due prove di studio (PS1 e PS2).

|                       | PS1    | PS2    |
|-----------------------|--------|--------|
| Validi                | 23     | 23     |
| Media                 | 3,261  | 3,609  |
| Dev. St.              | 0,689  | 0,656  |
| Asimmetria            | -0,392 | -1,496 |
| Errore St. Asimmetria | 0,481  | 0,481  |
| Curtosi               | -0,717 | 1,196  |
| Errore Std. Curtosi   | 0,935  | 0,935  |
| Minimo                | 2      | 2      |
| Massimo               | 4      | 4      |

Tabella 1. Punteggi PS1 e PS2: statistiche descrittive.

In **Tabella 2** e **Tabella 3** sono riportate le distribuzioni di frequenza dei punteggi relativi alle due prove di studio (PS1 e PS2).

| Livelli | Frequenze | Percentuali | Percentuali cumulative |
|---------|-----------|-------------|------------------------|
| 2       | 3         | 13,044      | 13,044                 |
| 3       | 11        | 47,826      | 60,870                 |
| 4       | 9         | 39,130      | 100                    |
| Totale  | 23        | 100         |                        |

Tabella 2. Distribuzioni di frequenze PS1.

| Livelli | Frequenze | Percentuali | Percentuali cumulative |
|---------|-----------|-------------|------------------------|
| 2       | 2         | 8,696       | 8,696                  |
| 3       | 5         | 21,739      | 30,435                 |
| 4       | 16        | 69,565      | 100                    |
| Totale  | 23        | 100         |                        |

Tabella 3. Distribuzioni di frequenze PS2.

Il grafico in **Figura 11** mostra un aumento dei punteggi nelle competenze geometriche degli studenti da PS1 a PS2 dopo l'intervento sperimentale. Un test *t* per campioni appaiati ha indicato che c'è una differenza significativa tra i punteggi pre-intervento (PS1) e post-intervento (PS2),  $t(22) = 3,425$ ,  $p = 0,002$ ,  $d = 0,714$ . L'intervallo di confidenza al 95% per la dimensione dell'effetto (*d*) è compreso tra 0,248 e 1,167.

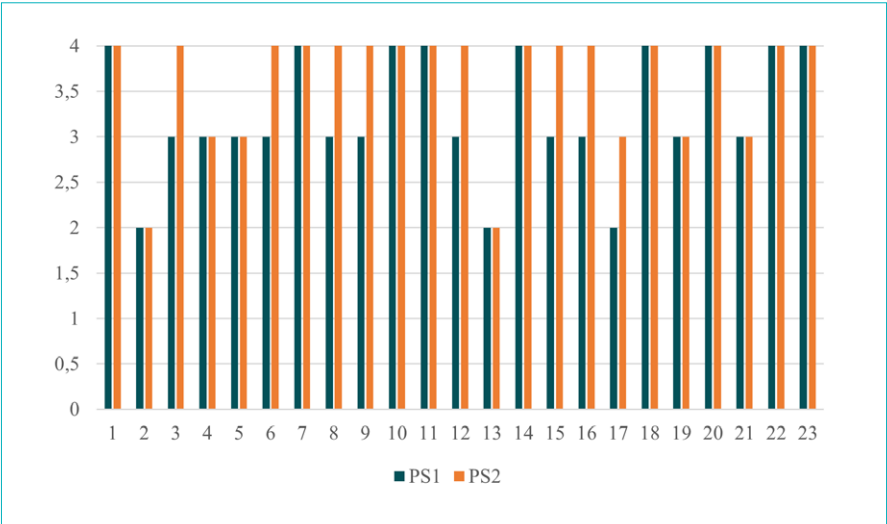


Figura 11. Confronto dei risultati PS1 e PS2.

L'analisi correlazionale esplora le relazioni tra i punteggi specifici nella competenza geometrica ottenuti dagli studenti nel "Geometria Test", e quelli ottenuti nelle due prove di studio (PS1 e PS2). La **Tabella 4** presenta numericamente queste correlazioni.

|                | Geometria Test | PS1   | PS2   |
|----------------|----------------|-------|-------|
| Geometria Test | 1              | 0,654 | 0,587 |
| PS1            | 0,654          | 1     | 0,686 |
| PS2            | 0,587          | 0,686 | 1     |

Tabella 4. Correlazioni tra "Geometria Test", PS1 e PS2.



Il coefficiente di correlazione di 0,654 tra i punteggi del test di Geometria e PS1 indica una correlazione positiva moderata, suggerendo che una solida comprensione iniziale della geometria è associata a migliori prestazioni nella prova di studio PS1. In confronto, la correlazione di 0,587 tra il test di Geometria e PS2, sebbene ancora positiva, è leggermente inferiore, indicando che l'intervento didattico potrebbe aver avuto un ruolo maggiore nel migliorare le prestazioni in PS2. Infine, un coefficiente di correlazione di 0,686 tra PS1 e PS2 mostra una correlazione positiva moderata, riflettendo una generale consistenza nelle prestazioni degli studenti e suggerendo un impatto positivo dell'intervento didattico sulle prestazioni in PS2.

## 5.2 Studio 2: problem solving con Genially

In questo paragrafo, sono presentati i risultati dello studio 2 relativi all'impiego di Genially e al suo impatto sulle abilità di risoluzione dei problemi matematici degli studenti della classe quarta. L'analisi si basa sui dati raccolti dalle prove di studio condotte prima (PS1) e dopo (PS2) l'intervento didattico con Genially (RQ2.a). Si esplora, inoltre, la relazione tra i risultati ottenuti e i punteggi specifici nella abilità di soluzione dei problemi matematici degli studenti ("Test SPM") (RQ2.b).

Le analisi sono state condotte in modo speculare a quanto fatto per RQ1, tali risultati vengono poi discussi nel par. 6 in relazione alle domande di ricerca. In **Tabella 5** sono riportate le statistiche descrittive dei punteggi relativi alle due prove di studio (PS1 e PS2).

|                       | PS1    | PS2    |
|-----------------------|--------|--------|
| Validi                | 19     | 19     |
| Media                 | 2,684  | 3,158  |
| Dev. St.              | 0,946  | 0,834  |
| Asimmetria            | 0,283  | -0,322 |
| Errore St. Asimmetria | 0,524  | 0,524  |
| Curtosi               | -1,145 | -1,488 |
| Errore Std. Curtosi   | 1,014  | 1,014  |
| Minimo                | 1      | 2      |
| Massimo               | 4      | 4      |

Tabella 5. Punteggi PS1 e PS2: statistiche descrittive.

In **Tabella 6** e **Tabella 7** sono riportate le distribuzioni di frequenza dei punteggi relativi alle due prove di studio (PS1 e PS2).

| Livelli | Frequenze | Percentuali | Percentuali cumulative |
|---------|-----------|-------------|------------------------|
| 1       | 1         | 5,263       | 5,263                  |
| 2       | 9         | 47,368      | 52,632                 |
| 3       | 4         | 21,053      | 73,684                 |
| 4       | 5         | 26,316      | 100                    |
| Totale  | 19        | 100         |                        |

Tabella 6. Distribuzioni di frequenze PS1.

| Livelli | Frequenze | Percentuali | Percentuali cumulative |
|---------|-----------|-------------|------------------------|
| 2       | 5         | 26,316      | 26,316                 |
| 3       | 6         | 31,579      | 57,895                 |
| 4       | 8         | 42,105      | 100                    |
| Totale  | 19        | 100         |                        |

Tabella 7. Distribuzioni di frequenze PS2.

Il grafico in Figura 12 mostra un aumento dei punteggi nelle abilità di soluzione dei problemi matematici degli studenti da PS1 a PS2 dopo l'intervento sperimentale. Un test  $t$  per campioni appaiati ha indicato che c'è una differenza significativa tra i punteggi pre-intervento (PS1) e post-intervento (PS2),  $t(18) = 3,375$ ,  $p = 0,003$ ,  $d = 0,774$ . L'intervallo di confidenza al 95% per la dimensione dell'effetto ( $d$ ) è compreso tra 0,251 e 1,281.

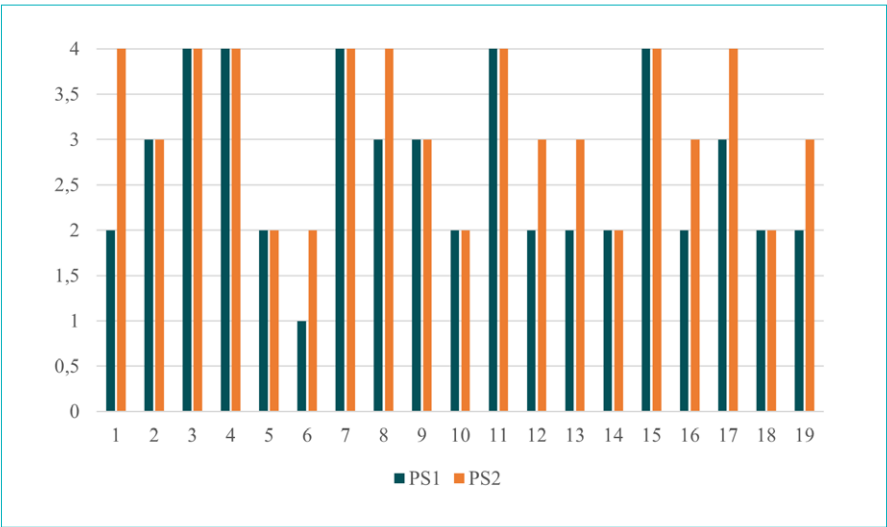


Figura 12. Confronto dei risultati PS1 e PS2.

L'analisi correlazionale esplora le relazioni tra i punteggi specifici nell'abilità di soluzione dei problemi matematici ottenuti dagli studenti nel "Test SPM" e quelli ottenuti nelle due prove di studio (PS1 e PS2). La Tabella 8 presenta numericamente queste correlazioni.

|          | Test SPM | PS1   | PS2   |
|----------|----------|-------|-------|
| Test SPM | 1        | 0,633 | 0,285 |
| PS1      | 0,633    | 1     | 0,783 |
| PS2      | 0,285    | 0,783 | 1     |

Tabella 8. Correlazioni tra "Test SPM", PS1 e PS2.

L'analisi di correlazione tra i punteggi del Test SPM, PS1 e PS2 rivela tendenze interessanti. Un coefficiente di correlazione di 0,633 tra i punteggi del Test SPM e PS1 indica una correlazione positiva moderata, suggerendo che prestazioni più elevate nel Test SPM sono associate a punteggi migliori in PS1. Tuttavia, la correlazione tra il Test SPM e PS2 è notevolmente più bassa, con un coefficiente di 0,285, il che potrebbe indicare che l'intervento didattico tra PS1 e PS2 ha modificato in modo significativo la relazione tra le competenze misurate dal Test SPM e le prestazioni in PS2. In contrasto, una correlazione più elevata di 0,783 tra PS1 e PS2 mostra una forte correlazione positiva, suggerendo una notevole coerenza nelle prestazioni degli studenti tra il pre-test e il post-test, e sottolineando l'efficacia dell'intervento didattico nel mantenere o migliorare le prestazioni degli studenti nel tempo.

## 6 Discussione

---

I risultati di entrambi gli studi presentati mostrano un miglioramento significativo nelle competenze geometriche (RQ1.a) e di problem solving (RQ2.a): le dimensioni dell'effetto, pari rispettivamente a  $d = 0,714$  e  $d = 0,774$ , confermano la portata di questi cambiamenti positivi. Questi risultati sono in linea con la teoria che prevede un effetto di entità moderata delle tecnologie sull'apprendimento in matematica (Chauhan, 2017). Inoltre, indicano che interventi didattici ben strutturati e contestualizzati possono amplificare l'impatto positivo della tecnologia educativa. Questo suggerisce che, con una progettazione didattica attenta e il coinvolgimento attivo degli insegnanti, le tecnologie nell'insegnamento della matematica possono superare l'effetto medio riportato da Hattie (2012), offrendo così un potenziale ancora maggiore per migliorare i risultati di apprendimento degli studenti. È importante sottolineare che, sebbene i risultati siano promettenti, la dimensione dell'effetto di entità moderata implica la necessità di ulteriori ricerche per esplorare in maniera più approfondita le condizioni sotto le quali l'impiego di tecnologie educative può massimizzare i benefici sull'apprendimento matematico. Le analisi condotte in entrambi gli studi mostrano anche che gli studenti con una buona comprensione iniziale hanno beneficiato maggiormente degli interventi, suggerendo che specifiche predisposizioni possono influenzare l'efficacia dell'apprendimento con strumenti digitali. Questo implica che l'uso di GeoGebra e Genially è particolarmente vantaggioso per studenti che hanno già un certo livello di competenza matematica. In particolare, lo studio 1 mostra che l'intervento sperimentale basato sull'uso di GeoGebra, come strumento specializzato, è stato efficace nel migliorare le competenze geometriche, con una correlazione diretta tra il test di Geometria e PS2 (RQ1.b). Questo può indicare che gli studenti che avevano una migliore comprensione della geometria prima dell'intervento hanno tratto maggior beneficio dall'uso di GeoGebra. D'altra parte, lo studio 2 solleva considerazioni sulla progettazione di interventi didattici con strumenti generalistici. La correlazione tra il Test SPM e PS2 nell'intervento sperimentale basato sull'impiego di contenuti didattici interattivi realizzati con Genially (RQ2.b), sebbene non significativa, suggerisce una sfida nell'orientare questi strumenti verso obiettivi specifici. Questo risultato sembra confermare le osservazioni di Chauhan (2017) sulla maggiore efficacia degli strumenti specialistici in contesti mirati.

Le correlazioni osservate indicano l'importanza di scegliere strumenti tecnologici in linea con gli obiettivi di apprendimento e il livello di competenza degli studenti. Questo approccio personalizzato, in accordo con quanto sostenuto da Chauhan (2017), sottolinea che l'efficacia delle tecnologie educative dipende non solo dalla loro integrazione nella didattica, ma anche dal grado di strutturazione e contestualizzazione dell'intervento. Il nostro studio conferma e amplia tale prospettiva, mostrando che strumenti specialistici, come GeoGebra, risultano più efficaci nel raggiungere obiettivi disciplinari specifici, come lo sviluppo delle competenze geometriche, mentre strumenti generalistici, come Genially, richiedono un'attenta progettazione per massimizzarne l'efficacia in contesti mirati. Questo

rafforza l'idea che una pianificazione didattica flessibile, ma basata su un quadro teorico solido, possa guidare l'uso di strumenti digitali in modo più strategico, offrendo risultati significativi sia per studenti con competenze pregresse consolidate sia per quelli con difficoltà iniziali. Ulteriori indagini, condotte anche su un piano più qualitativo, sono necessarie per comprendere meglio quali aspetti dell'apprendimento matematico siano più efficacemente potenziati da strumenti tecnologici specialistici.

Nonostante i risultati promettenti, è fondamentale riconoscere alcune limitazioni dello studio, come l'assenza di un gruppo di controllo e la dimensione ridotta dei campioni, che potrebbero limitare la generalizzabilità dei risultati. Inoltre, fattori esterni non controllati, come l'eterogeneità delle abilità di apprendimento degli studenti e le differenze nell'implementazione didattica, potrebbero aver influenzato i risultati, evidenziando la necessità di ulteriori ricerche per esplorare l'efficacia di vari strumenti digitali in contesti diversi.

Una riflessione metodologica supplementare si concentra sulla scelta di adottare un approccio puramente quantitativo che, sebbene abbia permesso di evidenziare tendenze chiare da cui sviluppare ulteriori indagini, ha ridotto la possibilità di indagare le esperienze personali di studenti e insegnanti. Più in dettaglio, da un lato, l'impiego di metodologie quantitative si è dimostrato utile per valutare l'efficacia dell'approccio didattico adottato nei due studi e per esaminare l'impatto dei due strumenti tecnologici educativi analizzati, generando dati statistici che possono essere utilizzati su vasta scala, ad esempio, per contribuire a futuri studi sistematici. Dall'altro lato, l'assenza di dati qualitativi ha impedito un'analisi dettagliata delle percezioni, delle motivazioni e delle interazioni all'interno dell'ambiente educativo. Di conseguenza, entrambi gli studi potrebbero essere riproposti in ricerche future integrando metodologie qualitative per acquisire una visione più completa dell'impatto degli strumenti digitali sull'apprendimento matematico. Tuttavia, è importante riconoscere che uno studio basato su un approccio misto, che combina metodi quantitativi e qualitativi, risulta più oneroso da progettare e da condurre, soprattutto quando il tempo a disposizione per l'intervento è limitato.

## 7 Conclusioni

---

Il presente articolo ha investigato l'uso di due strumenti tecnologici, GeoGebra e Genially, nell'ambito di due interventi progettati per promuovere l'apprendimento attivo della matematica nella scuola primaria. Attraverso due studi distinti, è stato possibile esplorare come interventi didattici basati sull'uso di tali strumenti abbiano impattato su specifiche competenze matematiche: le competenze geometriche, nel caso di GeoGebra, e le abilità di problem solving, nel caso di Genially.

Dai risultati è emerso che entrambi gli interventi sperimentali possono avere avuto un impatto significativo sull'apprendimento matematico, migliorando rispettivamente le competenze geometriche e di problem solving. Questo conferma che l'integrazione di strumenti digitali nell'educazione matematica può essere un metodo efficace per arricchire l'esperienza di apprendimento attivo degli studenti e per potenziare le loro competenze matematiche. Inoltre, l'analisi delle correlazioni tra i test di competenza e le prove di studio ha fornito indicazioni preziose sulla relazione tra le competenze iniziali degli studenti e i benefici derivanti dall'uso degli strumenti proposti in contesti di apprendimento attivo. In particolare, è stato osservato che gli strumenti specialistici come GeoGebra possono essere particolarmente utili nel potenziare le competenze in aree specifiche, mentre strumenti più generalistici come Genially possono influenzare una gamma più ampia di abilità.

I risultati di questo studio offrono spunti significativi per la pratica educativa, evidenziando l'importanza di una scelta consapevole e mirata degli strumenti digitali in base agli obiettivi di apprendimento e al livello di competenza degli studenti. In particolare, l'efficacia di strumenti specialistici, come GeoGebra, nel migliorare competenze disciplinari specifiche sottolinea la necessità di integrare queste

tecnologie in contesti ben definiti, dove gli obiettivi sono chiari e misurabili. D'altra parte, l'utilizzo di strumenti generalistici, come Genially, pur offrendo versatilità, richiede una progettazione didattica più attenta per garantire il raggiungimento di risultati significativi.

Questi spunti confermano che la tecnologia educativa non è una soluzione universale, ma uno strumento che amplifica l'efficacia dell'insegnamento solo se utilizzato in modo strategico. È quindi essenziale che gli insegnanti siano supportati nella comprensione e nell'uso di tali strumenti attraverso formazioni specifiche e risorse pratiche che consentano loro di allineare le tecnologie agli obiettivi educativi e alle esigenze dei propri studenti. Infine, emerge la necessità di ulteriori ricerche per esplorare come diverse combinazioni di strumenti specialistici e generalistici possano essere integrate nella didattica per soddisfare le esigenze di classi eterogenee, massimizzando così l'impatto positivo sull'apprendimento matematico.

Nel commentare questi risultati incoraggianti, è fondamentale riconoscere alcune limitazioni intrinseche agli studi condotti. Tra queste, come già discusso, la dimensione dei campioni e la loro specificità contestuale emergono come fattori che possono limitare la generalizzabilità dei risultati. La mancanza di gruppi di controllo rende inoltre complesso attribuire con un certo grado di certezza i miglioramenti delle competenze direttamente all'uso degli strumenti digitali. Un'altra considerazione riguarda la durata degli interventi, estesa a quattro mesi, che invita a riflessioni ulteriori sull'efficacia a lungo termine dell'uso di tali strumenti, osservabile ad esempio attraverso la conduzione di studi longitudinali. Infine, si potrebbe ulteriormente esaminare l'influenza delle differenze individuali, come la familiarità pregressa con la tecnologia, sulla risposta degli studenti agli strumenti digitali e considerare l'adozione di approcci qualitativi nelle ricerche future per garantire una comprensione più completa dell'effetto degli strumenti digitali sull'apprendimento matematico.

Nonostante queste limitazioni, a partire dalle quali si potrebbe approfondire la ricerca, già dai risultati di questi due studi, è possibile confermare l'importanza di un approccio personalizzato e mirato nell'adozione delle tecnologie educative, specialmente nel contesto dell'apprendimento attivo della matematica. La scelta degli strumenti digitali dovrebbe essere guidata dagli obiettivi specifici di apprendimento e dalle esigenze degli studenti, tenendo conto delle loro competenze iniziali e del contesto educativo in cui vengono impiegati, perché si possa trasformare il loro potenziale educativo in un apporto efficace e significativo per l'apprendimento degli allievi.

---

## Bibliografia

- Albano, G., & Ferrari, P. L. (2008). Integrating technology and research in mathematics education: The case of e-learning. In F. J. García-Peñalvo (Ed.), *Advances in E-Learning: Experiences and Methodologies* (pp. 132–148). IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-59904-756-0.ch008>
- Aldon, G. (2021). Quanto è importante risolvere e far risolvere problemi? *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 10, 9–28. <https://doi.org/10.33683/ddm.21.10.1>
- Babazadeh, M., & Frigerio, M. F. (2021). Enhancing problem-solving skills with educational escape rooms: A middle school case study. In P. Fotaris (Ed.), *Proceedings of the European Conference on Games Based Learning* (pp. 53–62). Academic Conferences Ltd.
- Baccaglioni-Frank, A. E., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolini, G. (2017). *Didattica della matematica*. Mondadori Università.
- Ball, L., Drijvers, P., Ladel, S., Siller, H. S., Tabach, M., & Vale, C. (2018). *Uses of technology in primary and secondary mathematics education*. Springer.

- Bass, H. (2006). The instructional potential of digital technologies. In M. Sanz-Solé, J. Soria, J. L. Varona & J. Verdera (Eds.), *Proceedings of International Conference of Mathematicians*, 3, 1747–1752.
- Blanca, M. J., Arnau, J., López-Montiel, D., Bono, R., & Bendayan, R. (2013). Skewness and kurtosis in real data samples. *Methodology*, 9, 78–84. <https://doi.org/10.1027/1614-2241/a000057>
- Bonaiuti, G. (2014). *Le strategie didattiche*. Carocci.
- Bray, A., & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research: A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, 114, 255–273. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004>
- Chauhan, S. (2017). A meta-analysis of the impact of technology on learning effectiveness of elementary students. *Computers & Education*, 105, 14–30. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.11.005>
- Cohen, J. (2013). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Academic press.
- Consiglio dell'Unione Europea. (2018). *Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea. [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01))
- Corte-Rojas, C., & Enciso, L. (2023). Genially a Tool for Learning Mathematics. In F. Moreira, C. S. González-González, A. Infante-Moro, J. C. Infante-Moro, J. Gallardo-Pérez, A. García-Holgado & F. J. García-Peñalvo (Eds.), *2023 XIII International Conference on Virtual Campus (JICV)* (pp. 1–4). IEEE. <https://doi.org/10.1109/JICV59748.2023.10565647>
- Crompton, H., Grant, M. R., & Shraim, K. Y. (2018). Technologies to enhance and extend children's understanding of geometry: A configurative thematic synthesis of the literature. *Journal of Educational Technology & Society*, 21(1), 59–69. <https://www.jstor.org/stable/26273868>
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora.
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 5, 9–43. <https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.1>
- Dewey, J. (2004). *Democrazia e educazione*. Sansoni.
- Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 23–37. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.2>
- Ferrari, P. L. (2011). Le potenzialità dell'e-learning in educazione matematica e il ruolo della ricerca. *TD Tecnologie Didattiche*, 19(3), 136–141.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., Owen, R., & Schroeter, K. (2003). Enhancing third-grade student' mathematical problem solving with self-regulated learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, 95(2), 306–315. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.95.2.306>
- Geiger, V., Calder, N., Tan, H., Loong, E., Miller, J., & Larkin, K. (2016). Transformations of teaching and learning through digital technologies. In K. Makar, S. Dole, J. Visnovska, M. Goos, A. Bennison & K. Fry (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australasia 2012-2015* (pp. 255–280). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-10-1419-2\\_13](https://doi.org/10.1007/978-981-10-1419-2_13)

- Gratani, F., Giannandrea, L., Renieri, A., & Annessi, M. (2021). Fostering students' problem-solving skills through educational robotics in primary school. In M. Malvezzi, D. Alimisis & M. Moro (Eds.), *Education in & with Robotics to Foster 21st-Century Skills: Proceedings of EDUROBOTICS 2020* (pp. 3–14). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-77022-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-77022-8_1)
- Gurevich, I., & Barchilon Ben-Av, M. (2023). How do students assess the impact of integrating digital technologies on the mathematics classroom? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(7), 1288–1297. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2179949>
- Hattie, J. (2012). *Visible Learning for Teachers: Maximizing Impact on Learning* (1st ed.). Routledge.
- Hedges, L. V., & Olkin, I. (1985). *Statistical methods for meta-analysis* (1st ed.). Academic Press.
- Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, 153, 103897. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897>
- Jiménez, C., Arís, N., Magreñán Ruiz, Á. A., & Orcos, L. (2020). Digital escape room, using Genial.ly and a breakout to learn algebra at secondary education level in Spain. *Education Sciences*, 10(10), 271. <https://doi.org/10.3390/educsci10100271>
- Kerrigan, J. (2018). Active learning strategies for the mathematics classroom. *College Teaching*, 66(1), 35–36. <https://doi.org/10.1080/87567555.2017.1399335>
- Litster, K., MacDonald, B., & Shumway, J. F. (2020). Experiencing active mathematics learning: Meeting the expectations for teaching and learning in mathematics classrooms. *The Mathematics Enthusiast*, 17(2), 615–640. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1499>
- Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (1995). Metacognizione e matematica: I processi individuali e l'insegnamento/apprendimento. In O. Albanese, P. A. Doudin & D. Martin (Eds.), *Metacognizione ed educazione. Processi, apprendimenti, strumenti* (pp. 205–220). FrancoAngeli.
- Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., & Cendron, M. (1998). *SPM, Test delle abilità di soluzione dei problemi matematici*. Erickson.
- Mammarella, I., Todeschini, M., Englaro, G., Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (2012). *Geometria Test. Prove di valutazione per la scuola primaria e secondaria di primo grado*. Erickson.
- Michael, K., Alemu, M., Desie, Y., Atnafu, M., Assefa, S., Regassa, C., ... & Abate, A. (2023). *Understanding and practice of active learning among upper primary school science and mathematics teachers*. Heliyon.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero speciale*, Le Monnier. [https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254\\_2012.pdf](https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf)
- Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A. E., & Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: Un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica (seconda parte). *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 40(4), 463–488.



- Muranov, A. A. E., Polikarpov, S. A., & Rudchenko, T. Y. A. (2023). Primary school mathematics in the context of digitalization. *Doklady Mathematics*, 107, S42–S51. <https://doi.org/10.1134/S1064562423700588>
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Basic Books.
- Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. La Nuova Italia.
- Peria, L. (2013). Il tablet, in particolare l'iPad, nei contesti didattico-educativi della scuola primaria: a literature review. In G. Buttazzo (Ed.), *Atti del convegno DIDAMATICA 2013-Tecnologie e Metodi per la Didattica del Futuro* (pp. 413–422). AICA-Scuola Superiore Sant'Anna-CNR Pisa.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of engineering education*, 93(3), 223–231. <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2004.tb00809.x>
- Robotti, E., & Bionaz, E. (2016). GeoGebra e disturbi specifici di apprendimento (DSA): Analisi di un case study. In O. Robutti (Ed.), *La formazione docenti con GeoGebra* (pp. 123–132). Ledizioni.
- Santos-Trigo, M., & Gooya, Z. (2015). Mathematical problem solving. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 459–462). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3\\_40](https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_40)
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Shadish, W., Cook, T. D., & Campbell, D. T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference* (Vol. 1195). Houghton Mifflin.
- Shaw, M. (2019). Active learning. In S. Capel, M. Leask & S. Younie (Eds.), *Learning to Teach in the Secondary School* (pp. 308–329). Routledge.
- Shirley, M. L., & Irving, K. E. (2015). Connected classroom technology facilitates multiple components of formative assessment practice. *Journal of Science Education and Technology*, 24, 56–68. <https://doi.org/10.1007/s10956-014-9520-x>
- Thiangthung, Y. (2016). Applying Polya's four-steps and Schoenfeld's behavior categories to enhance students' mathematical problem solving. *Journal of Advances in Humanities and Social Sciences*, 2(5), 261–268. <https://doi.org/10.20474/jahss-2.5.2>
- Usai, M. C., Viterbori, P., & Traverso, L. (2018). Preschool executive function profiles: Implications for math achievement in grades 1 and 3. *Journal of Research in Childhood Education*, 32(4), 404–418. <https://doi.org/10.1080/02568543.2018.1496957>

## I costrutti che incidono sulle competenze in matematica in Svizzera e in Cantone Ticino secondo l'indagine PISA 2022

The constructs affecting mathematical literacy in Switzerland and in the Canton of Ticino according to the PISA 2022 assessment

Silvia Sbaragli, Miriam Salvisberg, Michele Canducci, Alice Ambrosetti e Francesca Crotta

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

✉ [silvia.sbaragli@supsi.ch](mailto:silvia.sbaragli@supsi.ch), [miriam.salvisberg@supsi.ch](mailto:miriam.salvisberg@supsi.ch), [michele.canducci@supsi.ch](mailto:michele.canducci@supsi.ch),  
[alice.ambrosetti@supsi.ch](mailto:alice.ambrosetti@supsi.ch), [francesca.crotta@supsi.ch](mailto:francesca.crotta@supsi.ch)

**Sunto** / Questo contributo indaga quali costrutti, rilevati tramite i questionari di contesto dell'indagine PISA 2022, hanno un impatto sulle competenze in matematica dei quindicenni in Svizzera e in Cantone Ticino. Lo studio è stato effettuato tramite analisi di correlazione, a cui è seguita un'analisi di regressione multipla. Nove costrutti risultano avere un impatto statisticamente significativo sia in Svizzera sia in Cantone Ticino: tra questi, quelli con effetto positivo maggiore sono il *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata* seguito dalla *condizione socioeconomica*, mentre quelli con effetto negativo maggiore sono la *frequenza delle attività relative alle tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) in settimana* e la *frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC*. Cinque costrutti risultano avere un impatto statisticamente significativo in Svizzera ma non in Cantone Ticino: tra questi, quello con effetto positivo maggiore è la *familiarità soggettiva con i concetti matematici* e quello con effetto negativo maggiore è la *ricerca di informazioni sul proprio futuro*; risulta inoltre interessante la significatività in Svizzera ma non in Cantone Ticino dei costrutti *genere* e *ansia per la matematica*. I risultati vengono commentati anche al fine di offrire indicazioni utili per orientare le pratiche didattiche e la formazione degli insegnanti.

**Parole chiave:** indagine PISA; competenza in matematica; costrutti; autoefficacia; condizione socioeconomica.

**Abstract** / This study examines which factors, identified through the context questionnaires of the PISA 2022 survey, affect the performance in mathematics of 15-year-olds in Switzerland and in the Canton of Ticino. The research is based on correlation analysis, followed by a multiple regression analysis. Nine constructs result to have a statistically significant impact on mathematical skills for both Switzerland and the Canton of Ticino: among them, those with the greatest positive effect are the *sense of self-efficacy in formal and applied mathematics* followed by *socioeconomic status*, while among those the greatest negative effect are the *frequency of ICT activities per week* and the *frequency of ICT support or feedback*. Five constructs have a statistically significant impact only in Switzerland and not in the Canton of Ticino: among them, the one with the greatest positive effect is *subjective familiarity with mathematical concepts* and the one with the greatest negative effect is the *future study or work information*; it is also interesting to note the significance of the constructs *gender* and *mathematics anxiety* in Switzerland but not in the Canton of Ticino. The results are also discussed to provide useful guidance for shaping teaching practices and teacher training.

**Keywords:** PISA survey; mathematics skills; constructs; self-efficacy; socioeconomic status.

# 1 Introduzione

---

In questo articolo viene analizzata l'incidenza di alcuni costrutti<sup>1</sup> sulle competenze in matematica in Svizzera e in Cantone Ticino secondo l'indagine internazionale PISA 2022 (*Programme International Student Assessment*). Per inquadrare nel migliore dei modi tale analisi è importante ricordare che le rilevazioni PISA rientrano tra le indagini internazionali su larga scala che riguardano gli «studi in cui si confrontano i risultati [degli studenti] di una certa età o grado scolastico in una o più materie nei diversi sistemi educativi e si esaminano gli effetti dei fattori contestuali sui risultati a livello di sistema, scuola, classe e studente» (Bos, 2002, citato da Hernandez-Torrano & Courtney, 2021, p. 5, traduzione degli autori). Come sottolineato da diversi autori (Hernandez-Torrano & Courtney, 2021; Kirsch & Braun, 2020; Scherer et al., 2024), le indagini internazionali su vasta scala svolgono un ruolo cruciale nell'analisi dei sistemi educativi, in quanto consentono di fornire risultati comparabili e validi sui quali i decisori politici possono prendere delle disposizioni. Le informazioni rilevate da queste indagini permettono infatti di valutare i sistemi educativi rispetto alla loro capacità di sviluppare il potenziale umano e di comprendere meglio le relazioni tra le competenze, le caratteristiche sociodemografiche e le caratteristiche relative al contesto di apprendimento.

Tornando a PISA, lo scopo dell'indagine è valutare le competenze dei quindicenni di vari Paesi tramite le prestazioni ottenute in test riguardanti tre distinti ambiti: la matematica, la comprensione dello scritto e le scienze naturali. In particolare, PISA ha l'ambizione di valutare in che misura gli allievi quindicenni sono in grado di affrontare situazioni quotidiane nelle quali è importante mobilitare le competenze riferite ai tre ambiti. Queste rilevazioni avvengono ogni tre anni e si concentrano per ciascun ciclo su un ambito principale di indagine. Dal 2000 ad oggi la matematica è stata l'ambito principale per tre volte: nel 2003, nel 2012 e nell'anno a cui si riferiscono le considerazioni di questo contributo, ossia il 2022. I risultati di PISA 2022 ottenuti dalla Svizzera in tutti e tre gli ambiti sono stati esposti nel rapporto nazionale (Erzinger et al., 2023), mentre quelli del Cantone Ticino sono riportati nei rapporti cantonali (Ambrosetti & Salvisberg, 2023; Crotta & Salvisberg, 2024). Dalle rilevazioni emerge che sia la Svizzera sia il Cantone Ticino hanno ottenuto ottimi risultati in matematica al test PISA 2022.<sup>2</sup> Nei rapporti sopracitati le competenze in matematica sono state messe in relazione con altri costrutti di contesto. Sia a livello svizzero (Erzinger et al., 2023) sia a livello ticinese (Ambrosetti & Salvisberg, 2023) i risultati sono stati approfonditi mettendo in evidenza le correlazioni tra i costrutti sociodemografici degli allievi (il genere, la lingua parlata a casa, lo statuto migratorio e la condizione socioeconomica) e le competenze in matematica. A livello svizzero si sono analizzate, oltre alla relazione tra competenza matematica e i costrutti sociodemografici sopracitati, anche l'incidenza di costrutti legati all'apprendimento (ad esempio, le emozioni e gli atteggiamenti verso la matematica, considerando in particolare l'ansia per la matematica e il senso di autoefficacia) (Erzinger et al., 2023). Vista l'importanza di comprendere più in profondità quali sono i costrutti che possono incidere sullo sviluppo delle competenze, in questo contributo si è deciso di allargare lo spettro dei costrutti analizzati nei rapporti cantonali e nazionali di PISA 2022 in relazione alle competenze in matematica.

Il tipo di analisi proposto in questo contributo prende spunto da quello effettuato da Lee e Stankov (2018). In questo studio gli autori indagano l'incidenza di un ampio numero di costrutti sulle competenze in matematica, misurate in due diverse indagini internazionali (PISA e TIMSS)<sup>3</sup> e in diversi anni

---

1. Il significato del termine *costrutto* è presentato nel par. 2.2.

2. Il punteggio medio del Cantone Ticino (515) non si differenzia da un punto di vista statistico da quello della Svizzera (508), mentre entrambi i punteggi sono superiori in modo statisticamente significativo rispetto a quello della media OCSE (472). Considerando gli altri 80 Paesi partecipanti a PISA 2022, solo sei Paesi, ovvero Singapore (575), Macao-Cina (552), Taipei cinese (547), Hong Kong-Cina (540), Giappone (536) e Corea (527) ottengono un punteggio medio superiore a quello del Cantone Ticino e della Svizzera. Tutti gli altri Paesi partecipanti (73) ottengono punteggi più bassi rispetto alla Svizzera e al Cantone Ticino; solo l'Estonia ottiene un punteggio simile (510).

3. *Trends in International Mathematics and Science Study*.

di somministrazione, facendo emergere un quadro nel quale un gruppo di costrutti concernenti le convinzioni personali (*self-beliefs*) (in particolare l'autoefficacia in PISA, la fiducia in TIMSS) e le aspettative sul livello di istruzione (sia in PISA sia in TIMSS) risultano avere maggiore impatto sulle competenze in matematica rispetto ad altri costrutti. A differenza dello studio di Lee e Stankov (2018), che hanno condotto un'analisi comparativa su tutti i Paesi partecipanti all'indagine, questo contributo si concentrerà sulla Svizzera e sul Cantone Ticino. La scelta di focalizzarsi su queste due entità è motivata dal fatto che, nel contesto svizzero, è stato adottato un sovracampionamento per un cantone, il Cantone Ticino, al fine di ottenere risultati più rappresentativi e consentire confronti specifici con altri Paesi e con la media nazionale. Quest'ultima, derivando dai ventisei sistemi educativi cantonali che la compongono (tra cui per l'appunto quello ticinese), permette un'analisi di confronto con il Cantone Ticino più mirata e significativa rispetto ad altre entità di riferimento, perché permette di capire in che misura le caratteristiche cantonali si discostano o si allineano con il contesto nazionale. Inoltre, la Svizzera, come Paese, è una delle unità di analisi nei confronti internazionali. Usare la media nazionale consente dunque di inserire meglio il Cantone Ticino in un eventuale contesto di analisi più ampio. Le domande di ricerca che hanno guidato questo lavoro sono le seguenti:

- Quali costrutti incidono sulle competenze in matematica degli studenti in Svizzera e in Cantone Ticino e in quale misura?
- Quali sono le differenze tra la Svizzera e il Cantone Ticino per quanto concerne l'incidenza dei costrutti sulle competenze in matematica?

In questo contributo si prendono in considerazione i costrutti relativi alla matematica e i costrutti generali che riguardano le convinzioni, gli atteggiamenti, i sentimenti e i comportamenti degli studenti, nonché i costrutti relativi alla matematica riguardanti le pratiche di insegnamento e le opportunità di apprendimento. Non vengono invece considerati quei costrutti che si riferiscono a pratiche, politiche e infrastrutture scolastiche, né quelli riferibili alla governance, alle politiche e alle pratiche a livello sistemico.

## 2 Quadro teorico

---

### 2.1 La competenza matematica in PISA 2022

Il concetto di competenza sul quale si basano i quadri teorici di tutti gli ambiti di PISA è quello di *literacy*, definita in modo specifico per ciascuno degli ambiti di indagine, e viene misurata attraverso le prestazioni di studenti sottoposti a test disciplinari costruiti *ad hoc*. Nel quadro concettuale dell'ultima indagine PISA 2022, la *literacy* in matematica è definita nel seguente modo:

«[...] è la capacità di un individuo di ragionare matematicamente e di formulare, utilizzare e interpretare la matematica per risolvere problemi in una varietà di contesti reali. Ciò include concetti, fatti e metodi matematici per descrivere, spiegare e prevedere i fenomeni. La *literacy* in matematica aiuta le persone a riconoscere il ruolo che la matematica riveste nel mondo e a comportarsi come cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi del XXI secolo, ovvero a formulare giudizi e a prendere decisioni consapevolmente».

(Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2023a, p. 22, traduzione degli autori)

Per quanto riguarda il ragionamento matematico esplicitato nella definizione di *literacy* in matematica, esso

«si compone di processi di pensiero logicamente radicati che esplorano e collegano gli elementi del problema in modo da trarne inferenze, verificare una giustificazione data o fornire una giustificazione di affermazioni o soluzioni a problemi».

(OECD, 2013, p. 30, traduzione degli autori)

La capacità di affrontare problemi in contesto con gli strumenti della matematica è storicamente inquadrata in PISA all'interno del cosiddetto *ciclo della matematizzazione* (OECD, 2004, 2013). Nella terminologia proposta da PISA, tale ciclo viene descritto attraverso l'identificazione di alcuni processi che sono ritenuti chiave per la gestione del problema: *formulare* il problema dato in un contesto in termini matematici, *utilizzare* i saperi matematici per giungere a risultati, *interpretare* e *valutare* i risultati in rapporto al contesto. Il processo *formulare* è il primo e fondamentale passo per la risoluzione di un problema; è un processo complesso, perché

«richiede la capacità di estrapolare le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema. Dunque, è necessaria a priori una comprensione profonda della situazione e una decodifica delle informazioni trasmesse dal testo (anche quelle sottintese) espresse in varie forme (linguistica, aritmetica, algebrica, grafica ecc.)».

(Franchini et al., 2017, p. 41)

Il processo *utilizzare* avviene interamente nel mondo della matematica e

«consiste nell'utilizzare strategie risolutive già note o elaborarne di nuove, applicando ad esempio fatti, regole, algoritmi; manipolando numeri, informazioni, dati grafici, espressioni o equazioni, costruzioni geometriche; utilizzando diverse rappresentazioni e passando dall'una all'altra per arrivare alla soluzione».

(Franchini et al., 2017, p. 41)

Infine, il processo *interpretare e valutare*<sup>4</sup> consiste nel riflettere su procedimenti, soluzioni o conclusioni matematiche, di interpretarle nel contesto del problema iniziale, e di valutarne l'accettabilità dei processi risolutivi e delle soluzioni trovati in base alle condizioni reali poste dal problema. Anche quest'ultimo processo non è banale, in quanto «richiede una comprensione profonda del significato matematico di quanto ottenuto» (Franchini et al., 2017, p. 41).

I due aspetti del *ragionamento matematico* e dell'utilizzo della matematica per *risolvere problemi* non sono da ritenersi scollegati tra loro, ma piuttosto vengono proposti come due componenti che si sostengono e si relazionano a vicenda, mantenendo al contempo alcune peculiarità e distinzioni (Klauer & Phye, 2008; Vosniadou & Ortony, 1989). È importante sottolineare che, rispetto al quadro teorico del 2012, in cui la *literacy* matematica si concentrava in modo prioritario sull'attività di risoluzione di problemi (OECD, 2013), nell'attuale quadro teorico si riconosce invece una maggiore importanza al ruolo del ragionamento matematico (OECD, 2023a). Si evidenzia infatti come le varie fasi del ciclo della matematizzazione coinvolgano necessariamente aspetti del ragionamento matematico. Durante il processo *formulare*, viene applicato il ragionamento matematico nell'identificare le diverse opportunità matematiche di rappresentare un particolare problema. Ciò include la capacità di trasformare

4. Il ciclo della matematizzazione presentato in PISA fino al 2012 proponeva il processo *interpretare* e il processo *valutare* come due processi sequenziali ma distinti. Negli aggiornamenti successivi si è invece preferito considerarli come parti dell'unico processo *interpretare e valutare*.

una situazione così come viene presentata nel contesto reale in una forma suscettibile di manipolazioni simbolico-matematiche, fornendo quindi strutture e rappresentazioni matematiche, identificando le variabili e facendo ipotesi semplificative per aiutare a risolvere il problema. Dopo aver effettuato questa trasformazione, attraverso il processo *utilizzare* il problema matematico deve essere risolto utilizzando i concetti, gli algoritmi e le procedure conosciuti. Anche in questa fase occorre saper prendere decisioni strategiche riguardo la selezione di questi strumenti e l'ordine della loro applicazione, il che rappresenta un'ulteriore manifestazione del ragionamento matematico. Infine, il processo *interpretare e valutare* coinvolge una riflessione su soluzioni o risultati matematici e la capacità di interpretarli nel contesto problematico di partenza. Si tratta, anche in questo caso, di applicare il ragionamento matematico per valutare le soluzioni matematiche in relazione al contesto del problema e determinare se i risultati sono ragionevoli e hanno senso nella situazione; il ragionamento interviene inoltre quando occorre determinare cosa evidenziare quando si spiega la soluzione. PISA 2022 sintetizza questa interazione tra il *ragionamento matematico* e le *fasi del ciclo della matematizzazione* attraverso la rappresentazione proposta in Figura 1.

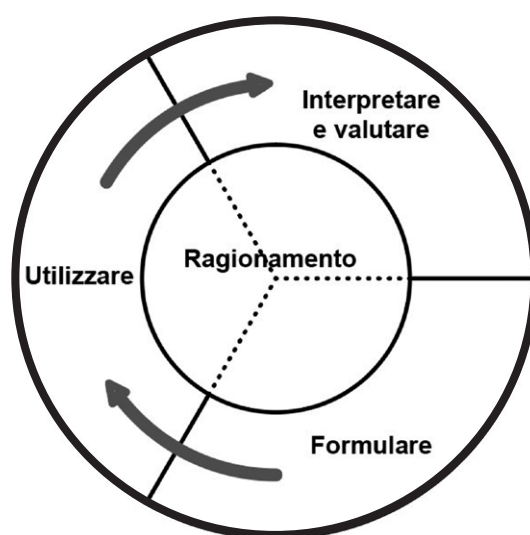


Figura 1. Rappresentazione di PISA 2022 dell'interazione tra il *ragionamento matematico* e le *fasi del ciclo della matematizzazione*.

In aggiunta a queste considerazioni PISA 2022 riconosce anche alcuni aspetti peculiari del ragionamento matematico, aspetti che vanno al di là della risoluzione di problemi. In effetti, il ragionamento matematico è anche «un modo per valutare e argomentare, valutare le interpretazioni e le inferenze relative ad affermazioni [...] e a soluzioni di problemi che, per la loro natura quantitativa, sono meglio compresi dal punto di vista matematico» (OECD, 2023a, pp. 23–24, traduzione degli autori). In quest'ottica, la matematica diventa un contesto particolarmente significativo nel quale esercitare le abilità di ragionamento, perché è una scienza che riguarda oggetti e nozioni ben definiti che possono essere analizzati e trasformati in modi diversi, al fine di ottenere conclusioni di cui siamo certi:

«attraverso la matematica, gli studenti imparano che, utilizzando un ragionamento appropriato, possono raggiungere risultati e conclusioni di cui possono fidarsi. Inoltre, tali conclusioni sono logiche e oggettive, e quindi imparziali, senza bisogno della convalida di un'autorità esterna. Questo tipo di ragionamento, che è utile ben oltre la matematica, può essere appreso e praticato con la massima efficacia all'interno della matematica».

(OECD, 2023a, p. 27, traduzione degli autori)



Infine, è necessario accennare al fatto che nel framework di PISA 2022 (OECD, 2023a) si esplicita anche come la competenza vada inquadrata tenendo in considerazione i seguenti aspetti: i domini dei contenuti matematici in cui la competenza matematica viene applicata (quantità, dati e incertezza, variazioni e relazioni, spazio e figure); i contesti in cui esercitare la competenza (personale, lavorativo, sociale, scientifico) e le competenze del XXI secolo che sono di supporto e sono sviluppate attraverso la competenza matematica (pensiero critico, creatività, ricerca e indagine, auto-orientamento, iniziativa e persistenza, uso dell'informazione, pensiero sistemico, comunicazione, riflessione).

2.2 I costrutti dei questionari di contesto di PISA 2022

Per poter valutare la complessità dei sistemi educativi, oltre ai risultati delle competenze nei tre ambiti (matematica, comprensione dello scritto, scienze naturali) valutati tramite test, PISA sottopone agli studenti e alle direzioni delle scuole dei questionari<sup>5</sup> di contesto che mirano a raccogliere informazioni su vari costrutti che coprono diverse tematiche, ad esempio le convinzioni, gli atteggiamenti, i sentimenti e i comportamenti degli studenti. Il *costrutto*, in PISA, viene definito come «una concettualizzazione teoricamente definita di un aspetto del comportamento umano o di un fenomeno empirico» (OECD, 2023a, p. 170, traduzione degli autori). Per poter misurare ciascun costrutto è necessario operazionalizzarlo, ovvero «legare i concetti scientifici a operazioni che chiunque può osservare o eseguire rendendo il più possibile oggettivi i dati dell'osservazione scientifica» (Bridgman, 1927, citato in Chiorri, 2011, p. 27). L'operazionalizzazione avviene identificando degli indicatori osservabili che a loro volta vengono «operativizzati attraverso una o più variabili» (Corbetta, 2007, p. 45). Le domande del questionario poste agli studenti sono il risultato del processo di operazionalizzazione volto a misurare i costrutti di interesse. Partendo dalle risposte degli studenti, il dataset di PISA offre degli indici già elaborati a livello internazionale riferiti ai costrutti, composti dalla combinazione di più variabili (per ulteriori dettagli relativi agli indici e alla procedura adottata per crearli si rimanda a: OECD, 2024b, pp. 384–447). Vi sono perciò alcuni costrutti che corrispondono in modo univoco a una variabile; altri costrutti che corrispondono al risultato di un processo di composizione e combinazione di più variabili. Nel prosieguo il termine *costrutto* sarà usato anche per riferirsi a elementi misurati direttamente tramite una variabile. Grazie all'analisi di quanto raccolto attraverso i test e i questionari di contesto, è possibile ricavare informazioni sulle relazioni fra le competenze e i costrutti indagati, così da fornire importanti indicatori per gli agenti dei sistemi educativi dei Paesi e per i ricercatori in ambito educativo e didattico.

I costrutti indagati nei questionari di contesto di PISA 2022 (OECD, 2023a) sono stati organizzati in una tassonomia a due dimensioni, presentate nella prima colonna e nella prima riga della **Tabella 1**.

|                                  | 1. Background degli studenti | 2. Convinzioni, atteggiamenti, sentimenti e comportamenti degli studenti | 3. Pratiche di insegnamento e opportunità di apprendimento | 4. Pratiche, politiche e infrastrutture scolastiche | 5. Governance, politiche e pratiche a livello sistemico |
|----------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| A. Costrutti riferiti all'ambito |                              |                                                                          |                                                            |                                                     |                                                         |
| B. Costrutti generali            |                              |                                                                          |                                                            |                                                     |                                                         |

Tabella 1. Tassonomia a due dimensioni dei questionari di contesto di PISA 2022 (OECD, 2023a).

5. I questionari agli studenti e alle scuole sono obbligatori per tutti i Paesi. Vi sono in aggiunta altri questionari opzionali indirizzati ai genitori o ai docenti, che la Svizzera non somministra, e il questionario opzionale focalizzato sulle tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) indirizzato agli studenti, al quale invece la Svizzera aderisce.



La prima dimensione (in colonna nella **Tabella 1**) classifica i costrutti proposti in due categorie:

- A. *Costrutti riferiti all'ambito*. Si tratta di costrutti riferiti all'ambito disciplinare considerato, nel nostro caso alla matematica, e sono intesi in due sensi: costrutti che possono spiegare le prestazioni degli studenti nell'ambito specifico e costrutti che possono spiegare fenomeni più ampi, ma sempre legati all'ambito di riferimento, come ad esempio le scelte di iscrizione a corsi o di carriera scolastica futura. Un esempio di costrutto afferente alla prima interpretazione è il senso di autoefficacia in matematica; invece, un esempio di costrutto afferente alla seconda interpretazione è la partecipazione a lezioni supplementari di matematica.
- B. *Costrutti generali*. Si tratta di costrutti non inerenti all'ambito di indagine, ma che possono comunque spiegare i risultati scolastici degli studenti: ad esempio i sentimenti degli studenti nei confronti della scuola (le relazioni studente-insegnante, le esperienze di bullismo ecc.), le infrastrutture scolastiche come la disponibilità di tecnologia digitale per l'apprendimento, o costrutti che integrano gli indicatori di efficacia educativa (ad esempio, il benessere soggettivo, le caratteristiche sociali ed emotive ecc.).

La seconda dimensione (in riga nella **Tabella 1**) classifica i costrutti proposti in cinque categorie basate su aree chiave collegate alle strategie e politiche educative:

1. *Background (costrutti di contesto) degli studenti*. Questa categoria comprende i costrutti legati alla condizione socioeconomica, alla condizione sociodemografica, allo statuto migratorio e linguistico, ai percorsi di scolarizzazione; questi costrutti forniscono informazioni che vengono utilizzate per valutare la capacità dei Paesi di garantire equità nelle opportunità educative.
2. *Convinzioni, atteggiamenti, sentimenti e comportamenti degli studenti*. Questa categoria comprende costrutti che intendono raccogliere informazioni sulle convinzioni (ad esempio riguardo all'apprendimento), sugli atteggiamenti (ad esempio nei confronti della matematica, oppure legati ad aspetti sociali ed emotivi), sui sentimenti (riferiti ad esempio alla scuola, a specifiche discipline, oppure ad aspetti sociali ed emotivi) e sui comportamenti (ad esempio la partecipazione ad attività extrascolastiche). Costrutti come il rispetto e la comprensione degli altri, la motivazione ad apprendere e a collaborare o la capacità di regolare il proprio comportamento possono svolgere un ruolo nell'acquisizione di conoscenze e competenze relative all'area disciplinare.
3. *Pratiche di insegnamento e opportunità di apprendimento*. Questa categoria comprende costrutti che raccolgono informazioni come le qualifiche dei docenti di matematica, le pratiche didattiche dei docenti, il clima in classe, le opportunità di apprendimento dentro e fuori dalla scuola.
4. *Pratiche, politiche e infrastrutture scolastiche*. Questa categoria comprende costrutti che raccolgono informazioni aggregate riguardo ai dati demografici degli studenti, oppure informazioni su aspetti strutturali (come l'ubicazione, il tipo e le dimensioni della scuola), o sulla composizione sociale ed etnica degli studenti della scuola.
5. *Governance, politiche e pratiche a livello di sistema*. Questa categoria intende concentrare l'attenzione sulla governance, e dunque comprende costrutti che indagano l'attivazione da parte delle scuole di quei processi valutativi che gli amministratori scolastici utilizzano per controllare la qualità della scuola e per monitorare e promuoverne il miglioramento.

I costrutti afferenti alle sottocategorie ottenute dagli incroci di A e B con 1, 2, 3, 4 e 5 vengono indagati sia tramite il questionario dedicato agli studenti sia tramite quello per i dirigenti scolastici (obbligatori per tutti i partecipanti all'indagine). Per questo contributo si è deciso di focalizzarsi solo sui risultati dei costrutti interni alle sottocategorie A2 (costrutti riferiti alla matematica e riguardanti le convinzioni, gli atteggiamenti, i sentimenti e i comportamenti degli studenti), A3 (costrutti riferiti alla matematica e riguardanti le pratiche di insegnamento e le opportunità di apprendimento) e B2 (co-

strutti generali riguardanti le convinzioni, gli atteggiamenti, i sentimenti e i comportamenti degli studenti) concernenti il questionario rivolto agli studenti. Complessivamente i costrutti afferenti a queste tre sottocategorie indagati per il presente contributo sono quarantotto e sono riportati nell'[Allegato 1](#).<sup>6</sup> Sono stati quindi esclusi dall'analisi i costrutti derivanti da questionari rivolti ai dirigenti scolastici (A4, A5, B4, B5); i costrutti della sottocategoria A1, perché non presenti nel framework di PISA 2022 (OECD, 2023a); i costrutti della sottocategoria B3, in quanto inerente alla situazione eccezionale e molto circoscritta della pandemia globale; i costrutti della sottocategoria B1.<sup>7</sup>

Inoltre, a fronte dell'importanza della tematica dell'integrazione del digitale nell'insegnamento e della disponibilità di ulteriori dati proprio su questa area, si è deciso di integrare nelle analisi alcuni costrutti che derivano dal questionario opzionale per gli studenti sulle tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) al quale la Svizzera e il Cantone Ticino hanno aderito, tralasciando le domande relative alle infrastrutture delle scuole. Anche di questi costrutti è riportato l'elenco nell'[Allegato 1](#).

### 3 Metodologia

I dati dell'indagine PISA 2022 relativi alla Svizzera (estratti dal dataset internazionale) e al Cantone Ticino (Erzinger et al., 2024) sono l'oggetto di analisi di questo contributo. In entrambi i contesti, gli allievi partecipanti all'indagine sono quindicenni (ovvero nati nel 2006): il campione svizzero di partecipanti è composto da 6'829 allievi, mentre quello ticinese da 987 allievi, ed è incluso nel campione svizzero. Questi campioni sono ponderati<sup>8</sup> in modo da consentire di generalizzare i risultati su rispettivamente 75'696 e 2'996 giovani di quindici anni, numeri che corrispondono alle dimensioni dei campioni ponderati per la Svizzera e per il Cantone Ticino.<sup>9</sup> Il campione ponderato ticinese è incluso nel campione ponderato svizzero e rappresenta dunque il 4% di quest'ultimo. Data la percentuale relativamente contenuta e il fatto che il campione ponderato svizzero è di dimensione più grande, la sua influenza sui risultati complessivi del campione ponderato svizzero è ridotta, a meno che non si presenti il caso di relazioni, tra i costrutti studiati, molto diverse per il Cantone Ticino rispetto al resto della Svizzera (ad esempio se in Cantone Ticino vi fosse una relazione fortemente positiva e in Svizzera fortemente negativa tra un costrutto e le competenze in matematica); una tale situazione potrebbe in effetti comportare un'influenza del campione ticinese nell'attenuare i coefficienti nazionali. Dal punto di vista della composizione sociodemografica dei due campioni si riscontrano alcune differenze: il campione ticinese si distingue da quello svizzero per una percentuale più elevata di maschi (55%

6. Nella sottocategoria B2 rientrano anche i seguenti costrutti che non sono stati considerati nelle analisi del presente contributo: i costrutti relativi alle aspettative professionali (BSMJ); all'impegno per far bene il test PISA e il questionario (ST331Q01, Q02 e Q03); e tre relativi alle attività prima e dopo la scuola (EXERPRAC, WORKPAY e WORKHOME). Questi costrutti non sono stati scelti per i seguenti motivi: per i primi si è riscontrata un'alta percentuale di dati mancanti; l'impegno al test è stato ritenuto un costrutto troppo specifico al contesto dello svolgimento della prova PISA e i terzi costrutti dicotomici non sono direttamente misurabili insieme a tutte le altre variabili per ciò che concerne il coefficiente di correlazione utilizzato (par. 3.2). Va segnalato inoltre che alcuni costrutti (ad esempio ingegno/immaginazione e spirito di avventura; assenteismo; prospettive di carriera formativa futura; presa di prospettiva; auto-controllo; fiducia) non sono stati operazionalizzati dall'OCSE attraverso delle variabili o non vi sono dati validi nel dataset internazionale, motivo per il quale non sono inclusi nelle analisi svolte.

7. Tuttavia, alcuni dei costrutti della sottocategoria B1, riguardante i costrutti generali in relazione al background degli studenti (la condizione socioeconomica, la lingua parlata a casa, il genere e l'avere o meno ripetuto una classe), sono stati utilizzati nell'analisi di regressione come variabili di controllo (par. 3.2).

8. Il campione in PISA è ponderato: i dati sono analizzati applicando pesi campionari che tengono conto sia della probabilità di selezione degli allievi sulla base del design utilizzato per costruire il campione, sia di chi è stato selezionato ma non ha poi partecipato. La ponderazione viene effettuata per garantire che i risultati siano rappresentativi della popolazione di riferimento. Per ulteriori dettagli sulla ponderazione si rimanda al rapporto tecnico dell'indagine (OECD, 2024b, pp. 188–200).

9. Anche il campione ticinese è da considerarsi rappresentativo in quanto si è proceduto con un sovracampionamento per questa regione, rispetto a quanto necessario dagli standard internazionali per il solo campione svizzero, proprio per garantire la possibilità di svolgere analisi conclusive sulla popolazione degli allievi quindicenni ticinesi.

contro il 51%), per una quota più elevata di giovani che a casa parlano la lingua del test (85% contro 71%) e per una media dell'indice sulla condizione sociale più elevata (0,36 contro 0,17), mentre per lo status migratorio non si rilevano differenze particolari. La struttura federalista della Svizzera, che si riflette anche nel settore dell'educazione, determina l'esistenza di ventisei sistemi educativi cantonali. Il sistema educativo ticinese si distingue dagli altri perché, generalmente, le ragazze e i ragazzi di quindici anni hanno già completato il percorso scolastico obbligatorio. Questo si riflette nel campione ticinese, che è composto dall'81% di giovani che stanno frequentando una scuola post-obbligatoria. Invece, considerando il campione svizzero nel suo complesso, solo il 41% ha terminato la scuola dell'obbligo a quindici anni. Per rispondere ai quesiti di indagine, si è proceduto effettuando inizialmente delle analisi<sup>10</sup> di correlazione e in seguito delle analisi di regressione lineare multipla.

### 3.1 Analisi di correlazione

L'obiettivo di questa analisi è quello di selezionare i costrutti afferenti alle sottocategorie dichiarate nel par. 2.2 che risultano essere in correlazione con le competenze in matematica misurate dal test PISA sia a livello svizzero sia a livello ticinese. L'analisi di correlazione svolta è bivariata, ossia avviene tra due variabili, intese nel senso statistico del termine, e permette di identificare se tra loro vi è una covariazione lineare, ovvero se all'aumentare di una variabile, aumenta (o diminuisce) anche l'altra e viceversa. Nel nostro caso, sono variabili statistiche da inserire nell'analisi sia la competenza in matematica, sia i vari costrutti indagati. Il coefficiente  $r$  di Pearson risultante dall'analisi va da  $-1$  a  $+1$  e indica il grado di correlazione; se il coefficiente di correlazione è ad esempio  $1$ , significa che vi è una correlazione positiva perfetta tra due variabili: si può dire cioè che, mediamente, all'aumentare di una variabile (ad esempio all'aumentare delle competenze in matematica), aumenta proporzionalmente anche l'altra variabile (ad esempio il senso di autoefficacia in matematica formale e applicata), e viceversa (all'aumentare del senso di autoefficacia in matematica formale e applicata, aumentano le competenze in matematica). Un coefficiente invece negativo di  $-1$  significa che vi è una correlazione negativa perfetta, ossia che ad ogni aumento di una variabile (ad esempio all'aumentare delle competenze in matematica) corrisponde una diminuzione proporzionale dell'altra variabile (ad esempio l'ansia in matematica), e viceversa (all'aumentare dell'ansia in matematica, diminuiscono le competenze in matematica). Un coefficiente pari a  $0$  indica che non vi è correlazione, ossia le due variabili non covariano assieme e dunque non risulta che vi sia una relazione tra esse. È da considerare che la correlazione non va mai interpretata come un coefficiente che indica una relazione causale, ossia non è possibile dire se una variabile è la causa di un'altra e qual è l'effetto, ma si tratta di considerare se due variabili variano nella stessa direzione oppure no. Ad esempio, è possibile che allievi con elevati livelli di ansia abbiano una competenza matematica bassa e viceversa (correlazione negativa tra le due variabili), ma non è dato sapere se il fatto che gli allievi siano più ansiosi sia causa di una bassa competenza matematica, o se una competenza bassa sia causa di maggiore ansia negli allievi.

Nel contesto di questo contributo si è dapprima proceduto a calcolare la correlazione tra tutti i costrutti considerati e tra i costrutti e le competenze in matematica. L'analisi delle correlazioni tra i vari costrutti è servita a controllare eventuali problemi di collinearità dovuti a una relazione molto forte tra due costrutti: si è considerato come soglia un coefficiente di correlazione pari o superiore a  $0,8$  (Field, 2024). Da questo controllo non sono risultate relazioni con un coefficiente superiore a questa soglia e dunque si sono mantenuti tutti i costrutti nel prosieguo delle analisi.

Dalle analisi delle relazioni dei costrutti con le competenze in matematica si è deciso di considerare i costrutti con una significatività statistica e pratica per la Svizzera e/o per il Cantone Ticino. La signifi-

10. Per le analisi è stato utilizzato il software R (versione 4.4.1) e in particolare il pacchetto BIFESurvey (versione 3.6-6) (Robitzsch & Oberwimmer, 2022), al fine di gestire la complessa struttura dei dati. In particolare, è stato applicato il peso appropriato come richiesto a livello internazionale, sono stati utilizzati i *replicate weights* per calcolare gli errori standard e sono stati considerati 10 *plausible values* quali misura delle competenze.

cattività statistica indica se il risultato trovato nel campione è generalizzabile o meno alla popolazione secondo un determinato grado di probabilità. Si può ad esempio stabilire se il risultato di una correlazione o di un coefficiente di regressione è statisticamente significativo o meno al 95% di probabilità osservando se i risultati nelle analisi statistiche forniscono un valore del *p-value* minore o maggiore di 0,05. Se il valore del *p-value* ottenuto è minore di 0,05, si può sostenere che la correlazione o il coefficiente di regressione in questione sono statisticamente significativi al 95%. Di fatto, però, in presenza di campioni molto estesi come sono quelli relativi a questa analisi, la probabilità che le analisi statistiche diano risultati significativi a livello statistico è molto alta. È quindi interessante considerare la forza della correlazione quale indicatore di significatività pratica. Ad esempio, nel caso di una correlazione positiva statisticamente significativa tra un costrutto e le competenze in matematica che ha però una dimensione piccola (come per esempio  $r = 0,04$ ), ciò significa che all'aumentare del costrutto aumentano le competenze (e viceversa), ma di molto poco; ne deriva che il costrutto potrebbe avere poco impatto sulle competenze degli allievi. È dunque la significatività pratica che permette di non «sopravalutare effetti molto piccoli ma statisticamente significativi [...] e di sottovalutare effetti grandi ma non statisticamente significativi» (Chiorri, 2020, p. 225). Nel presente contributo si è deciso di tenere conto della significatività statistica a un livello del 95% e di una significatività pratica data da coefficienti *r* di Pearson in valore assoluto uguali o maggiori di 0,2 tra i costrutti considerati e le prestazioni al test PISA in matematica a livello svizzero e ticinese.

### 3.2 Analisi di regressione

Con i costrutti significativi dal punto di vista statistico e pratico selezionati dall'analisi di correlazione, sono stati creati due modelli di regressione lineare multipla: uno per la Svizzera e uno per il Cantone Ticino. L'obiettivo dell'analisi di regressione è quantificare la presenza e la forza della relazione di questi costrutti sulle competenze in matematica, in un modello che li considera tutti assieme. In generale, l'analisi di regressione permette di determinare il peso, ossia la dimensione dell'effetto, di ogni variabile statistica indipendente considerata (ad esempio l'ansia in matematica, il genere ecc.) nel predire una variabile statistica dipendente (nel caso presente, le competenze in matematica) (Chiorri, 2020). L'interesse di un'analisi di regressione multipla, rispetto a una correlazione che considera la relazione unicamente tra due variabili alla volta, è quello di poter considerare contemporaneamente la relazione di più variabili con la variabile dipendente e di isolare l'effetto proprio di ogni variabile indipendente (controllando per le altre variabili indipendenti considerate). I coefficienti di regressione, qui indicati con  $\beta$  (beta standardizzato, par. 5) e calcolati tramite un'analisi di regressione multipla, indicano quanto varia la variabile indipendente al variare della variabile dipendente considerata e mantenendo le altre variabili indipendenti costanti. Tuttavia, è importante sottolineare che l'ipotesi di causalità è difficilmente verificabile con dati raccolti in un unico momento (ad esempio se è il senso di autoefficacia che influenza le competenze, o se sono le competenze che impattano sul senso di autoefficacia); per questa ragione si raccomanda cautela nell'interpretazione causale dei risultati.

Per costituire dei modelli comparabili tra Svizzera e Cantone Ticino sono stati considerati i costrutti per cui è risultata una relazione statisticamente significativa e con coefficiente di correlazione con le competenze in matematica a livello svizzero e/o a livello ticinese che fosse in valore assoluto uguale o maggiore rispetto a 0,20 (si veda la Tabella 2). Dunque, nel modello di regressione della Svizzera sono inclusi i costrutti che hanno un coefficiente di correlazione in valore assoluto sotto lo 0,20 con le prestazioni in matematica, ma che è superiore o uguale a 0,20 unicamente per il Cantone Ticino, e viceversa. Inoltre, nei modelli di regressione lineare multipla sono stati inseriti come variabili di controllo i costrutti relativi alla condizione socioeconomica, alla lingua parlata a casa, al genere e all'avere o meno ripetuto una classe; è infatti comprovato a livello scientifico il loro impatto sulle competenze in matematica a livello nazionale (Erzinger et al., 2023) e internazionale (Lee & Stankov, 2018). Di tutti i costrutti inseriti nel modello di regressione, vengono considerati quelli statisticamente significativi (cioè quelli per cui, ancora una volta, il *p-value* ottenuto è minore di 0,05).

## 4 Risultati dell'analisi di correlazione con le competenze in matematica

---

In questo paragrafo vengono riportati i costrutti significativi dal punto di vista statistico e pratico per la Svizzera, per il Cantone Ticino o per entrambi, individuati dall'analisi di correlazione con le competenze in matematica, presentati con una breve descrizione teorica per ciascuno (par. 4.1) e a seguire tramite i risultati puntuali ottenuti dall'analisi (par. 4.2).

### 4.1 I costrutti significativi risultati dall'analisi di correlazione con le competenze in matematica

Dall'analisi di correlazione dei quarantotto costrutti sui quali ci si è concentrati ([Allegato 1](#)), sono risultati significativi dal punto di vista statistico e pratico i seguenti dodici:

- *ansia per la matematica*;
- *aspettative formative*;
- *ricerca di informazioni sul proprio futuro*;
- *curiosità*;
- *familiarità soggettiva con i concetti matematici*;
- *frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC*;
- *frequenza delle attività relative alle TIC in settimana*;
- *frequenza delle attività relative alle TIC nel weekend*;
- *frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie*;
- *percezione della qualità delle lezioni in matematica*;
- *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata*;
- *senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo*.

Per ciascuno di questi costrutti viene riportata una breve descrizione teorica.

***Ansia per la matematica.*** Il termine “ansia” è generalmente utilizzato per indicare una risposta emotiva complessa caratterizzata da sentimenti di preoccupazione, apprensione, tensione e paura riguardo a situazioni percepite come minacciose o stressanti (Barlow, 2002). In riferimento alla matematica, dunque, l'ansia riguarda tale condizione emotiva che molte persone sperimentano quando si cimentano con questa disciplina (Ashcraft, 2002). Questa forma di ansia è considerata un'ansia di tratto, cioè un elemento relativamente stabile della personalità di un individuo e si differenzia dunque sia da quella di stato, che si attiva solo in alcune situazioni specifiche, sia dall'ansia legata al test (Hembree, 1990; Kazelskis et al., 2000). Per gli studenti afflitti da ansia per la matematica, gli effetti vanno oltre la mera avversione o preoccupazione per la materia stessa; essa incide anche su risposte fisiologiche come la frequenza cardiaca, l'attivazione neurale e il livello di cortisolo (Pletzer et al., 2015; Sarkar et al., 2014).

Il questionario PISA 2022 indaga questo costrutto, presente nella sottocategoria A2, attraverso sei item ([Allegato 2a](#)) nei quali agli studenti viene chiesto di esprimere il grado di accordo/disaccordo riguardo ad alcuni stati emotivi associati alla matematica, ad esempio “Mi preoccupa spesso l'idea di avere delle difficoltà nelle lezioni di matematica”, o “Quando devo fare i compiti di matematica divento molto teso/a”, oppure ancora “Mi sento perso/a quando lavoro su un problema matematico”.

***Aspettative formative e ricerca di informazioni sul proprio futuro.*** PISA 2022 misura il costrutto *percorsi formativi e aspirazioni post-secondarie* attraverso diversi altri costrutti (ad esempio le *aspettative sul lavoro futuro*). In questa analisi, quelli che hanno trovato significatività pratica e statistica sono due: le *aspettative formative* e la *ricerca di informazioni sul proprio futuro*. Entrambi i costrutti afferiscono alla sottocategoria B2. Il primo di questi costrutti, *aspettative formative*, indaga la formazione

futura che gli allievi intendono conseguire. È opportuno ricordare che i giovani partecipanti a PISA si trovano in un momento saliente della loro formazione, in quanto hanno iniziato o inizieranno a breve una formazione post-obbligatoria: in questa fase, le aspettative sono un indicatore su dove questi giovani si stanno dirigendo. Dalle diverse ricerche volte ad indagare gli aspetti che influiscono sulla riuscita scolastica, sintetizzate in Hattie (2023) e in Marcionetti et al. (2023), emerge che le aspettative formative future dei giovani si trovano tra quelli che hanno una maggiore incidenza. Inoltre, le ricerche che studiano il processo di costruzione delle scelte per il proprio futuro da parte dei giovani, sottolineano come le relazioni interpersonali tra compagni, genitori e insegnanti abbiano un ruolo importante nell'influenzare le scelte future, e le aspettative future in particolare, soprattutto nei sistemi educativi dove vi sono percorsi formativi con selezioni (Buchmann & Dalton, 2002).

La domanda posta nel questionario si compone di otto item (riportati nell'[Allegato 2b](#)) nei quali agli studenti viene chiesto: "Quali dei seguenti titoli di studio pensi di conseguire?". Per ogni titolo di studio si chiede agli studenti di scegliere tra le risposte: sì, no, non lo so. Esempi di titoli sono: apprendistato con o senza maturità, scuole di maturità, scuola specializzata, scuole professionali a tempo pieno. Il costrutto è stato trasformato nel titolo più alto che gli allievi vorrebbero conseguire.

Il secondo costrutto è la *ricerca di informazioni sul proprio futuro*, ossia la ricerca attiva di informazioni da parte degli allievi sul proprio futuro (Nota et al., 2007). Questo processo comprende l'attività svolta dagli studenti per raccogliere dati e conoscenze riguardanti le possibili scelte educative e professionali future. La ricerca può coinvolgere varie fonti, come l'orientamento scolastico, i colloqui con insegnanti e consulenti, le ricerche online, e le conversazioni con familiari e amici. L'accesso a informazioni accurate e rilevanti può aiutare gli studenti a prendere decisioni informate riguardo al proprio percorso formativo e professionale, avendo obiettivi chiari e migliorando così la loro motivazione e il loro impegno nello studio. Questo porta, di conseguenza, a un miglioramento delle loro competenze accademiche e della riuscita scolastica complessiva.

La domanda posta nel questionario si compone di undici item (riportati nell'[Allegato 2c](#)) nei quali agli studenti viene chiesto: "Hai fatto una delle seguenti cose per conoscere i futuri studi o tipi di lavoro?". Per ogni item, gli studenti possono rispondere sì una volta, sì due o più volte, oppure no. Esempi di item sono: "Ho fatto uno stage", oppure "Ho parlato con un orientatore nella mia scuola".

**Curiosità.** Le competenze sociali ed emotive stanno diventando sempre più elementi importanti da considerare nell'apprendimento e nella vita di ogni individuo (OECD, 2024a). Infatti, questi concetti sono ormai presenti nei programmi di studio di diversi Paesi (ad esempio, Nuova Zelanda, Portogallo e India) e vengono anche testati nelle indagini internazionali come la *Survey on Social and Emotional Skills* (SSES) del 2019 e del 2023 promossa dall'OCSE (per maggiori informazioni si veda OECD, 2024a). Alcune di queste caratteristiche sociali ed emotive sono state anche integrate nel questionario per gli studenti dell'indagine PISA 2022, tra le quali l'emozione "curiosità". Essa è definita come «l'interesse per le idee e l'impegno per l'apprendimento, la comprensione e l'esplorazione intellettuale. Chi ha una mentalità curiosa ama leggere libri e viaggiare verso nuove destinazioni» (OECD, 2024a, p. 12, traduzione degli autori). Dall'indagine SSES (OECD, 2024a) emerge

«che gli studenti con livelli più elevati nella motivazione, nella perseveranza e nella curiosità ottengono voti più alti in lettura, matematica e arte, hanno meno probabilità di arrivare in ritardo o di "saltare" la scuola e hanno maggiori probabilità di completare l'istruzione terziaria».

(p. 110, traduzione degli autori)

Il questionario PISA 2022 indaga il costrutto della curiosità, afferente alla sottocategoria B2, attraverso dieci item ([Allegato 2d](#)) nei quali agli studenti è chiesto di esprimere il grado di accordo/disaccordo riguardo ad alcune affermazioni, ad esempio "Mi interessano molte cose diverse", o "Mi piace imparare cose nuove a scuola", oppure ancora "Mi piace fare delle ipotesi e verificarle in base a quello che osservo".



**Familiarità soggettiva con i concetti matematici.** L'idea di *Opportunity to Learn* (OTL), introdotta per la prima volta da Carroll (1963) con l'intento di indagare se gli studenti avessero il tempo sufficiente e se avessero ricevuto insegnamenti adeguati all'apprendimento (Abedi, 2006), viene oggi utilizzata dalla ricerca educativa in un senso più ampio, per indicare «l'insieme dei fattori di contesto che catturano le opportunità di apprendimento a cui uno studente è esposto» (OECD, 2023a, p. 181, traduzione degli autori). Rientrano all'interno di questo insieme, ad esempio, le qualifiche degli insegnanti, le pratiche didattiche, il clima in classe, il tempo a disposizione per l'apprendimento, ma anche altre dimensioni come l'esposizione di studenti a contenuti disciplinari, in questo caso matematici. Nell'indagine PISA 2022 quest'ultima dimensione include l'esposizione degli studenti a diversi tipi di attività matematiche (compiti di matematica formale e applicata), così come la loro esposizione al ragionamento matematico e alle competenze del XXI secolo relative alla matematica, nonché la loro *familiarità soggettiva con i concetti matematici*. La *familiarità soggettiva con i concetti matematici* riguarda dunque in modo specifico l'ambito matematico, e si riferisce a enti, procedimenti, grandezze ecc. che rientrano negli ambiti di studio propri della disciplina.

Il questionario PISA 2022 indaga questo costrutto, afferente alla sottocategoria A3, attraverso la domanda "Pensa ai concetti matematici. Quanto ti sono familiari i seguenti termini?" riferita a dodici concetti diversi, come ad esempio "Equazione lineare", "Probabilità", "Area del cerchio" ([Allegato 2e](#)); per ciascuno dei concetti presentati è richiesto di scegliere in una scala da 1 ("Non l'ho mai sentito") a 5 ("Lo conosco bene, capisco il concetto"). Tra i concetti presentati, si trova anche un concetto non matematico ("Scala congiuntiva") utilizzato come filtro per l'attendibilità delle risposte dal punto di vista statistico.

**Frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC.** Secondo Lipnevich e Panadero (2021), il feedback è un'informazione data agli studenti relativa a dove si trovano in quel momento, dove sono diretti e come arrivarci; può essere data dall'insegnante, dall'alunno stesso, dai compagni o anche da un media digitale come il computer. In generale, la ricerca internazionale ha da tempo messo in luce l'importanza del feedback sulla riuscita scolastica degli studenti (Hattie, 2008) e ha mostrato che vi è una certa variabilità degli effetti del feedback sulla riuscita scolastica che dipende da chi fornisce il feedback, dall'oggetto del feedback e dai mezzi con cui viene erogato (Hattie, 2023; Wisniewski et al., 2020). In altre parole, non tutti i tipi di feedback hanno gli stessi effetti. Ad esempio, il feedback dato dagli studenti ai propri compagni ha un effetto<sup>11</sup> maggiore ( $d = 0,85$ ) rispetto a quello dato dai docenti agli studenti ( $d = 0,47$ ), o da quello ricevuto per mezzo delle tecnologie ( $d = 0,55$ ) (Hattie, 2023). Inoltre, emerge che il feedback è più efficace quando contiene maggiori informazioni, soprattutto relative a "cosa fare come prossimo passo" (Hattie & Clarke, 2019). In questo panorama, inizia ad essere studiato il ruolo delle tecnologie nel feedback, indagato in PISA attraverso il costrutto *frequenza del supporto o del feedback per mezzo delle TIC*. Emerge ad esempio in Albinson et al. (2020) che le diverse caratteristiche relative alle TIC possono influenzare il modo in cui gli insegnanti forniscono feedback agli studenti: i feedback computerizzati possono fornire un riscontro aggiuntivo e tempestivo, ideale per i compiti formativi; l'uso di feedback audio o video può migliorare l'esperienza del feedback, aiutando gli studenti a comprenderlo e aumentando il loro coinvolgimento.

Il questionario PISA 2022 relativo alle TIC indaga questo costrutto attraverso la seguente domanda composta da quattro item ([Allegato 2f](#)): "Durante questo anno scolastico, con che frequenza hai utilizzato i media digitali per le seguenti attività?". Per ogni attività proposta, gli studenti possono scegliere una tra cinque opzioni di frequenza che vanno da "Mai o quasi mai" fino "Ogni giorno o quasi ogni giorno". Le attività alle quali devono rispondere gli studenti sono sempre riferite a diversi tipi di feedback dati dal docente, dai compagni o dalle app. Ad esempio: "Leggere o ascoltare i commenti

11. Effect size ( $d$ ) utilizzati e calcolati in Hattie (2023).



inviati dai miei insegnanti sul mio lavoro e i miei risultati scolastici” e “Leggere o ascoltare i commenti selezionati automaticamente per te da un software didattico o una app”.

**Frequenza delle attività relative alle TIC in settimana e nel weekend e dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie.** Come evidenziato nell'inquadramento teorico del questionario PISA 2022 (OECD, 2023a), le TIC stanno trasformando molti aspetti della vita quotidiana delle persone: sono accessibili alla maggior parte della popolazione e vi è un costante aumento nel loro utilizzo sia nella vita professionale sia nel tempo libero. Per quanto riguarda la *frequenza delle attività relative alle TIC in settimana* e la *frequenza delle attività relative alle TIC nel weekend*, l'indagine PISA del 2022 rileva che la maggior parte dell'uso delle TIC al di fuori della scuola da parte degli studenti è per attività di svago (OECD, 2023a) e che i giovani usano le tecnologie per attività di svago per due ore e mezza in un giorno della settimana e più di tre ore nel fine settimana. Van Deursen e Helsper (2015) sottolineano che l'uso delle TIC per il tempo libero è potenzialmente correlato alle prestazioni cognitive, alle competenze TIC e al benessere degli studenti a dipendenza dalla frequenza, dalla diversità e dal tipo di attività in cui gli studenti sono coinvolti. Altre ricerche evidenziano anche i diversi rischi associati all'uso improprio o eccessivo delle TIC tra i giovani (OECD, 2017; Hooft Graafland, 2018). Ad esempio, l'uso eccessivo dei videogiochi e l'uso compulsivo dei social media possono avere gravi conseguenze fisiche, sociali, psicologiche e cognitive (OECD, 2017; Smith et al., 2008).

Per quanto riguarda la *frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie*, diversi studi (ad esempio, Consorzio PISA.ch, 2019; Crotta et al., 2021) mostrano che l'utilizzo a scuola della tecnologia in sé non è garanzia di una migliore riuscita scolastica, ma ciò che sembra essere importante è come, per cosa e da parte di chi avviene l'uso delle tecnologie.

Il questionario PISA 2022 relativo alle TIC indaga i due primi costrutti attraverso le seguenti due domande ([Allegati 2g](#) e [2h](#)): “Durante un normale giorno della settimana, quanto tempo passi a fare le seguenti attività di svago?” e “Durante un normale giorno del fine settimana, quanto tempo passi a fare le seguenti attività di svago?”. I sette item che compongono le due domande sono gli stessi. Gli studenti possono rispondere agli item, scegliendo una tra cinque opzioni che vanno da “Non svolgo questa attività” fino a “Più di 7 ore al giorno”. Tra le attività di svago presentate vi sono ad esempio: “Giocare ai videogiochi (utilizzando il mio smartphone, una console di gioco o una piattaforma online o delle app)” e “Navigare nei social network (ad es. Instagram®, Facebook®)”. Per il costrutto *frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie*, nel questionario di PISA relativo alle TIC vi è la seguente domanda (si veda l'[Allegato 2i](#)): “Con che frequenza utilizzi i media digitali durante le seguenti lezioni?”. Gli studenti possono rispondere scegliendo una tra sei opzioni di frequenza che vanno da “Mai o quasi mai” fino a “Ad ogni lezione o quasi”, e per le seguenti lezioni: di italiano, di matematica, di materie scientifiche (fisica, chimica, biologia, scienze della Terra, scienze naturali), di informatica, tecnologie e media o lezioni simili.

**Percezione della qualità delle lezioni in matematica.** Con l'espressione “qualità delle lezioni” si intende in genere un concetto multidimensionale (Fauth et al., 2014) che fa riferimento a diversi indicatori, riguardanti vari comportamenti e pratiche di insegnamento che la ricerca educativa ritiene avere un impatto nel raggiungimento di risultati da parte degli studenti. L'OECD afferma: «le lezioni efficaci si radicano in parte nel repertorio di pratiche con cui gli insegnanti facilitano il pensiero degli studenti e la comprensione dei contenuti e dei concetti disciplinari» (OECD, 2023a, p. 200, traduzione degli autori). È infatti ormai assodato che, a livello di sistemi di apprendimento basati sulla scuola, ciò che gli insegnanti fanno ha una forte influenza diretta sui risultati di apprendimento degli studenti (Hattie, 2008). Nel quadro teorico di riferimento del *Teaching and Learning International Survey* (TALIS)

vengono identificate alcune delle dimensioni<sup>12</sup> che formano la qualità delle lezioni e che hanno un'influenza sul raggiungimento di risultati da parte degli studenti: la gestione della classe, cioè le azioni intraprese dagli insegnanti per assicurare un ordinato ed efficace uso del tempo durante le lezioni (Van Tartwijk & Hammerness, 2011); il supporto dell'insegnante, declinato in azioni quali ad esempio l'ascolto delle domande e delle idee degli studenti, l'incoraggiamento e supporto emotivo, il fornire aiuto extra se necessario (Klieme et al., 2009; Lee, 2021); la chiarezza dell'insegnamento, declinata in sotto dimensioni quali ad esempio la comprensibilità degli obiettivi di insegnamento, la connessione tra vecchi e nuovi argomenti (Hospel & Galand, 2016; Seidel et al., 2005).

Nella sottocategoria A3, il questionario PISA 2022 indaga direttamente alcune delle dimensioni riferite alla qualità delle lezioni in matematica attraverso diversi costrutti: *disciplina in classe in matematica*, che esamina il clima e le problematiche disciplinari che possono ostacolare l'apprendimento della matematica in classe; *attivazione cognitiva in matematica: incoraggiare il pensiero matematico* e *attivazione cognitiva in matematica: favorire il ragionamento*, che si concentrano sull'entità con cui gli insegnanti incoraggiano il pensiero e il ragionamento matematico. Nessuno di questi tre costrutti è risultato significativo per la presente indagine. Tuttavia, nel questionario di contesto di PISA 2022 è presente anche un costrutto generico, rientrante sempre nella sottocategoria A3, riguardante la qualità delle lezioni di matematica *percepita* dallo studente. Tale costrutto è chiamato *percezione della qualità delle lezioni in matematica*, ed è indagato attraverso un unico item ([Allegato 2j](#)): "Che punteggio daresti alla qualità delle lezioni di matematica durante questo anno scolastico?" Allo studente viene richiesto di rispondere assegnando un punteggio da 1 ("Qualità pessima") a 10 ("Qualità ottima").

***Senso di autoefficacia in matematica formale e applicata e senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo.*** Con l'espressione "senso di autoefficacia" si intende generalmente l'insieme delle credenze o delle percezioni che un individuo ha delle proprie capacità (Bandura, 1997). Quando lo si riferisce alla disciplina matematica, dunque, il senso di autoefficacia riguarda le convinzioni di una persona nelle proprie capacità di comprendere e risolvere problemi matematici, di apprendere concetti matematici e di affrontare compiti matematici con successo. L'importanza del senso di autoefficacia come elemento che può influenzare l'apprendimento della matematica è stata messa in evidenza da numerosi studi (Di Martino & Zan, 2011; Panero et al., 2023). Nella sottocategoria A2, il questionario PISA 2022 indaga questo aspetto attraverso due costrutti: il *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata* e il *senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo*. Nel caso del *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata*, la domanda posta nel questionario si compone di nove item (riportati nell'[Allegato 2k](#)) nei quali agli studenti viene chiesto di esprimere quanto si sentono in grado di affrontare compiti in cui la matematica è inserita in contesti astratti o in contesti applicati a situazioni reali. Esempi di compiti riferiti alla matematica formale sono "Risolvere un'equazione come  $2(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$ ", o "Risolvere un'equazione del tipo  $6x^2 + 5 = 29$ "; esempi di compiti riferiti alla matematica applicata sono "Capire da un orario del treno quanto tempo ci vuole per andare da un posto all'altro", o "Calcolare il consumo settimanale di corrente elettrica di un dispositivo elettronico". Nel caso del *senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo*, la domanda posta nel questionario PISA 2022 si compone di dieci item ([Allegato 2l](#)) nei quali agli studenti viene chiesto di esprimere quanto si sentono in grado di affrontare compiti riferiti al ragionamento matematico (par. 2.1) o a situazioni matematiche del XXI secolo. Esempi di compiti riferiti al ragionamento matematico sono "Valutare la significatività delle tendenze osservate nei dati", o "Identificare costrizioni e ipotesi alla base di un modello matematico"; esempi di compiti

12. Per un approfondimento si veda il rapporto relativo l'indagine TALIS del 2018 (OECD, 2019) e (OECD, 2023a, p. 201).

riferiti a situazioni matematiche del XXI secolo sono invece “Codificare/programmare un computer” o “Lavorare con sistemi matematici informatici (ad es. fogli di calcolo, software di programmazione, calcolatrici grafiche)”.

#### 4.2 Risultati puntuali dell'analisi di correlazione

La Tabella 2 presenta i dodici costrutti (sui quarantotto analizzati) risultati significativi per la Svizzera, per il Cantone Ticino o per entrambi dal punto di vista statistico (a un livello di significatività almeno del 95%) e pratico (con  $|r| \geq 0,20$ ) riguardo alla correlazione tra le competenze in matematica e i costrutti. In tabella sono colorate in arancione le caselle relative ai valori risultati significativi sia dal punto di vista statistico sia dal punto di vista pratico.

|                                                                                                  | Svizzera (CH) |          | Cantone Ticino (TI) |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|----------|---------------------|----------|
|                                                                                                  | <i>r</i>      | <i>p</i> | <i>r</i>            | <i>p</i> |
| Ansia per la matematica                                                                          | -0,28         | 0,00     | -0,14               | 0,02     |
| Aspettative formative                                                                            | 0,27          | 0,00     | 0,29                | 0,00     |
| Curiosità                                                                                        | 0,15          | 0,00     | 0,22                | 0,00     |
| Familiarità soggettiva con i concetti matematici                                                 | 0,30          | 0,00     | 0,29                | 0,00     |
| Frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC                                            | -0,14         | 0,00     | -0,25               | 0,00     |
| Frequenza delle attività relative alle TIC in settimana                                          | -0,35         | 0,00     | -0,20               | 0,00     |
| Frequenza delle attività relative alle TIC nel weekend                                           | -0,33         | 0,00     | -0,07               | 0,25     |
| Frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie                                         | 0,22          | 0,00     | 0,05                | 0,46     |
| Percezione della qualità delle lezioni in matematica                                             | 0,18          | 0,00     | 0,27                | 0,00     |
| Ricerca di informazioni sul proprio futuro                                                       | -0,24         | 0,00     | -0,18               | 0,00     |
| Senso di autoefficacia in matematica formale e applicata                                         | 0,54          | 0,00     | 0,39                | 0,00     |
| Senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo | 0,24          | 0,00     | 0,13                | 0,02     |

**Tabella 2.** Correlazioni tra i costrutti e le competenze in matematica risultate significative da un punto di vista statistico ( $p < 0,05$ ) e pratico ( $|r| \geq 0,20$ ) in Svizzera e/o in Cantone Ticino.<sup>13</sup>

<sup>13</sup>. Da un punto di vista statistico, la *frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie* ( $p = 0,46$ ) e la *frequenza delle attività relative alle TIC nel weekend* ( $p = 0,25$ ) non correlano significativamente con le prestazioni in matematica nel contesto del Cantone Ticino.

Di questi dodici costrutti, quattro correlano in maniera significativa da un punto di vista pratico con le competenze in matematica sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino; si tratta delle *aspettative formative* (correlazione positiva), della *familiarità soggettiva con i concetti matematici* (correlazione positiva), del *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata* (correlazione positiva) e della *frequenza delle attività relative alle TIC in settimana* (correlazione negativa).

Dalla Tabella 2 si osserva che tra i quattro costrutti quello che correla maggiormente con le competenze in matematica sia per la Svizzera (CH) sia per il Cantone Ticino (TI) è il *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata* (CH:  $r = 0,54$ ; TI:  $r = 0,39$ ). La correlazione è positiva, ciò significa che allievi che hanno un elevato senso di autoefficacia in matematica formale e applicata si situano anche a livelli alti di competenza (e viceversa). Nella stessa direzione vanno anche le correlazioni tra le competenze in matematica e il costrutto di *familiarità soggettiva con i concetti matematici* (CH:  $r = 0,30$ ; TI:  $r = 0,29$ ), ossia allievi con una maggiore familiarità con i concetti matematici hanno competenze in matematica elevate (e viceversa), e tra le competenze in matematica e il costrutto *aspettative formative* (CH:  $r = 0,27$ ; TI:  $r = 0,29$ ), ossia allievi con aspettative formative elevate, quindi che sperano di ottenere un diploma formativo elevato, cioè di grado terziario, dimostrano di avere anche elevate competenze in matematica (e viceversa). Di segno opposto, ossia che si correla in maniera negativa con le competenze in matematica sia in Svizzera ( $r = -0,35$ ), sia in Cantone Ticino ( $r = -0,20$ ), è la *frequenza delle attività relative alle TIC in settimana*: più gli allievi utilizzano le TIC in settimana, meno raggiungono competenze elevate (e viceversa).

Solo per la Svizzera e non per il Cantone Ticino, hanno una correlazione positiva superiore a 0,20 con le competenze in matematica i seguenti due costrutti: il *senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo* ( $r = 0,24$ ) e la *frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie* ( $r = 0,22$ ), mentre hanno una correlazione con un valore superiore a 0,20, ma in direzione negativa, l'*uso delle TIC nel weekend* ( $r = -0,33$ ), l'*ansia per la matematica* ( $r = -0,28$ ) e la *ricerca di informazioni sul proprio futuro* ( $r = -0,24$ ).

Infine, solo per il Cantone Ticino e non per la Svizzera, hanno una correlazione superiore a 0,20 positiva con le competenze in matematica il costrutto *percezione della qualità delle lezioni in matematica* ( $r = 0,27$ ) e il costrutto sulla *curiosità* ( $r = 0,22$ ), mentre negativa la *frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC* ( $r = -0,25$ ).

## 5 Risultati delle analisi di regressione con la competenza in matematica

Come anticipato nel paragrafo metodologico (par. 3), nei modelli di regressione per la Svizzera e per il Cantone Ticino vengono considerati tutti i costrutti risultati significativi a livello statistico e pratico in almeno uno dei due contesti territoriali. Si ricorda anche che nei due modelli di regressione lineare multipla sono stati inseriti la condizione socioeconomica, la lingua parlata a casa, il genere e l'aver o meno ripetuto una classe come variabili di controllo.

Nella Tabella 3 sono presentati i risultati dell'analisi di regressione.<sup>14</sup>

14. Nella tabella vengono riportati i quattro costrutti utilizzati come variabili di controllo inserite nel modello di regressione, poi gli altri costrutti in ordine alfabetico.

$\beta$  stand. = beta standardizzato, ossia il coefficiente di regressione che indica la dimensione dell'effetto in termini di deviazioni standard che ha la variabile indipendente sulla variabile dipendente (competenze in matematica). Tramite la standardizzazione dei coefficienti si può avere un'idea dell'importanza relativa delle diverse variabili indipendenti nello spiegare la variabile dipendente nel contesto considerato (Siegel, 2012).

ES = errore standard.

$p$  =  $p$ -value; se inferiore a 0,05 (indicati in arancione), si può considerare il coefficiente beta standardizzato come statisticamente significativo, ossia vi è un effetto statisticamente significativo della variabile indipendente sulle competenze in matematica.

|                                                                                                     | Svizzera (CH)  |      |      | Cantone Ticino (TI) |      |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------|------|---------------------|------|------|
|                                                                                                     | $\beta$ stand. | ES   | $p$  | $\beta$ stand.      | ES   | $p$  |
| Condizione socioeconomica                                                                           | 0,22           | 0,02 | 0,00 | 0,18                | 0,05 | 0,00 |
| Genere (cat. riferimento = femmine)                                                                 | 0,05           | 0,02 | 0,00 | 0,04                | 0,05 | 0,42 |
| Lingua parlata a casa<br>(cat. riferimento = lingua del test)                                       | -0,07          | 0,02 | 0,00 | -0,04               | 0,04 | 0,34 |
| Ripetizione della classe<br>(cat. riferimento = non essere bocciato)                                | -0,12          | 0,02 | 0,00 | -0,09               | 0,03 | 0,01 |
| Ansia per la matematica                                                                             | -0,07          | 0,02 | 0,00 | -0,02               | 0,05 | 0,67 |
| Aspettative formative                                                                               | 0,09           | 0,02 | 0,00 | 0,09                | 0,05 | 0,05 |
| Curiosità                                                                                           | 0,01           | 0,01 | 0,62 | 0,04                | 0,05 | 0,36 |
| Familiarità soggettiva con i concetti matematici                                                    | 0,07           | 0,02 | 0,00 | 0,10                | 0,06 | 0,09 |
| Frequenza del supporto o feedback<br>per mezzo delle TIC                                            | -0,11          | 0,02 | 0,00 | -0,22               | 0,04 | 0,00 |
| Frequenza delle attività relative alle TIC in settimana                                             | -0,14          | 0,03 | 0,00 | -0,16               | 0,06 | 0,01 |
| Frequenza delle attività relative alle TIC nel weekend                                              | -0,03          | 0,02 | 0,22 | 0,07                | 0,06 | 0,28 |
| Frequenza dell'uso delle TIC<br>nelle lezioni delle materie                                         | 0,14           | 0,02 | 0,00 | 0,10                | 0,04 | 0,01 |
| Percezione della qualità delle lezioni in matematica                                                | 0,06           | 0,01 | 0,00 | 0,13                | 0,05 | 0,02 |
| Ricerca di informazioni sul proprio futuro                                                          | -0,10          | 0,02 | 0,00 | -0,05               | 0,05 | 0,23 |
| Senso di autoefficacia<br>in matematica formale e applicata                                         | 0,33           | 0,02 | 0,00 | 0,30                | 0,06 | 0,00 |
| Senso di autoefficacia nel ragionamento matematico<br>e nelle situazioni matematiche del XXI secolo | -0,07          | 0,02 | 0,00 | -0,11               | 0,05 | 0,02 |

**Tabella 3.** Regressione lineare multipla con variabile dipendente la competenza in matematica.

Dei sedici costrutti inseriti nel modello, nove hanno un impatto statisticamente significativo sulle competenze in matematica sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino; cinque costrutti hanno un impatto statisticamente significativo in Svizzera, ma non in Cantone Ticino; due costrutti, invece, non risultano avere un impatto significativo e non verranno quindi considerati ulteriormente. Questi ultimi due costrutti sono: *curiosità* e *frequenza delle attività relative alle TIC nel weekend* che, nonostante avessero mostrato di avere una correlazione significativa da un punto di vista pratico con le competenze in matematica solo in Cantone Ticino (*curiosità*) o solo in Svizzera (*frequenza delle attività relative TIC nel weekend*), una volta considerati anche gli altri costrutti in un unico modello non risultano avere un impatto sulle competenze né per la Svizzera né per il Cantone Ticino. Per quanto riguarda la *frequenza delle attività relative alle TIC nel weekend* va considerato che questo costrutto correla fortemente con la *frequenza delle attività relative alle TIC in settimana* e dunque l'effetto dell'utilizzo delle TIC nel weekend può essere già considerato dall'utilizzo delle TIC in settimana. Nei prossimi due paragrafi i costrutti risultati statisticamente significativi sono analizzati più nel dettaglio.

## 5.1 I costrutti statisticamente significativi sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino

Fra i nove costrutti risultati statisticamente significativi sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino, cinque hanno una dimensione dell'effetto positiva (all'aumentare dell'indice del costrutto aumentano anche le competenze in matematica in PISA 2022), quattro invece hanno una dimensione dell'effetto negativa (all'aumentare dell'indice del costrutto diminuiscono le competenze in matematica in PISA 2022). L'entità della dimensione dell'effetto (indicata dal valore del coefficiente  $\beta$  standardizzato) può variare nei due contesti svizzero e ticinese considerati.

La seguente tabella (Tabella 4) mostra l'elenco dei costrutti che hanno un impatto con dimensione dell'effetto positiva sulle competenze in matematica in Svizzera e in Cantone Ticino, ordinati da quello con coefficiente beta maggiore a quello con coefficiente beta minore. L'ordinamento dei cinque costrutti non è lo stesso tra Svizzera e Cantone Ticino.

|   | Svizzera                                                                                 |   | Cantone Ticino                                                                           |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <i>Senso di autoefficacia in matematica formale e applicata</i> ( $\beta$ stand. = 0,33) | 1 | <i>Senso di autoefficacia in matematica formale e applicata</i> ( $\beta$ stand. = 0,30) |
| 2 | <i>Condizione socioeconomica</i> ( $\beta$ stand. = 0,22)                                | 2 | <i>Condizione socioeconomica</i> ( $\beta$ stand. = 0,18)                                |
| 3 | <i>Frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie</i> ( $\beta$ stand. = 0,14) | 3 | <i>Percezione della qualità delle lezioni in matematica</i> ( $\beta$ stand. = 0,13)     |
| 4 | <i>Aspettative formative</i> ( $\beta$ stand. = 0,09)                                    | 4 | <i>Frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie</i> ( $\beta$ stand. = 0,10) |
| 5 | <i>Percezione della qualità delle lezioni in matematica</i> ( $\beta$ stand. = 0,06)     | 5 | <i>Aspettative formative</i> ( $\beta$ stand. = 0,09)                                    |

**Tabella 4.** Elenco ordinato dei costrutti con impatto positivo statisticamente significativo sulle competenze in matematica sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino.

Sia in Svizzera sia in Cantone Ticino, il costrutto che ha un impatto maggiore sulle competenze in matematica, con una dimensione dell'effetto che si può interpretare come non trascurabile, è il *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata* ( $\beta$  stand. CH = 0,33;  $\beta$  stand. TI = 0,30). Questo risultato si inquadra come *solid finding* della ricerca educativa, essendo in linea con numerosi studi della letteratura di ricerca (Anjum, 2006; Cuevas & Berou, 2016; Lee & Stankov, 2018), che mostrano come il senso di autoefficacia in matematica sia tra gli aspetti più rilevanti per spiegare le prestazioni in matematica. Si rileva inoltre che l'entità della dimensione dell'effetto di questo costrutto è superiore alla condizione socioeconomica ( $\beta$  stand. CH = 0,22;  $\beta$  stand. TI = 0,18), che rappresenta il secondo costrutto dalla dimensione dell'effetto positivo più rilevante. Si tratta di un risultato molto interessante, dato che mette in evidenza una maggiore rilevanza di un costrutto su cui l'insegnamento-apprendimento della matematica potrebbe intervenire attraverso opportune pratiche didattiche, a differenza di quanto potrebbe accadere per la condizione socioeconomica, la quale è legata al contesto esterno alla scuola e perlopiù relativo al contesto familiare per il quale è più difficile intervenire. Questo risultato risulta in linea con le conclusioni emerse dallo studio di Lee e Stankov (2018).

Relativamente agli altri tre costrutti con un effetto significativo e positivo sulle competenze in matematica, la presenza della *frequenza dell'uso delle TIC nelle lezioni delle materie* ( $\beta$  stand. CH = 0,14;  $\beta$  stand. TI = 0,13) sembra sostenere il fatto che una didattica che integri nella classe l'utilizzo di media digitali possa avere un'efficacia in termini di competenza. Questo risultato è almeno in parte in contraddizione con alcuni risultati di ricerca: ad esempio, le analisi di PISA 2018 presentate in Crotta et al. (2021) rilevano che le prestazioni più elevate in tutti e tre gli ambiti di PISA sono registrate dagli studenti che dichiarano un utilizzo dei dispositivi digitali in classe da parte esclusivamente degli



insegnanti, senza il coinvolgimento degli allievi, mentre ciò non avviene nei casi in cui il docente non fa uso di tali dispositivi o ne fanno uso esclusivamente gli studenti. Va però precisato che questo costrutto è stato definito sulla base di item nei quali si chiedeva la frequenza di utilizzo di media digitali non in modo esclusivo per le lezioni di matematica, ma anche per lezioni in altri ambiti disciplinari. Sembrerebbe dunque che una scuola in cui sia presente un'abitudine generale all'utilizzo delle TIC nelle lezioni abbia risvolti positivi in relazione alle competenze in matematica dimostrate nel test PISA. Il grado di *aspettative formative* mostra che, nel modello qui utilizzato, i quindicenni proiettati verso il conseguimento di un titolo di studio elevato ottengono in media risultati migliori in matematica dei quindicenni che dichiarano di voler ottenere quale titolo più elevato una delle varie possibilità di titoli intermedi offerti dai sistemi scolastici svizzero e del Cantone Ticino. Questo risultato è in linea con quanto evidenziato in Ambrosetti e Crotta (2022) in cui si rileva che le aspettative formative si relazionano positivamente con le prestazioni in lettura, matematica e scienze al test PISA 2018: più le aspettative risultano elevate, maggiore è il punteggio medio in PISA e viceversa. Il risultato potrebbe essere letto ipotizzando che studenti che intendono perseguire percorsi formativi più lunghi siano anche quelli che hanno già ottenuto conferme scolastiche in termini di rendimento, conferme a cui potrebbe corrispondere una elevata competenza in matematica. Si evidenzia tuttavia che la dimensione dell'effetto riscontrata nel modello utilizzato è statisticamente significativa, ma molto lieve ( $\beta$  stand. CH = 0,09;  $\beta$  stand. TI = 0,09).

Infine, anche il costrutto *percezione della qualità delle lezioni in matematica* è significativo per le competenze in matematica con un'entità debole della dimensione dell'effetto ( $\beta$  stand. CH = 0,06;  $\beta$  stand. TI = 0,13). Va però precisato che questo costrutto viene indagato tramite una domanda generica (par. 4.1) che potrebbe essere stata intesa dagli studenti in vari modi. Non si ritiene ragionevole entrare nel dettaglio di quali elementi abbiano un peso maggiore nella percezione della qualità da parte degli studenti che hanno risposto al questionario. In questa sede ci si limita a evidenziare che la qualità delle lezioni percepita dagli allievi, intesa come qualità dell'insieme di pratiche e atteggiamenti attivati dal docente di matematica, abbia una certa influenza, seppur debole, sui risultati in matematica: ciò che l'insegnante fa, o non fa, e come lo fa, ha un effetto sulle competenze degli studenti. Questo risultato è in linea con i risultati di diversi studi che evidenziano come l'effetto dell'insegnante e della classe sulle prestazioni sia più importante rispetto ad altri livelli come quello della scuola o quello del cantone (Petrucci, 2024; Petrucci et al., 2020).

La seguente tabella (Tabella 5) mostra l'elenco dei costrutti che hanno una dimensione dell'effetto negativa sulle competenze in matematica in Svizzera e in Cantone Ticino, riportati in ordine decrescente secondo il coefficiente beta standardizzato in valore assoluto.

|   | Svizzera                                                                                                                   |   | Cantone Ticino                                                                                                             |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <i>Frequenza delle attività relative alle TIC in settimana</i> ( $\beta$ stand. = -0,14)                                   | 1 | <i>Frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC</i> ( $\beta$ stand. = -0,22)                                     |
| 2 | <i>Ripetizione della classe</i> ( $\beta$ stand. = -0,12)                                                                  | 2 | <i>Frequenza delle attività relative alle TIC in settimana</i> ( $\beta$ stand. = -0,16)                                   |
| 3 | <i>Frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC</i> ( $\beta$ stand. = -0,11)                                     | 3 | Senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo ( $\beta$ stand. = -0,11) |
| 4 | Senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo ( $\beta$ stand. = -0,07) | 4 | <i>Ripetizione della classe</i> ( $\beta$ stand. = -0,09)                                                                  |

Tabella 5. Elenco ordinato dei costrutti con impatto negativo statisticamente significativo sulle competenze in matematica sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino.



Il costrutto *frequenza delle attività relative alle TIC in settimana* è, in entrambi i contesti di indagine, significativo e con un'entità della dimensione dell'effetto piuttosto debole, ma maggiore di 0,1 in valore assoluto ( $\beta$  stand. CH = -0,14;  $\beta$  stand. TI = -0,16). In altri termini questo risultato può indicare che gli studenti che utilizzano per un tempo maggiore le TIC per varie attività non legate allo studio ma per svago (giocare a videogiochi, uso di social network, creare contenuti digitali ecc.) hanno mediamente competenze in matematica minori dei compagni che le usano di meno. Questo risultato sembra confermare quanto emerge da varie indagini (ad esempio, Anshari et al., 2017; Lam & Tong, 2012; McCoy, 2016) nelle quali si sottolinea l'effetto negativo di un uso massiccio delle TIC per svago, con conseguenti esiti scolastici tendenzialmente negativi. In particolare, diversi studi evidenziano l'effetto negativo delle cosiddette "distrazioni digitali" durante le lezioni sull'apprendimento degli studenti, in termini, ad esempio, di capacità di prendere appunti, di ricordare informazioni dettagliate (Kuznekoff & Titsworth, 2013) e di comprendere i contenuti della lezione (Sana et al., 2013). La costante connettività degli studenti potrebbe inoltre contribuire al multitasking, che ha effetti negativi ben documentati sull'attenzione e sulla capacità di digerire le informazioni (Pashler, 1994; Posner, 1982).

Anche il costrutto *ripetizione della classe* ha un effetto significativo ( $\beta$  stand. CH = -0,12;  $\beta$  stand. TI = -0,09). Non stupisce che studenti tanto fragili dal punto di vista delle valutazioni da aver ripetuto un anno nel loro percorso scolastico ottengano risultati in matematica più bassi di coloro che non ripetono l'anno. Questi risultati si allineano con quanto emerge dalle numerose ricerche sugli effetti della ripetizione di un anno, la maggior parte delle quali ha riscontrato un impatto negativo sul percorso scolastico degli studenti (Crahay et al., 2019).

La presenza della *frequenza del supporto o feedback per mezzo delle TIC* come costrutto con impatto negativo sulle competenze in matematica ( $\beta$  stand. CH = -0,11;  $\beta$  stand. TI = -0,22) lascia in prima battuta un po' stupiti, in particolare considerando che l'entità della dimensione dell'effetto ticinese è la più importante tra gli effetti negativi e che in valore assoluto in Ticino è seconda solo al *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata*. Si è infatti portati a pensare (e la ricerca concorda: ad esempio, Hattie, 2023) che la pratica del feedback e il fornire supporto possano sostenere l'apprendimento degli studenti, e dunque anche una maggiore competenza degli stessi. Tuttavia, occorre ricordare almeno due questioni: la prima è che il costrutto si riferisce in modo specifico ai media digitali come mezzi attraverso i quali vengono forniti sostegno e feedback; la seconda è che dei quattro item che definiscono il costrutto, solo uno si riferisce al sostegno e ai feedback dati dall'insegnante attraverso i media digitali, mentre gli altri tre si riferiscono al sostegno e ai feedback dati dai propri compagni sempre attraverso i media digitali o direttamente da software didattici o dalle app. Se messo in relazione con le molte ricerche che evidenziano l'importanza dei feedback da parte del docente per l'apprendimento (Hattie, 2023) questo risultato sembra confermare l'importanza del ruolo del docente rispetto all'utilizzo esclusivo di media digitali senza la mediazione di un adulto più esperto.<sup>15</sup> Infine, anche il *senso di autoefficacia nel ragionamento matematico e nelle situazioni matematiche del XXI secolo* ( $\beta$  stand. CH = -0,07;  $\beta$  stand. TI = -0,11) ha un effetto negativo sulle competenze in matematica. Questo risultato sembra essere in contraddizione con quanto sostenuto precedentemente riguardo al senso di autoefficacia. Tuttavia, si potrebbe leggere il dato alla luce di una considerazione più approfondita relativa al tipo di item somministrati nel questionario per questo costrutto. Gli item di questo costrutto, infatti, descrivono compiti di matematica posti a un livello di profondità e consapevolezza disciplinare molto alta, a cui non è detto che tutti gli studenti quindicenni possano accedere: si parla ad esempio di "valutare la significatività delle tendenze osservate nei dati", oppure di

15. Facendo un'analisi ulteriore di correlazione unicamente dei singoli item del costrutto con le competenze in matematica, risulta che le correlazioni più forti e negative sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino sono quelle relative agli item che concernono i feedback ricevuti da un software o da una app rispetto agli item che concernono i feedback forniti dal docente o degli allievi tramite i media digitali.

“rappresentare matematicamente una situazione utilizzando variabili, simboli e diagrammi”, oppure ancora di un non meglio specificato “calcolare le proprietà di un oggetto di forma irregolare”. Padroneggiare i significati sottesi a queste proposizioni è complesso e potrebbero non essere comprese e gestite con consapevolezza da un quindicenne.

## 5.2 I costrutti statisticamente significativi in Svizzera, ma non in Cantone Ticino

Fra i cinque costrutti statisticamente significativi per la Svizzera, ma non per il Cantone Ticino, due hanno una dimensione dell'effetto positiva (all'aumentare dell'indice del costrutto o al cambiare della categoria di riferimento del costrutto aumentano anche le competenze in matematica in PISA 2022), tre invece hanno un effetto negativo (all'aumentare dell'indice del costrutto o al cambiare della categoria di riferimento del costrutto diminuiscono le competenze in matematica in PISA 2022). In **Tabella 6** sono presentati i costrutti statisticamente significativi per la Svizzera, ma non per il Cantone Ticino, divisi in due colonne, una con la dimensione dell'effetto positiva e l'altra con la dimensione dell'effetto negativa, e riportate in ordine decrescente secondo l'entità del valore assoluto del coefficiente beta standardizzato.

|   | Dimensione dell'effetto positiva                                                       |   | Dimensione dell'effetto negativa                                                               |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <i>Familiarità soggettiva con i concetti matematici</i><br>( $\beta$ stand. CH = 0,07) | 1 | <i>Ricerca di informazioni sul proprio futuro</i><br>( $\beta$ stand. CH = -0,10)              |
| 2 | <i>Genere (cat. riferimento = femmine)</i><br>( $\beta$ stand. CH = 0,05)              | 2 | <i>Ansia per la matematica</i><br>( $\beta$ stand. CH = -0,07)                                 |
|   |                                                                                        | 3 | <i>Lingua parlata a casa (cat. riferimento = lingua del test)</i> ( $\beta$ stand. CH = -0,07) |

**Tabella 6.** Elenco ordinato dei costrutti con impatto positivo (colonna a sinistra) e negativo (colonna a destra) sulle competenze in matematica, statisticamente significativi solo per la Svizzera.

Relativamente ai risultati sopraelencati, l'entità delle dimensioni dell'effetto dei costrutti è molto ridotta. Il fatto che vi siano effetti statisticamente significativi per la Svizzera, ma non per il Ticino, potrebbe anche essere in parte collegato alla dimensione maggiore del campione svizzero rispetto a quello ticinese, che rende più facile trovare risultati statisticamente significativi anche relativi a effetti contenuti. Prima di tutto occorre ricordare che la presenza di costrutti significativi per la Svizzera, ma non per il Cantone Ticino, significa che i costrutti selezionati per quest'analisi di regressione spiegano maggiormente le competenze in matematica in Svizzera rispetto al Cantone Ticino. Occorre inoltre ricordare che è possibile che sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino ci siano altri costrutti che possono spiegare le competenze in matematica, ma che non sono stati integrati nel modello oppure non raggiungevano nell'analisi di correlazione la significatività pratica.

Il costrutto *familiarità soggettiva con i concetti matematici*, lo ricordiamo, riguarda uno degli elementi interni all'*Opportunity To Learn* (OTL). Se la ricerca educativa ha da tempo evidenziato la correlazione generale tra l'OTL e le performance degli studenti nelle valutazioni internazionali (Schmidt & Maier, 2009), nel già citato studio di Lee e Stankov (2018) emerge in modo più esplicito una correlazione positiva tra il grado di familiarità con i concetti matematici e le competenze matematiche misurate nei test PISA. I risultati del nostro studio relativi ai dati svizzeri ( $\beta$  stand. = 0,07) è dunque in linea con i risultati ottenuti a livello internazionale: maggiore è la familiarità soggettiva con i concetti matematici degli alunni svizzeri, maggiore è il livello di competenza matematica.

Il costrutto *ricerca di informazioni sul proprio futuro* ( $\beta$  stand. = -0,10) ha un effetto negativo sulle prestazioni in matematica in Svizzera. Si ricorda che il costrutto sulla ricerca di informazioni ha valori

bassi se l'individuo ha dichiarato di non svolgere o di svolgere poco le azioni di ricerca delle informazioni proposte, mentre ha valori elevati se ha svolto più volte azioni di questo tipo. Si può ipotizzare da un lato che chi ricerca meno informazioni sul proprio futuro abbia una maggiore competenza in matematica, e che questo lo porti, in Svizzera, a scegliere direttamente una formazione nella scuola media superiore. Dall'altro lato, si può pensare che chi ha svolto più volte queste azioni sia anche chi a scuola ha una minore riuscita scolastica in generale, e in particolare in matematica, disciplina che normalmente incide molto alla fine della scuola obbligatoria in Svizzera per le scelte future. Ipotizzando che la strada che viene presa maggiormente in considerazione da coloro che ottengono risultati bassi in matematica sia la formazione professionale, è anche plausibile che la ricerca di informazioni sul proprio futuro coinvolga un maggiore investimento di tempo e attività di ricerca, visto che il panorama dell'offerta professionale è particolarmente vasto.

La *lingua parlata a casa* è un costrutto che viene considerato nelle diverse indagini PISA, compresa l'ultima (Erzinger et al., 2023), dove emerge come in Svizzera non parlare a casa la lingua del test ha un effetto negativo sulle prestazioni in matematica (nel modello di regressione qui presentato è equivalente a  $\beta$  stand. CH = -0,07). L'effetto in Cantone Ticino risulta non significativo ed è simile nella direzione e nella grandezza a quello Svizzero ( $\beta$  stand. TI = -0,04). Il fatto che in Cantone Ticino la lingua non abbia un effetto significativo potrebbe essere ricondotto anche al fatto che nel campione ticinese c'è una minor variabilità della lingua parlata a casa, dal momento che una percentuale più alta di persone a casa parla la lingua del test (85%) rispetto alla media svizzera (71%).

Riguardo al genere, sia in Svizzera sia nella maggior parte dei Paesi coinvolti nell'indagine (OECD, 2023b), le rilevazioni PISA mostrano in modo sistematico che i maschi superano le femmine nelle prestazioni in matematica. In questo senso, non sorprende che il costrutto *genere* risulti significativo per la Svizzera ( $\beta$  stand. = 0,05), ma può invece stupire che lo stesso costrutto risulti non statisticamente significativo per il Cantone Ticino, come era già stato rilevato in Ambrosetti e Salvisberg (2023). Questo dato potrebbe essere indicativo di un contesto ticinese in cui le differenze di genere nelle competenze matematiche vengono attenuate.

Anche nel caso dell'*ansia per la matematica*, per cui la dimensione dell'effetto negativa indica che maggiore è l'ansia per la matematica negli studenti, minore sono le competenze in matematica, il risultato svizzero ( $\beta$  stand. = -0,07) non stupisce. Numerosi studi hanno infatti messo in evidenza il collegamento tra ansia e prestazioni in matematica (Bollmann et al., 2023; Hembree, 1990; Lee & Stankov, 2018; Ma, 1999; OECD, 2023b; Reali et al., 2016). Stupisce, invece, e allo stesso tempo rincuora, che questo costrutto non abbia un effetto significativo sulle competenze in matematica in Cantone Ticino. Anche in questo caso non è possibile stabilire con certezza le cause di questo dato, ma è possibile ipotizzare per entrambi i costrutti (*genere* e *ansia per la matematica*) che tutte le azioni didattiche (formazioni, eventi, incontri ecc.) intraprese negli ultimi decenni per incentivare la passione della matematica indipendentemente dal genere, nonché l'attenzione ad aspetti affettivi (in particolare quelli legati all'ansia per la matematica), possano aver aiutato, in un territorio piccolo come il Cantone Ticino, ad attenuare gli effetti di questi costrutti sulle competenze in matematica.

## 6 Conclusioni

---

In questo contributo si è cercato di indagare quali costrutti, rilevati tramite i questionari di contesto dell'indagine PISA 2022, hanno un effetto sulle competenze in matematica nei quindicenni della Svizzera e del Cantone Ticino. Per individuare tali costrutti sono stati svolti due tipi di analisi: inizialmente le analisi di correlazione e in seguito le analisi di regressione. Dalle analisi di correlazione si è deciso di considerare i dodici costrutti risultati statisticamente significativi e che hanno avuto un coefficiente di

correlazione  $|r| \geq 0,2$  per la Svizzera o per il Cantone Ticino. Dall'analisi di correlazione si è poi passati a quella di regressione, nel cui modello sono stati inseriti, oltre ai dodici costrutti derivanti dall'analisi di correlazione, quattro costrutti, come variabili di controllo, che la ricerca ha mostrato avere un impatto sulle competenze in matematica. Si è giunti così a un totale di sedici costrutti, di cui nove hanno un impatto statisticamente significativo sulle competenze in matematica sia per la Svizzera sia per il Cantone Ticino (cinque hanno una dimensione dell'effetto positiva e quattro una dimensione dell'effetto negativa); cinque costrutti hanno un impatto statisticamente significativo solo in Svizzera (due hanno una dimensione dell'effetto positiva e tre una dimensione dell'effetto negativo) e non in Cantone Ticino; e due non hanno un impatto statisticamente significativo. Di seguito ci limitiamo a riportare considerazioni conclusive riguardanti alcuni costrutti, già approfonditi nel par. 5.

Innanzitutto, i risultati delle regressioni mostrano che i costrutti con un maggior impatto positivo sulle competenze sia in Svizzera sia in Cantone Ticino sono il *senso di autoefficacia in matematica formale e applicata* e la *condizione socioeconomica*. Il fatto che sia in Svizzera sia in Cantone Ticino il costrutto legato all'autoefficacia abbia un effetto maggiore di quello legato alla condizione socioeconomica è in linea con ciò che è emerso dalle analisi effettuate su scala internazionale da Lee e Stankov (2018), dove si evidenzia che il costrutto denominato *convinzioni personali*, come ad esempio il senso di autoefficacia, ha un effetto maggiore rispetto ai costrutti sociodemografici. D'altro canto, occorre comunque riconoscere che nonostante i diversi costrutti inseriti nell'analisi di regressione, la condizione socioeconomica continua ad avere un certo effetto sulle competenze in matematica.

Questi risultati sono interessanti dal punto di vista didattico, perché possono fornire ai docenti informazioni sulle quali indirizzare il processo di insegnamento/apprendimento. Essere infatti consapevoli dell'incidenza del senso di autoefficacia sullo sviluppo delle competenze in matematica potrebbe indirizzare la didattica favorendo la messa in campo di efficaci pratiche, come ad esempio: percorsi con obiettivi chiari, graduati in termini di difficoltà e raggiungibili, così da sostenere negli alunni la convinzione di "potercela fare"; percorsi di avvicinamento tra i criteri valutativi dei docenti e le aspettative e convinzioni degli studenti su questo tema; pratiche metacognitive per consentire di individuare i propri punti di forza e quelli ancora migliorabili; percorsi che valorizzino l'errore come elemento di riflessione e non come stigma di incapacità, e tanto altro ancora. In quest'ottica sarebbe importante progettare e organizzare specifiche formazioni rivolte ai docenti dei diversi livelli scolastici, mirate allo sviluppo di pratiche in linea con tali esigenze, che abbiano anche lo scopo di contribuire a colmare il divario tra i giovani con condizione socioeconomica svantaggiata e quelli con una condizione socioeconomica avvantaggiata (Erzinger et al., 2023; OECD, 2024b).

Tra i costrutti statisticamente significativi con dimensione dell'effetto negativa sia in Svizzera sia in Cantone Ticino, segnaliamo l'effetto, seppur debole, della *frequenza delle attività relative alle TIC in settimana*. Tale risultato è in linea con diverse ricerche (ad esempio Anshari et al., 2017) nelle quali si sottolinea l'effetto negativo di un uso massiccio delle TIC per svago, con conseguenti esiti scolastici tendenzialmente negativi. Un altro costrutto con un impatto negativo importante sulle prestazioni in matematica sia in Svizzera sia in Cantone Ticino è la *frequenza del supporto o del feedback per mezzo delle TIC*, con una dimensione dell'effetto più marcata in Cantone Ticino. In questo caso stupisce l'impatto negativo sulle competenze in matematica, soprattutto perché la letteratura di ricerca individua nel feedback una pratica con una buona dose di efficacia in termini di apprendimento e di prestazioni (Hattie, 2023), anche se va considerato che qui si parla di feedback effettuati per mezzo delle TIC. Il dato necessita di ulteriori ricerche; ci si limita qui a osservare che, in un mondo scolastico (e non solo) in cui le tecnologie digitali giocano un ruolo sempre più importante, occorre riflettere sulle modalità di utilizzo di questi strumenti nella didattica, perché contrariamente a quello che ci si potrebbe aspettare in modo intuitivo, non per forza l'uso delle TIC in ambito didattico contribuisce ad aumentare le competenze disciplinari dei nostri studenti.

Altre considerazioni conclusive riguardano la presenza di costrutti significativi in Svizzera, ma non in Cantone Ticino, ad esempio l'ansia per la matematica e il genere. In Svizzera gli effetti di tali costrutti

sono comunque particolarmente contenuti rispetto a quelli degli altri costrutti risultati significativi. Tenendo conto di questo aspetto, è comunque interessante rilevare l'assenza di significatività del genere e dell'ansia sulle competenze in matematica in Cantone Ticino; si potrebbe ipotizzare che questo risultato sia in relazione con le molteplici misure e azioni implementate sul territorio ticinese, ma queste ipotesi andrebbero maggiormente indagate. Per quanto riguarda gli aspetti emotivi quali l'ansia, ad esempio, si ricorda che da diversi anni in Cantone Ticino infatti si lavora sugli atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica a diversi livelli, puntando in particolare sulla dimensione emozionale tramite eventi divulgativi come "Matematicando festival: a spasso con la matematica per le strade di Locarno"<sup>16</sup> o specifiche sperimentazioni, comunicazioni<sup>17</sup> o ricerche sul tema (Antognazza et al., 2016; Antognazza & Sbaragli, 2020; Panero et al., 2020, 2023) rivolte a vari interlocutori (studenti e docenti dei vari livelli scolastici sia in formazione, sia in servizio, genitori e più in generale le famiglie). Questo lavoro sistematico e prolungato nel tempo potrebbe aver contribuito a formare negli studenti, nei docenti e più in generale nella società, la sensibilità e le competenze necessarie per gestire le dinamiche emotive coinvolte nell'apprendimento e nelle prestazioni in matematica, ad esempio anche attenuando l'effetto dell'ansia per la matematica sulle competenze in matematica. Il confronto tra Svizzera e Cantone Ticino ha permesso di sottolineare da una parte le similitudini (ad esempio la presenza degli effetti del *senso di autoefficacia in matematica* e la *condizione socioeconomica* sulle competenze in matematica) tra i due contesti territoriali analizzati e dall'altra parte le specificità del Cantone Ticino (ad esempio l'assenza di un effetto del *genere* e dell'*ansia per la matematica* sulle competenze in matematica). I risultati emersi offrono indicazioni utili per orientare le pratiche didattiche e la formazione degli insegnanti. Ulteriori piste di sviluppo potrebbero arricchire maggiormente le riflessioni emerse in questo contributo.

Si potrebbero ad esempio identificare possibili costrutti che spieghino le competenze in matematica svolgendo altre analisi con altri modelli di regressione o modelli di equazioni strutturali, per poter comprendere in dettaglio eventuali relazioni di mediazione o moderazione tra i diversi costrutti, ad esempio tra condizione socioeconomica e senso di autoefficacia; oppure, si potrebbero analizzare alcuni dei costrutti relativi alla sottocategoria B descritta nel par. 2.2 (*costrutti generali*, non riferiti in modo specifico alla disciplina matematica) con gli altri ambiti e capire se vi sono delle analogie o delle specificità nei diversi ambiti.

Da parte di chi scrive, ci sembra di poter affermare che il lavoro su questo tipo di dati sia potenzialmente molto ricco e fruttuoso, e che potrebbe da un lato continuare a sostenere la ricerca di potenziali fonti di ostacoli, dall'altro indirizzare la ricerca verso i temi e le strategie didattiche che maggiormente incidono sull'apprendimento degli studenti.

---

## Bibliografia

Abedi, J. (2006). *English language learners and math achievement: A study of opportunity to learn and language accommodation*. University of California.

Albinson, P., Cetinkaya, D., & Orman, T. (2020). Using technology to enhance assessment and feedback: A framework for evaluating tools and applications. In M. Della Ventura (Ed.), *Proceedings of the 2020 9th International Conference on Educational and Information Technology* (pp. 241–246). Association for Computing Machinery. <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3383923.3383940>

---

16. <https://www.matematicando.supsi.ch/iniziativa/matematicando-festival/>.

17. <https://www.matematicando.supsi.ch/eventi/quando-il-problema-non-e-il-problema/>.

- Ambrosetti, A., & Crotta, F. (2022). Dati PISA 2018: Una panoramica sulle aspettative educative e professionali dei quindicenni ticinesi. *Dati – Statistiche e società*, 1, 5–17.
- Ambrosetti, A., & Salvisberg, M. (2023). *PISA Ticino 2022*. Centro competenze innovazione e ricerca sui sistemi educativi, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. [https://m3.ti.ch/COMUNICAZIONI/232609/Rapporto%20PISA2022\\_Ticino.pdf](https://m3.ti.ch/COMUNICAZIONI/232609/Rapporto%20PISA2022_Ticino.pdf)
- Anjum, R. (2006). The impact of self-efficacy on mathematics achievement of primary school children. *Pakistan Journal of Psychological Research*, 21(3/4), 61–78.
- Anshari, M., Almunawar, M. N., Shahrill, M., Wicaksono, D. K., & Huda, M. (2017). Smartphones usage in the classrooms: Learning aid or interference? *Education and Information Technologies*, 22, 3063–3079. <https://doi.org/10.1007/s10639-017-9572-7>
- Antognazza, D., Di Martino, P., Pellandini, A., & Sbaragli, S. (2016). The flow of emotions in primary school problem solving. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1167–1174). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9-TWVG08/hal-01287330v1>
- Antognazza, D., & Sbaragli, S. (2020). L'influenza dell'atteggiamento del docente sul coinvolgimento degli allievi. Il caso della matematica. *DIS. Giornale Italiano di Ricerca Clinica e Applicativa*, 1(1), 187–198.
- Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science*, 11(5), 181–185. <https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196>
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. Freeman.
- Barlow, D. H. (2002). *Anxiety and its disorders: The nature and treatment of anxiety and panic* (2nd ed.). Guilford Press.
- Bollmann, S., Prosperi, O., Kolovou, D., & Salvisberg, M. (2023). Emozioni e atteggiamenti verso la matematica. In A. E. Erzinger, G. Pham, O. Prosperi & M. Salvisberg (Eds.), *PISA 2022. Svizzera in evidenza* (pp. 35–43). Università di Berna.
- Buchmann, C., & Dalton, B. (2002). Interpersonal influences and educational aspirations in 12 countries: The importance of institutional context. *Sociology of Education*, 75(2), 99–122. <https://doi.org/10.2307/3090287>
- Carroll, J. (1963). *A model of school learning*. Teachers College Record.
- Chiorri, C. (2011). *Teoria e tecnica psicometrica: Costruire un test psicologico*. McGraw-Hill.
- Chiorri, C. (2020). *Fondamenti di psicometria*. McGraw-Hill.
- Consorzio PISA.ch (2019). *PISA 2018: Gli allievi della Svizzera nel confronto internazionale*. SEFRI/CDPE, Consorzio PISA.ch.
- Corbetta, P. (2007). *La ricerca sociale: Metodologia e tecniche*. Il Mulino.
- Crahay, M., Mottier Lopez, L., & Marcoux, G. (2019). L'évaluation des élèves : Docteur Jekyll and Mister Hyde de l'enseignement. In M. Crahay (Ed.), *Peut-on lutter contre l'échec scolaire ?* (pp. 358-425). De Boeck.



- Crotta, F., & Salvisberg, M. (2024). *PISA Ticino 2022. L'erba del vicino è sempre più verde? Confronti del Ticino con le regioni svizzere e le aree italiane*. Centro competenze innovazione e ricerca sui sistemi educativi, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. [https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca\\_educativa/2025\\_PISA\\_Ticino\\_2022.pdf](https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca_educativa/2025_PISA_Ticino_2022.pdf)
- Crotta, F., Salvisberg, M., & Mazzoni, P. (2021). *PISA 2018 in Ticino. Utilizzo delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione a scuola*. Centro competenze innovazione e ricerca sui sistemi educativi, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. [https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca\\_educativa/2021\\_PISA\\_2018\\_in\\_Ticino\\_Utilizzo\\_delle\\_tecnologie\\_dellinformazione\\_e\\_della\\_comunicazione.pdf](https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca_educativa/2021_PISA_2018_in_Ticino_Utilizzo_delle_tecnologie_dellinformazione_e_della_comunicazione.pdf)
- Cuevas, M. M., & Berou, M. (2016). Students' mathematics self-efficacy and anxiety as correlates to academic performance. *University of Bohol Multidisciplinary Research Journal*, 4, 1–18.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM – Mathematics Education*, 43, 471–482. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6>
- Erzinger, A. B., Pham, G., Prosperi, O., & Salvisberg, M. (2023). *PISA 2022. Svizzera in evidenza*. Università di Berna. <https://doi.org/10.48350/187070>
- Erzinger, A. B., Pham, G., Prosperi, O., Salvisberg, M., Verner, M., Delavy, F., Seiler, S., & Bollmann, S. S. (2024). *PISA 2022 in Switzerland: Ticino Sample (Version 1.0.0)* [Data set]. FORS data service. <https://doi.org/10.48573/8p38-rh44>
- Fauth, B., Decristan, J., Rieser, S., Klieme, E., & Büttner, G. (2014). Student ratings of teaching quality in primary school: Dimensions and prediction of student outcomes. *Learning and instruction*, 29, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.07.001>
- Field, A. (2024). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics* (4th ed.). Sage publications limited.
- Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 38–63. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.3>
- Hernandez-Torrano, D., & Courtney, M. G. R. (2021). Modern international large-scale assessment in education: An integrative review and mapping of the literature. *Large-scale Assessments in Education*, 9(17). <https://doi.org/10.1186/s40536-021-00109-1>
- Hattie, J. A. C. (2008). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.
- Hattie, J. A. C. (2023). *Visible learning: the sequel. A synthesis of over 2,100 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.
- Hattie, J. A. C., & Clarke, S. (2019). *Visible Learning: Feedback*. Routledge.
- Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 33–46. <https://doi.org/10.2307/749455>



- Hooft Graafland, J. (2018). New technologies and 21 century children: Recent trends and outcomes. *OECD EDUCATION Working Papers*, 179. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/e071a505-en>
- Hospel, V., & Galand, B. (2016). Are both classroom autonomy support and structure equally important for students' engagement? A multilevel analysis. *Learning and Instruction*, 41, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.09.001>
- Kazelskis, R., Reeves, C., Kersh, M. E., Bailey, G., Cole, K., Larmon, M., & Holliday, D. C. (2000). Mathematics anxiety and test anxiety: Separate constructs? *The Journal of experimental education*, 68(2), 137–146.
- Kirsch, I., & Braun, H. (2020). Changing times, changing needs: enhancing the utility of international large-scale assessments. *Large-scale Assessments in Education*, 8, 10. <https://doi.org/10.1186/s40536-020-00088-9>
- Klauer, K., & Phye, G. (2008). Inductive reasoning: A training approach. *Review of Educational Research*, 78(1), 85–123. <https://doi.org/10.3102/0034654307313402>
- Klieme, E., Pauli, C., & Reusser, K. (2009). The Pythagoras study: Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. In T. Janík & T. Seidel (Eds.), *The Power of Video Studies in Investigating Teaching and Learning in the Classroom* (pp. 137–160). Waxmann. <https://doi.org/10.5167/uzh-29452>
- Kuznekoff, J. H., & Titsworth, S. (2013). The impact of mobile phone usage on student learning. *Communication Education*, 62(3), 233–252. <https://doi.org/10.1080/03634523.2013.767917>
- Lam, P., & Tong, A. (2012). Digital devices in classroom: Hesitations of teachers-to-be. *The Electronic Journal of e-Learning*, 10(4), 387–395.
- Lee, J. (2021). Teacher–student relationships and academic achievement in Confucian educational countries/ systems from PISA 2012 perspectives. *Educational Psychology*, 41(6), 764–785. <https://doi.org/10.1080/01443410.2021.1919864>
- Lee, J., & Stankov, L. (2018). Non-cognitive predictors of academic achievement: Evidence from TIMSS and PISA. *Learning and Individual Differences*, 65, 50–64. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.lindif.2018.05.009>
- Lipnevich, A. A., & Panadero, E. (2021). A review of feedback models and theories: Descriptions, definitions, and conclusions. *Frontiers in Education*, 6, 720195. <https://doi.org/10.3389/feduc.2021.720195>
- Ma, X. (1999). A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 520–540. <https://doi.org/10.2307/749772>
- Marcionetti, J., Stevanovic, T., Benini, S., & Pettignano, M. (2023). *I corsi attitudinali e base alla Scuola media*. Centro competenze innovazione e ricerca sui sistemi educativi, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. [https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca\\_educativa/2023\\_I\\_corsi\\_A\\_e\\_B.pdf](https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca_educativa/2023_I_corsi_A_e_B.pdf)
- McCoy, B. R. (2016). Digital distractions in the classroom phase ii: student classroom use of digital devices for non-class related purposes. *Journal of Media Education*, 7(1), 5–32. <http://digitalcommons.unl.edu/journalismfacpub/90>

- Nota, L., Ferrari, L., Solberg, V. S. H., & Soresi, S. (2007). Career search self-efficacy, family support, and career indecision with Italian adolescents. *Journal of Career Assessment*, 15(2), 181–193. <https://doi.org/10.1177/1069072706298019>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2017). *PISA 2015 Results (Volume III): Students' Well-Being*. OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264273856-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *TALIS 2018 Results (Volume I): Teachers and School Leaders as Lifelong Learners*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/1d0bc92a-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023a). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023b). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2024a). *Social and Emotional Skills for Better Lives: Findings from the OECD Survey on Social and Emotional Skills 2023*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/35ca7b7c-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2024b). *PISA 2022 Technical Report*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/01820d6d-en>
- Panero, M., Di Martino, P., Castelli, L., & Sbaragli, S. (2020). L'evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento degli insegnanti di scuola elementare in formazione iniziale. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 8, 48–77. <https://doi.org/10.33683/ddm.20.8.3>
- Panero, M., Castelli, L., Di Martino, P., & Sbaragli, S. (2023). Preservice primary school teachers' attitudes towards mathematics: A longitudinal study. *ZDM – Mathematics Education*, 55(2), 447–460. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01455-2>
- Pashler, H. (1994). Dual-task interference in simple tasks: Data and theory. *Psychological Bulletin*, 116(2), 220–244. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.116.2.220>
- Petrucci, F. (2024). *Séparer pour adapter l'enseignement : quand la solution devient le problème. L'effet de l'enseignement sur les acquis scolaires dans les filières du cycle d'orientation genevois*. Service de la recherche en éducation (SRED). <https://www.ge.ch/document/36887/telecharger>
- Petrucci, F., Ambrosetti, A., Crotta, F., & Nidegger, C. (2020). Impact des établissements sur les performances des élèves. Une étude basée sur les résultats de l'enquête COFO 2016. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, 42(2), 305–322. <https://doi.org/10.25656/01:21411>

- Pletzer, B., Kronbichler, M., Nuerk, H. C., & Kerschbaum, H. H. (2015). Mathematics anxiety reduces default mode network deactivation in response to numerical tasks. *Frontiers in Human Neuroscience*, 9, 202. <https://doi.org/10.3389/fnhum.2015.00202>
- Posner, M. I. (1982). Cumulative development of attentional theory. *American Psychologist*, 37(2), 168–179. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.37.2.168>
- Realí, F., Jiménez-Leal, W., Maldonado-Carreño, C., Devine, A., & Szűcs, D. (2016). Examining the link between math anxiety and math performance in Colombian students. *Revista Colombiana de Psicología*, 25(2), 369–379. <https://doi.org/10.15446/rcp.v25n2.54532>
- Robitzsch, A., & Oberwimmer, K. (2022). *BIFIEsurvey: Tools for Survey Statistics in Educational Assessment* (3.1-15) [Software]. <https://cran.r-project.org/web/packages/BIFIEsurvey/BIFIEsurvey.pdf>
- Sana, F., Weston, T., & Cepeda, N. J. (2013). Laptop multitasking hinders classroom learning for both users and nearby peers. *Computers & Education*, 62, 24–31. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.003>
- Sarkar, A., Dowker, A., & Kadosh, R. C. (2014). Cognitive enhancement or cognitive cost: Trait-specific outcomes of brain stimulation in the case of mathematics anxiety. *Journal of Neuroscience*, 34(50), 16605–16610. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.3129-14.2014>
- Scherer, R., Siddiq, F., & Nilsen, T. (2024). The potential of international large-scale assessments for meta-analyses in education. *Large-scale Assessments in Education*, 12, 4. <https://doi.org/10.1186/s40536-024-00191-1>
- Schmidt, W., & Maier, A. (2009). Opportunity to learn? In G. Sykes, B. Schneider & D. N. Plank (Eds.), *Handbook of Education Policy Research* (pp. 541–559). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203880968-55>
- Seidel, T., Rimmele, R., & Prenzel, M. (2005). Clarity and coherence of lesson goals as a scaffold for student learning. *Learning and Instruction*, 15(6), 539–556. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.learninstruc.2005.08.004>
- Siegel, A. F. (2012). Chapter 12 – Multiple Regression: Predicting One Variable from Several Others. In A. F. Siegel (Ed.), *Practical Business Statistics* (6th ed., pp. 347–416). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385208-3.00012-2>
- Smith, P., Mahdavi, J., Carvalho, M., Fisher, S., Russell, S., & Tippett, N. (2008). Cyberbullying: Its nature and impact in secondary school pupils. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 49(4), 376–385. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1469-7610.2007.01846.x>
- van Deursen, A. J. A. M., & Helsper, E. J. (2015). The third-level digital divide: Who benefits most from being online? *Communication and Information Technologies Annual (Studies in Media and Communications)*, 10, 29–52. <https://doi.org/10.1108/S2050-206020150000010002>
- van Tartwijk, J., & Hammerness, K. (2011). The neglected role of classroom management in teacher education. *Teaching Education*, 22(2), 109–112. <https://doi.org/10.1080/10476210.2011.567836>
- Vosniadou, S., & Ortony, A. (1989). *Similarity and analogical reasoning*. Cambridge University Press.
- Wisniewski, B., Zierer, K., & Hattie, J. (2020). The Power of Feedback Revisited: A Meta-Analysis of Educational Feedback Research. *Frontiers in Psychology*, 10, 3087. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.03087>

## “Tu e la matematica”: un Padlet per l’attitude nella GenZ

### “You and math”: a Padlet for attitude in GenZ

Gaia Turconi

Università Telematica Pegaso – Italia

✉ [gaia.turconi@unipegaso.it](mailto:gaia.turconi@unipegaso.it)

**Sunto** / Questo lavoro vuole esplorare l’*attitude* nei confronti della matematica nella GenZ durante la fase di transizione dall’istruzione secondaria a quella terziaria, in una classe del primo anno della Facoltà di Scienze Agrarie e Alimentari. Particolare enfasi è posta sull’utilizzo di un Padlet di classe denominato “Tu e la matematica”, usato come strumento di raccolta delle narrazioni degli studenti in merito al loro rapporto con la disciplina. In questo contesto, l’incorporazione di oggetti culturali appartenenti alla *memesfera* all’interno del Padlet emerge come un efficace tramite comunicativo che gli studenti utilizzano per esprimere differenti profili di *attitude* secondo il *Three-Dimensional Model for Attitude*. Anche se talvolta non si è potuto determinare in modo preciso una tra le tre dimensioni che definiscono l’*attitude* (disposizione emotiva, visione della matematica, competenza percepita), i profili – anche parziali – emersi dall’analisi dei contributi degli studenti permettono di aprire una finestra sul mondo interiore ed emozionale della classe.

**Parole chiave:** *attitude*; *meme*; Padlet; matematica; università.

**Abstract** / This paper aims to explore the attitude toward mathematics in GenZ during the transition from secondary to tertiary education in a first-year class of the Faculty of Agricultural and Food Sciences. Particular emphasis is placed on the use of a class Padlet, called “You and Math”, used as a tool to collect students’ narratives about their relationship with the discipline. In this context, the incorporation of cultural objects belonging to the *memesphere* within the Padlet emerges as an effective communicative medium, which students use to express different attitude profiles according to the *Three-Dimensional Model for Attitude*. Even if it was sometimes not possible to determine precisely one of the three dimensions defining attitude (emotional disposition, view of mathematics, perceived competence), the profiles – even partial ones – that emerged from the analysis of the students’ contributions allow us to open a window on the inner and emotional world of the class.

**Keywords:** attitude; meme; Padlet; mathematics; higher education.

# 1 Le difficoltà nel passaggio secondario-terziario

---

La transizione dall’istruzione secondaria a quella terziaria nell’ambito dell’educazione matematica è un processo complesso e delicato, che da decenni sollecita l’attenzione dei ricercatori del settore (Di Martino et al., 2023; Gueudet, 2008). Le difficoltà riscontrate in tale ambito hanno conseguenze non solo educative, ma anche sociali: la preferenza per programmi di laurea STEM sta diventando sempre più rara, nonostante l’offerta formativa universitaria italiana contempli un numero maggiore di corsi in quest’area rispetto ad altre discipline (Consorzio Interuniversitario AlmaLaurea, 2023; Martiniello et al., 2023). Gli studenti che, “andando controcorrente”, scelgono di iscriversi a percorsi di laurea scientifica spesso si confrontano con maggiori ostacoli nel completare gli studi rispetto ai loro colleghi di altre discipline, registrando una percentuale più alta di abbandoni e un più elevato indice di ritardo nel conseguimento del titolo triennale, calcolato attraverso il rapporto tra gli anni di ritardo e la durata normale del corso (Agenzia Nazionale di Valutazione del Sistema Universitario e della Ricerca [ANVUR], 2023; Martiniello et al., 2023). In questa dinamica, la matematica risulta spesso essere la causa principale di tali dati negativi (Di Martino & Maracci, 2009; Li & Schoenfeld, 2019; Wang, 2013). Molti studenti, infatti, percepiscono questa disciplina e i relativi esami come un ostacolo per loro insormontabile. La convinzione di non poter controllare il proprio successo in matematica e che esso sia dovuto a cause esterne ingovernabili dal singolo individuo, oltre ad ostacolare il processo di responsabilizzazione dell’apprendimento fondamentale nell’educazione terziaria (Zimmermann, 2000), quando associata a fallimenti ripetuti può avviare un ciclo di scarsa fiducia, minore motivazione e prestazioni inferiori, aumentando il rischio di sviluppare ansie e fobie nei confronti della matematica (Ashcraft, 2002), degenerando poi nella cosiddetta *impotenza appresa* (*learned-helplessness*) (Bardelle & Di Martino, 2012; Zan & Di Martino, 2009), ossia la percezione di mancanza di controllo su un evento, che deriva da una precedente esposizione a eventi negativi simili percepiti come incontrollabili. Purtroppo, diversi fattori possono contribuire a questa situazione, tra cui, forse, l’elevata numerosità degli studenti nelle aule universitarie. Questa condizione potrebbe ridurre la possibilità per i docenti di focalizzarsi ed intervenire sul singolo studente, mentre gli studenti stessi potrebbero sentirsi più inibiti a esporsi, non esplicitando e, quindi, non affrontando le difficoltà incontrate lungo il percorso, che emergono solo durante l’esame finale manifestandosi come insuccesso.

Come evidenziato nella letteratura, però, «la mancanza di conoscenze preliminari rappresenta solo una delle cause, e non la più significativa, delle difficoltà riscontrate dagli studenti» (Bardelle & Di Martino, 2012, p. 788). Fattori metacognitivi ed emotivi giocano un ruolo fondamentale: per affrontare questa fase di transizione, spesso caratterizzata da una vera e propria *crisi* (Clark & Lovric, 2008), è essenziale progettare interventi didattici mirati e identificare strategie di insegnamento/apprendimento che possano rendere la matematica più accessibile e pertinente per questi studenti, promuovendo una maggiore integrazione di questa disciplina nei contesti applicativi. Ciò è particolarmente importante nella fase *liminale* di questo passaggio (Clark & Lovric, 2008), ossia nel periodo in cui si verifica il distacco dall’ambiente noto della scuola superiore e l’inserimento in quello nuovo delle aule universitarie. Qui, gli studenti, già emotivamente impegnati dal cambiamento ambientale e del gruppo dei pari, si ritrovano poi ad affrontare dei nuovi modelli relazionali con le figure formative di riferimento, aspetto che porta quelli con un passato di difficoltà in matematica a non cercare per nulla il rapporto con il docente per paura di essere – nuovamente – giudicati e svalutati (Bardelle & Di Martino, 2012; Zan & Di Martino, 2009).

Il fenomeno appena descritto è, in realtà, più complesso di come è stato qui presentato, e coinvolge variabili di tipo sociale, economico, psicologico, emotivo, cognitivo, e molto altro che non è possibile sintetizzare efficacemente in poche righe (si veda, ad esempio, Di Martino et al., 2023). Questo, oltre ad essere di evidente rilevanza per il contesto dell’insegnamento-apprendimento universitario, è il contesto in cui nasce e si svolge l’esperienza che verrà presentata in questo articolo. Qui, infatti,

vogliamo discutere il risultato di un momento di riflessione e confronto con gli studenti della Facoltà di Scienze Agrarie e Alimentari dell’Università degli Studi di Milano, pensato affinché il docente possa acquisire – almeno in parte – informazioni in merito a come gli studenti che compongono il gruppo classe si pongono nei confronti della matematica, un dato fondamentale per progettare e proporre attività aggiuntive e integrative che siano specifiche ed efficaci. Diverse iniziative didattiche svoltesi all’interno di questa Facoltà sono state ideate e progettate con questo scopo, cercando di intervenire su diversi aspetti dell’apprendimento come l’importanza di lavorare sulla percezione della matematica attraverso approcci stimolanti e coinvolgenti (Morando & Turconi, 2022), il potenziamento del metodo di studio degli studenti (Morando & Spreafico, 2022), incorporare nel corso strategie come lo *spacing*, ossia la distribuzione dello studio nel tempo per favorire l’apprendimento, e attività pratiche come l’origami (Iannella et al., 2022), il valore della riflessione personale e critica sul proprio percorso d’apprendimento, incoraggiando l’uso di un diario come strumento di “autoanalisi” (Morando et al., 2023).

L’attività qui descritta si inserisce proprio in questo insieme di iniziative, e consiste nella strutturazione di un Padlet<sup>1</sup> di classe, un *virtual wall* parzialmente gratuito in cui è possibile creare una bacheca digitale su cui condividere – *postare* – diversi tipi di file (documenti di testo, immagini, file audio, video), mediante i quali le matricole (e non solo) hanno comunicato il loro rapporto con la matematica. In questo lavoro indagheremo la possibilità di ricavare dei profili di *attitude* da questi contenuti multimediali, andando ad analizzarne i significati e facendo riferimento anche al senso *social* di alcuni di essi. Il termine *attitude* in questo contesto si riferisce all’insieme delle disposizioni emotive, visioni della matematica e competenze percepite dagli studenti nei confronti della disciplina. Questo concetto, centrale per la nostra analisi, verrà approfondito nella sezione teorica.

Possiamo quindi individuare due domande di ricerca:

1. Quali modalità comunicative scelgono gli studenti tra quelle permesse dal Padlet?
2. È possibile ricavare informazioni in merito all’*attitude* degli studenti dagli oggetti da loro *postati* su Padlet? Se sì, cosa ci dicono in termini di profili di *attitude*?

Come vedremo dettagliatamente in seguito, una grande percentuale dei contenuti condivisi dagli studenti sono *meme*, ossia immagini altamente comunicative il cui significato è conosciuto e condiviso da varie comunità online. Per analizzare anche questi contributi, oltre che a quelli testuali, sarà necessario utilizzare opportuni costrutti analitici che saranno presentati nel prossimo paragrafo.

## 2 Lenti teoriche

---

Per interpretare il materiale *postato* su Padlet è necessario utilizzare diverse lenti teoriche, fondamentali per comprendere il significato dei medium utilizzati allo scopo di descrivere l’atteggiamento del gruppo classe; anche quest’ultimo aspetto, ovviamente, necessita di uno specifico modello di riferimento per essere determinato e compreso. In questo lavoro utilizzeremo il modello sviluppato da Limor Shifman (2013) per l’analisi e l’interpretazione dei *meme*, e il *Three-Dimensional Model for Attitude* (TMA) di Zan e Di Martino (2009) per valutare l’atteggiamento nei confronti della matematica. Le due teorie verranno inoltre integrate secondo la teoria di *networking* proposta da Bikner-Ahsbahs e Prediger (2014).

---

1. <https://padlet.com/>.



## 2.1 Comunicare con i *memes* e con le immagini

La quasi totalità degli studenti presenti nel corso di matematica appartiene alla cosiddetta GenZ. Con questo termine ci si riferisce alla “Generazione Z”, ossia a coloro che sono nati approssimativamente tra la metà degli anni ‘90 e il 2010, la cui infanzia e adolescenza è stata fortemente caratterizzata dalla diffusione di internet, dai dispositivi digitali di ogni sorta e soprattutto dai social media; per questo motivo si parla spesso di generazione *onlife* (Floridi, 2015), poiché per loro «le relazioni online e offline sono intercambiabili» (Katz et al., 2022, pp. 12–13), e il *meme* è uno dei canali comunicativi privilegiati per esternare e verbalizzare i propri sentimenti, emozioni, valori, pensieri e opinioni, tanto nel mondo digitale quanto in quello tangibile. Nel lavoro di Katz e colleghi (2022), infatti, molti intervistati hanno utilizzato dei *memes* per meglio spiegare e definire la loro identità e la loro percezione di sé. Tale identità e percezione di sé può assumere caratteristiche collettive e generazionali, come accade per quei *memes* che diventano “*bonding object/mechanism*” per un’intera generazione, come definiti anche da Katz e colleghi, ossia che diventano strumenti di connessione e identificazione anche al di fuori dei gruppi sociali specificatamente coinvolti nella loro creazione e/o diffusione perché legati a un tema di interesse: possiamo pensare ai *memes* che trattano alcune peculiarità delle generazioni precedenti rispetto alla GenZ come un esempio di questa appartenenza generazionale (Figura 1).

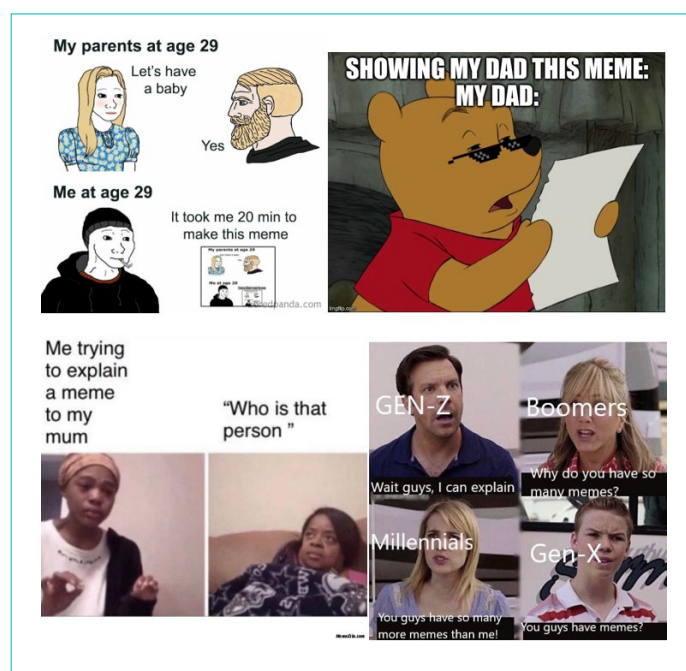


Figura 1. Alcuni *memes* che trattano le differenze tra generazioni.

Questi oggetti appartengono alla cosiddetta *memesfera* (Stryker, 2011), ossia l’insieme delle comunità digitali in cui questi stessi oggetti vengono creati, mutati, condivisi e commentati, e per poter comprendere il significato che veicolano è necessario usufruire di un framework teorico che ci permetta di scomporre i *memes* nelle loro unità fondamentali. Il framework che verrà qui utilizzato è quello proposto da Limor Shifman (2013), che definisce i *memes* come «unità di cultura popolare che vengono fatte circolare, imitate e trasformate dai singoli utenti di Internet, creando nel frattempo un’esperienza culturale condivisa» (p. 367), e individua tre dimensioni principali che le persone possono imitare e riprodurre: il contenuto (*content*), la forma (*form*) e la posizione (*stance*).

Il contenuto, *content*, si riferisce sia alle idee che alle ideologie trasmesse dal *meme*. La forma, *form*, è l’incarnazione fisica del messaggio, la parte che è percepibile attraverso i sensi. La posizione, *stance*,



si riferisce alle informazioni che il *meme* trasmette in merito alla propria comunicazione: riguarda i modi in cui i destinatari si posizionano rispetto al testo, ai suoi codici linguistici, ai destinatari stessi e ad altri potenziali interlocutori e parlanti.

La differenza principale che vi è tra questi oggetti culturali e altri considerati “viral” (ad esempio video, suoni, immagini e loro combinazioni) è che i *meme* sono costituiti da un messaggio stratificato e complesso, la cui comprensione accurata necessita di una conoscenza approfondita dei contesti culturali e dei loro riferimenti (Giorgi & Rama, 2024).

Tra le varie categorie di *meme* possiamo individuare due macroaree a cui appartengono quelli più utilizzati sui social e nella vita quotidiana: i *reaction meme* (KnowYourMeme, 2004) e i *meme* creati *ad-hoc* per un gruppo ristretto di utenti o per uno specifico contesto (KnowYourMeme, 2017a).

I primi sono «immagini o gif animate che hanno lo scopo di rappresentare un’emozione specifica in risposta a qualcosa che è stato detto» (KnowYourMeme, 2004). La loro caratteristica principale è l’alto livello di *relatability*, ossia della capacità di permettere alle persone di empatizzare con ciò che viene trasmesso nell’immagine tanto da identificarsi in essa o nel suo protagonista (Jenkins et al., 2013); questa, pur essendo una proprietà intrinseca di tutti i *meme* che ne determina la rapidità e viralità di diffusione, in tale tipologia è l’aspetto più peculiare e predominante.

In Figura 2 vi è il *reaction meme* “Press X to Doubt”, tratto dal videogioco “L.A. Noire”. Il *form*, ovvero la parte figurale (“base *memetica*” nel gergo di Internet), è un frame del videogioco in cui il giocatore, che veste i panni del detective Cole Phelps in una Los Angeles degli anni ‘40, può scegliere come reagire alle dichiarazioni rilasciate dai testimoni che sta interrogando; nel gioco, il *player* può scegliere se accettare la dichiarazione come veritiera (“Verità”), se esprimere dubbi sulla dichiarazione del testimone (“Dubbio”) o se accusare il testimone di mentire (“Menzogna”). In questo *meme* è mostrata solo l’opzione *Doubt* (“Dubbio”), usata come reaction image per esprimere incredulità nei confronti di un tema o di un’affermazione (KnowYourMeme, 2011). Il messaggio trasmesso da questo *meme* non è propriamente legato a un dubbio “genuino”, ma piuttosto a quella sensazione di incredulità e scetticismo (*content*) che proviamo quando percepiamo un’affermazione come evidentemente falsa (*stance*).

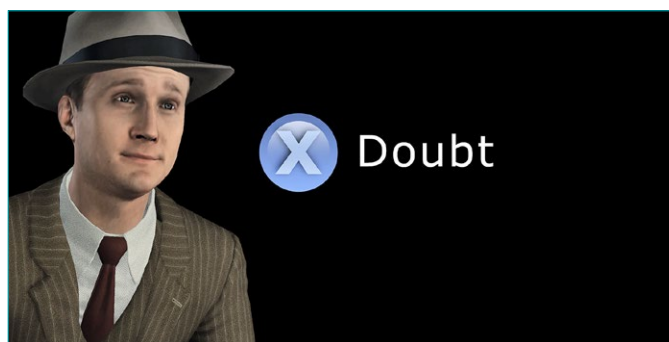


Figura 2. Meme: “Press X to Doubt”.

L’altra tipologia di *meme* citata in precedenza, invece, è quella dei *meme contestuali* (KnowYourMeme, 2017a) il cui significato è strettamente legato a un particolare contesto o nicchia. Questi *meme di nicchia* vengono creati per esprimere emozioni e/o comunicare concetti strettamente contestuali al creatore e alle sue comunità virtuali di appartenenza, oppure relativi ad eventi storici o di attualità; ne è un esempio la prima immagine presente nella Figura 3. Il *form* del *meme* (“Types of Headaches”) rappresenta una serie di immagini stilizzate che illustrano tre tipi di mal di testa realmente esistenti e la rispettiva collocazione del dolore evidenziata in rosso, a cui l’autore aggiunge un quarto tipo (immagine in basso in Figura 3) non esistente nella realtà; in tutti i casi, il *content* è inerente a una situazione non desiderabile, o comunque legata alla somatizzazione di un disagio (KnowYourMeme,

2017b); questo disagio è legato a qualcosa che ci si ritrova ad affrontare inevitabilmente e che quindi provoca una sensazione di preoccupazione e tensione (*stance*). L’esempio raffigurato nell’immagine in basso nella Figura 3 è stato ideato, prodotto e condiviso dai profili social ufficiali dello stato dell’Ucraina<sup>2</sup> nel dicembre 2021, e rappresenta il sentimento di fastidio causato dalla condivisione dei confini geopolitici con la Russia. Quest’immagine offre uno stralcio sulla rilevanza che i social danno ai *memes* in questo periodo storico come oggetto comunicativo universale e trasversale su tutti i temi, financo quelli più delicati e complessi come il conflitto ucraino-russo: l’Ucraina, con questo *meme*, non vuole comunicare né preoccupazione né paura, ma piuttosto una sorta di “rassegnazione attiva”, di tensione data dal vivere accanto alla Russia e al trovarsi ad agire di conseguenza alle azioni e alle scelte perpetrate da altri.

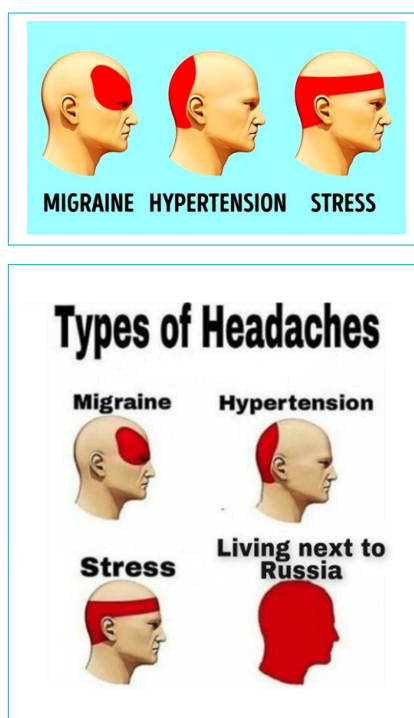


Figura 3. Immagine originale da cui è stato tratto il *meme* “Types of Headaches” e, sotto, una sua mutazione tratta dai profili social dell’Ucraina.

Questa lente, qui presentata solo nei suoi aspetti principali, mette in evidenza in modo chiaro come il presupposto teorico sia quello di considerare le persone agenti nell’ambiente comunicativo digitale come *attori* nel processo di trasmissione culturale, e non solo come dei semplici *vettori*. La disseminazione del *meme* quindi «si basa su agenti intenzionali con potere decisionale: le norme sociali, le percezioni e le preferenze sono fondamentali nei processi di selezione *memetica*» (Shifman, 2013, p. 366). La selezione di un determinato *meme* per comunicare un contenuto, sia esso legato al proprio vissuto oppure al vissuto di un collettivo di persone, è una scelta comunicativa oculata da parte di chi produce o condivide il *meme*.

## 2.2 L’attitude nei confronti della matematica

Il *Three-Dimensional Model for Attitude* (TMA), proposto da Zan e Di Martino (2009), è un modello cosiddetto *grounded* (Glaser & Strauss, 1976) ossia studiato, ideato e strutturato a partire dai dati

2. <https://twitter.com/Ukraine>.

raccolti, mediante una continua revisione delle diverse fasi della ricerca. In particolare, i dati sui quali è basato il modello qui descritto sono di tipo narrativo, e infatti l’atteggiamento nei confronti della matematica viene descritto dagli autori mediante le tre dimensioni principali utilizzate dagli studenti stessi per descrivere il loro rapporto con la disciplina. Affinché questo costrutto potesse essere funzionale come strumento di diagnosi e intervento, le dimensioni – che interagiscono tra loro in maniera complessa andando a determinare uno spettro di possibili combinazioni e manifestazioni di atteggiamento – sono state ridotte a dicotomie dagli autori del modello, permettendo così di definire otto diversi profili di *attitude* (Figura 4). Nello specifico, vengono individuati i seguenti poli dimensionali:

- Disposizione emotiva (DE), sintetizzata in termini di positiva/negativa;
- Visione della matematica (VM), sintetizzata in termini di relazionale/strumentale;
- Competenza percepita (CP), sintetizzata in termini di alta/bassa.

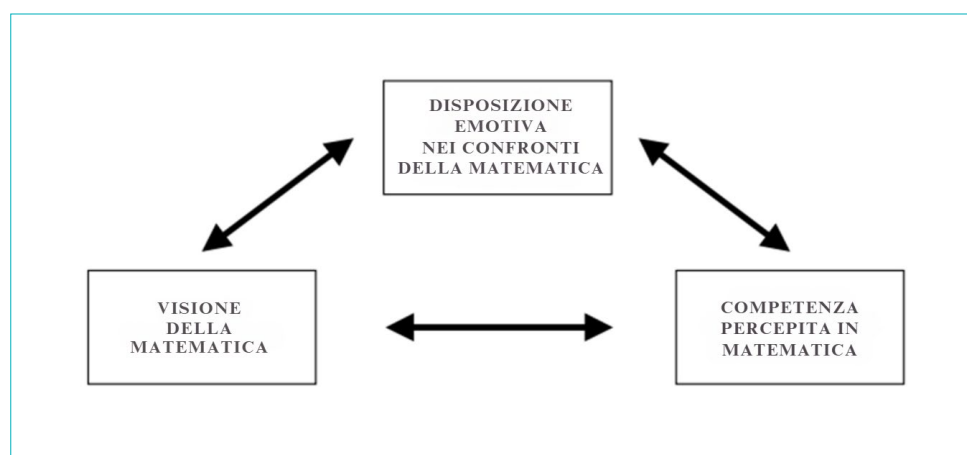


Figura 4. *Three-Dimensional Model for Attitude* (Zan & Di Martino, 2009, p. 418, traduzione dell’autrice).

La disposizione emotiva costituisce un elemento cruciale nella definizione di atteggiamento, poiché, come afferma Hannula (2002, p. 28), «le emozioni sono più centrali nell’atteggiamento rispetto alla cognizione». Per molti anni, i concetti di “atteggiamento” e “disposizione emotiva” sono stati talmente sovrapposti nella letteratura scientifica che, in alcuni contesti, il termine “*emotional disposition*” è stato utilizzato come definizione di “*attitude*” (Di Martino & Zan, 2001), comportando una eccessiva semplificazione del concetto. Attualmente, tutti i framework teorici che definiscono e caratterizzano l’*attitude* mettono in evidenza molto più della sola dimensione emotiva, come fa anche il modello che stiamo presentando. È complesso dare una definizione universale di “disposizione emotiva”, ma possiamo intuitivamente considerarla come la predisposizione affettiva a compiere una determinata azione o ad essere in una situazione circoscritta. Possiamo cogliere informazioni in merito a questa dimensione quando si utilizzano termini legati strettamente a emozioni positive e/o negative, come ad esempio “mi piace/non mi piace” oppure “mi diverte/mi annoia”.

In merito alla visione della matematica, assume importanza cruciale il contributo di Skemp (1976), il quale ha introdotto una distinzione strutturale tra concezione della disciplina di stampo relazionale o strumentale. La prima denota una capacità di pensiero flessibile che consente di attribuire significato a nuove situazioni e di stabilire connessioni indispensabili tra le unità di pensiero, facilitandone così l’applicazione in contesti inediti. La seconda, invece, si configura come il frutto di un vero e proprio addestramento incentrato sull’applicazione di tecniche mediante la memorizzazione meccanica di regole. Gli studenti che adottano una prospettiva strumentale della disciplina attribuiscono maggior rilevanza al mero calcolo e all’esercizio pratico, focalizzandosi sull’aspetto del «saper fare» (D’Amore

& Godino, 2006, p. 10). In contrasto, coloro che abbracciano una visione relazionale della disciplina concentrano la propria attenzione sulla comprensione dei significati e dei modelli, privilegiando l’aspetto del «sapere» (D’amore & Godino, 2006, p. 10). Questa dimensione si può cogliere quando lo studente racconta ciò che la matematica è ontologicamente, quando individua l’essenza della disciplina nel “calcolo/esercizi/procedimenti” (strumentale) o nei “concetti/comprendimento/ragionamento” (relazionale).

In ultimo, la competenza percepita si riferisce alla valutazione soggettiva e alla convinzione individuale riguardo alle proprie abilità, conoscenze e capacità in una specifica area, in questo caso matematica. Questo concetto è intrinsecamente posto in relazione al significato attribuito ai successi in campo matematico. Di Martino e Zan individuano, infatti, diversi significati attribuiti dagli studenti al concetto di “successo in matematica” (Nicholls et al., 1990). Uno di questi riguarda una definizione «autoriferita del successo» (Nicholls et al., 1990, p. 110) come acquisizione di competenze e abilità, o la realizzazione di qualcosa che rappresenta una sfida personale, chiamata “*task orientation*” da Nicholls e colleghi. Diverso è il caso della cosiddetta “*ego orientation*”, dove lo studente definisce il successo in base a una gerarchia di “merito” con i compagni, in cui lo sforzo del soggetto non è mai fine a sé stesso ma è mezzo per l’affermazione delle proprie capacità come superiori rispetto a quelle degli altri; questo è il tipico profilo di chi ritiene che la matematica sia “di pochi eletti” e che il successo in questa disciplina sia da ricercarsi in una qualche innata predisposizione che rende alcuni più avvantaggiati di altri.

Questa attribuzione di significato al successo in ambito matematico influenza fortemente quella che, in questo modello, è la dimensione della *competenza percepita*, spesso espressa nei *perché* degli studenti, nei loro tentativi di spiegare le motivazioni alla base dei loro sentimenti nei confronti della matematica. Il legame tra competenza percepita e disposizione emotiva è infatti molto forte:

«L’altra causa più frequente che gli studenti riportano per giustificare una dichiarata disposizione emotiva fa riferimento al rapporto dello scrittore con la matematica e coinvolge entrambi i suoi poli: ‘io’ e ‘matematica’. È caratterizzata da affermazioni come “ho successo/fallimento in matematica”, “capisco/non capisco la matematica”, “ottengo buoni/cattivi voti in matematica”, ... Classifichiamo questo tipo di argomento come riferito alla competenza matematica percepita da chi scrive».<sup>3</sup>

(Di Martino & Zan, 2010, p. 38, traduzione dell’autrice)

Nel complesso, quindi, questo modello, con le sue tre dimensioni, offre un approccio qualitativo interpretativo per la caratterizzazione degli atteggiamenti degli studenti. Tale approccio è costruito sull’analisi di materiale “altamente comunicativo”, che viene prodotto dagli studenti in modo autonomo e libero, che riflette il loro vissuto interiore, che comunica le sfumature del loro mondo nel modo che ritengono più opportuno. La scelta è di privilegiare questo tipo di materiale fortemente connesso all’autenticità e all’autorappresentazione degli studenti poiché consente di ottenere una comprensione più approfondita e ricca degli atteggiamenti in questione. Questo approccio si rivela, così, fondamentale per cogliere la complessità delle dinamiche attitudinali, evidenziando la ricchezza delle sfumature emozionali, cognitive e psicologiche presenti nel materiale scelto, pensato e proposto dagli studenti.

3. In lingua originale: «The other most frequent cause that students report to justify a declared emotional disposition refers to the writer’s relationship to mathematics and involves both poles of it: ‘I’ and ‘mathematics’. It is marked by utterances like ‘I succeed /fail in mathematics’, ‘I understand/don’t understand mathematics’, ‘I get good/bad marks in mathematics’, ... We classify this type of motive as referring to the writer’s perceived competence in mathematics».

### 2.3 Un approccio integrato

Nel tentativo di comprendere in modo più completo l’atteggiamento degli studenti universitari nei confronti della matematica, il nostro studio adotta un approccio integrato che combina due robusti modelli teorici: il modello di analisi dei *meme* proposto da Limor Shifman (2013) e il *Three-Dimensional Model for Attitude* sviluppato da Di Martino e Zan (2010). Il primo ci permette di esaminare i *meme* non solo come semplici elementi di intrattenimento, ma come veicoli di espressione culturale e individuale. Analizzando il contenuto, la forma e la posizione dei *meme*, possiamo cogliere non solo cosa gli studenti comunicano sulla loro esperienza matematica, ma anche *come* lo comunicano, offrendo una panoramica della loro *attitude* verso la disciplina. Parallelamente, il TMA fornisce una struttura per categorizzare e interpretare queste espressioni sotto le dimensioni di disposizione emotiva, visione della matematica e competenza percepita (Di Martino & Zan, 2010). Utilizzando il framework del *networking* di teorie proposto da Bikner-Ahsbabs e Prediger (2014), integriamo questi modelli per sfruttare il dinamismo e la ricchezza espressiva dei *meme* per aprire nuove strade nella comprensione dell’atteggiamento nei confronti della matematica nella Generazione Z.

Il concetto di *networking* di teorie nel contesto dell’educazione matematica rappresenta un approccio metodologico che permette di integrare e mettere in relazione diverse teorie, rispettandone al contempo l’identità individuale (Bikner-Ahsbabs & Prediger, 2014). Questo approccio è essenziale per affrontare la complessità dei fenomeni educativi, che spesso non possono essere pienamente compresi tramite una singola prospettiva teorica. Le strategie di *networking* di teorie spaziano lungo un continuum che va dalla semplice comprensione reciproca tra ricercatori promotori di teorie diverse tra loro, fino alla loro sintesi completa (Figura 5). A un estremo di questo continuum troviamo strategie come «comprendere e rendere comprensibile» (in lingua originale “*Making understandable*” e “*Understanding others*”), dove l’obiettivo è acquisire una comprensione approfondita delle altre teorie e rendere chiari i propri approcci agli altri ricercatori. Procedendo lungo il continuum, troviamo strategie di «confronto e contrapposizione» (“*Contrasting*” e “*Comparing*”), utili per evidenziare somiglianze e differenze tra teorie, arricchendo così la comprensione complessiva dei fenomeni studiati. Strategie più avanzate includono «combinare e coordinare» (“*Combining*” e “*Coordinating*”), che mirano a utilizzare diverse teorie per analizzare lo stesso fenomeno empirico, permettendo una comprensione più sfaccettata e profonda. L’apice di queste strategie è rappresentato dall’«integrazione locale» e dalla «sintesi» (“*Integrating locally*” e “*Synthesizing*”). L’integrazione locale può essere simmetrica quando un concetto sviluppato al confine tra due teorie viene integrato in entrambe, o asimmetrica quando elementi di una teoria sono incorporati in un’altra già più sviluppata, come avverrà in questo lavoro: le tre dimensioni del *meme* definite da Shifman verranno incorporate nel modello TMA, diventando ulteriori elementi informativi utili per comprendere l’*attitude* di chi ha condiviso e/o creato il *meme*. La sintesi, invece, coinvolge la creazione di un nuovo framework teorico che unisce due teorie in modo tale da far emergere una nuova comprensione teorica.

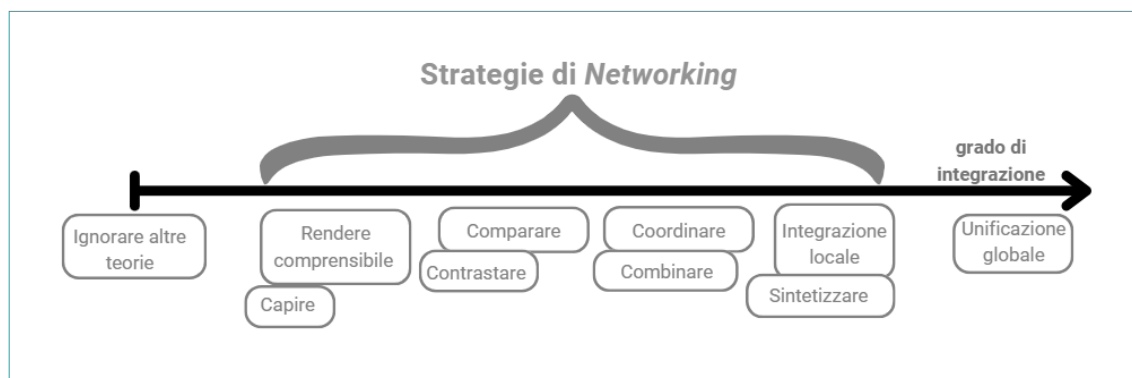


Figura 5. «Un panorama per collegare gli approcci teorici» (Prediger et al., 2008, p. 170, traduzione dell’autrice).

L’integrazione del modello di Shifman e del TMA ci ha permesso di identificare un profilo di *attitude* che può mostrare, ad esempio, una disposizione emotiva negativa e una visione strumentale della matematica, il tutto supportato da una bassa competenza percepita, emergere chiaramente attraverso l’analisi dei *meme* condivisi dagli studenti, profilo che sarebbe stato difficile da cogliere con una sola delle due teorie. L’integrazione asimmetrica delle teorie, con l’incorporazione di elementi del modello di Shifman nel TMA, è stata scelta per mantenere la robustezza analitica del modello di Di Martino e Zan, arricchendolo con la flessibilità interpretativa offerta dall’analisi dei *meme*. Questa scelta permette di cogliere sia la profondità delle percezioni emotive che la complessità delle espressioni culturali digitali degli studenti. Questo approccio integrato, quindi, non solo arricchisce la comprensione degli atteggiamenti degli studenti verso la matematica, ma evidenzia anche la potenza espressiva dei *meme* come veicolo di significato culturale e personale.

### 3 Metodologie

---

La classe che ha partecipato all’attività di seguito descritta è quella del corso di Matematica della Facoltà di Scienze Agrarie e Alimentari, in particolare i corsi di Produzione e Protezione delle Piante e dei Sistemi del Verde e di Agricoltura Sostenibile. Durante la prima lezione del corso di tutorato, che si è svolto in parallelo al corso di Matematica, è stata proiettata in classe una bacheca di Padlet vuota dal titolo “Tu e la matematica”; è stato poi chiesto loro di condividere su di essa un *post* che esprimesse il loro rapporto con la disciplina. Il titolo del Padlet è stato ispirato alla pionieristica ricerca condotta da Di Martino e Zan nel 2009, in cui i materiali furono oltre 1000 testi scritti da studenti di varie fasce d’età. Tutti questi elaborati, infatti, condividevano un titolo comune: “Io e la Matematica: il mio rapporto con la matematica fino ad oggi”.

Padlet è una piattaforma web collaborativa in tempo reale parzialmente gratuita, su cui è possibile creare una o più bacheche digitali all’interno delle quali condividere diversi tipi di file (documenti di testo, immagini, file audio, video). Il suo utilizzo in ambito educativo è sempre più frequente, soprattutto negli ultimi anni in cui la digitalizzazione dell’apprendimento-insegnamento è un focus centrale nella ricerca e nella pratica didattica. Diversi autori hanno utilizzato questa piattaforma per vari scopi educativi, tra cui creare ambienti che favoriscano l’apprendimento collaborativo (Zhi & Su, 2015), permettere un approccio più inclusivo all’educazione (Rashid et al., 2019) e sviluppare le competenze di apprendimento e innovazione riassunte nelle cosiddette “4C del 21° secolo”, ossia creatività, pensiero critico, collaborazione e comunicazione (Ramachandiran & Mahmud, 2018).

La condivisione in aula è avvenuta in modo sincrono, e gli studenti hanno utilizzato i loro *device* personali (telefoni cellulari, tablet e PC) per *postare* su Padlet i loro contributi, durante un momento appositamente dedicato della lezione di circa mezz’ora. Si è scelto di mantenere l’anonimato dei materiali condivisi, grazie a specifiche funzionalità di Padlet selezionate dal ricercatore, così che gli studenti potessero sentirsi liberi di esprimere le proprie idee, opinioni e sentimenti senza timore di giudizi da parte del docente e/o dal gruppo dei pari, favorendo così una condivisione aperta e onesta. Sempre mediante impostazioni legate alla strutturazione della piattaforma, è stata data la possibilità ai partecipanti della bacheca di commentare i contenuti condivisi da altri o di mostrare il loro apprezzamento usando una *reaction*, ossia un tasto a forma di cuore; queste ultime funzionalità, però, non sono state utilizzate dagli studenti che hanno partecipato all’attività. Ciò che gli studenti inserivano sulla bacheca veniva visualizzato immediatamente dall’intera classe grazie a un proiettore. Si è deciso di non porre limitazioni al tipo di file da utilizzare, così che gli studenti potessero esprimersi mediante il canale comunicativo a loro più consono. Le scelte di utilizzare una bacheca digitale, di lasciare libera scelta in merito agli oggetti comunicativi da condividere, e di mantenere l’anonimato



di ciò che viene condiviso sono state guidate dalle riflessioni precedentemente presentate in merito alle peculiarità della GenZ in ambito comunicativo, oltre che a quelle relative all’importanza di dati e materiali fortemente connessi all’autenticità e all’autorappresentazione degli studenti per poterne cogliere le sfumature di *attitude*.

Nei paragrafi che seguono cercheremo di indagare se è possibile trarre informazioni in merito all’*attitude* degli studenti mediante l’analisi del Padlet. Inoltre, analizzeremo se l’uso di immagini con valore *memetico* e GIF evocative può essere rappresentativo dell’*attitude* degli studenti, al pari (o quasi) di un testo esteso. L’analisi si concentrerà quindi sui *meme* e sui testi più elaborati, in quanto possiamo considerarli come oggetti comunicativi complessi e, dunque, “completi”, ovvero che, per loro natura, possono trasmettere un messaggio sufficientemente articolato da esprimere la posizione dello studente rispetto alle tre dimensioni dell’*attitude* considerate. Per l’analisi dei testi è possibile utilizzare il modello di Di Martino e Zan, mentre per l’analisi dei *meme* in ottica di *attitude* è necessario analizzare prima il contenuto del Padlet mediante la lente proposta da Shifman. Per permettere il *networking* tra le due teorie in un’ottica di integrazione locale asimmetrica (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014), il primo passo è stato quello di identificare i punti di contatto tra le due. Da un lato, mediante il modello di Shifman è possibile estrapolare il messaggio e il significato trasmesso dai *meme* e attribuito ad essi dalla comunità *social*, focalizzandosi sul loro contenuto, forma e posizione. Dall’altro lato, il TMA di Di Martino e Zan permette di indagare come queste espressioni riflettano la disposizione emotiva degli studenti, la loro visione della matematica e la loro competenza percepita. Questo ha permesso di procedere con una mappatura incrociata, categorizzando i *meme* non solo secondo le loro caratteristiche estetiche e contenutistiche ma anche in base alle dimensioni di *attitude* degli studenti che essi comunicano. Questo approccio ci ha permesso di cogliere sfumature emotive e cognitive che altrimenti sarebbero rimaste latenti. Per esempio, un *meme* che esprime frustrazione o sfida potrebbe indicare una disposizione emotiva negativa e una bassa competenza percepita, oppure un *meme* che fa riferimento all’uso di formule e procedure potrebbe indicare una visione della matematica strumentale. Questo ha fatto sì che ogni *meme* fosse analizzato attraverso un doppio filtro teorico. In fase di analisi integrata, ogni *meme* è stato valutato per identificare specifici profili attitudinali correlati alle tre dimensioni del TMA, delineando non solo i profili individuali ma anche tendenze più ampie all’interno del gruppo di studio, evidenziando come differenti forme di espressione *memetica* possano corrispondere a specifiche *attitude* matematiche.

L’integrazione delle teorie ha rivelato che i *meme*, spesso considerati semplici strumenti di intrattenimento, possono essere potenti indicatori delle complesse dinamiche emotive e cognitive degli studenti nei confronti della matematica. Questo approccio combinato ha permesso di creare una nuova modalità di indagine dell’*attitude* nei confronti della matematica, ampliando i casi in cui possiamo utilizzare il modello TMA: non solo testi prodotti dagli studenti o interviste, ma anche oggetti comunicativi digitali come i *meme*.

Le frasi brevi o i contenuti virali, invece, in quanto oggetti comunicativi “parziali”, necessiterebbero di modelli teorici e lenti interpretative appositamente pensate per definire forse un *ambiente*, un’*atmosfera* o un *clima*; tratteremo brevemente questo aspetto nel paragrafo conclusivo riflettendo sui possibili sviluppi futuri di questa ricerca.

Trasversalmente alla tipologia di oggetto comunicativo analizzato, vedremo come la dimensione della competenza percepita sarà spesso sottointesa, un non-detto che però si fa sentire quando gli studenti parlano di “sensazione di confusione”, “sensazione di frustrazione” oppure di fallimenti ripetuti che li hanno convinti, nel tempo, che per loro la strada verso il raggiungimento di obiettivi in matematica è tortuosa, forse così tanto da non riuscire ad arrivare alla fine.





della classe che ha partecipato alla sperimentazione, prima analizzando i testi articolati (14 studenti, l’11%), poi i *mime* (33 studenti, il 26,2%).

#### 4.1 Analisi dei testi: «Uno scoglio doloroso su cui mi abbatto come un’onda facendomi male ogni volta»

Uno studente scrive che la matematica è «uno scoglio doloroso su cui mi abbatto come un’onda facendomi male ogni volta», regalandoci un’immagine del suo rapporto con la disciplina come infelice, che ferisce, che lo colpisce «ogni volta» che l’autore, forse anche speranzoso, si avvicina alla disciplina che però si rivela sempre uno scoglio, un ostacolo al raggiungimento dei propri obiettivi. Un altro ancora scrive: «mi chiedo perché devo calcolare quante erbacce ci sono da eliminare sapendo che aumentano di anno in anno quando posso usare del diserbante subito e finire il problema», comunicandoci un netto distaccamento dalla matematica da contesti verosimili, un rifiuto, dovuto alla percepita mancanza di senso dei problemi interni alla disciplina, inimmaginabili nella realtà, una vera e propria «scienza inventata da buontemponi per complicare la vita agli altri» – come un altro studente afferma. Nella Figura 7 possiamo osservare un *word cloud* creato a partire dalle narrazioni degli studenti, dove le parole a maggiore frequenza sono visualizzate più in grande.



Figura 7. Word cloud delle parole presenti nei testi.

Tra coloro che parlano di un rapporto con la matematica non negativo, troviamo solamente il profilo caratterizzato da una visione della matematica strumentale e una competenza percepita tendenzialmente bassa, ad esempio «*Mi piace* [la matematica] (DE positiva) ma *non riesco mai* (CP bassa) a superare l’esame in cui mi perdo via per dei *troppi conti* (VM strumentale)», oppure «Sono *felice* (DE positiva) quando faccio giusti gli *esercizi* (VM strumentale) ma (DE diventa negativa) poi *mi dimentico tutto* (CP bassa)». Da quest’ultimo esempio notiamo come la dimensione emotiva possa essere oggetto di variabilità nel breve spazio di una frase, esprimendo la fluttuazione emozionale che lo studente prova nell’atto matematico.

Nel complesso, su 14 testi condivisi dagli studenti, da 7 di essi possiamo definire dei profili di *attitude* completi; i restanti, invece, esprimono un profilo parziale, in cui alcune dimensioni non sono inferibili. Un solo testo non presenta nessuna informazione riferibile all’*attitude* nei confronti della disciplina, ma suggerisce invece un cambiamento nell’organizzazione logistica dell’esame finale del corso. I dati sono sintetizzati nella **Tabella 1**.

| Disposizione Emotiva | Visione della Matematica | Competenza Percepita | Occorrenze |
|----------------------|--------------------------|----------------------|------------|
| Mista                | Strumentale              | Bassa                | 3          |
| Mista                | Strumentale              | Alta                 | 2          |
| Negativa             | Strumentale              | Bassa                | 1          |
| Negativa             | Relazionale              | Alta                 | 1          |
| Negativa             | Strumentale              | -                    | 1          |
| Negativa             | -                        | Bassa                | 4          |
| Negativa             | -                        | -                    | 1          |
| -                    | -                        | -                    | 1          |

Tabella 1. I profili di *attitude* delineati dai testi degli studenti secondo il TMA.

È interessante notare come un solo studente si caratterizzi con una visione relazionale della matematica, unitamente a una disposizione emotiva negativa e un’alta competenza percepita; egli scrive: «una materia noiosa, però una volta capiti i meccanismi non è poi così complicata». *Capire il meccanismo* (VM relazionale) sembra essere l’elemento chiave, il segreto per andare bene in matematica, ma anche se così risulta *facile* (CP alta), rimane comunque una *materia noiosa* (DE negativa). Tra gli otto profili derivati dalla combinazione delle tre dimensioni dicotomiche del *Three-Dimensional Model for Attitude* (Zan & Di Martino, 2009), questo è l’unico che non è mai emerso dai testi utilizzati per costruire il modello teorico. La comparsa di questo profilo “raro”, chiamato anche *genuinamente negativo* (Di Martino, 2024), però, potrebbe anche essere dovuto a un errore nell’interpretazione della frase scritta dallo studente, causata a sua volta dalla mancata possibilità di approfondire l’esperienza matematica dell’autore della frase: l’espressione “capiti i meccanismi” potrebbe infatti alludere a meccanismi procedurali o esecutivi e potrebbe dunque riferirsi a una visione strumentale della disciplina. In questo lavoro, dunque, ci limitiamo a riportare l’emergere di questo possibile profilo, che necessita di ulteriori e futuri approfondimenti.

Le espressioni da cui non è stato possibile definire un profilo completo di *attitude*, però, sono ugualmente interessanti per il docente al fine di costruire una propria idea del gruppo classe con cui sta entrando in relazione: questi studenti non hanno espresso una visione della matematica definibile, poiché hanno trattato prevalentemente il tema della propria esperienza emotiva, ma hanno comunque parlato di sé dichiarando un vissuto «doloroso», «frustrante», «un’interminabile agonia» (DE negativa) e hanno raccontato dell’esame di matematica e della disciplina stessa come «impossibile da superare» perché «la disimparo in 2 secondi» (CP bassa), descrivendo un atteggiamento di «rinuncia, profonda rinuncia».

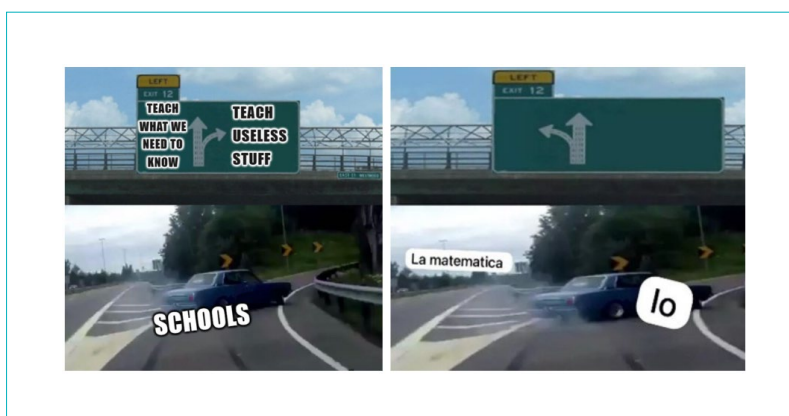
#### 4.2 Analisi dei *meme*: «Quando prendo 18 copiando, con appunti e sette aiutanti da casa»

Mentre i testi scritti dagli studenti offrono una visione diretta della loro *attitude*, l’analisi dei *meme* ci permette di esplorare questi stessi atteggiamenti attraverso un linguaggio visivo e culturale, altrettanto ricco di significato. Anche i *meme*, in quanto oggetti comunicativi complessi, esprimono in modo abbastanza approfondito il messaggio che lo studente voleva comunicare in merito al suo rapporto con la matematica. Dei 33 *meme* e GIF condivisi su Padlet, 28 sono *reaction meme*, la cui struttura solida trasmette un messaggio validato e riconosciuto dalla comunità di Internet, mentre 5

sono invece *memes* prodotti dagli studenti stessi, le cui sfaccettature di significato necessiterebbero di ulteriori approfondimenti per essere compresi a pieno (mediante, ad esempio, interviste). Prima di procedere all’analisi dettagliata dei *memes*, è utile ricordare che, grazie all’approccio di *networking* di teorie che integra i modelli di Shifman e del TMA, è possibile esplorare le emozioni e le percezioni degli studenti; questo ci consentirà di delineare con maggiore precisione i profili attitudinali complessi emersi dai contributi su Padlet.

Vediamo il caso riportato in **Figura 8**, che rappresenta un *meme* prodotto da uno studente. Il *form* del *meme* (“*Left Exit 12 Off Ramp*”) rappresenta un’automobile che a tutta velocità esce dalla tipica autostrada americana. Nella sua versione originale, il *content* è una situazione di bivio in cui, tra qualcosa che il soggetto disapprova e qualcosa che preferirebbe, l’automobilista-soggetto sterza verso la propria preferenza (*stance*). L’immagine a sinistra nella **Figura 8** è un *meme* che utilizza questa base e la cui costruzione è “conforme” alle norme implicite legate a questo specifico oggetto culturale; esso trasmette il messaggio che la scuola, tra insegnare cose necessarie da sapere e cose inutili, scelga la seconda.

Nel caso dell’immagine a destra, però, l’autore del *meme* rimane fedele al concetto di bivio e di “oggetto di disapprovazione”, ma decide di non etichettare qualcosa che preferirebbe *al posto* della matematica. Inoltre, posiziona l’etichetta “la matematica” diversamente rispetto alle mutazioni più comuni del *meme*. Questa mutazione non-standard del *meme* “*Left Exit 12 Off Ramp*” sembra dunque comunicare che qualsiasi alternativa alla matematica sembra andare bene, non importa quale essa sia. A livello di *attitude*, quindi, è immediato percepire una disposizione emotiva di tipo negativo, oltre che una bassa competenza percepita, vista l’importanza data all’evitamento della disciplina. Non possiamo concludere nulla con le informazioni in nostro possesso in merito al tipo di visione della matematica, se relazionale o strumentale; sarebbe necessario, in questo caso, intervistare l’autore del *meme* e utilizzare un impianto teorico apposito (si veda, ad esempio, Bini, 2023).



**Figura 8.** *Meme* prodotto da uno studente e condiviso su Padlet e una mutazione della sua base.

Diverso è invece il caso dei *reaction meme*, di cui abbiamo un esempio in **Figura 9**: è il *reaction meme* “*Zach Galifianakis Math*”, tratto dal film *The Hangover* (“Una notte da leoni”, in italiano). Il *form*, ovvero la parte figurale, è un singolo frame del film in cui Alan, un personaggio stereotipicamente non brillante interpretato dall’attore Zach Galifianakis, vede davanti a sé equazioni e formule matematiche mentre cerca di mettere in pratica le tecniche lette in un libro per contare le carte a blackjack. Questo *meme*, spesso utilizzato nella sua versione GIF, è usato come *reaction image* in risposta a qualcosa che ci confonde (KnowYourMeme, 2009). Il messaggio trasmesso da questo *meme* è quindi legato sia alla sensazione di confusione (*content*) sia all’identificazione con il personaggio di Alan (*stance*), uno “stupido” che si sente “intelligente” quasi per caso.



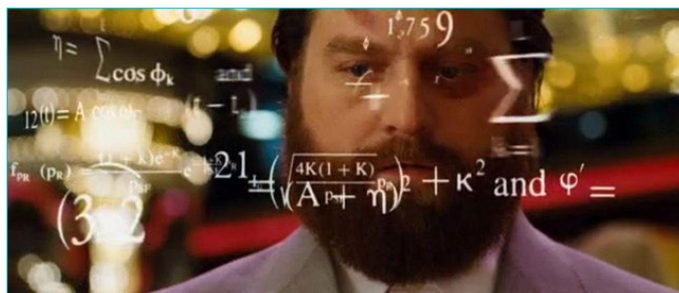


Figura 9. Meme: “Zach Galifianakis Math”.

Dall’analisi di questo *meme* possiamo capire molto dell’*attitude* dello studente che ha deciso di appuntarlo nel Padlet: quando fa matematica si sente come Alan, confuso, essenzialmente poco brillante con rari momenti di illuminazione (DE negativa e CP bassa) e circondato da formule che frullano nella sua testa senza sosta (VM strumentale).

Per esprimere emozioni simili, gli studenti hanno utilizzato anche altri *meme*, di cui possiamo vedere alcuni esempi in Figura 10: “Side Eyeing Chloe” (nella versione “Math Lady”, in alto a sinistra), “Napoleon There Is Nothing We Can Do” (in alto, il secondo da sinistra), “Cristiano Ronaldo Celebration” (in alto, il terzo da sinistra), e altri.

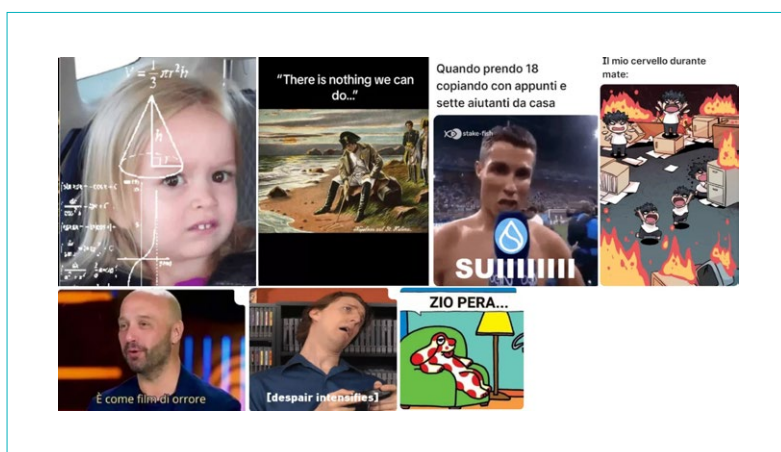


Figura 10. Alcuni *meme* condivisi dagli studenti.

Questo esempio sottolinea, inoltre, come l’approccio integrato di *networking* di teorie ci permetta di cogliere non solo le dimensioni emotive espresse dagli studenti, ma anche la loro visione della matematica e la competenza percepita, offrendo una comprensione più completa dei loro atteggiamenti nei confronti della disciplina. Anche con questi oggetti, dunque, è possibile delineare dei profili di *attitude* usando opportune lenti teoriche come quelle qui presentate, necessarie per interpretare i *meme* scelti dagli studenti per raccontare il loro rapporto con la matematica. Così come è accaduto per i testi, non da tutti i *meme* è possibile determinare tutte e tre le dimensioni dell’atteggiamento nei confronti della disciplina, in particolare perché non sempre è evidente quale sia la visione della matematica intrinsecamente espressa dalla *reaction* selezionata.

È importante evidenziare come, anche senza un’analisi approfondita dei significati o dell’utilizzo contestuale che la *memesfera* fa di questi oggetti culturali, essi ci trasmettano comunque un’idea di quella che è l’esperienza matematica della classe a partire dalle frasi o dalle espressioni facciali rappresentate: se domandiamo agli studenti di raccontarci il loro rapporto con la matematica e loro rispondono

con “[despair intensifies]” (presente in **Figura 10**, in basso in posizione centrale), forse non riusciremo a discernere in modo dettagliato la loro visione della disciplina o la loro competenza percepita, ma sarà ragionevole concludere che la matematica non è tra le loro materie preferite.

È interessante notare come nessun *meme* condiviso dagli studenti sia espressione di un rapporto positivo con la disciplina, in nessuna delle tre dimensioni di cui l’*attitude* si compone. Dei 33 *meme* condivisi, infatti, 12 esprimono un profilo completo di *attitude*, tutti afferenti al cosiddetto *profilo fatalista* (Di Martino & Zan, 2010), in cui una disposizione emotiva negativa nei confronti della disciplina si associa a una visione della matematica di tipo strumentale e a una bassa competenza percepita. Dai restanti non è possibile estrapolare una visione della matematica definita, ma da essi possiamo individuare sicuramente una disposizione emotiva negativa e, in parte, anche una bassa competenza percepita. Per maggiore chiarezza riportiamo questi dati nella **Tabella 2**.

| Disposizione Emotiva | Visione della Matematica | Competenza Percepita | Occorrenze |
|----------------------|--------------------------|----------------------|------------|
| Negativa             | Strumentale              | Bassa                | 12         |
| Negativa             | -                        | Bassa                | 15         |
| Negativa             | -                        | -                    | 6          |

**Tabella 2.** Le dimensioni dell’*attitude* delineate dai *meme* degli studenti secondo il TMA.

Il fatto che la disposizione emotiva emergente nel contesto di coloro che hanno usato i *meme*, però, sia esclusivamente negativa non stupisce: l’ironia riguardante emozioni negative che è alla base di questi contenuti (Davison, 2012; Dynel, 2019), infatti, svolge un ruolo culturale poliedrico fornendo sollievo in modo catartico (Onanuga, 2020), evidenziando i disagi per favorire una presa di coscienza personale e sociale (Terzimehic et al., 2021), e rafforzando empaticamente i rapporti interpersonali con chi vive situazioni simili alle nostre (Wu & Chen, 2021).

Per quanto densa di ironia, quindi, “l’aria” che respiriamo in classe è quella di un gruppo di studenti che nell’ora di matematica non ha trovato il proprio posto e per questo ci sta poco volentieri, e, quando è lì, è travolto da una vasta gamma di emozioni negative.

## 5 Conclusioni

In conclusione, questo studio rappresenta l’inizio di un’indagine su diversi modi di espressione e comprensione dell’*attitude* degli studenti utilizzando strumenti digitali che permettano loro di esprimersi con un linguaggio più vicino a quello che è il loro vissuto quotidiano; in questo caso, si è utilizzato un *virtual wall* flessibile e semplice come Padlet. L’analisi combinata dei contributi degli studenti, sia testuali che visivi, ha messo in luce l’utilità di un approccio teorico integrato per cogliere al meglio le sfumature di *attitude* nei confronti della matematica. L’integrazione asimmetrica delle teorie di Shifman e del TMA ha permesso di esplorare non solo le espressioni individuali degli studenti, ma anche le dinamiche collettive che caratterizzano il loro rapporto con la disciplina, mostrando come la combinazione di una solida struttura analitica e una maggiore flessibilità interpretativa permetta di esplorare nuovi aspetti degli atteggiamenti verso la matematica, che altrimenti sarebbero rimasti latenti.

L’analisi dei contributi degli studenti ha anche rivelato come l’uso di *meme*, contenuti virali e immagini sia stato significativo, scelto da circa il 40% degli studenti: la scelta di utilizzare *meme* o immagini con valore *memetico* indica un particolare interesse per questa modalità comunicativa e un’immedesimazione con il contenuto presentato in essi, come già osservato in letteratura (Katz et al., 2022). Questi risultati sottolineano la rilevanza del tema come di interesse nella ricerca in didattica della matematica, suggerendo come i *meme* meritino un’attenzione maggiore e priva di pregiudizi, data la loro crescente rilevanza come strumento comunicativo, nella quotidianità e non solo.

I risultati qui presentati mostrano poi come sia possibile, attraverso specifiche lenti teoriche e grazie al *networking* di teorie (Bikner-Ahsbahr & Prediger, 2014), comprendere non solo i testi prodotti dagli studenti, ma anche i contenuti multimediali comunicativi come i *meme* in ottica didattica, traendo informazioni in merito, soprattutto, alla dimensione emotiva degli studenti coinvolti. Permettendo agli studenti di esprimere le loro emozioni e i loro pensieri attraverso gli oggetti comunicativi che ritengono più opportuni, questa attività può essere un’opportunità per creare, già dai primi giorni di un corso o di un anno scolastico, un’atmosfera più coinvolgente e interattiva nell’aula di matematica. Questo perché si basa sulle preferenze e sugli stili di comunicazione degli studenti della GenZ, che sono cresciuti in un mondo permeato dalle tecnologie e utilizzano efficacemente i *meme* e i contenuti virali come mezzo di espressione; abbracciando la loro interconnessione online e offline, possiamo creare un ambiente di apprendimento che utilizza *anche* un linguaggio più vicino a quello comunemente usato dagli studenti (Floridi, 2015), favorendo la creazione di una relazione docente-discente, generalmente poco coltivata soprattutto nell’ambito dell’educazione terziaria (Tinto, 1993), ma che risulta fondamentale per superare positivamente i primi momenti che caratterizzano l’ingresso all’università (Clark & Lovric, 2008). L’adozione di Padlet ha permesso di ampliare la gamma di modalità comunicative adottabili in classe, lasciando spazio anche all’uso di oggetti prevalentemente digitali come i *meme* ma senza escludere modalità più tradizionali come i testi prodotti in autonomia dagli studenti. In questo modo è stato dunque possibile delineare, in alcuni casi, un profilo di *attitude* secondo il *Three-Dimensional Model for Attitude*, permettendoci di rispondere affermativamente alla prima parte della seconda domanda di ricerca, anche se in modo parziale: solo alcuni dei contenuti *postati* dagli studenti ci hanno permesso di delineare un profilo di *attitude* completo, e siamo stati in grado di esplorare e mostrare le potenzialità dei *meme* come oggetti comunicativi in questo senso. In termini di *attitude*, gli studenti hanno espresso profili caratterizzati prevalentemente da una visione strumentale, mentre la disposizione emotiva e la competenza percepita erano presenti in modo variabile nei profili degli studenti che hanno condiviso testi. Gli studenti che hanno condiviso *meme*, invece, hanno dimostrato sempre una disposizione emotiva negativa, in linea con i risultati presenti in letteratura (Davison, 2012; Dynel, 2019), che evidenziano l’uso dei *meme* come elementi che permettono una catarsi individuale e sociale (Onanuga, 2020; Terzimehic et al., 2021; Wu & Chen, 2021); in questi casi l’unico profilo completo di *attitude* che abbiamo individuato è quello *fatalista* (Di Martino & Zan, 2010), caratterizzato da una disposizione emotiva negativa, una visione della matematica strumentale e una bassa competenza percepita.

Inoltre, è emerso un profilo di studente che potrebbe essere inquadrato come *genuinamente negativo* (Di Martino, 2024), mai comparso prima nei lavori di Di Martino e Zan; in realtà, tale profilo è solo ipotizzato, perché, come già affermato, potrebbe emergere in seguito a un errore nell’interpretazione del contenuto condiviso dallo studente. Questo mette in evidenza anche la necessità di approfondire il tema dell’atteggiamento nei confronti della matematica negli studenti universitari nella fase liminale (Clark & Lovric, 2008), utilizzando, ad esempio, anche delle interviste in profondità per meglio comprendere alcuni particolari profili di *attitude* che potrebbero essere presenti.

Tra i contenuti appuntati su Padlet non si è affrontata in questa sede l’analisi di quegli oggetti che, per la loro natura, non ci avrebbero permesso di definire un profilo di *attitude* completo, poiché le caratteristiche dell’oggetto comunicativo erano, in origine, già parziali o non sufficientemente elaborate per trarne informazioni in merito. È il caso, ad esempio, delle frasi tratte da *meme* che non



riportano la parte visuale – centrale per questo tipo di oggetto – o delle parole e/o espressioni brevi in cui non è stato possibile esprimersi in merito ad alcune delle dimensioni dell’*attitude*. In questi, spesso è la dimensione della visione della matematica a essere indefinibile, come è accaduto anche nell’analisi di alcuni oggetti comunicativi svoltasi in questo lavoro. Anche negli oggetti qui analizzati, infatti, è accaduto che la visione della matematica non fosse espressa chiaramente, mentre è sempre emersa con forza la disposizione emotiva e la competenza percepita. In questi casi è comunque possibile percepire una sensazione sottostante il messaggio comunicato, una “atmosfera” di negatività o positività che riempie l’aula e i suoi attori, e che a volte potrebbe trasmettere delle intuizioni sulla competenza percepita, dato il forte legame che questa dimensione necessariamente ha con l’aspetto emotivo. Riconosciamo questa mancanza come ulteriore limite di questa prima ricerca, che potrebbe esplorare l’integrazione di altre lenti teoriche per comprendere a pieno le sfaccettature delle dimensioni dell’*attitude* degli studenti cogliendo l’opportunità di trarre informazioni anche da questi oggetti già “limitati” per loro natura.

A fronte dei messaggi ricevuti dagli studenti, che esprimono un disagio nei confronti della disciplina, si rafforza infine l’idea che per favorire la transizione dall’educazione secondaria a quella terziaria non siano sufficienti azioni di recupero di ambito disciplinare, ma che sia imprescindibile anche un lavoro sugli aspetti metacognitivi, affettivi e linguistici dell’apprendimento della matematica (Di Martino & Maracci, 2008).

Con gli studenti della Facoltà di Scienze Agrarie e Alimentari con cui abbiamo lavorato in questi anni, le attività, i laboratori, le proposte didattiche e gli interventi di design del corso che sono state citate all’inizio di questo articolo avevano proprio quest’obiettivo: andare a intervenire su quegli aspetti dell’insegnamento della matematica che spesso vengono trascurati, soprattutto nei contesti educativi formali terziari, ma che sono fondamentali per l’apprendimento della disciplina.

---

## Bibliografia

- Agenzia Nazionale di Valutazione del Sistema Universitario e della Ricerca. (2023). *Rapporto sullo stato del sistema universitario e della ricerca 2023*. ANVUR. <https://www.anvur.it/wp-content/uploads/2023/06/Sintesi-Rapporto-ANVUR-2023.pdf>
- Ashcraft, M. H. (2002). Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. *Current Directions in Psychological Science*, 11(5), 181–185. <https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196>
- Bardelle, C., & Di Martino, P. (2012). E-learning in secondary–tertiary transition in mathematics: For what purpose? *ZDM – Mathematics Education*, 44(6), 787–800. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0417-y>
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9>
- Bini, G. G. (2023). Social, Strutturale e Specializzato: tre significati per comprendere, studiare e utilizzare in classe i meme matematici. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, 14, 9–29. <https://doi.org/10.33683/ddm.23.14.1>
- Clark, M., & Lovric, M. (2008). Suggestion for a theoretical model for secondary–tertiary transition in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 25–37. <https://doi.org/10.1007/BF03217475>

- Consorzio Interuniversitario AlmaLaurea. (2023). *Sintesi della XXV Indagine sul Profilo dei Laureati 2022 (Rapporto AlmaLaurea 2023)*. <https://www.almalaurea.it/sites/default/files/2023-07/rapportoalmalaurea2023-sintesi-profilo.pdf>
- D’Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9–38.
- Davison, P. (2012). The Language of Internet Memes. In M. Mandiberg (Ed.), *The Social Media Reader* (pp. 120–134). New York University Press. <https://doi.org/10.18574/nyu/9780814763025.003.0013>
- Di Martino, P. (2024). Attitudes in Mathematics Education. In J. Wang (Ed.), *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education* (pp. 427–436). East China Normal University Press & World Scientific Publishing. [https://doi.org/10.1142/9789811287183\\_0028](https://doi.org/10.1142/9789811287183_0028)
- Di Martino, P., Gregorio, F., & Iannone, P. (2023). The transition from school to university in mathematics education research: New trends and ideas from a systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 113(1), 7–34. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10194-w>
- Di Martino, P., & Maracci, M. (2008). Le difficoltà in matematica nel passaggio Scuola Superiore–Università: Dalla teoria alla pratica. *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, 1–2.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2001). Attitude toward mathematics: some theoretical issues. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of PME25* (Vol. 2, pp. 3–351). Freudenthal Institute, Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2010). ‘Me and maths’: Towards a definition of attitude grounded on students’ narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27–48. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z>
- Dynel, M. (2016). “I has seen Image Macros!” Advice Animals memes as visual-verbal jokes. *International Journal of Communication*, 10(29), 660–668.
- Floridi, F. (2015). *The Onlife Manifesto: Being Human in a Hyperconnected Era*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-04093-6>
- Giorgi, G., & Rama, I. (2024). The contingent macro: The ephemerality of memes as discursive devices. *Journal of Digital Social Research*, 6(1), 31–49. <https://doi.org/10.33621/jdsr.v6i1.202>
- Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1976). *The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research*. Aldine.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237–254. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6>
- Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 25–46. <https://doi.org/10.1023/A:1016048823497>
- Iannella, A., Morando, P., & Spreafico, M. L. (2022). Challenges in mathematics learning at the university: An activity to motivate students and promote self-awareness. In G. Casalino, M. Cimitile, P. Ducange, R. Pecori, P. Picerno, P. Raviolo & C. M. Stracke (Eds.), *International Workshop on Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online* (pp. 321–332). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96060-5\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96060-5_23)

- Li, Y., & Schoenfeld, A. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *International Journal of STEM Education*, 6, 1–13. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9>
- Jenkins, H., Ford, S., & Green, J. (2013). *Spreadable media: Creating value and meaning in a networked culture*. New York University Press.
- Katz, R., Ogilvie, S., Shaw, J., & Woodhead, L. (2022). *Gen Z, Explained: The Art of Living in a Digital Age*. University of Chicago Press.
- KnowYourMeme. (2004). *Reaction images*. <https://knowyourmeme.com/memes/reaction-images>
- KnowYourMeme. (2009). *Zach Galifianakis Math*. <https://knowyourmeme.com/memes/zach-galifianakis-math>
- KnowYourMeme. (2011). *L.A. Noire "Doubt" / Press X To Doubt*. <https://knowyourmeme.com/memes/la-noire-doubt-press-x-to-doubt>
- KnowYourMeme. (2017a). *Niche memes*. <https://knowyourmeme.com/memes/niche-memes>
- KnowYourMeme. (2017b). *Types of Headaches*. <https://knowyourmeme.com/memes/types-of-headaches>
- Martiniello, L., Selmi, S., & Turconi, G. (2023). Distance learning universities: An exploratory research in tutoring practices in STEM. *5<sup>th</sup> International Conference on Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online*, 4–6. STUDIUM.
- Morando, P., & Spreafico, M. L. (2022). Origami e strategie di apprendimento. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, 11, 121–134. <https://doi.org/10.33683/ddm.22.11.6>
- Morando, P., Spreafico, M. L., & Turconi, G. (2023). Are you off to a good start? The “journal of the day” experience. In L. Gómez Chova, C. González Martínez & J. Lees (Eds.), *Proceedings of 15<sup>th</sup> International Conference on Education and New Learning Technologies* (pp. 2063–2071). IATED. <https://doi.org/10.21125/edulearn.2023.0626>
- Morando, P., & Turconi, G. (2022). Brains on in math classes. In L. Gómez Chova, A. López Martínez & J. Lees (Eds.), *Proceedings of 14<sup>th</sup> International Conference on Education and New Learning Technologies* (pp. 1522–1529). IATED. <https://doi.org/10.21125/edulearn.2022.0401>
- Nicholls, J., Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & Patashnick, M. (1990). Assessing student’s theories of success in mathematics: Individual and classroom difference. *Journal of Research in Mathematics Education*, 21(2), 109–122. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.21.2.0109>
- Onanuga, P. (2020). Transnationalizing humour on social media: A linguistic analysis of ideology, identity and didactics in Robert Mugabe Quotes memes. *Digital Scholarship in the Humanities*, 35, 399–416. <https://doi.org/10.1093/LLC/FQZ019>
- Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan, J., & Sensevy, G. (2010). Different theoretical perspectives and approaches in mathematics education research: Strategies and difficulties when connecting theories. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & S. Lecluse (Eds.), *Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)* (pp. 1529–1534). INRP.

- Ramachandiran, C. R., & Mahmud, M. M. (2018). Padlet: A Technology Tool for the 21st Century Students Skills Assessment. In S. Safari, B. H. Prakoso & E. O. M. Anwas (Eds.), *ICEAP Proceeding Book* (Vol. 1, pp. 101–107). Center For Educational Assessment.
- Rashid, A., Yunus, M., & Wahi, W. (2019). Using Padlet for collaborative writing among ESL learners. *Creative Education*, 10(3), 610–620. <https://doi.org/10.4236/CE.2019.103044>
- Shifman, L. (2013). Memes in a digital world: Reconciling with a conceptual troublemaker. *Journal of computer-mediated communication*, 18(3), 362–377. <https://doi.org/10.1111/jcc4.12013>
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 7(11), 20–26.
- Stryker, C. (2011). *Epic win for anonymous: How 4chan's army conquered the Web*. The Overlook Press.
- Terzimehic, N., Schött, S., Bemmman, F., & Buschek, D. (2021). MEMEories: Internet Memes as Means for Daily Journaling. In W. Ju, L. Oehlberg, S. Follmer, S. Fox & S. Kuznetsov (Eds.), *Proceedings of the 2021 ACM Designing Interactive Systems Conference* (pp. 538–548). Association for Computer Machinery. <https://doi.org/10.1145/3461778.3462080>
- Tinto, V. (2012). *Leaving college: Rethinking the causes and cures of student attrition*. University of Chicago Press. <https://doi.org/10.7208/chicago/9780226922461.001.0001>
- Wang, X. (2013). Why Students Choose STEM Majors. *American Educational Research Journal*, 50, 1081–1121. <https://doi.org/10.3102/0002831213488622>
- Wu, X., & Chen, H. (2021). On Social Behavior From the Perspective of Meme. In Z. Zhu & S. Zha (Eds.), *Proceedings of the 7th Annual International Conference on Social Science and Contemporary Humanity Development (SSCHD 2021)* (pp. 379–382). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.211215.070>
- Zan, R., & Di Martino, P. (2009). Different profiles of attitude towards mathematics: The case of learned helplessness. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of PME33* (Vol. 5, pp. 417–424). PME.
- Zhi, Q., & Su, M. (2015). Enhance collaborative learning by visualizing process of knowledge building with Padlet. In H. H. Yang, Q. Liu, X. Yu, L. Chen, S. Wang, J. Cheng & C.-C. Tsai (Eds.), *2015 International Conference of Educational Innovation through Technology (EITT)* (pp. 221–225). IEEE. <https://doi.org/10.1109/EITT.2015.54>
- Zimmerman, B. J. (2000). Attaining Self-Regulation: A Social Cognitive Perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-Regulation* (pp. 13–39). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-012109890-2/50031-7>

## Esperienze didattiche

DdM

## Un'esperienza di *Universal Design for Learning* in ambito geometrico nella scuola media

An experience of *Universal Design for Learning* in geometry at the lower secondary school

**Stefano Bellini**

Scuola media di Castione – Svizzera

✉ [stefano.bellini@edu.ti.ch](mailto:stefano.bellini@edu.ti.ch)

**Sunto** / L'articolo descrive un percorso didattico svolto in una quarta media del Cantone Ticino, progettato e realizzato in modo da soddisfare le crescenti esigenze di inclusività della scuola odierna. Nel perseguire questo obiettivo si è scelto di applicare il modello dell'*Universal Design for Learning* (UDL); in particolare ci si è concentrati sul primo principio del modello, che si focalizza sul fornire molteplici forme di rappresentazione dei materiali e dei contenuti della lezione. Il percorso si è concentrato sui seguenti tre argomenti geometrici: cono, similitudine nello spazio e sfera. Il presente lavoro descrive la parte di itinerario relativa al cono, includendo i riferimenti per poter consultare l'intero percorso.

**Parole chiave:** *Universal Design for Learning*; geometria dello spazio; scuola media; inclusività.

**Abstract** / The article describes an educational path implemented in a ninth grade class in the Canton of Ticino, designed to meet the growing needs for inclusiveness of today's school system. To achieve this goal, the *Universal Design for Learning* (UDL) model was chosen. Specifically, the focus was on the first principle of the model, which aims to provide multiple forms of representation for materials and lesson content. The path covered the following three geometric topics: cone, similarity in space, and sphere. This paper presents the part of the path related to the cone, along with references to consult the entire work.

**Keywords:** *Universal Design for Learning*; space geometry; lower secondary school; inclusiveness.



# 1 Introduzione

---

La scuola ticinese ha intrapreso un percorso volto ad aumentare il livello di inclusività degli allievi,<sup>1</sup> prevedendo forme di scolarizzazione obbligatoria meno selettive rispetto ad altri cantoni e rinforzando le misure di sostegno per gli allievi all'interno del sistema educativo ordinario.

Questo ha portato ad avere all'interno della scuola dell'obbligo un numero sempre maggiore di studenti con bisogni educativi particolari. Per facilitare l'integrazione di questi allievi sono state implementate molteplici misure, creando nuove figure e fornendo nuovi servizi pedagogici ed educativi. Un sistema scolastico basato sull'integrazione potrebbe però limitarsi semplicemente all'inserimento di questi studenti nella scuola, fornendo sì gli aiuti sopracitati, ma senza che il sistema scolastico modifichi la sua struttura. Per rispondere a questa sfida negli ultimi anni si sta affermando l'idea di scuola inclusiva, la quale, al contrario della scuola basata sull'integrazione, si fonda su un adattamento che permette di accogliere tutte le diversità degli allievi, ognuno dei quali ha i propri bisogni educativi e formativi. La scuola inclusiva cerca quindi di adattarsi a priori alla diversità degli studenti, come le capacità, gli interessi personali, in modo da permettere a tutti di sviluppare al massimo il proprio potenziale (Ostinelli, 2014).

Per cercare di rispondere alle esigenze di una scuola inclusiva, che vede tutti i docenti coinvolti, nell'ambito del lavoro qui presentato è stato ideato, progettato e sperimentato un percorso didattico in ambito geometrico, che tenesse conto dei bisogni degli allievi di quarta media corso base.<sup>2</sup> Per farlo si è scelto di applicare il modello dell'*Universal Design for Learning* (UDL), in particolare il primo principio che si focalizza sul fornire molteplici forme di rappresentazione dei materiali e dei contenuti della lezione. L'esperienza didattica qui presentata è parte di un più ampio lavoro di tesi Master, a cui si rimanda in caso di interesse dei lettori,<sup>3</sup> e il cui obiettivo principale era di indagare il cambiamento nella visione della geometria da parte degli allievi dopo un percorso didattico progettato in base ai principi dell'UDL.

Dopo aver presentato le lenti teoriche dell'UDL (par. 2), verranno dapprima chiarite le scelte strutturali del percorso (par. 3), poi descritte alcune delle attività realizzate (par. 4), prima di trarre le conclusioni dell'esperienza (par. 5).

## 2 Quadro teorico

---

### 2.1 *Universal Design for Learning* e i tre principi fondanti

L'UDL fonda le sue origini sull'*Universal Design* (UD), un movimento nato negli anni Ottanta per la tutela dei diritti umani nell'architettura, richiedendo la costruzione di ambienti fruibili e accessibili alla maggior parte delle persone (Mace et al., 1991, citato in Savia, 2016, p. 28). Ad esempio, gli scivoli nel marciapiede sono costruzioni universali che consentono a persone su sedie a rotelle di muoversi in autonomia, ma sono utili anche alle persone che ad esempio spingono un passeggino, una sedia a rotelle o che girano in bicicletta.

1. Per semplicità verrà utilizzato sempre il termine "allievo" sia nel caso si tratti di una ragazza sia che si tratti di un ragazzo.

2. Negli ultimi due anni di scuola media ticinese gli allievi sono suddivisi in due corsi in base al livello di competenze in matematica e in tedesco: il corso attitudinale e il corso base.

3. Lavoro di Diploma di Stefano Bellini (2024), intitolato "*Universal Design for Learning* in ambito geometrico nella scuola media", svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrici: Laura Rusconi e Silvia Sbaragli. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: <https://tesi.supsi.ch/5238/>.

Negli anni Novanta, il *Center for Applied Space Technology* (CAST) estese il concetto di *Universal Design* all'apprendimento, trasferendolo e applicandolo al mondo della scuola (Hitchcock et al., 2002, citato in Agliati, 2023). L'UDL suggerisce di ideare percorsi flessibili e personalizzabili che possano essere efficaci per tutti gli studenti. I principi dell'UDL permettono di passare da una differenziazione individualizzata a una differenziazione a priori (Guidi et al., 2022): infatti, l'UDL si focalizza sulla progettazione di ambienti di apprendimento accessibili fin da subito a tutti gli allievi, e mira a fornire flessibilità nella presentazione del contenuto, nelle modalità di apprendimento e nelle valutazioni per raggiungere gli obiettivi di apprendimento. L'approccio dell'UDL punta a eliminare le barriere all'apprendimento progettando materiali e strategie che possono essere utilizzati da una vasta gamma di studenti, senza la necessità di adattamenti aggiuntivi (Meyer et al., 2022; Savia, 2016).

I principi fondanti dell'UDL sono basati sulla ricerca educativa, sulla psicologia dello sviluppo, sulle scienze cognitive e sulle neuroscienze cognitive, con lo scopo, oltre a permettere agli allievi un facile accesso fisico al materiale scolastico, di diminuire le barriere nell'apprendimento, per esempio quelle intellettive, sociali, emotive, culturali e linguistiche (Savia, 2016).

In particolare, nelle neuroscienze cognitive si distinguono tre aree del cervello:<sup>4</sup>

- l'area posteriore della corteccia, dedicata alla capacità di riconoscimento (Figura 1);
- l'area frontale della corteccia, dedicata alle capacità motorie ed esecutive (Figura 2);
- l'area mediana del sistema nervoso, dedicata alle capacità affettive (Figura 3).



Figura 1. Area posteriore della corteccia.



Figura 2. Area frontale della corteccia.

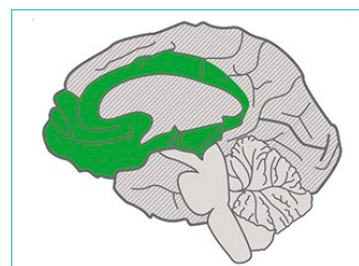


Figura 3. Area mediana del sistema nervoso.

I principi dell'UDL si riferiscono a tre aspetti fondamentali di un ambiente d'insegnamento e apprendimento: i mezzi con cui l'informazione è presentata agli allievi, i mezzi con cui gli alunni devono esprimere ciò che sanno e i mezzi con cui gli allievi vengono coinvolti nell'apprendimento. Considerando tutti questi aspetti, sono stati formulati i seguenti tre principi su cui si basa l'UDL (Zambianchi & Ferrarese, 2021).

- Principio I: *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione*. Si tratta di utilizzare varie e diversificate modalità di presentazione dei contenuti, ad esempio sfruttando materiali in formato digitale, video, artefatti concreti ecc.
- Principio II: *Fornire molteplici mezzi di azione e di espressione*. Si tratta di proporre agli studenti diversi modi per esprimersi e comunicare, ad esempio per iscritto, oralmente, tramite video ecc.
- Principio III: *Fornire molteplici mezzi di coinvolgimento*. Si tratta di proporre forme diverse di coinvolgimento relazionale, così da stimolare l'interesse, la motivazione, la persistenza, l'autoregolazione ecc.

4. Immagini tratte da: <https://www.cast.org/impact/universal-design-for-learning-udl>.

I tre principi forniscono la struttura fondante della metodologia UDL e da essi si articolano nove linee guida, che a loro volta si suddividono in punti di verifica. Questa suddivisione è riassunta nella seguente tabella (Figura 4): nella prima riga si trovano i tre principi (il principio I nella colonna centrale, il principio II nella colonna a destra, il principio III nella colonna a sinistra) ognuno di un colore diverso; sotto a ogni principio vengono declinate le tre linee guida, sempre dello stesso colore; sotto ogni linea guida vengono esplicitati i punti di verifica.

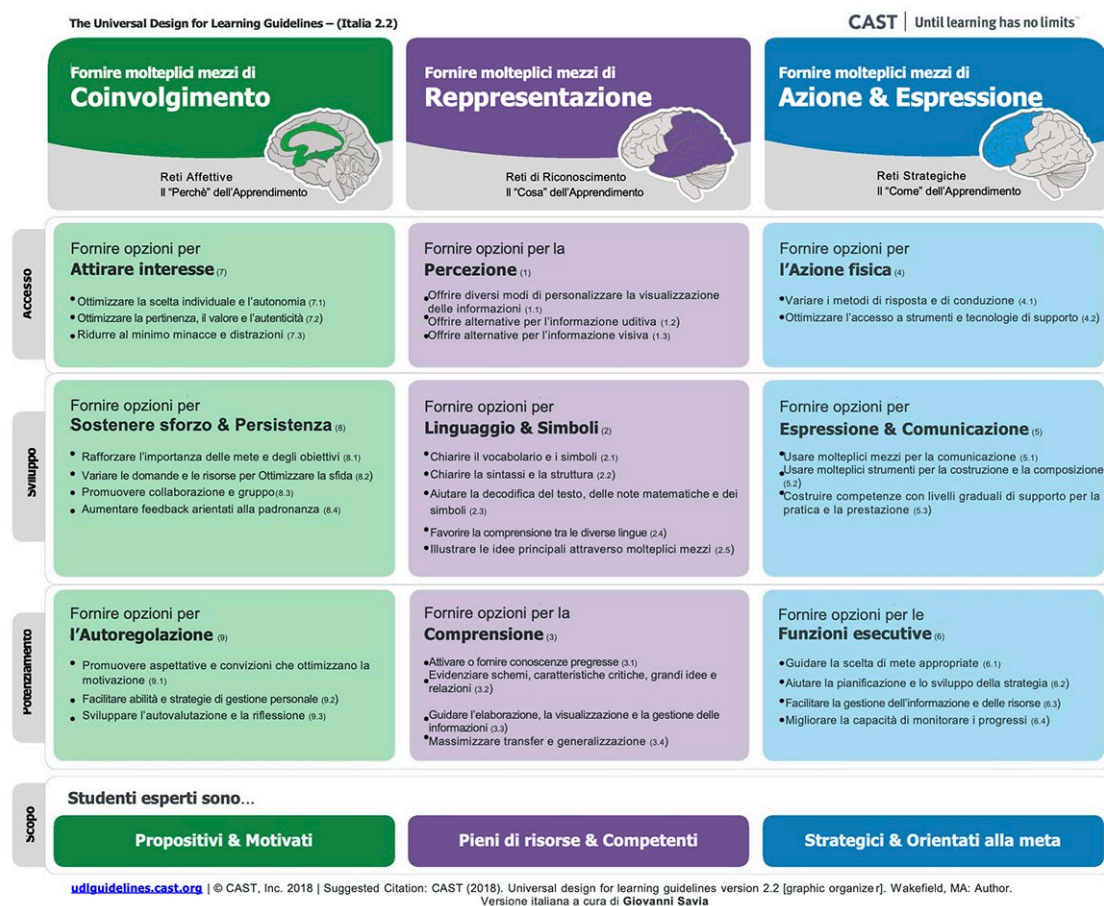


Figura 4. Modello strutturale dell'*Universal Design for Learning*.<sup>5</sup>

Il percorso didattico proposto in questo contributo è principalmente basato sul primo principio *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione*, ma è importante notare che durante la progettazione e realizzazione si toccano inevitabilmente tutti e tre i principi dell'UDL. Infatti, le linee guida sono fortemente interdipendenti tra loro, basti pensare ad esempio che modificando le modalità di rappresentazione si andrà a lavorare inevitabilmente anche sulla motivazione e sull'interesse.

### 2.1.1 Principio I dell'UDL: Fornire molteplici mezzi di rappresentazione

Questo principio si basa sul considerare che gli allievi capiscono e percepiscono le informazioni presentate a lezione in modi differenti. Per esempio, gli studenti con disabilità sensoriali, disabilità di apprendimento (dislessia, disortografia, discalculia, disgrafia), differenze culturali ecc. potrebbero aver bisogno di approcci differenti per affrontare i contenuti delle lezioni. Oppure altri studenti potrebbero

5. Immagine tratta da: <https://udlguidelines.cast.org/binaries/content/assets/udlguidelines/udlg-v2-2/udlg-graphicorganizer-v2-2-italian-nonumbers.pdf>.

comprendere più velocemente ed efficacemente le informazioni attraverso materiali didattici uditivi o visivi piuttosto che materiali in forma scritta. Questi approcci differenti possono però essere proposti anche agli altri allievi, e questo ci riporta al concetto chiave dell'UDL: «quello che è necessario per qualcuno, finisce per diventare utile per tutti» (Cottini, 2019, p. 128). È inoltre importante fornire rappresentazioni multiple per facilitare l'apprendimento e il trasferimento dell'apprendimento: in questo modo gli allievi hanno la possibilità di fare collegamenti tra i concetti. In altre parole, non esiste un solo modo di rappresentare le informazioni che sia efficace per tutti gli alunni: risulta dunque di fondamentale importanza presentare più opzioni di rappresentazione in modo da ridurre il più possibile le barriere dell'apprendimento (Savia, 2016).

Le linee guida (Savia, 2016) del principio *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione* sono tre e si suddividono ulteriormente in punti di verifica.

– *Linea guida 1: fornire differenti opzioni per la percezione.*

- *Verifica 1.1* – Offrire opzioni che permettano la personalizzazione nella presentazione dell'informazione.

Su carta le informazioni sono fisse e definitive, invece nei materiali digitali le informazioni sono più malleabili e possono essere personalizzate: per esempio, le informazioni contenute in un file PDF possono essere ingrandite, possono venire sottolineate e poi cancellate, si può usare lo strumento cattura immagine per tagliare determinate parti ecc.; oppure i video permettono di alzare o diminuire il volume, aumentare o diminuire la velocità, tornare indietro e riprendere un passaggio complicato ecc. Queste possibilità permettono di aumentare l'accessibilità delle informazioni a un maggior numero di allievi. È importante notare però che fornire materiali digitali non equivale necessariamente a fornire materiali accessibili.

- *Verifica 1.2* – Offrire alternative per le informazioni uditive.

Il suono permette di trasmettere informazioni efficacemente, oppure anche di porre enfasi su alcuni aspetti. Però le informazioni trasmesse con il suono non sono accessibili allo stesso modo a tutti gli allievi, come avviene per gli allievi con disabilità uditive o semplicemente per quegli allievi che necessitano di più tempo per elaborare informazioni orali. Dunque, strumenti quali grafici, disegni, supporti concreti ecc. possono essere delle valide alternative.

- *Verifica 1.3* – Offrire alternative per le informazioni visive.

Grafici, immagini, foto, video o testi sono strumenti molto utili per trasmettere le informazioni. Tuttavia, per gli allievi con disabilità visive o che non hanno familiarità con la grafica adoperata, queste rappresentazioni non sarebbero ugualmente accessibili. Dunque, strumenti quali testi scritti, descrizioni che accompagnano immagini e grafici, strumenti concreti ecc. sono delle valide alternative.

– *Linea guida 2: fornire molteplici opzioni per la lingua, le espressioni matematiche e i simboli.*

- *Verifica 2.1* – Chiarire il lessico e i simboli.

Parole, numeri, simboli e icone non sono ugualmente accessibili in quanto gli allievi vengono da contesti culturali diversi, parlano lingue diverse e posseggono conoscenze lessicali diverse. Per assicurarsi che tutti gli studenti abbiano accesso al lessico di base, alle etichette, alle icone e ai simboli bisognerebbe collegarli o abbinarli a rappresentazioni alternative del loro senso; ad esempio, con un glossario o con delle mappe.

- *Verifica 2.2* – Chiarire la sintassi e la struttura.

La combinazione di parole o numeri può generare nuovi significati, che, per essere compresi, necessitano la comprensione di determinate regole e strutture, come ad esempio le proprietà di un'equazione. Se la sintassi di una struttura o la struttura di una rappresentazione grafica non sono di facile comprensione per studenti, la comprensione non è garantita. Per permettere a tutti gli allievi di avere accesso alle informazioni bisogna offrire rappresentazioni differenti che precisino le relazioni sintattiche e strutturali; ad esempio, creando dei nessi con le strutture già apprese, oppure sottolineando le relazioni strutturali.

- *Verifica 2.3* – Facilitare la decodificazione di testi, notazione matematiche e simboli.  
Lo sviluppo della capacità di decodificare testi, numeri o simboli per alcuni allievi necessita di tempo ed esercizio. Per assicurarsi che tutti gli allievi riescano ad avere accesso alla conoscenza è importante dare opzioni che riducano le barriere legate alla decodifica delle informazioni; ad esempio, permettendo di tenere una lista di termini chiave che consenta il chiarimento dei simboli e delle notazioni principali.
- *Verifica 2.4* – Promuovere la comprensione tra differenti lingue.  
I materiali scolastici sono di solito scritti in un'unica lingua, però alcuni allievi nella classe parlano altre lingue. Per assicurare a tutti gli allievi l'accessibilità alle informazioni è importante fornire alternative, in particolare per i concetti chiave; ad esempio, fornendo i concetti chiave nella lingua madre oppure fornendo immagini per spiegare il lessico.
- *Verifica 2.5* – Illustrare attraverso molteplici mezzi.  
In classe è di uso frequente fornire testi; tuttavia, il testo è un mezzo poco malleabile per presentare le informazioni. Per permettere a tutti gli allievi di avere accesso alle informazioni è importante fornire alternative: ad esempio, grafici interattivi, immagini, modelli, video, simulazioni ecc.
- *Linea guida 3*: fornire opzioni per la comprensione.
  - *Verifica 3.1* – Attivare o fornire la conoscenza di base.  
Le nuove conoscenze sono più facilmente accessibili e assimilabili dagli studenti se sono espresse in modo che riattivino le conoscenze pregresse necessarie. Si possono dunque creare delle barriere negli allievi che non possiedono le conoscenze pregresse o negli allievi che le possiedono ma che non ne vedono il collegamento con la nuova conoscenza. Per questo motivo è importante ridurre queste barriere fornendo opzioni che attivino le conoscenze pregresse, oppure opzioni che permettano di collegare i concetti; ad esempio, utilizzando mappe concettuali.
  - *Verifica 3.2* – Evidenziare schemi, caratteristiche essenziali, idee principali e relazioni.  
Distinguere le informazioni importanti da quelle che non lo sono non è sempre facile, soprattutto per gli allievi per cui tali informazioni sono in corso di apprendimento. Per rendere le informazioni più accessibili è importante aiutare gli allievi a individuare e a prestare attenzione alle informazioni chiave; ad esempio, evidenziando e mettendo enfasi sui concetti chiave, oppure prendendosi dei momenti a lezione per far individuare agli allievi gli elementi fondamentali.
  - *Verifica 3.3* – Guidare l'elaborazione dell'informazione, la visualizzazione e la manipolazione.  
Non tutti gli studenti sono in grado di selezionare e manipolare le informazioni in modo da essere sintetizzate, ordinate, contestualizzate e fissate nella mente. Fornendo materiali ben strutturati si possono diminuire queste barriere; ad esempio, in classe si possono fornire suggerimenti nei processi sequenziali, si possono consigliare metodi organizzativi come tabelle e algoritmi per le operazioni matematiche, si possono frazionare le informazioni in parti più esigue.
  - *Verifica 3.4* – Massimizzare il transfer e la generalizzazione.  
Trasferire e generalizzare le conoscenze non è sempre facile per gli allievi. Per questo motivo è fondamentale aiutare gli allievi a generalizzare, a memorizzare e a trasferire le nozioni che già posseggono in altri contesti. Per fare questo ci si serve delle rappresentazioni multiple, così che le nozioni non vengano soltanto apprese ma siano anche riattivabili in altri contesti. Gli aiuti consistono per esempio nel fornire liste di controllo, nel dare la possibilità di riguardare le informazioni più rilevanti, nel consigliare l'utilizzo di strategie mnemoniche, nel fornire strutture che colleghino le nuove conoscenze con quelle precedenti.

### **2.1.2 Il primo principio dell'UDL in didattica della matematica**

Molteplici ricerche in didattica della matematica hanno mostrato l'importante ruolo degli aspetti semiotici nella comprensione degli oggetti e dei saperi matematici. Un ricercatore che ha fornito

importanti contributi è stato sicuramente lo psicologo Raymond Duval, il quale definisce la semi-otica come «la comprensione, o la produzione, di una rappresentazione semiotica» (Duval, 1993, p. 39, traduzione dell'autore), dove con rappresentazioni semiotiche si intendono ad esempio le figure, i grafici, i simboli matematici, una parola ecc. Duval definisce inoltre la noetica come «la comprensione concettuale di un oggetto» (Duval, 1993, pp. 39–40, traduzione dell'autore). È importante notare che non è possibile avere un'esperienza diretta degli oggetti matematici, ad esempio il *cono*, in quanto gli enti matematici non sono oggetti fisici concreti, ma si può solo venire a contatto con delle loro rappresentazioni semiotiche, rappresentando i concetti matematici attraverso un registro semiotico. Di registri semiotici, poi, ce ne sono diversi: registro orale, gestuale, algebrico, grafico, linguistico, geometrico, tutti basati anche sull'uso di artefatti. Il fatto di non poter avere un'esperienza con l'oggetto matematico potrebbe portare gli studenti a confondere gli enti matematici con le loro rappresentazioni. Questo rappresenta un aspetto fondamentale; infatti, come afferma Duval «la distinzione tra un oggetto e le sue rappresentazioni è un punto strategico per la comprensione della matematica» (Duval, 1993, p. 37, traduzione dell'autore). D'altro canto, Duval afferma anche che «la noetica e la semiotica sono inseparabili» (Duval, 1993, p. 40, traduzione dell'autore), infatti, un individuo concettualizza gli oggetti matematici facendo proprie le loro diverse rappresentazioni semiotiche. Dunque, è fondamentale rappresentare i concetti matematici con molteplici e differenti forme semiotiche, sia per comprendere meglio gli enti matematici sia per evitare di confondere gli oggetti matematici con una loro rappresentazione.

Consideriamo ad esempio alcune rappresentazioni semiotiche dell'oggetto matematico *cono*.

- La prima rappresentazione potrebbe essere la sua definizione a parole: un cono circolare retto è una figura geometrica solida generata dalla rotazione completa ( $360^\circ$ ) di un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto.
- Un'altra sua rappresentazione potrebbe essere un disegno (Figura 5).



Figura 5. Immagine tratta dal percorso didattico.



- Un'altra sua rappresentazione potrebbe essere l'utilizzo di un cono stradale fisico.
- Un'altra sua rappresentazione potrebbe essere prodotta con il software GeoGebra che permette di ruotare la figura.

Ciascuna di queste rappresentazioni ha caratteristiche e peculiarità proprie, che possono essere messe in relazione attraverso opportune attività semiotiche.

A questo proposito, Duval indica tre attività semiotiche legate alla matematica:

- la formazione di una rappresentazione identificabile, ad esempio, usando un disegno della figura geometrica, un'immagine della figura geometrica, un modello concreto della figura geometrica, scrivendo una definizione ecc.
- Il trattamento di una rappresentazione di un oggetto matematico, cioè, la trasformazione di una rappresentazione all'interno dello stesso registro semiotico. Nel caso del cono, un esempio di trattamento potrebbe essere quello di passare da un cono pieno in legno a un cono vuoto di plastica.
- La conversione di una rappresentazione di un oggetto matematico, cioè, la trasformazione di una rappresentazione da un registro semiotico a un altro. Un esempio di conversione potrebbe essere il passaggio da una figura a una definizione di cono.

Per la comprensione e la concettualizzazione degli oggetti matematici è dunque necessario utilizzare e coordinare tra loro molteplici attività semiotiche, differenti e complementari. In particolare, va favorita la conversione che permette agli allievi di concettualizzare l'oggetto matematico in questione. Da quanto appena esposto, risulta chiaro il collegamento tra il primo principio dell'UDL e l'approccio semiotico alla didattica della matematica: l'uso e la manipolazione di diverse rappresentazioni semiotiche degli oggetti della matematica è quanto mai affine alle linee guida e ai punti di verifica del principio *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione* dell'UDL.

### 3 Struttura del percorso didattico

---

L'esperienza didattica è stata condotta in una classe quarta corso base della scuola media di Castione, composta da 11 allievi, di cui 10 femmine e 1 maschio. Quattro allievi erano iscritti al corso di differenziazione curricolare<sup>6</sup> che si è tenuto nel primo semestre, ma nel corso del mese di ottobre due di loro hanno deciso di abbandonarlo e di seguire regolarmente tutte le ore di matematica. I due allievi che hanno deciso di proseguire con il corso di differenziazione curricolare si sono assentati da due ore di lezione di matematica settimanali. Il gruppo era molto eterogeneo sotto molteplici aspetti: di attitudine verso lo studio, di competenza, culturale ecc.

Il percorso didattico è costituito da diciassette lezioni: sette sul tema del cono, quattro sul tema della similitudine nello spazio e sei sul tema della sfera. Di seguito viene riportata una tabella schematica delle varie fasi e degli argomenti del percorso realizzato (Tabella 1). Per un approfondimento dei tre argomenti trattati, in riferimento al Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022), si veda l'[Allegato 1](#).

<sup>6</sup> La differenziazione curricolare è rivolta a quegli allievi che hanno molte difficoltà e hanno accumulato diversi insuccessi scolastici. Con essa vi è in una parziale sostituzione di una o più materie.

|                                                                                                |                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Settimana 1 (Cono)</b>                                                                      |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 1: introduzione al cono come solido di rotazione.                                     | Attività 2: "formalizzazione" del cono come solido di rotazione.<br>Attività 3: scoperta dello sviluppo del cono (Parte I). |
| <b>Settimana 2 (Cono)</b>                                                                      |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 3: scoperta dello sviluppo del cono (Parte II).                                       | Attività 4: "formalizzazione" dello sviluppo del cono.                                                                      |
| <b>Settimana 3 (Cono)</b>                                                                      |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 5: area della superficie totale del cono.                                             | Attività 5: problemi ed esercizi sull'area della superficie totale del cono.<br>Attività 6: scoperta del volume del cono.   |
| <b>Settimana 4 (Cono)</b>                                                                      |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 7: problemi ed esercizi sul volume del cono (Parte I).                                | Attività 7: problemi ed esercizi sul volume del cono (Parte II).                                                            |
| <b>Settimana 5 (Similitudine nello spazio)</b>                                                 |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 8: introduzione alla similitudine nello spazio.<br>Attività 9: tronco di piramide.    | Attività 10: problemi ed esercizi sulla similitudine nella piramide.                                                        |
| <b>Settimana 6 (Similitudine nello spazio)</b>                                                 |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 11: tronco di cono.<br>Attività 12: problemi ed esercizi sulla similitudine nel cono. | Attività 12: problemi ed esercizi sulla similitudine nel cono.                                                              |
| <b>Settimana 7 (Sfera)</b>                                                                     |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 13: introduzione alla sfera.                                                          | Attività 14: volume della sfera.                                                                                            |
| <b>Settimana 8 (Sfera)</b>                                                                     |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Ripresa dell'argomento.                                                                        | Attività 15: problemi ed esercizi sul volume della sfera (Parte I).                                                         |
| <b>Settimana 9 (Sfera)</b>                                                                     |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Attività 15: problemi ed esercizi sul volume della sfera (Parte II).                           | Attività 15: problemi ed esercizi sul volume della sfera (Parte III).                                                       |
| <b>Settimana 10 (Bonus)</b>                                                                    |                                                                                                                             |
| 1 ora                                                                                          | 2 ore                                                                                                                       |
| Tempo lasciato a disposizione per domande, esercizi, riassunti ecc. (Parte I).                 | Tempo lasciato a disposizione per domande, esercizi, riassunti ecc. (Parte II).                                             |

Tabella 1. Schematizzazione del percorso didattico.

### 3.1 Impostazione del percorso didattico secondo l'UDL

Per quanto riguarda la *linea guida 1* dell'UDL, *fornire differenti opzioni per la percezione* (Savia, 2016), si è deciso di caricare su Moodle tutto il materiale didattico; in questo modo, ogni allievo ha sempre avuto a disposizione i file PDF, i file GeoGebra, i link ai video ecc. Infatti, mettere a disposizione i file PDF permette di personalizzare la presentazione dell'informazione, come esplicitato nel *punto di verifica 1.1* (Savia, 2016, par. 2.1.1), per esempio ingrandendo oppure evidenziando quanto scritto nel PDF. Mettere a disposizione i file GeoGebra permette sia di personalizzare la presentazione dell'informazione, come esplicitato nel *punto di verifica 1.1*, per esempio ingrandendo o ruotando una figura, sia di integrare la lingua parlata (canale uditivo), con le immagini (canale visivo), come esplicitato nel *punto di verifica 1.2*. Mettere a disposizione, per esempio, i link ai video permette di

integrare la lingua parlata (canale uditivo), con le immagini (canale visivo), come esplicitato nel *punto di verifica 1.2* e nel *punto di verifica 1.3*.

È importante notare che gli allievi hanno sempre avuto a disposizione il computer fisso dell'aula, oltre che libero accesso a Moodle. In sede sono presenti anche dei PC portatili, di cui non è però sempre stato possibile garantire l'effettiva disponibilità. Inoltre, agli allievi sono sempre stati lasciati a disposizione tutti gli artefatti visti fino a quel momento, riposti in una scatola lasciata su un banco.

Nella **Tabella 2** si fornisce una visione d'insieme sulle tre linee guida implementate nel percorso didattico.

|             | Fornire differenti opzioni per la percezione | Fornire molteplici opzioni per la lingua, le espressioni matematiche e i simboli | Fornire opzioni per la comprensione                          |
|-------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Attività 1  | Linea guida 1                                | Verifica 2.5                                                                     | Verifica 3.2                                                 |
| Attività 2  | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.2                                                     | Verifica 3.1                                                 |
| Attività 3  | Linea guida 1                                | Verifica 2.2<br>Verifica 2.5                                                     | Verifica 3.1                                                 |
| Attività 4  | Linea guida 1                                | Verifica 2.1                                                                     | Verifica 3.1<br>Verifica 3.2                                 |
| Attività 5  | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.3                                                     | Verifica 3.3<br>Verifica 3.4                                 |
| Attività 6  | Linea guida 1                                | Verifica 2.2<br>Verifica 2.5                                                     | Verifica 3.1<br>Verifica 3.2<br>Verifica 3.4                 |
| Attività 7  | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.2<br>Verifica 2.5                                     | Verifica 3.1<br>Verifica 3.2<br>Verifica 3.3<br>Verifica 3.4 |
| Attività 8  | Linea guida 1                                |                                                                                  | Verifica 3.1                                                 |
| Attività 9  | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.5                                                     | Verifica 3.2                                                 |
| Attività 10 | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.2<br>Verifica 2.5                                     | Verifica 3.1<br>Verifica 3.2<br>Verifica 3.3<br>Verifica 3.4 |
| Attività 11 | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.5                                                     | Verifica 3.2                                                 |
| Attività 12 | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.2<br>Verifica 2.5                                     | Verifica 3.1<br>Verifica 3.2<br>Verifica 3.3<br>Verifica 3.4 |
| Attività 13 | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.5                                                     | Verifica 3.2<br>Verifica 3.4                                 |
| Attività 14 | Linea guida 1                                | Verifica 2.2                                                                     | Verifica 3.1<br>Verifica 3.2<br>Verifica 3.4                 |
| Attività 15 | Linea guida 1                                | Verifica 2.1<br>Verifica 2.2<br>Verifica 2.5                                     | Verifica 3.1<br>Verifica 3.2<br>Verifica 3.3<br>Verifica 3.4 |

**Tabella 2.** Tabella che mostra quali punti di verifica sono stati usati nelle rispettive lezioni.

In questo contributo analizzeremo le attività relative al primo dei tre argomenti, ovvero il cono. Le schede di queste attività proposte a lezione sono riportate negli [Allegati 2-8](#).

## 4 Descrizione del percorso didattico sul cono

---

Nel presente paragrafo vengono descritte le prime sette attività del percorso didattico, quelle riferite all'argomento del cono. La scelta si basa principalmente su un criterio di economia: la descrizione completa del percorso (disponibile nel lavoro di tesi già citato) sarebbe stata eccessivamente lunga; allo stesso tempo, la descrizione delle sette attività relative al cono è già sufficiente per rendersi conto in modo esaustivo di come sia possibile implementare i principi e le linee guida dell'UDL all'interno di attività di matematica.

Ciascuna delle attività viene presentata attraverso un titolo che ne sintetizza l'argomento, e una serie di elementi descrittivi: le *finalità* focalizzano l'attenzione sugli apprendimenti che si vogliono incentivare; gli *aspetti su cui far leva* chiariscono le scelte di artefatti, strumenti e metodologie adottate per ciascuna attività; *UDL* presenta le scelte operate in termini del primo principio dell'UDL, con riferimento alle *linee guida* e ai *punti di verifica* (Savia, 2016) esplicitati nel par. 2.1.1; infine, il *resoconto di quanto svolto in classe* illustra ciò che è stato proposto in classe in riferimento al primo principio dell'UDL e le produzioni degli allievi.

### 4.1 Attività 1 – Introduzione al cono come solido di rotazione

#### 4.1.1 Elementi descrittivi dell'attività

**Finalità.** Visualizzare situazioni geometriche nello spazio.

**Aspetti su cui far leva.** In questa lezione si vuole sviluppare e rafforzare negli allievi la capacità di visualizzare situazioni geometriche, con l'aiuto di artefatti concreti, immagini e GeoGebra.

**UDL.** In riferimento alla *linea guida 1* dell'UDL nella lezione vengono offerti degli artefatti quale alternativa alle informazioni uditive e visive: bastoncini, triangoli in cartoncino, un trapano elettrico, file GeoGebra. Questi supporti, infatti, facilitano la visualizzazione della situazione tridimensionale da parte degli allievi.

Per quanto riguarda la *linea guida 2*, in questa lezione agli allievi si chiede di lavorare sul concetto chiave della lezione utilizzando artefatti concreti e GeoGebra, come esplicitato nel *punto di verifica 2.5*.

La *linea guida 3* entra in gioco nella fase conclusiva dell'attività: negli ultimi minuti della lezione, infatti, si chiede agli allievi di scrivere su un foglio quali siano i concetti importanti della lezione. In questo modo, gli allievi sono spinti a riflettere sulla lezione appena svolta, diversamente da quanto accadrebbe in una conclusione condotta esclusivamente dal docente senza lo stimolo alla partecipazione. Scrivere e poi mettere in comune quanto imparato permette inoltre di porre ulteriormente l'accento sull'idea centrale della lezione, come esplicitato nel *punto di verifica 3.2*. L'idea è di lasciare agli allievi, alla fine di ogni lezione una traccia dell'attività svolta, per esempio chiedendo loro di scrivere che cosa hanno imparato di nuovo, quali termini nuovi hanno incontrato, quale nuova formula hanno scoperto. Questo permette di rendere espliciti i concetti chiave e allo stesso tempo di tenere una traccia delle lezioni, con l'ulteriore vantaggio di lasciare agli allievi una bozza dalla quale partire per poi preparare il riassunto per la verifica.

#### 4.1.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione viene introdotto il cono come solido di rotazione. La lezione inizia chiedendo agli allievi di immaginare quale figura solida viene generata dalla rotazione di un triangolo rettangolo

attorno a un suo cateto, e di provare a farne uno schizzo sulla scheda ([Allegato 2](#)). A questa domanda, molti allievi rispondono che si genera una piramide. A questo punto il docente permette a tutti gli allievi di utilizzare gli artefatti concreti e digitali proposti ([Figure 6 e 7](#)), che supportano e rafforzano la visualizzazione nello spazio. La possibilità di poter lavorare con diversi artefatti porta tutti gli allievi a dedurre che non si genera una piramide, bensì un cono.

Durante la lezione gli allievi risultano molto incuriositi dai molteplici artefatti utilizzati. In particolare, vi è un certo apprezzamento da parte degli allievi riguardo la possibilità di poter usare il trapano e il file GeoGebra: il primo permette di avere un'esperienza diretta con la rotazione del triangolo che genera il cono e il secondo permette di tenere una traccia del triangolo che ruota in modo da visualizzare il cono.



Figura 6. Artefatto concreto utilizzato per facilitare la visualizzazione del solido di rotazione.

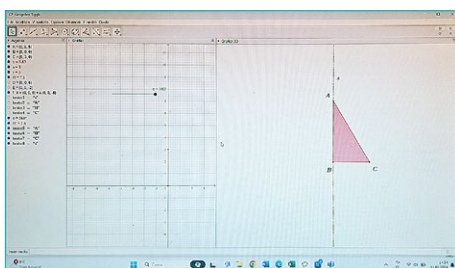


Figura 7. File GeoGebra utilizzato per facilitare la visualizzazione del solido di rotazione.

Alcuni allievi riscontrano difficoltà nel disegnare i coni, come si può vedere nella [Figura 8](#). In particolare, la difficoltà sembra risiedere nel disegnare su un supporto bidimensionale una visione prospettica del cono.

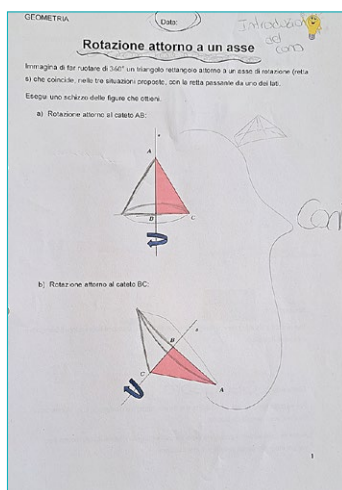


Figura 8. Coni disegnati da un allievo.

Non vi sono problemi, invece, nell'abbinare la coppia triangolo-asse di rotazione con il cono corrispondente, come nella seguente richiesta (Figura 9).

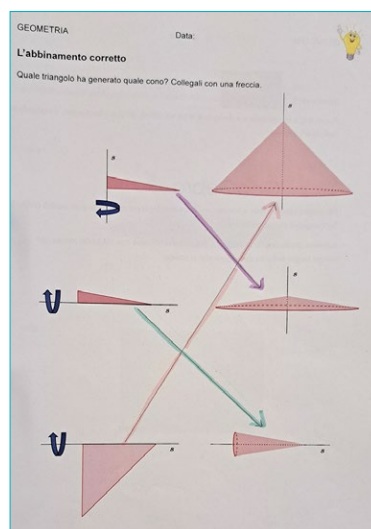


Figura 9. Esercizio svolto da un allievo.

## 4.2 Attività 2 – “Formalizzazione” del cono come solido di rotazione

### 4.2.1 Elementi descrittivi dell'attività

**Finalità.** Conoscere la notazione di base degli elementi caratteristici del cono.

**Aspetti su cui far leva.** Si mette a disposizione un breve video quale strumento per riprendere l'attività 1 (link disponibile insieme alle schede di questa attività nell'[Allegato 3](#)). In questa lezione, si vuole quindi far leva sulla ripresa di un argomento. Si opta per questo strumento per riprendere le conoscenze precedenti, al fine di accrescere la familiarità degli allievi con l'uso di video in ambito didattico.

**UDL.** In riferimento al *punto di verifica 2.2*, diventa importante per la classe quando si va a riprendere una nozione precedentemente appresa. La lezione inizia quindi informando gli allievi che si riprende l'attività 1, tramite un breve video, così da rientrare velocemente nell'argomento. Inoltre, agli allievi viene esplicitato che, dopo il video, si daranno dei nomi alle parti fondamentali del cono, e che questi nomi serviranno per affrontare le prossime lezioni.

Con il video iniziale, in riferimento alle linee guida dell'UDL, si riesce a offrire alternative per l'informazione uditiva e visiva. In particolare, optare per il video permette di riattivare le conoscenze pregresse in pochi secondi, consentendo agli allievi di riattivare ciò che hanno concluso al termine della lezione precedente, come esplicitato nel *punto di verifica 3.1*.

L'obiettivo della lezione è di presentare i termini matematici necessari per le successive cinque lezioni; in riferimento al *punto di verifica 2.1* si intende dunque “chiarire il lessico e i simboli” con brevi pagine di teoria. A fine lezione, per aiutare gli allievi a riassumere i contenuti, si chiede loro di scrivere su un foglio di carta quali sono i nuovi termini incontrati a lezione.

Per quanto riguarda il *punto di verifica 1.3*, agli allievi sono stati forniti dei coni in legno e in plastica di varie dimensioni da poter toccare e guardare.

### 4.2.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione viene introdotta la notazione di base relativa al cono. Il fatto di avere a disposizione gli artefatti concreti aiuta gli allievi a visualizzare e a riconoscere in modo corretto i vari elementi del



cono. Come si può vedere nella **Figura 10**, gli allievi ritengono utile riportare per iscritto alcuni termini relativi al cono nel proprio riassunto, che può essere utilizzato durante le lezioni.

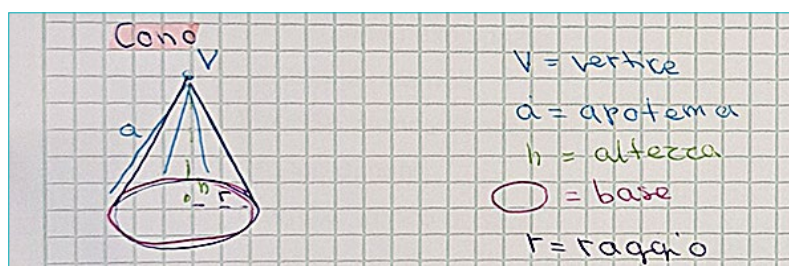


Figura 10. Contenuti dell'attività 2 che un allievo ritiene importanti al termine della lezione.<sup>7</sup>

### 4.3 Attività 3 – Scoperta dello sviluppo del cono

#### 4.3.1 Elementi descrittivi dell'attività

**Finalità.** Scoprire che la superficie laterale del cono non è altro che un settore circolare "curvato"; scoprire che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza di base, altrimenti lo sviluppo non si chiude.

**Aspetti su cui far leva.** In questa lezione si propone un'attività concreta, anche per fornire agli studenti esempi di come un argomento di geometria legato alla vita di tutti i giorni possa permettere di comprendere meglio il problema. Inoltre, anche in questo caso gli allievi lavorano molto sulla visualizzazione.

**UDL.** Con riferimento alla *linea guida 1* dell'UDL, si vogliono anzitutto fornire differenti opzioni per la percezione. A tal fine, in particolare, vengono offerti degli artefatti come alternativa alle informazioni uditive e visive, ovvero alcuni coni di plastica, di legno e di cartone. In riferimento al *punto di verifica 2.2*, considerando che la lezione è impostata in modo che gli allievi lavorino autonomamente, viene esplicitato loro come procedere, dove trovare il materiale didattico e il tempo a disposizione per svolgere l'attività. Inoltre, per illustrare e rimarcare l'idea principale che la superficie laterale di un cono è un settore circolare, il docente si aiuta anche con le mani, cercando con i gesti di mettere enfasi su questo fatto. In questo caso, ci si riferisce anzitutto al *punto di verifica 2.5* e al *punto di verifica 3.1*, infatti, oltre a usare le mani come ulteriore mezzo per illustrare le idee principali, vengono anche utilizzati gesti per riattivare le conoscenze di questa lezione.

#### 4.3.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione, gli allievi costruiscono un cappellino a forma di cono seguendo le istruzioni riportate nell'[Allegato 4](#). Vengono forniti alcuni artefatti (**Figure 11 e 12**), che supportano la visualizzazione e la costruzione. Come primo sostegno, si lasciano dei coni sulla cattedra che gli allievi possono usare per costruire il cappellino. Come secondo sostegno, si lasciano dei cappellini di cartone sulla cattedra che gli allievi possono tagliare e aprire. Dopo aver costruito il cappellino, si chiede agli allievi quali caratteristiche servono per passare dal cappellino a un cono.

La motivazione e la curiosità degli allievi risulta elevata, forse anche perché a molti di loro vengono in mente dei bei ricordi delle elementari. Non richiedendo nessun calcolo, inoltre, l'attività risulta accattivante anche per gli allievi con più difficoltà.

7. Si noti come l'allievo avrebbe dovuto colorare il cerchio e non solo la circonferenza.



Figura 11. Artefatti utilizzati per costruire i propri cappellini.



Figura 12. Cappellini da compleanno utilizzati per costruire i propri cappellini.

Per costruire un cappellino gli allievi adottano molteplici strategie:

- arrotolare un foglio e tagliare la base;
- ritagliare un triangolo e chiuderlo;
- utilizzare i coni forniti per farli rotolare su un foglio per poi ritagliare il settore circolare;
- aprire il cappellino e ricalcare il settore circolare.

A nessun allievo viene in mente di utilizzare il compasso per disegnare un settore circolare; per costruire la base del cono, tutti gli allievi ricalcano semplicemente la base dei coni forniti come materiali. Procedendo in questo modo, è facile concludere che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza. Nella Figura 13 si può vedere quanto prodotto dagli allievi.



Figura 13. Cappellini costruiti dagli allievi.

#### 4.4 Attività 4 – “Formalizzazione” dello sviluppo del cono

##### 4.4.1 Elementi descrittivi dell'attività

**Finalità.** Sapere che lo sviluppo di un cono è composto da un settore circolare e da un cerchio; sapere che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza di base.

**Aspetti su cui far leva.** In questa lezione si vuol far leva sulla ripresa di un argomento e sul presentare lo sviluppo del cono con l'aiuto di immagini, sempre spiegando a una velocità che permetta a tutti di seguire. Nella lezione viene anche integrata una fase di esercitazione, per rafforzare la visualizzazione di situazioni geometriche e verificare la comprensione dei concetti trattati nella prima fase.

**UDL.** In questa lezione, in riferimento al *punto di verifica 2.1*, si vogliono anzitutto chiarire il lessico e i simboli, e ciò con una breve pagina di teoria (prima scheda dell'[Allegato 5](#)). Per aiutare gli allievi a memorizzare il lessico si utilizzano dei colori. Per esempio, si scrive "superficie laterale" con il colore blu, e si colora di blu la superficie laterale. In riferimento al *punto di verifica 3.1*, si riattivano le conoscenze pregresse riprendendo, sempre nella suddetta pagina di teoria, il fatto che lo sviluppo del cono è composto da un settore circolare e da un cerchio e ricordando agli allievi che si era giunti alla conclusione che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza di base. Questa breve pagina di teoria viene inoltre utilizzata per evidenziare schemi, caratteristiche essenziali, idee principali e relazioni, come esplicitato nel *punto di verifica 3.2*. Poiché nella lezione precedente gli allievi hanno lavorato sui concetti di questa lezione inconsapevolmente, per fare un po' di chiarezza e portare un po' di ordine, si decide in questa lezione di racchiudere le informazioni ricavate nell'attività 3 in una pagina di teoria. Conclusa la fase teorica, si passa alla fase di esercitazione, nella quale – con riferimento ai principi dell'UDL – si cerca di fornire differenti opzioni per la percezione. A tale scopo, si dà la possibilità agli allievi di costruire un artefatto, come alternativa alle informazioni uditive e visive.

#### 4.4.2 Resoconto di quanto svolto in classe

Nella lezione si affronta lo sviluppo del cono e si eseguono alcuni esercizi. Dopo aver lavorato bene durante l'attività dei cappellini ([Allegato 4](#)), la scheda di teoria (prima scheda dell'[Allegato 5](#)) viene compresa con facilità; infatti, gli allievi hanno già scoperto le caratteristiche principali dello sviluppo del cono, si tratta di istituzionalizzarle.

Nella Figura 14 si può vedere come alcuni allievi utilizzano i colori in modo non coerente, ad esempio sottolineando *superficie di base* con il colore verde e poi utilizzando sempre il colore verde per indicare la circonferenza e l'arco.

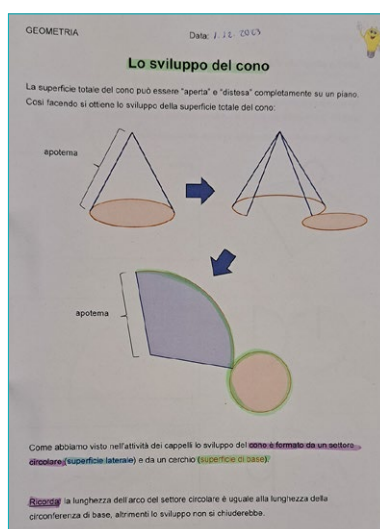


Figura 14. Sottolineature dei contenuti ritenuti importanti per un allievo.

Per quanto riguarda l'attività "Chi ha sbagliato il cappello?" (seconda e terza scheda dell'[Allegato 5](#)), si fornisce una copia delle figure disegnate su scheda (strumento nella quarta pagina dell'[Allegato 5](#)) in

modo che l'allievo possa ritagliarle e controllare se siano effettivamente gli sviluppi di un cono. alcuni allievi preferiscono argomentare la risposta utilizzando i colori, come possiamo vedere nella Figura 15.

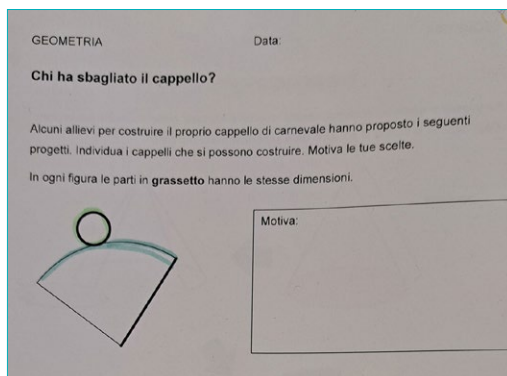


Figura 15. Soluzione proposta da un allievo utilizzando i colori.

Altri allievi scelgono invece di provare ad argomentare a parole la loro risposta, come si può vedere nella Figura 16. In questo caso si riscontra una certa difficoltà nell'utilizzo corretto del linguaggio, anche se il concetto espresso è giusto.

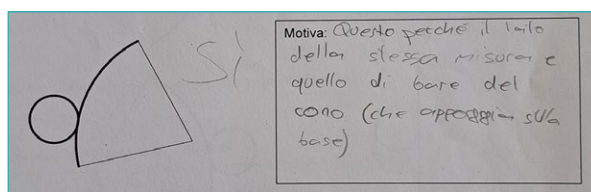


Figura 16. Soluzione proposta da un allievo utilizzando un'argomentazione a parole.

Infine, l'esercizio "L'abbinamento corretto" che richiede di abbinare lo sviluppo al cono corrispondente (quinta scheda dell'[Allegato 5](#)) non presenta difficoltà per gli allievi; se ne può vedere un esempio di soluzione nella Figura 17. Anche in questo caso, gli allievi hanno a disposizione degli strumenti: una copia delle figure disegnate su scheda (sesta scheda dell'[Allegato 5](#)) per poterle eventualmente ritagliare e provare a chiudere; un apposito file GeoGebra.

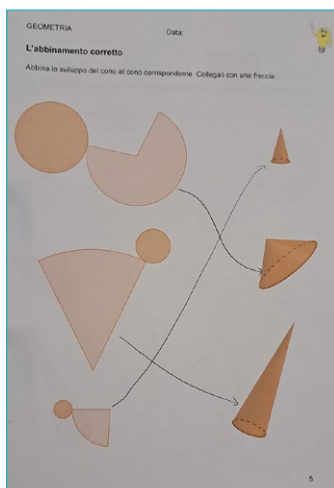


Figura 17. Soluzione di un allievo.

## 4.5 Attività 5 – Area della superficie totale del cono

### 4.5.1 Elementi descrittivi dell'attività

**Finalità.** Determinare una formula per l'area della superficie totale del cono e saperla applicare.

**Aspetti su cui far leva.** La lezione è divisa in una fase teorica e una di esercitazione. Nella fase di esercitazione, si vogliono aiutare gli allievi a trovare delle possibili strategie da attuare quando risolvono esercizi di geometria. Come prima strategia, si chiede agli allievi di colorare di diversi colori alcuni elementi del cono, come l'apotema e il raggio del cerchio di base. L'idea è che, distinguendo con diversi colori i vari elementi del cono, gli allievi abbiano un'idea più chiara della situazione geometrica. Poi, nel secondo esercizio, agli allievi vengono proposte delle domande progressive atte a farli riflettere passo dopo passo nella risoluzione del problema. Durante l'attività gli allievi possono consultare i loro riassunti e formulari e avere accesso a tutte le risorse finora viste in classe.

**UDL.** In riferimento al *punto di verifica 3.3*, le informazioni oggetto della presente lezione vengono introdotte in maniera progressiva e, per risolvere gli esercizi, si forniscono suggerimenti espliciti. In particolare, agli allievi si chiede di calcolare alcune misure che sarà successivamente necessario utilizzare per individuare la formula dell'area della superficie totale del cono. Si è optato per una scheda strutturata in questo modo ([Allegato 6](#)), perché determinare una formula non è generalmente un compito facile per gli allievi. Una scheda guidata può rivelarsi una modalità efficace in questo caso. In riferimento al *punto di verifica 2.1*, i simboli che compongono la succitata formula dell'area della superficie totale del cono vengono chiariti con l'ausilio di abbreviazioni – per esempio, l'area di base è stata abbreviata in  $A_{base}$  – e si utilizzano dei colori per facilitare la comprensione di alcuni termini matematici. Il *punto di verifica 3.4* viene implementato nella conclusione della scheda guidata fornendo agli allievi i mezzi per generalizzare l'area totale di un cono. In altre parole, nella lezione si determina la formula per calcolare l'area totale di un qualsiasi cono, formula utilizzabile quindi anche in altre situazioni. Da ultimo, in riferimento al *punto di verifica 2.3*, agli allievi si consente di tenere il proprio riassunto e formulario, per assicurarsi che «tutti gli studenti abbiano uguale accesso alla conoscenza» (Savia, 2016, p. 75).

### 4.5.2 Resoconto di quanto svolto in classe

Per raggiungere l'obiettivo didattico, nella lezione sono anche stati svolti alcuni esercizi (terza pagina dell'[Allegato 6](#)). La scelta di proporre una scheda guidata risulta efficace; infatti, in questo modo gli allievi sono riusciti a completarla in autonomia (si veda un esempio di compilazione in [Figura 18](#)).

GEOMETRIA Data: \_\_\_\_\_

**Area della superficie totale**

Vogliamo trovare una formula per l'area totale ( $A_{tot}$ ) del cono. Completa i seguenti punti.

**Area di base:**  
L'area di base ( $A_{base}$ ) del cono è l'area del cerchio di base.  
 $A_{base} = r^2 \cdot \pi$

**Area laterale:**  
La lunghezza dell'arco ( $l_{arco}$ ) è uguale alla lunghezza della circonferenza di base del cono.  
 $l_{arco} = 2 \cdot \pi \cdot r$   $\pi \approx 3,14$

L'area del cerchio grande ( $A_{cerchio\ grande}$ ) dal quale viene estratto il settore circolare è:  
 $A_{cerchio\ grande} = \pi \cdot r^2$

La circonferenza del cerchio grande ( $C_{cerchio\ grande}$ ) dal quale viene estratto il settore circolare è:  
 $C_{cerchio\ grande} = 2 \cdot \pi \cdot r$

**Ricorda:** in un settore circolare il rapporto fra l'area del settore ( $A_{set}$ ) e l'area del cerchio grande ( $A_{cerchio\ grande}$ ) dal quale è estratto è uguale al rapporto tra lunghezza dell'arco ( $l_{arco}$ ) e della circonferenza del cerchio grande ( $C_{cerchio\ grande}$ ):

$$\frac{A_{set}}{A_{cerchio\ grande}} = \frac{l_{arco}}{C_{cerchio\ grande}}$$

$$A_{tot} = \frac{l_{arco}}{C_{cerchio\ grande}} \cdot A_{cerchio\ grande}$$

Figura 18. Scheda completata da un allievo.

Per determinare la formula dell'area totale del cono (Figura 19), alcuni studenti richiedono l'aiuto del docente, in particolare nella semplificazione della formula.

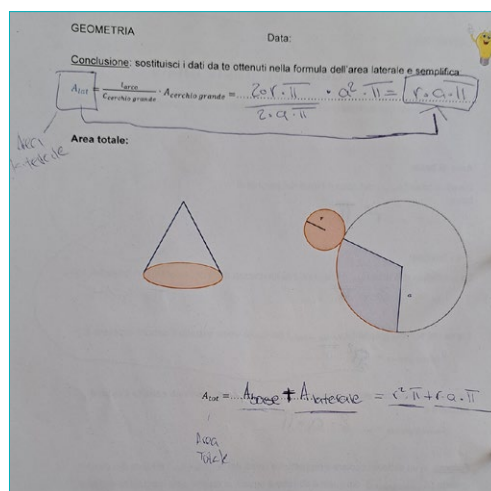


Figura 19. Scheda completata da un allievo.

Nella Figura 20 si può vedere come un allievo risolve gli esercizi.

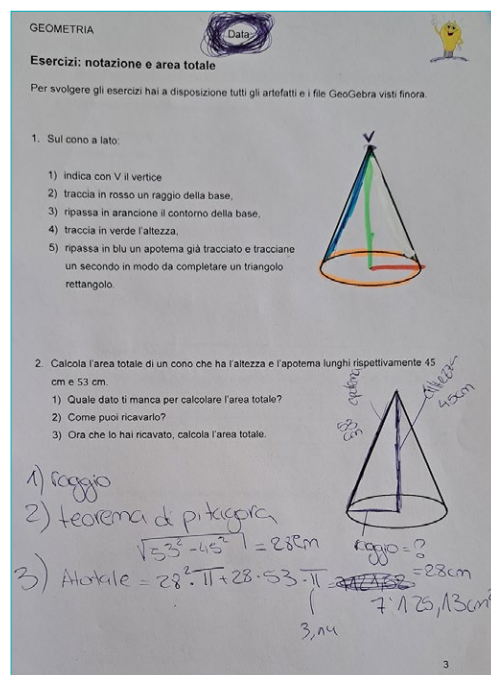


Figura 20. Soluzioni proposte da un allievo.

Infine, ricordando che si vuol lasciar produrre agli allievi, alla fine di ogni lezione, una traccia della lezione (come avvenuto al termine della seconda lezione, par. 4.2.2), nella Figura 21 si può vedere che cosa uno studente aggiunge al proprio riassunto.



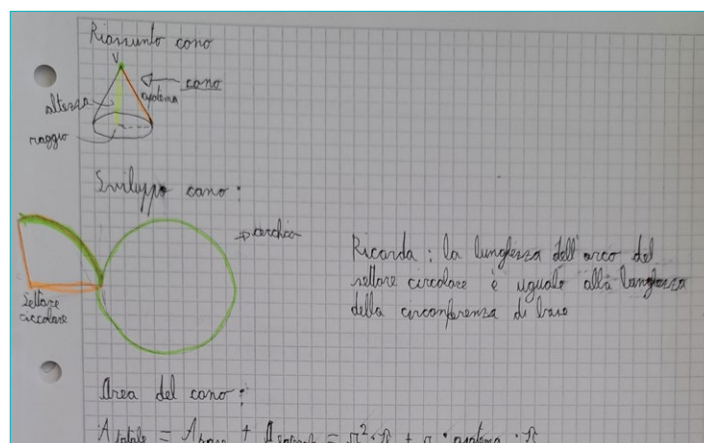


Figura 21. Continuazione del riassunto di un allievo.

## 4.6 Attività 6 – Volume del cono

### 4.6.1 Elementi descrittivi dell'attività

**Finalità.** Scoprire in due modi diversi la formula del volume del cono.

**Aspetti su cui far leva.** In questa lezione si fa leva sull'utilità di diversi strumenti nell'ambito della geometria. Oltre a proporre un'attività con gli artefatti concreti quali cilindro, cono in plastica e imbuto, si propone anche un'attività con GeoGebra.

**UDL.** In riferimento al *punto di verifica 3.1*, nella presente attività si vuole attivare o fornire la conoscenza di base, recuperando e utilizzando delle conoscenze pregresse, precisamente la conoscenza della formula del volume della piramide e del volume del cilindro, per scoprire la formula del volume del cono. Si vogliono altresì fornire differenti opzioni per la percezione. A tale scopo vengono proposti degli artefatti, cioè i solidi in plastica e l'imbuto, come alternativa alle informazioni uditive e visive. L'auspicio è che, in questo modo, tutti gli allievi possano riuscire a risalire alla formula del volume del cono. In questa lezione, in riferimento al *punto di verifica 2.2*, viene data molta importanza alle indicazioni iniziali del docente: volendo far lavorare gli allievi in autonomia, per la buona riuscita della lezione, è importante che tutti capiscano il compito da svolgere. Per questo motivo, si divide la classe in tre gruppi da tre allievi ciascuno, e un gruppo da due allievi. Il docente predispone inoltre quattro postazioni per due tipi di attività, una al computer (attività 1 dell'[Allegato 7](#)) e una con gli artefatti concreti (attività 2 dell'[Allegato 7](#)). L'idea è di far risalire gli allievi alla formula del volume del cono attraverso due diversi mezzi, digitali e artefatti concreti, implementando così l'obiettivo del *punto di verifica 2.5*. Così, due gruppi iniziano con l'attività che prevede l'uso di un computer per gruppo e di un file GeoGebra, mentre gli altri due gruppi iniziano con l'attività con il cono e il cilindro in plastica, per poi darsi il cambio dopo 15 minuti. Determinare la formula del volume del cono permette di generalizzare il risultato; quindi, attraverso la scheda finale di riassunto (ultima pagina dell'[Allegato 7](#)), si porta l'allievo a generalizzare e determinare una formula per calcolare il volume di un cono qualsiasi, realizzando il *punto di verifica 3.4*. L'allievo potrà poi applicare la formula a qualsiasi situazione futura. Nella traccia della lezione, aggiunta in calce al riassunto degli allievi, invece, si vogliono evidenziare schemi, caratteristiche essenziali, idee principali e relazioni, facendo quindi riferimento al *punto di verifica 3.2*. Lo scopo è di sottolineare l'importanza di preparare riassunti contenenti le informazioni più importanti. Inoltre, questo tipo di riassunti aiuta l'allievo a preparare i propri riassunti per le verifiche, non dovendo memorizzare troppe informazioni.

#### 4.6.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione, gli allievi scoprono come calcolare il volume del cono. L'utilizzo sia di GeoGebra sia di artefatti concreti risulta molto motivante per gli allievi. Gli allievi lavorano a gruppi di tre e a coppie e non si riscontrano particolari problemi nell'attività con il file GeoGebra (Figure 22 e 23).

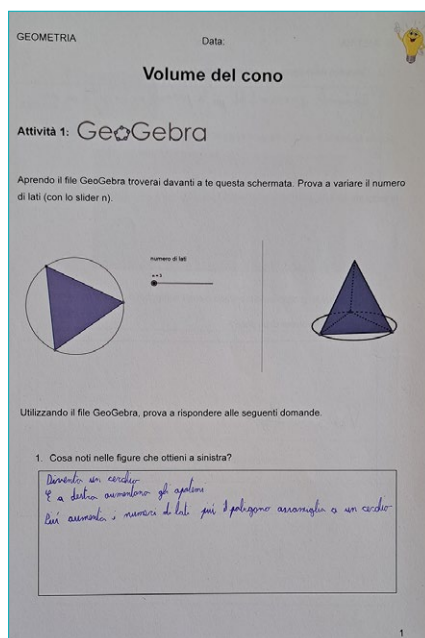


Figura 22. Risposte fornite da un allievo nell'attività 1 sul volume del cono.

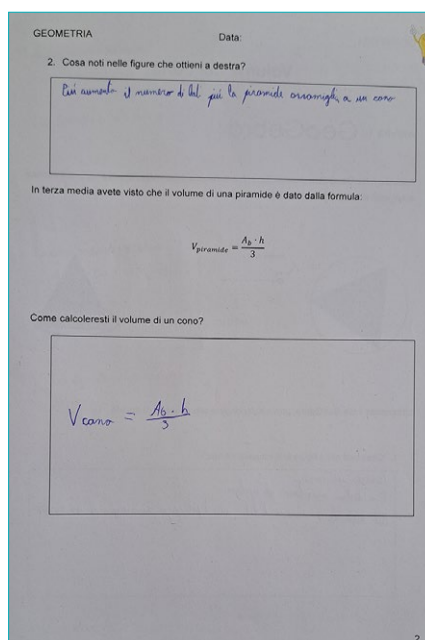


Figura 23. Risposte fornite da un allievo nell'attività 1 sul volume del cono.

Nell'attività 2, quella con gli artefatti concreti, alcuni allievi riscontrano alcune difficoltà nel riuscire a stimare quanti coni servono per riempire il cilindro (Figura 24).

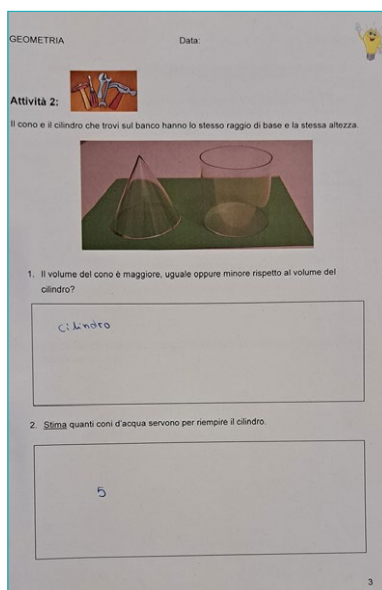


Figura 24. Risposte fornite da un allievo nell'attività 2 sul volume del cono.

Alla fine della lezione si decide con gli allievi di aggiungere al riassunto la formula per determinare il volume del cono (Figura 25).

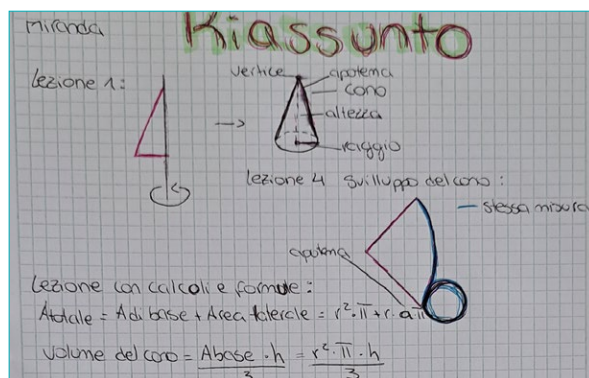


Figura 25. Riassunto con i contenuti trattati fino all'attività 6.

## 4.7 Attività 7 – Esercizi sul volume del cono

### 4.7.1 Elementi descrittivi dell'attività

**Finalità.** Consolidare le conoscenze sull'area e il volume del cono e saper applicarle nella risoluzione di esercizi.

**Aspetti su cui far leva.** Questa lezione è dedicata agli esercizi. Si vogliono in particolare allenare le strategie di risoluzione dei problemi, sviluppate precedentemente, e il corretto utilizzo del formulario. Gli allievi consultano i loro riassunti e formulari, e inoltre si dà loro accesso a tutte le risorse viste finora in classe.

**UDL.** In questa lezione, come detto prima, si lascia a disposizione degli allievi tutto il materiale didattico visto finora. Gli allievi hanno inoltre a disposizione anche i loro riassunti, in modo da potersi concentrare sui concetti chiave e non tanto sul ricordare delle formule e dei nomi. Conseguentemen-

te, l'aspettativa del docente è che in questa lezione entrino potenzialmente in gioco tutti i punti di verifica della *linea guida 1*. Infatti, questa è una fase di esercitazione individuale e ci si aspetta che ciascun allievo utilizzi potenzialmente strumenti differenti per risolvere gli esercizi: alcuni il video, altri le piramidi di plastica per visualizzare meglio la situazione, altri ancora alcune conoscenze pregresse.

#### 4.7.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione si svolgono esercizi sul volume del cono ([Allegato 8](#)). Gli allievi utilizzano molto il proprio riassunto e gli artefatti, in particolare il cono in plastica trasparente, per visualizzare e capire le situazioni. È interessante notare che nella fase di esercizi ogni allievo privilegia un determinato strumento per ogni esercizio. Alcuni non avendo difficoltà mnemoniche non sentono la necessità di utilizzare il proprio riassunto, scegliendo più frequentemente gli artefatti concreti. Altri invece che hanno più difficoltà a livello di memoria usano più spesso il proprio riassunto. Nella Figura 26 e nella Figura 27 si trovano alcune soluzioni prodotte dagli allievi.

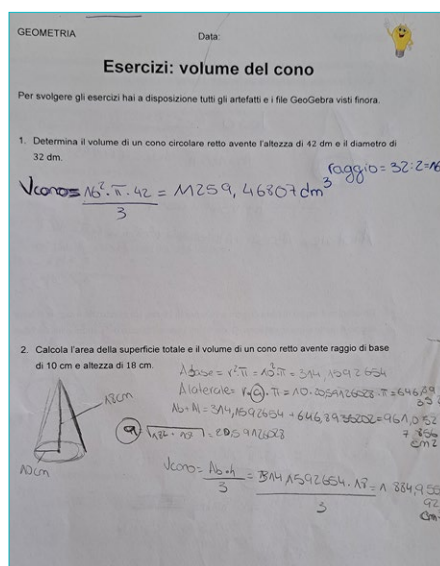


Figura 26. Soluzioni proposte da un allievo.

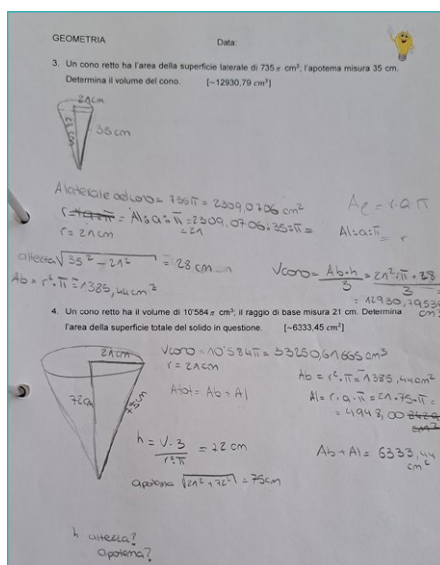


Figura 27. Soluzioni proposte da un allievo.

## 5 Conclusioni

---

L'esperienza didattica descritta in questo articolo rappresenta un esempio di percorso didattico in linea con i principi di inclusione dell'UDL. È questo un primo elemento da sottolineare: non era infatti scontato riuscire a coordinare e integrare in un percorso di matematica i principi e le linee guida di un modello nato sì in ambito educativo, ma non in seno a una disciplina specifica. Questa esperienza contribuisce inoltre a rendere conto dell'efficacia dell'approccio dell'UDL. Durante il percorso didattico, infatti, si è potuto osservare un miglioramento generale per tutti gli allievi per quanto riguarda le competenze disciplinari e la visione della geometria, messo in evidenza dai risultati ottenuti dai questionari iniziali e finali che è possibile reperire nel lavoro completo di tesi. Gli allievi, nonostante le difficoltà incontrate durante il percorso, hanno lavorato con impegno, serietà e motivazione raggiungendo buoni risultati. Dopo l'esperienza, un maggior numero di allievi rispetto all'inizio afferma di apprezzare la geometria, di sentirsi più competente nell'affrontare un esercizio di geometria e di percepirsi più sicuro nel riuscire a visualizzare situazioni geometriche. Soprattutto quest'ultimo aspetto della visualizzazione è stato fortemente supportato con diversi artefatti digitali e concreti, ai quali gli allievi hanno fatto ricorso con interesse e in modo sempre più autonomo ed efficace. Un altro risultato importante è che ciascun allievo è riuscito a riconoscere con maggior chiarezza cosa gli sia effettivamente utile per affrontare un esercizio o problema di geometria. Questi aspetti che delineano un bilancio positivo dell'esperienza sono dovuti anche all'aver fornito molteplici mezzi di rappresentazione, secondo il primo principio dell'UDL, sperimentando un approccio didattico che rispetta e dà spazio alle preferenze e alle vie di accesso al sapere che caratterizzano ciascun allievo, cercando al contempo di renderlo consapevole dei propri bisogni e delle proprie risorse.

---

## Bibliografia

- Agliati, S. (2023). La scuola inclusiva, tra didattica e passione. *Atgabbes, Bollettino inverno 2023*, 17–21. [https://www.atgabbes.ch/wp-content/uploads/2024/04/Bollettino\\_Atgabbes\\_Inverno2023.pdf](https://www.atgabbes.ch/wp-content/uploads/2024/04/Bollettino_Atgabbes_Inverno2023.pdf)
- Bellini, S. (2024). *Universal Design For Learning in ambito geometrico nella scuola media*. Tesi Master, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. <https://tesi.supsi.ch/5238/>
- Cottini, L. (2019). *Universal Design for Learning. Verso il curricolo per l'inclusione*. Giunti Edu.
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (edizione perfezionata). DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37–65.
- Guidi, C., Pirico, M. L., & Rusconi, L. (2022). *Differenziazione e valutazione in matematica* [Lezione, Master in Didattica della Matematica]. DFA/ASP–SUPSI.
- Meyer, A., Rose, D. H., & Gordon, D. (2022). *Universal Design for Learning: Theory and Practice*. CAST Professional Publishing.

Ostinelli, M. (2014). Dall'integrazione scolastica alla scuola inclusiva. *Scuola ticinese. Verso l'inclusione*, 320(2), 5–10.

Savia, G. (2016). *Universal Design for Learning*. Erickson.

Zambianchi, E., & Ferrarese, G. (2021). The Universal Design for Learning model in support of Integrated Digital Teaching. *Formazione & insegnamento*, 19(2), 522–532. [https://doi.org/10.7346/-fei-XIX-01-21\\_46](https://doi.org/10.7346/-fei-XIX-01-21_46)



## ***Dov'è nascosta Betta l'apetta?* Giocare con i principi della logica alla scuola dell'infanzia e nei primi anni della scuola primaria**

*Where is Betta-the-bee hidden?* Playing with the principles of logic in kindergarten and early primary school

**Raffaele Casi, Cristina Sabena e Carlotta Soldano**

Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino – Italia

✉ [raffaele.casi@unito.it](mailto:raffaele.casi@unito.it), [cristina.sabena@unito.it](mailto:cristina.sabena@unito.it), [carlotta.soldano@unito.it](mailto:carlotta.soldano@unito.it)

**Sunto** / In questo contributo vengono presentati un gioco, *Dov'è nascosta Betta l'apetta?*, e una serie di risorse didattiche ad esso correlate, progettati per sviluppare il pensiero logico nei bambini tra i 4 e i 7 anni. Il gioco, ispirato a dinamiche come quelle del più celebre *Indovina chi?*, si basa su domande e deduzioni riguardanti variabili numeriche, spaziali o percettive per individuare una carta nascosta. La sua progettazione, realizzata in collaborazione con insegnanti e studenti in formazione, è stata affinata attraverso cicli di sperimentazione in contesti di scuola dell'infanzia e primaria. Le risorse didattiche sviluppate a partire dal gioco includono schede di lavoro, albi illustrati e video pensati per supportare la riflessione sulla formulazione delle domande, sulle risposte alle domande e sull'eliminazione delle carte. L'obiettivo è offrire agli insegnanti un gioco matematico che consenta alle bambine e ai bambini di esplorare principi logici in modo coinvolgente, favorendo l'interazione e la discussione.

**Parole chiave:** gioco; logica; ragionamento; scuola dell'infanzia; scuola primaria.

**Abstract** / This contribution presents the game, *Where is Betta-the-Bee hidden?*, and a series of related teaching resources designed to develop logical thinking in children aged 4 to 7. The game, inspired by dynamics such as those of the more famous *Guess who?*, is based on questions and deductions concerning numerical, spatial or perceptual variables to find a hidden card. Its design, realized in collaboration with pre-service and in-service teachers, has been refined through cycles of experimentation in kindergarten and primary school contexts. The teaching resources developed from the game include worksheets, illustrated books and videos designed to support reflection on questions formulation, answering questions and cards discarding. The aim is to provide teachers with a mathematical game that allows children to explore logical principles in an engaging way, encouraging interaction and discussion.

**Keywords:** game; logic; reasoning; kindergarten; primary school.

# 1 Introduzione

---

Quando si propone un problema di matematica, è ben noto agli insegnanti quanto sia difficile evitare di indirizzare gli studenti, attraverso le proprie parole (ma anche silenzi, sguardi, gesti), verso ciò che desiderano sentir dire loro, soprattutto quando sanno già che, nell'affrontare tale problema, gli studenti incontreranno delle difficoltà, prenderanno strade sbagliate, commetteranno errori e si troveranno di fronte a vicoli ciechi. Eppure, la genesi del sapere matematico non può avvenire senza che gli studenti accettino il compito di affrontare i problemi con le proprie conoscenze e con esso la possibilità di faticare in percorsi errati, fare errori, elaborare riflessioni inutili e dover ricominciare tutto da capo per giungere alla soluzione cercata. Questo tipo di situazione, in cui gli studenti operano in un ambiente che costituisce una fonte di difficoltà, squilibri e contraddizioni, viene definito da Brousseau (1997) con il termine di situazione a-didattica. Come esempio di situazione a-didattica e per illustrare la sua teoria delle situazioni, Brousseau utilizza un gioco di interazione strategica chiamato la "corsa a 20". Si gioca in due giocatori. Un giocatore inizia dicendo 1 o 2, l'altro giocatore somma 1 o 2 al numero detto dall'avversario e dice il risultato ottenuto. Il gioco procede in questo modo, con ciascun giocatore che aggiunge a turno 1 o 2 all'ultimo numero detto dall'avversario. Vince chi per primo raggiunge il 20.

Il gioco non richiede competenze matematiche complesse, poiché è sufficiente saper eseguire semplici addizioni con numeri piccoli per portare avanti la partita, rendendolo adatto anche a studenti della scuola primaria.<sup>1</sup> Come suggerito da Brousseau, gli studenti vengono invitati a giocare dapprima in coppia, poi a squadre e, successivamente, a formulare ipotesi su quali mosse conducono a vincere il gioco. La corsa a 20 è infatti un caso di situazione di interazione strategica in cui esiste una strategia "vincente", ossia una sequenza di mosse/numeri che, se giocati senza errori, conduce con certezza un giocatore alla vittoria (se gioca per primo, nel caso delle mosse + 1 o + 2 e dell'obiettivo 20 fissato). Questi numeri vengono tipicamente scoperti a partire dal 17: infatti se si gioca questo numero, l'avversario potrà dire o 18 o 19 e si potrà arrivare a 20 con una delle due mosse a disposizione (+ 1 nel caso del 19 o + 2 nel caso del 18). A partire dal 17, in modo analogo si scopre che il 14 è un numero vincente, e così di seguito si scoprono l'11, l'8, il 5 e infine il 2, che è dunque il numero con il quale conviene iniziare il gioco. La corsa a 20 rappresenta un contesto di gioco e al tempo stesso matematico, in cui i bambini hanno l'opportunità di formulare congetture e argomentazioni in ambito numerico, confrontarsi con il punto di vista dei compagni e, grazie al supporto dell'insegnante, passare da considerazioni empiriche relative a quanto accaduto nelle partite giocate a spiegazioni che giustificano le mosse scelte sulla base di considerazioni sulle relazioni tra i numeri. Questo secondo tipo di spiegazioni si fonda su principi logici elementari, come il ragionamento per casi e l'uso dell'implicazione materiale.

La ricerca didattica ha indicato che molti studenti hanno difficoltà a utilizzare i principi logici nei ragionamenti matematici. Tali difficoltà sono presenti in tutti gli ordini scolastici e colpisce che vengano rilevate persino negli studenti impegnati in studi scientifici a livello universitario (Durand-Guerrier et al., 2021). Secondo Durand-Guerrier e colleghi, una delle cause di tali difficoltà è che l'insegnamento della logica, che avviene nella scuola secondaria di secondo grado, è tipicamente separato dagli altri argomenti del curriculum di matematica. A nostro avviso, è possibile promuovere un incontro degli studenti con il pensiero logico e alcuni principi della logica molto presto, fin dalla scuola dell'infanzia. Affrontando questo tema da una prospettiva di ricerca per l'innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998), in questo contributo presentiamo e analizziamo il gioco di carte *Dov'è nascosta Betta l'apetta?*, due espansioni e le relative risorse didattiche, progettati per far sperimentare ai bambini alcuni principi logici in un contesto adatto alla loro età: il gioco.

Il gioco è un'attività fondamentale in tutte le culture, come discusso da vari studiosi, a partire dall'opera fondamentale di Huizinga (1938/1971). Secondo Bishop (1988), il gioco costituisce una delle sei attività "uni-

---

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.

versali” che possono essere caratterizzate come attività matematiche. In particolar modo il gioco è onnipresente nell’educazione della prima infanzia, compresa l’educazione matematica. Troviamo infatti riferimento al gioco all’interno delle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca [MIUR], 2012), sia per quanto riguarda la scuola dell’infanzia, dove, nella sezione “Numeri e spazio” dell’area “Conoscenza del mondo” si fa esplicito riferimento all’uso educativo di giochi da tavolo di vario tipo (p. 29), sia per quanto riguarda la scuola primaria, dove, nella parte introduttiva, al gioco viene attribuito «un ruolo cruciale nella comunicazione, nell’educazione al rispetto di regole condivise, nell’elaborazione di strategie adatte a contesti diversi» (p. 60). Tuttavia, non tutti i giochi hanno le stesse potenzialità educative. Con l’obiettivo di supportare gli insegnanti nella scelta di giochi che possano promuovere adeguatamente l’educazione matematica, Russo et al. (2018) individuano cinque principi per stimolare la riflessione critica rispetto a quelli che definiscono *giochi matematici ricchi di contenuti educativi*. I cinque principi, che riportiamo in **Tabella 1**, sono individuati da un lato grazie all’esperienza degli autori, sia nella veste di progettisti di giochi sia in quella di insegnanti, e dall’altro attraverso la revisione della letteratura specifica (Russo et al., 2024) e l’analisi di diversi giochi classicamente utilizzati in contesto educativo.

|                                                                          |                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Principio 1:</b><br>Gli studenti sono coinvolti                       | I giochi matematici dovrebbero essere coinvolgenti, divertenti e generare discussioni matematiche                                                                   |
| <b>Principio 2:</b><br>Abilità contro fortuna                            | I giochi matematici dovrebbero bilanciare adeguatamente abilità e fortuna                                                                                           |
| <b>Principio 3:</b><br>La matematica è centrale                          | L’esplorazione di importanti concetti matematici e l’esercizio di importanti abilità dovrebbero essere al centro della strategia di gioco e dell’esperienza giocosa |
| <b>Principio 4:</b><br>Flessibilità per l’apprendimento e l’insegnamento | I giochi matematici dovrebbero essere facilmente differenziabili per soddisfare una varietà di studenti e modificabili per soddisfare una varietà di concetti       |
| <b>Principio 5:</b><br>Connessione casa-scuola                           | I giochi matematici dovrebbero offrire l’opportunità di favorire legami tra casa e scuola                                                                           |

**Tabella 1.** Principi per i giochi matematici ricchi di contenuti educativi, adattati da Russo et al. (2018, p. 30, traduzione degli autori).

Il gioco *Dov'è nascosta Betta l'apetta?*, al quale ci riferiremo nel seguito di questo articolo come *Betta l'apetta*, è pensato per bambini di età compresa tra i 4 e i 7 anni. È stato sviluppato nel gruppo di ricerca *Matematica 011*, composto da ricercatori (gli autori del presente contributo), insegnanti di scuola dell’infanzia e di scuola primaria e studenti del corso di laurea in scienze della formazione primaria dell’Università di Torino. La dinamica del gioco si ispira ai giochi commerciali *Oudordodo* e *Indovina chi?*, in cui i giocatori sono chiamati a scoprire una carta specifica ponendo domande. In particolare, *Betta l'apetta* è simile a tali giochi per ciò che chiamiamo “matematica nel gioco”, ovvero la matematica che caratterizza le dinamiche del gioco, e che in questo caso riguarda alcuni principi logici. Si differenzia, invece, per la “matematica nel mazzo”, che riguarda gli aspetti matematici presenti nella grafica delle carte, relativi ad elementi numerici e spaziali. Nella prossima sezione illustreremo la “matematica nel gioco” e la “matematica nel mazzo” di *Betta l'apetta* e nel seguito dell’articolo presenteremo alcune risorse didattiche sviluppate a partire dal gioco.

Il processo di progettazione è stato guidato da principi ispirati all’*Educational Design Research* (EDR; McKenney & Reeves, 2019). In linea con tali principi, abbiamo seguito e ripetuto ciclicamente tre fasi: a) incontri del gruppo di ricerca per sviluppare il gioco; b) sessioni didattiche sperimentali con gli studenti; c) incontri del gruppo di ricerca per discutere le sessioni didattiche sperimentali. Le sessioni didattiche per la sperimentazione del gioco sono state condotte nelle sezioni di scuola dell’infanzia,

mentre le sessioni didattiche per la sperimentazione delle risorse didattiche hanno coinvolto sia sezioni della scuola dell'infanzia sia classi prime e seconde di scuola primaria. Tutte le attività svolte nelle varie sessioni didattiche sperimentali sono state video e audio registrate e i dati audiovisivi, insieme alle note sul campo di insegnanti e ricercatori, sono stati analizzati durante i successivi incontri di progettazione per perfezionare il gioco e le risorse didattiche collegate.

La fase di progettazione del gioco è iniziata nella primavera del 2021 e si è conclusa nell'estate del 2024 con la pubblicazione delle carte sul sito web del gruppo di ricerca (<https://www.dfedidamath.unito.it/>), dal quale sono liberamente scaricabili (licenza Creative Commons CC-BY-NC-ND 4.0).<sup>2</sup> La progettazione delle risorse didattiche è tuttora in corso, e vede attivamente coinvolti alcuni tesisti del corso di laurea magistrale in scienze della formazione primaria dell'Università di Torino.

L'intero progetto è guidato dalla domanda di ricerca: come possono essere progettati un gioco di carte matematico ricco di contenuti educativi e le relative risorse didattiche affinché venga promossa l'attivazione di principi logici fin dalla scuola dell'infanzia?

## 2 Il gioco *Betta l'apetta*

*Betta l'apetta* si gioca con un mazzo composto da 24 carte *fiore* della stessa dimensione che mostrano un fiore in un vaso circondato da alcune farfalle e da un bruco, e da una carta *Betta* più piccola (Figura 1). Le carte *fiore* si differenziano per il numero di petali, il colore del vaso, la posizione e il numero delle farfalle, la posizione del bruco e la posizione della foglia rispetto allo stelo, mentre tutti gli altri elementi rimangono invariati.

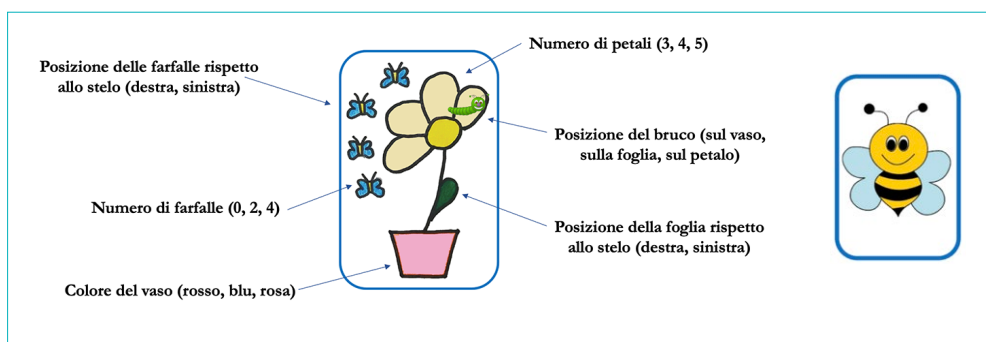


Figura 1. Una delle carte *fiore*, con le possibili varianti (a sinistra), e la carta di *Betta* (a destra).

Il gioco inizia disponendo le 24 carte *fiore* sul tavolo, con la parte disegnata rivolta verso l'alto e viene svolto da due giocatori: un giocatore (il *nasconditore*) nasconde la carta *Betta* sotto una carta *fiore* senza essere visto dall'avversario; il giocatore avversario (il *trovatore*) deve scoprire dove è nascosta *Betta* ponendo domande sulle caratteristiche delle carte a cui sia possibile rispondere solo con «Sì» o «No» (ad esempio: «*Betta l'apetta* è sotto una carta con un vaso rosso?»). In base alla risposta, le carte sotto le quali non può essere nascosta *Betta* vengono rimosse dal trovatore; a questo punto si potranno fare altre domande finché non rimane sul tavolo solo una carta: se tutte le risposte sono state interpretate correttamente dal trovatore, sotto tale carta sarà nascosta *Betta*. Come vedremo più avanti, pur prevedendo solo due ruoli di gioco, nell'utilizzo didattico il ruolo di trovatore è sempre

2. Nello specifico, i materiali del gioco sono scaricabili al seguente link: <https://www.dfedidamath.unito.it/home-page/giochi-di-carte/betta-lapetta>.

stato condiviso da un gruppo di bambini, che pongono le domande a turno. Per come è strutturato il gioco, l'oggetto delle domande comprende semplici contenuti matematici individuabili nella grafica delle carte del mazzo e relativi alle classiche abilità matematiche relative al senso cardinale del numero, osservabile nelle variabili "petali" e "farfalle" e alle abilità spaziali, osservabili nelle variabili "farfalle", "foglia" e "bruco". Queste abilità sono riconducibili allo sviluppo di strategie di conteggio e all'individuazione della posizione degli oggetti, abilità incluse tra i traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola dell'infanzia e agli obiettivi di apprendimento previsti al termine della classe terza della scuola primaria delle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012). Tuttavia, a nostro avviso, l'aspetto più interessante del mazzo dal punto di vista dell'educazione matematica non è tanto il contenuto matematico specifico delle carte, quanto piuttosto il fatto di presentare ai bambini un contesto in cui sono presenti contemporaneamente diverse variabili con modalità differenti, e offrire loro la possibilità di impegnarsi nel processo e nella sfida di *notarle* (nel senso di Mason, 2002) mentre giocano. Questo importante aspetto si ricollega al traguardo per lo sviluppo della competenza al termine della scuola dell'infanzia: «Il bambino raggruppa e ordina oggetti e materiali secondo criteri diversi, ne identifica alcune proprietà, confronta e valuta quantità; utilizza simboli per registrarle» (MIUR, 2012, p. 29).

Nella Tabella 2 analizziamo in dettaglio le variabili presenti nelle carte e le modalità in cui queste variabili appaiono.

| Variabile | Tipo      | Modalità                               | Scelte di design                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------|-----------|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vaso      | Colore    | Rosso<br>Rosa<br>Blu                   | Il colore del vaso è l'unica variabile che non ha un legame diretto con gli aspetti matematici. Questa variabile è stata scelta per due motivi. Da un lato, permette ai bambini che potrebbero avere difficoltà a identificare variabili di tipo matematico di partecipare al gioco concentrandosi su un aspetto principalmente percettivo. Dall'altro lato, le domande relative a questo tipo di variabile possono contribuire a ridurre l'insieme delle carte disponibili fin dalle fasi iniziali del gioco, consentendo così di formulare domande su variabili matematiche con un numero minore di carte rimaste sul tavolo di gioco. |
| Petali    | Numero    | Tre<br>Quattro<br>Cinque               | La decisione di utilizzare numeri "piccoli" e di disporre i petali uno accanto all'altro è stata presa per consentire ai bambini di quantificarli facilmente sia attraverso l'abilità innata di <i>subitizing</i> , <sup>3</sup> sia attraverso un semplice processo di conteggio.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Farfalle  | Numero    | Zero<br>Due<br>Quattro                 | La presenza del numero zero fa sì che questa variabile, oltre ad essere di tipo numerico (ad esempio, si può porre la domanda: «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta che ha 2 farfalle?»), possa essere anche trattata come variabile esistenziale (ad esempio, con la domanda: «Betta l'apetta è nascosta dietro a una carta che ha delle farfalle?»).                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Farfalle  | Posizione | A sinistra<br>A destra                 | La scelta di queste tre variabili posizionali consente di concentrarsi sugli aspetti spaziali e topologici, comprese le relazioni sopra-sotto e destra-sinistra.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Foglia    | Posizione | A sinistra<br>A destra                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Bruco     | Posizione | Sul petalo<br>Sulla foglia<br>Sul vaso |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

Tabella 2. Analisi della "matematica nel mazzo" del gioco *Betta l'apetta*.

3. Il *subitizing* è la capacità di percepire istantaneamente il numero di oggetti in un piccolo insieme (di numerosità minore o uguale a 5) senza doverli contare esplicitamente. Secondo Dehaene (1992), questa abilità si basa su un meccanismo preverbale e intuitivo del sistema numerico umano, distinto dal processo di conteggio.

Come si può vedere nella tabella, tutte le variabili sono visualizzate in tre modalità, ad eccezione della posizione della foglia e della posizione delle farfalle, che possono essere solo a destra o a sinistra. Le dinamiche di gioco attivano nei giocatori ragionamenti basati su alcuni principi logici che caratterizzano quella che abbiamo denominato la "matematica nel gioco". Li esplicitiamo nella **Tabella 3**, con riferimento alle tre fasi principali del gioco: formulare le domande, rispondere alle domande e scartare le carte.

|                        |                         | Fasi di gioco        |                         |                   |
|------------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------|-------------------|
|                        |                         | Formulare le domande | Rispondere alle domande | Scartare le carte |
| "matematica nel gioco" | Legge del terzo escluso | ✓                    | ✓                       | ✓                 |
|                        | Negazione               |                      |                         | ✓                 |
|                        | Implicazione materiale  |                      |                         | ✓                 |
|                        | Ragionamento per casi   | ✓                    | ✓                       |                   |

Tabella 3. I principi logici nella "matematica nel gioco" e la loro implementazione nelle fasi di gioco.

I principi logici individuati sono fondamentali in tutte e tre le fasi del gioco: la legge del terzo escluso emerge in tutte e tre le fasi "formulare le domande", "rispondere alle domande" e "scartare le carte"; la negazione emerge nella fase "scartare le carte", così come l'implicazione materiale; il ragionamento per casi, invece, emerge nelle fasi "formulare le domande" e "rispondere alle domande". Analizziamo ora nel dettaglio come questi principi si realizzino nelle varie fasi del gioco, nella convinzione che questo tipo di approfondimento, benché possa apparire a tratti denso, rappresenti un contributo essenziale a quel "sapere sapiente" (Chevallard, 1999) indispensabile per una trasposizione didattica efficace.

Il primo principio, illustrato nella **Tabella 3**, riguarda la legge del terzo escluso. La legge del terzo escluso, applicata al gioco *Betta l'apetta*, afferma che Betta può essere nascosta sotto una carta che ha una certa modalità oppure sotto una carta che non ha quella modalità, e che non vi sia dunque una terza possibilità. Infatti, ad esempio, Betta può essere nascosta solo sotto una carta in cui il vaso è rosa o sotto una carta in cui il vaso non è rosa. La legge del terzo escluso è soggiacente al gioco stesso e deve essere applicata dai trovatori per porre una domanda che abbia come risposta «Sì» o «No» e dai nasconditori per poter effettivamente rispondere affermativamente o meno. Nella fase "formulare le domande" la legge del terzo escluso è istanziata nel tipo di domanda previsto dalle regole del gioco, ossia una domanda la cui risposta possa essere o «Sì» o «No». In base a tale regola un trovatore non potrà, quindi, formulare domande che non soddisfano il principio del terzo escluso, come ad esempio «Di che colore è il vaso sotto cui è nascosta Betta?». La legge guida anche la fase "rispondere alle domande"; per esempio, alla domanda «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta con il vaso rosa?», la risposta potrà essere unicamente e con certezza o «Sì», o «No». Di conseguenza nella fase "scartare le carte" si deciderà se ogni carta verrà scartata o tenuta in base alla risposta fornita alla domanda.

Il secondo principio si riferisce all'operazione logica della negazione, ed è coinvolto nella fase "scartare le carte". Per realizzare correttamente questa fase, infatti, le risposte fornite dal nasconditore al trovatore dovranno essere riformulate, implicitamente o esplicitamente, in termini di negazione del



verbo essere (nel suo valore di predicato che introduce un complemento di stato), al fine di capire dove *non* è Betta, e togliere dal tavolo le carte corrispondenti.<sup>4</sup> Per illustrare i due casi possibili, ci aiutiamo con due esempi.

Caso 1:

Trovatore: «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta con il vaso rosa?»  
Nasconditore: «No».

Il trovatore interpreta la risposta negativa alla sua domanda in termini di un'informazione su dove *non* è nascosta Betta: «Betta *non* è sotto una carta con il vaso rosa».

Caso 2:

Trovatore: «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta con il vaso rosa?»  
Nasconditore: «Sì».

Il trovatore interpreta la risposta positiva alla sua domanda come informazione su dove *non* è nascosta Betta: «Betta *non* è sotto una carta con il vaso non-rosa».

Come si vede in questo secondo caso occorre gestire una doppia negazione, la prima riguardante il verbo essere, e la seconda la modalità.

Nella fase "scartare le carte", ha un ruolo importante anche il terzo principio logico, ossia l'implicazione materiale. Nello specifico, nel caso 1 se Betta non è sotto una carta con il vaso rosa *allora* si possono scartare con tranquillità tutte le carte con il vaso rosa, sapendo che la carta Betta non si troverà sotto una di queste; similmente, nel caso 2 se Betta è sotto una carta con il vaso rosa, *allora* non è sotto una carta con il vaso non-rosa, *allora* le carte da scartare sono tutte quelle con il vaso non-rosa, ossia quelle con il vaso blu o rosso.

Infine, l'aspetto del ragionamento per casi soggiace al gioco stesso e garantisce che il compito complesso di individuare dove è nascosta una carta a partire da 24 carte possa essere semplificato, riducendo via via il numero di carte, formulando e rispondendo a domande relative a una sola delle modalità presenti per ogni variabile. Ogni volta che vengono eliminate delle carte, la situazione di gioco che si manifesta ai giocatori è meno complessa di quella precedente, sia dal punto di vista della numerosità delle carte, sia da quello della loro variabilità; infatti, per ogni domanda che porta all'eliminazione di carte, non solo si riduce il numero di carte, ma si elimina anche almeno una modalità. Ad esempio, se la prima domanda di una partita fosse «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta con il vaso rosa?» e la risposta fosse negativa, allora si scarterebbero le 9 carte che hanno il vaso rosa e il colore dei vasi in gioco sarebbe solamente o blu o rosso. Il fatto di giungere, dopo un numero finito di domande, all'eliminazione di tutte le carte tranne una, e quindi di poter affermare con certezza sotto quale carta si trovi Betta, è garantito dal modo in cui è stato composto il mazzo, nel quale, come abbiamo detto, ogni carta differisce dalle altre per almeno una modalità. Attraverso le azioni compiute nel gioco, le domande e le risposte fornite, i bambini e le bambine familiarizzano con aspetti logici e matematici che a nostro avviso possono contribuire a uno dei traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria: «Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri» (MIUR, 2012, p. 61).

4. Ricordiamo che stiamo facendo chiarezza a livello di sapere e non suggerendo riformulazioni da proporre in aula: tali riformulazioni potranno eventualmente esserci, ma dovranno emergere a partire dai contributi dei bambini partecipanti al gioco.

### 3 Giocare a scuola con *Betta l'apetta*

Per un utilizzo in classe che possa sfruttare al meglio la ricchezza di stimoli presenti nel contesto del gioco, riteniamo sia opportuno far precedere al gioco vero e proprio una fase di scoperta del mazzo. Questa fase dovrebbe aiutare i giocatori a notare le variabili e le modalità con cui è stato progettato il mazzo. Durante la fase di scoperta, l'insegnante che facilita il gioco dispone le 24 carte fiore sul tavolo (di solito organizzate in tre o quattro file) e guida i giocatori a esplorarle ponendo domande formulate con cura. Alcuni esempi sono: «Avete osservato bene tutte queste carte? Che cosa è rappresentato?», «Riuscite a vedere delle somiglianze tra alcune carte? E le differenze?», o altre domande simili volte a incoraggiare l'osservazione e la percezione e ad assicurarsi che tutti i bambini conoscano i nomi delle caratteristiche osservate sulle carte (cioè tutte le modalità e le variabili). Una volta che i giocatori hanno preso confidenza con le carte, in particolare con la "matematica nel mazzo", si può dare inizio alla fase di gioco. Poiché nelle carte da gioco è anche presente la modalità destra/sinistra per le posizioni di foglia e farfalle, è auspicabile accertarsi che tutti i bambini possano avere lo stesso punto di vista sulle carte, in modo da non creare ambiguità, ad esempio predisponendo il tavolo da gioco in modo che tutti i bambini si siedano dallo stesso lato (Figura 2).

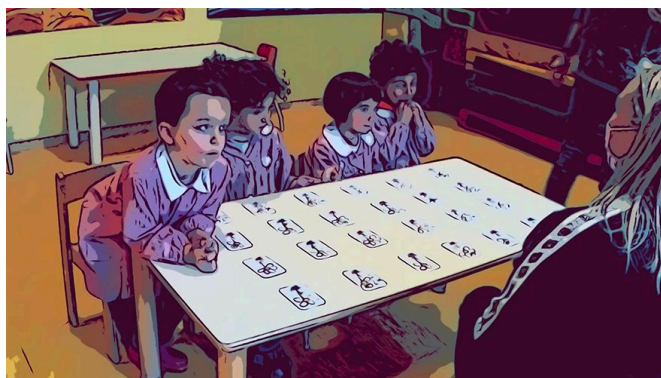


Figura 2. Bambini nei ruoli di nasconditore (a sinistra) e trovatori disposti dallo stesso lato del tavolo.

Come anticipato nella precedente sezione, i ruoli di gioco veri e propri sono due: il nasconditore e il trovatore, e nel corso di partite successive i giocatori possono alternarsi nel ricoprirli. Nell'utilizzo del gioco in classe può essere previsto un terzo ruolo, quello dell'osservatore imparziale, che non partecipa alle fasi di porre domande, rispondere e girare le carte, ma osserva le dinamiche di gioco e può intervenire come supporto al corretto svolgimento del gioco. Inoltre i ruoli di nasconditore e trovatore possono essere ricoperti anche da più di un bambino. Nel caso in cui siano presenti più di un nasconditore, i bambini dovranno accordarsi su dove nascondere Betta l'apetta e sulle risposte da dare alle domande. Se sono presenti più trovatori, è sufficiente che i bambini pongano le domande a turno e si aiutino nell'eliminare le carte.

Durante le sperimentazioni con i bambini di 4 e 5 anni, abbiamo notato che non sempre la formulazione della domanda risultava essere accessibile a tutti: talvolta infatti abbiamo rilevato difficoltà nell'individuare variabili e modalità sulle quali porre la domanda. Questa osservazione empirica e la sua successiva discussione nel gruppo di ricerca ci ha portato a sviluppare la "ruota delle variabili e delle modalità", che i giocatori possono far girare prima di porre una domanda. La ruota, suddivisa in spicchi, presenta alcune rappresentazioni di variabili o di modalità. Facendo girare la ruota verrà indicata la variabile o la modalità rispetto alle quali deve essere posta la domanda (Figura 3).

La ruota delle variabili e delle modalità ha molteplici funzioni. Assiste i giocatori suggerendo una variabile o una modalità per la quale porre una domanda quando non sono sicuri. Inoltre, obbliga i giocatori a formulare domande su una specifica variabile della “matematica nel mazzo” che potrebbe essere diversa da quella che il giocatore sceglierebbe. Man mano che il gioco procede e rimangono meno carte, la ruota può guidare i giocatori verso variabili o modalità in cui è possibile porre solo domande inefficaci (ossia domande la cui risposta non consente di eliminare alcuna carta). Questa funzione offre agli insegnanti l'opportunità di concentrarsi su queste situazioni e di coinvolgere i giocatori nella riflessione sul processo di selezione di domande efficaci per il gioco.

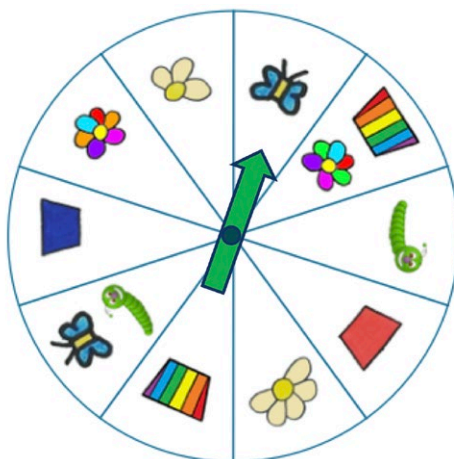


Figura 3. La ruota delle variabili e delle modalità («Fate una domanda sulle farfalle»).

La Figura 4 mostra un'altra ruota con una freccia rossa, denominata “ruota del no”. Questa freccia indica una variabile o una modalità sulla quale, in quel turno di gioco, non è possibile formulare una domanda. Questa versione della ruota sfida i giocatori a concentrarsi su variabili o modalità complementari a quella indicata dalla freccia, rafforzando l'uso del ragionamento per casi.

Un'ultima nota: queste espansioni non solo rendono il gioco più facile o più impegnativo, ma ne aumentano anche la giocosità. Far girare la ruota e aspettare il risultato delle frecce è infatti un'attività che i piccoli giocatori trovano divertente.

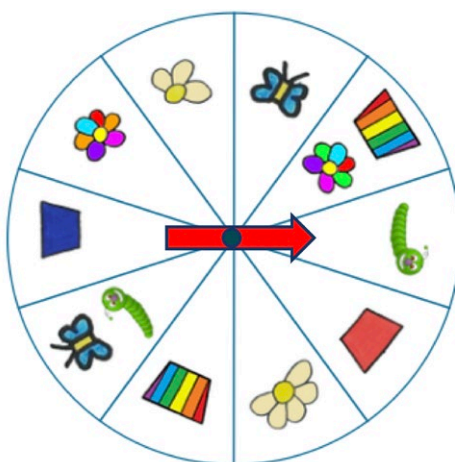


Figura 4. La ruota del no («Non fate una domanda sul bruco»).

## 4 Dal gioco per giocare al gioco per riflettere

---

Fin dalle prime sperimentazioni nelle scuole dell'infanzia e discussioni nel gruppo di ricerca-azione, è stato possibile constatare che *Betta l'apetta* è un gioco molto divertente per i bambini. Dalle prime osservazioni è anche emerso che il gioco ha le potenzialità di generare ricche discussioni matematiche adatte per i primi anni di scuola primaria. È nata così l'idea di proporre *Betta l'apetta* anche in classi prime e seconde, andando a dare maggiore enfasi alla componente di riflessione insieme agli studenti. Per non dover interrompere il gioco senza tuttavia rinunciare alla ricchezza di stimoli provenienti dal gioco stesso abbiamo scelto di concentrare le discussioni ad una fase successiva a quella di gioco, una fase in cui l'insegnante possa stimolare la riflessione grazie all'utilizzo di risorse didattiche collegate al gioco di *Betta l'apetta* opportunamente progettate. Si amplia così l'uso che si può fare del gioco: dal *gioco per giocare*, inteso come gioco che può essere giocato anche in un contesto informale, come durante il tempo libero a scuola o in famiglia, al *gioco per riflettere*, supportando riflessioni e discussioni nel contesto scolastico che possono consolidare i contenuti matematici intravisti nelle fasi di gioco.

Le risorse didattiche che sono state finora progettate, nella forma di albi illustrati, video e schede di lavoro, mirano ad approfondire e ad avviare la discussione sui seguenti aspetti:

- le variabili e sulle modalità delle carte;
- le condizioni sufficienti all'individuazione di una carta;
- le domande "inefficaci", intese come quelle domande che hanno una risposta sì o no ma che, in una determinata situazione di gioco, non consentono l'eliminazione delle carte;
- le domande "rischiose", intese come quelle domande che possono portare all'eliminazione di un consistente numero di carte o a un numero molto esiguo a seconda del caso e avvio alla formulazione di strategie in termini probabilistici.

### 4.1 Risorse per la riflessione sulle variabili e sulle modalità delle carte

La prima risorsa che abbiamo sviluppato per incoraggiare la riflessione sulle variabili e sulle modalità presenti nel mazzo è un albo illustrato, intitolato "*Ciascun\* divers\* e tutt\* uguali con Betta l'apetta*", pensato per l'utilizzo alla scuola dell'infanzia durante la fase preliminare di scoperta del mazzo (si vedano alcune pagine in Figura 5). L'albo, che fa parte del lavoro di tesi di laurea di Alessia Prandi,<sup>5</sup> introduce Betta e le caratteristiche delle carte fiore in un contesto narrativo: Betta è una piccola ape che ama volare tra i fiori del giardino di una scuola, curato da un giardiniere che, per tener pulito e in ordine il giardino, suddivide i fiori in base ad alcune caratteristiche, come ad esempio il colore dei vasi (Figura 5b). I bambini della scuola notano che il colore dei vasi non è l'unica caratteristica che distingue i fiori del giardino e, via via che vengono sfogliate le pagine dell'albo, i lettori scoprono la ricchezza e la bellezza dei fiori, ognuno nella propria specificità, che viene paragonata all'unicità di ciascun bambino della scuola. L'albo offre anche l'opportunità di esplorare la numerosità di ciascuna modalità: si scopre così, ad esempio, che le carte con il vaso rosa sono 9, quelle con il vaso rosso sono 8 e quelle con il vaso blu sono 7. L'albo si chiude con l'invito ai lettori a giocare a nascondino nel giardino della scuola con Betta, presentando la disposizione delle 24 carte fiore sul tavolo di gioco e invitando, di fatto, ad avviare la prima partita.

---

5. Lavoro di tesi di Alessia Prandi (2025), intitolato "*Ciascun\* divers\* e tutt\* uguali con Betta l'apetta*. Un albo illustrato per promuovere gli aspetti logico-matematici alla scuola dell'infanzia", sulle tematiche della didattica della matematica e dell'inclusione nella scuola dell'infanzia, svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in scienze della formazione primaria, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino. Relatori: Raffaele Casì e Carlotta Soldano.



Figura 5. a) Frontespizio dell'albo Betta l'apetta; b) Pagina dell'albo con la modalità dei vasi rosa; c) Pagina dell'albo con il conteggio dei vasi rosa.

La seconda risorsa sviluppata riguarda alcune attività pensate per le classi di prima e seconda primaria, da proporre immediatamente dopo le prime partite in classe (le consegne delle attività sono riportate nell'[Allegato 1](#)). Le attività, che sono state ideate e sperimentate dalle maestre Elisa Pera (membro del gruppo *Matematica 011*) e Chiara Tappero in una classe prima, invitano gli studenti a descrivere il mazzo utilizzando una modalità mista di simboli e parole (Figura 6). La scelta dell'utilizzo dei simboli, concordata con gli alunni prima di iniziare l'attività, risponde a due esigenze: una pratica, di riduzione del carico di lavoro di scrittura, per agevolarne l'utilizzo nei primi mesi di scuola primaria, e una più epistemica, di introduzione di un sistema di rappresentazione simbolico condiviso per far riferimento alle variabili e alle loro modalità nel mazzo. Dall'osservazione e successiva discussione in classe discende la rappresentazione, grazie alla quale si scopre la numerosità di ciascuna modalità, come si evince dalla Figura 6b. Le pagine dei quaderni degli allievi riportate nelle Figure 6c e 6d mostrano l'uso del sistema simbolico condiviso per annotare domande e/o risposte.

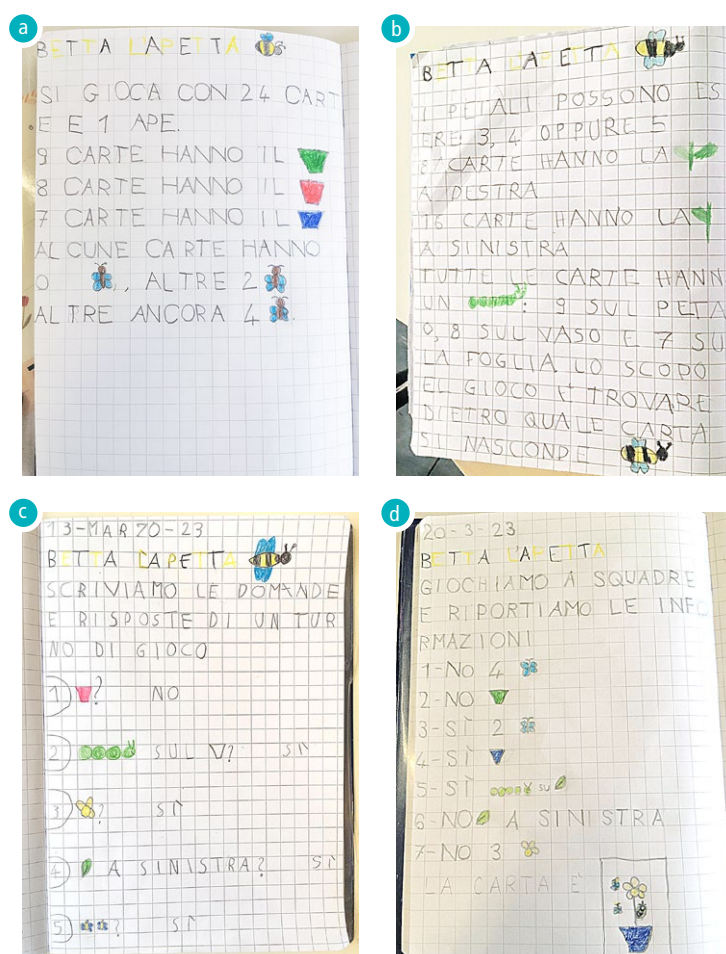


Figura 6. Alcune pagine dei quaderni degli allievi che descrivono il mazzo di carte (a, b) e annotano domande e risposte di una partita (c, d).



## 4.2 Risorse per lavorare su condizioni sufficienti

In linea con i lavori riportati sui quaderni presentati nel par. 4.1, riteniamo sia importante lavorare con i bambini sulle informazioni sufficienti per individuare la carta dove è nascosta Betta. Pertanto abbiamo progettato, insieme alle insegnanti Elisa Pera e Chiara Tappero, una scheda che li spinga ad osservare la situazione di gioco da una prospettiva diversa: invece di partire da una partita giocata per descriverla, si propone di partire dalla descrizione di una partita e si chiede di immaginare di giocarla. La scheda riportata in Figura 7a (disponibile nell'[Allegato 2](#)) presenta, infatti, le risposte fornite da una classe immaginaria, all'interno di una partita di gioco che ha condotto alla scoperta della carta sotto cui è nascosta Betta. Come nelle schede illustrate nella sezione precedente, le risposte sono espresse utilizzando parole e simboli concordati dalla classe per riferirsi alle variabili. Per svolgere l'attività, i bambini possono interpretare le risposte ed eliminare progressivamente le carte, ripercorrendo l'intera partita giocata, oppure possono ragionare direttamente sulle risposte fornite per individuare la carta del mazzo che corrisponde a tutte le informazioni ricavate. La scheda in Figura 7b (disponibile nell'[Allegato 3](#)), invece, si discosta dalla dinamica del gioco: anziché fornire le informazioni sulla carta come risposte date in una partita immaginaria, elenca direttamente le caratteristiche che deve possedere o non possedere la carta sotto cui è nascosta Betta. Questa scheda può essere considerata una variante della precedente, poiché richiede ai bambini di individuare, a partire da sei carte, quella corretta, escludendo progressivamente le carte che non rispettano i criteri descritti a parole, oppure cercando direttamente quella che li possiede tutti contemporaneamente.

**a**

NOME E COGNOME: \_\_\_\_\_

LA CLASSE 1° A DI UN'ALTRA SCUOLA DI TORINO HA GIOCATO A "BETTA L'APETTA" E HA RIPORTATO SU UN FOGLIO I PASSAGGI DELLA PARTITA.  
PROVATE A RIPRODURRE CON LE CARTE QUELLA STESSA PARTITA: SCOPRITE DIETRO QUALE CARTA AVEVANO NASCOSTO "BETTA L'APETTA"!

1) NO  SU 

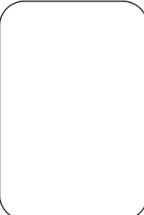
2) SÌ 4 

3) NO  A SINISTRA

4) SÌ 4 

5) SÌ  ROSSO

DESEGNATE LA CARTA →



**b**

NOME E COGNOME: \_\_\_\_\_

LA CARTA DIETRO CUI SI NASCONDE "BETTA L'APETTA" HA QUESTE CARATTERISTICHE

HA IL BRUCO SUL VASO

HA 0 FARFALLE

NON HA 3 PETALI

HA LA FOGLIA A DESTRA

QUALE DI QUESTE CARTE È?

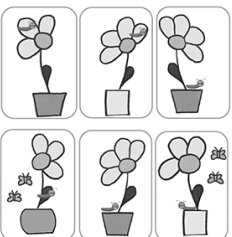


Figura 7. Attività proposte a partire da informazioni fornite su una partita immaginaria.

Nella scheda in Figura 7a, le informazioni fornite non sono sufficienti a individuare con sicurezza la carta sotto cui si nasconde Betta, che potrebbe infatti avere il bruco sul petalo o sullo stelo. Questa potrebbe essere l'occasione per notare con gli allievi come a partire dalle stesse informazioni fornite, sia possibile rappresentare carte differenti, anche non facenti parte del mazzo.

Nella scheda in Figura 7b, invece, le informazioni fornite sono sufficienti ad individuare la carta nell'insieme delle sei carte proposte. Per lavorare con i bambini su questo aspetto si potrebbe coprire un'informazione per volta e chiedere se le rimanenti sono sufficienti per individuare con certezza una carta o se quella coperta è necessaria per fare chiarezza. In questo modo, si scopre che tutte le carte che non hanno tre petali sono anche senza farfalle, quindi è sufficiente fornire solo una delle due informazioni tra «Ha 0 farfalle» e «Non ha 3 petali», insieme alle rimanenti due caratteristiche.

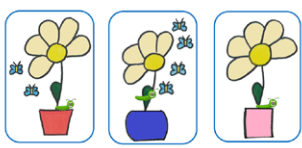


#### 4.3 Risorse per distinguere domande “efficaci” e “inefficaci”

Le risorse didattiche che abbiamo sviluppato per incoraggiare la riflessione sulle domande efficaci e inefficaci riguardano schede di lavoro che simulano situazioni di gioco con un numero ridotto di carte, appositamente selezionate per concentrarsi sulle risposte alle domande inefficaci e sulla loro formulazione. Le schede (disponibili negli Allegati 4 e 5) sono state oggetto del lavoro di tesi di Noemi Zenari<sup>6</sup> e sono state sperimentate in una classe seconda primaria.

**a**

BETTA L'APETTA È NASCOSTA SOTTO UNA DELLE TRE CARTE.  
OSSERVA LE CARTE E RISPONDI ALLA DOMANDA.



BETTA L'APETTA SI TROVA SOTTO LA CARTA CHE HA IL BRUCO SUL PETALO?

☐ SICURAMENTE NO    ☐ SICURAMENTE SÌ    ☐ FORSE SÌ

SPIEGA PERCHÉ

---



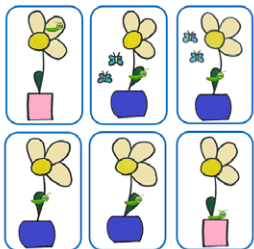
---



---

**b**

BETTA L'APETTA È NASCOSTA SOTTO UNA DI QUESTE SEI CARTE.



FORMULA UNA DOMANDA EFFICACE AL FINE DI SCOPRIRE DOVE È NASCOSTA BETTA

---



---



---

FORMULA UNA DOMANDA INEFFICACE AL FINE DI SCOPRIRE DOVE È NASCOSTA BETTA

---



---



---

Figura 8. a) Attività sulla risposta a domande inefficaci; b) Formulazione di domande efficaci e inefficaci.

Nella prima tipologia di schede di lavoro, di cui forniamo un esempio in Figura 8a, gli studenti sono invitati a riflettere sulle risposte attese e sulle implicazioni di domande inefficaci attraverso lo stimolo di rispondere a una domanda inefficace per una situazione proposta. Nell'esempio, si chiede quale sarebbe la risposta alla domanda «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta con il bruco sul petalo?», selezionando una delle seguenti opzioni: «Sicuramente sì», «Sicuramente no», «Forse sì». Dal momento che nessuna delle tre carte presenta la modalità “Bruco sul petalo”, la risposta sarà «Sicuramente no» e non permetterà di eliminare nessuna delle tre carte. La scheda può avviare la riflessione sul fatto che le domande inefficaci, già incontrate nelle partite precedenti e individuate in quanto non producono avanzamento nel gioco, hanno sempre risposta «Certamente sì/no», indipendentemente dalla posizione nella quale si trova Betta. Nella seconda tipologia di schede di lavoro (Figura 8b), viene chiesto agli studenti di formulare domande efficaci e inefficaci in base alla situazione di gioco. In questo caso, un esempio di domanda efficace potrebbe essere «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta con il vaso rosa?», mentre un esempio di domanda inefficace potrebbe essere «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta in cui il fiore ha tre petali?».

La riflessione sulle domande inefficaci può essere avviata anche attraverso brevi video che mostrano situazioni di gioco rispetto alle quali vengono formulate alcune domande. La risorsa video risulta particolarmente efficace nel mettere in luce che una stessa situazione iniziale possa evolvere in due modi diversi, simulando una sorta di macchina del tempo in grado di tornare indietro annullando l'ultima domanda fatta e mostrando gli effetti di una diversa domanda. Ad esempio, due video<sup>7</sup> possono partire dalla stessa situazione iniziale (Figura 9a), ma poi evolvere in modo diverso in base

6. Lavoro di tesi di Noemi Zenari (2024), intitolato “Dal gioco di Betta l'apetta allo sviluppo di risorse didattiche per promuovere il pensiero logico e le abilità di problem solving: una sperimentazione alla scuola primaria”, svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in scienze della formazione primaria, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino. Relatrici: Carlotta Soldano e Cristina Sabena.

7. Link al video con domanda efficace: <https://drive.google.com/file/d/1dreSa4eBJSBQYbZe005Oor9hfGfhO4zd/view>. Link al video con domanda inefficace: <https://drive.google.com/file/d/1ReL2SGlxcrcf7d2P5zwWw4Cx2HC2U8U8/view>.

alla domanda posta. Nel primo video, viene formulata la domanda efficace «Betta l'apetta è sotto una carta con il fiore che ha cinque petali?», che porta all'eliminazione di diverse carte (Figura 9b). Al contrario, la domanda del secondo video è inefficace: «Betta l'apetta è sotto una carta con un vaso rosso?», e non porta all'eliminazione di nessuna carta perché tutte le carte rimanenti mostrano un vaso rosso (Figura 9c).

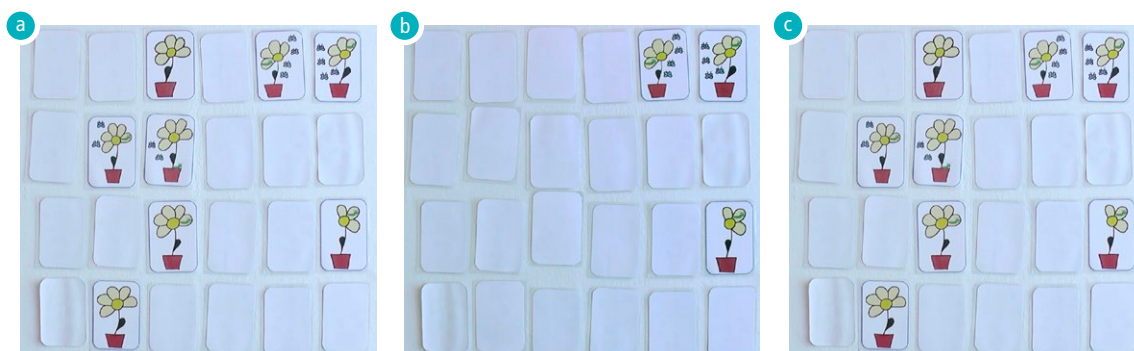


Figura 9. a) Situazione iniziale; b) Effetto della domanda efficace; c) Effetto della domanda inefficace.

#### 4.4 Risorse per distinguere domande “rischiose” e “non rischiose”

La potenzialità offerta dal gioco *Betta l'apetta* di riflettere sulle possibili strategie di gioco viene esplorata attraverso due risorse, che permettono di sperimentare situazioni più o meno rischiose in specifici episodi di gioco, come ad esempio quello proposto in Figura 10a.

In una configurazione di carte come quella in figura, si può scegliere se porre domande rischiose o non rischiose. La prima tipologia può essere esemplificata dalla domanda «Betta l'apetta è nascosta dietro a una carta in cui il fiore ha tre petali?». In questo caso, se Betta è nascosta dietro a una carta in cui il fiore ha tre petali, la risposta del nasconditore sarà «Sì» e verranno eliminate dal gioco 8 carte su 12; se invece Betta non è nascosta dietro a una carta in cui il fiore ha tre petali, la risposta del nasconditore sarà «No» e verranno eliminate dal gioco 4 carte su 12. Un esempio di domanda non rischiosa è la seguente: «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta che ha il vaso rosso?». In questo caso, infatti, se Betta è nascosta dietro a una carta che ha il vaso rosso, la risposta del nasconditore sarà «Sì» e verranno eliminate 6 carte su 12, esattamente lo stesso numero di carte eliminate nel caso di risposta «No». Possiamo allora definire le domande che permettono di eliminare un numero di carte elevato oppure esiguo a seconda della risposta come domande rischiose, mentre le domande che consentono di eliminare lo stesso numero di carte indipendentemente dalla risposta come domande non rischiose.

Dall'analisi della possibilità che si presentino domande rischiose o non rischiose nasce la prima risorsa didattica: due video, realizzati per il lavoro di tesi di Noemi Zenari, che presentano situazioni di partenza differenti per le quali viene posta la stessa domanda. Nel primo video vengono mostrate 10 carte, di cui 8 hanno il vaso rosso e 2 il vaso blu, accompagnate dalla domanda: «Betta l'apetta è nascosta sotto una carta con un vaso rosso?». Il video non rivela quali carte sono state rimosse, spingendo gli studenti a discutere se avrebbero fatto questa domanda e il loro ragionamento. Nel secondo video viene mostrata una situazione in cui la metà delle carte presenti sul tavolo da gioco ha il vaso rosso, mentre l'altra metà il vaso blu. In questo scenario, indipendentemente dalla risposta, la metà delle carte rimanenti viene eliminata. Queste situazioni possono stimolare la discussione sugli aspetti probabilistici legati alla domanda e sul concetto di strategie efficaci per vincere.

La seconda risorsa didattica sviluppata per lavorare sull'aspetto delle domande rischiose è l'artefatto che abbiamo chiamato la “moneta del rischio”. L'utilizzo di questo artefatto è previsto durante la fase di gioco, prima della formulazione di una domanda. Il trovatore lancia la moneta, che presenta su una

faccia la scritta "Rischio", e sull'altra faccia "Non rischio" (vedi Figura 10b). A seconda del responso della moneta, il trovatore cercherà di formulare una domanda rischiosa o non rischiosa, e tutti i giocatori potranno osservare l'esito della risposta data dal nasconditore nella fase di eliminazione delle carte.

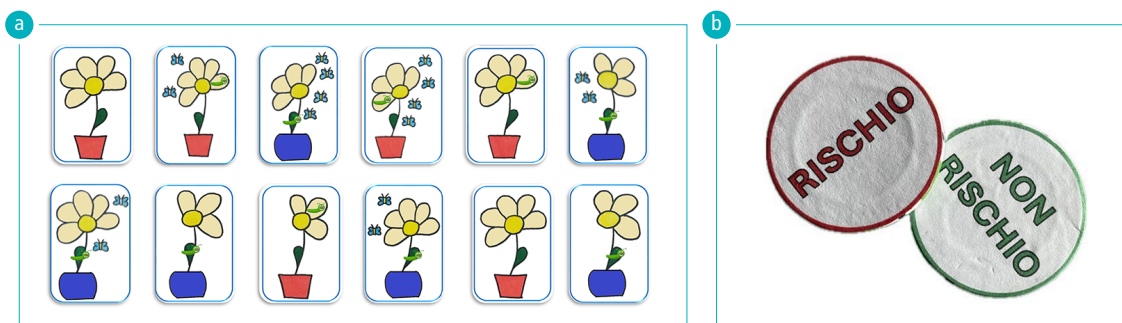


Figura 10. a) Carte proposte per riflettere su domande rischiose e non rischiose; b) Moneta da lanciare.

## 5 Riflessioni conclusive

In questo articolo abbiamo presentato e analizzato dal punto di vista epistemico e didattico il gioco di carte *Betta l'apetta* e alcune risorse didattiche sviluppate a partire dal gioco stesso, proposti come contesti adatti a promuovere lo sviluppo del ragionamento logico nella scuola dell'infanzia e nei primi anni della scuola primaria. Sia il gioco sia le risorse didattiche sono il frutto della collaborazione all'interno del gruppo di ricerca-azione *Matematica 011* dell'Università di Torino e sono stati progettati attraverso un ciclo alternato di discussioni e sessioni didattiche sperimentali. Il risultato di questo lavoro di progettazione e ricerca ha portato alla creazione di un gioco che, a nostro avviso, rientra nella categoria dei giochi matematici ricchi di contenuto educativo, come definito da Russo et al. (2018). Il gioco, infatti, soddisfa il primo principio, ovvero il coinvolgimento degli studenti: nelle numerose sessioni didattiche sperimentali abbiamo riscontrato un grande apprezzamento da parte dei bambini. Le insegnanti hanno riferito che gli studenti desideravano giocare a *Betta l'apetta* anche al di fuori delle lezioni, ad esempio durante l'intervallo o la pausa pranzo. Durante le sessioni osservate, i bambini erano entusiasti e curiosi di scoprire sotto quale carta fosse nascosta Betta; ascoltavano con attenzione le domande e le risposte formulate dal trovatore e dal nasconditore, anche quando non era il loro turno, ed erano pronti a intervenire per correggere domande errate o segnalare quesiti inefficaci. Il gioco soddisfa anche il secondo principio, ossia il bilanciamento tra abilità e fortuna. La fortuna entra in gioco quando una domanda permette di eliminare un gran numero di carte, ad esempio quando, con la prima domanda, si riesce a escludere due terzi del mazzo. Tuttavia, trovare Betta non è solo una questione di fortuna: è necessaria anche abilità nel formulare domande efficaci per non sprecare turni. A tale scopo, le risorse didattiche sviluppate aiutano i bambini a riflettere su domande rischiose e inefficaci attraverso schede di lavoro e video. Come emerge dall'analisi del sapere coinvolto, anche il terzo principio, ovvero la centralità della matematica, è soddisfatto. Per quanto riguarda la "matematica nel mazzo", tutte le variabili scelte, eccetto il colore del vaso, sono di natura spaziale o numerica. Oltre a osservare queste variabili nel gioco, i bambini vi riflettono grazie alle risorse didattiche predisposte, come l'albo illustrato e le schede di lavoro incentrate sulla composizione del mazzo. La matematica è centrale anche nella "matematica nel gioco", come si evince dall'uso di principi logici essenziali per il gioco, quali la negazione, l'implicazione materiale, il ragionamento per casi e la legge del terzo escluso, fondamentali nelle tre fasi del gioco: formulare le domande, rispondere alle

domande e scartare le carte. Inoltre, attraverso le risorse didattiche, è possibile promuovere il ragionamento strategico e la riflessione sugli aspetti deduttivi del ragionamento logico, entrambi cruciali per sviluppare competenze di problem solving in matematica. Questi processi permettono ai bambini di sviluppare processi di anticipazione degli esiti di un piano d'azione e di controllo sull'implementazione di un piano d'azione. Il quarto principio, ovvero la flessibilità per l'insegnamento e l'apprendimento, si manifesta nelle numerose risorse didattiche sviluppate a partire dal gioco e in quelle ancora in fase di progettazione, come nuove "ruote della fortuna" per introdurre il ragionamento probabilistico. Infine, il quinto principio, ovvero la connessione tra casa e scuola, è attualmente in fase di sperimentazione presso una scuola dell'infanzia di Torino, dove il gioco è stato proposto agli studenti. Per il periodo natalizio, è stato fornito un mazzo di carte a ciascun bambino affinché potesse giocare a casa con i genitori. I dati raccolti tramite questionari e focus group hanno evidenziato un forte entusiasmo e apprezzamento del gioco anche da parte delle famiglie.

Sulla scia di *Betta l'apetta* sono stati progettati altri giochi con differenti Matematiche nel mazzo, adatti anche a studenti degli ultimi anni della scuola primaria. Tra questi vi sono *Otto il maialotto*, sviluppato nel lavoro di tesi di Francesca Amianto,<sup>8</sup> incentrato sulla relazione di multiplo e sull'uso dei quantificatori, *Gisella la pipistrella*, sviluppato nel lavoro di tesi di Elisa Giusiano,<sup>9</sup> focalizzato sulle proprietà geometriche di quadrilateri e triangoli in posizioni non prototipiche, e *Ciccio il riccio*, sviluppato nel lavoro di tesi di Chiara Cantoni,<sup>10</sup> riguardante le successioni e i pattern di numeri. I materiali saranno resi disponibili gratuitamente sul sito [www.dfedidamath.unito.it](http://www.dfedidamath.unito.it), nella sezione "giochi di carte". Invitiamo gli insegnanti che li proveranno nelle loro classi a inviarci feedback e commenti, in un'ottica di ricerca per l'innovazione dove la conoscenza matematica e il divertimento possano reciprocamente nutrirsi.

## Ringraziamenti

Ringraziamo le due studentesse insegnanti Michela Curcio e Michela Vassallo e le insegnanti Erika Abena, Luisa Franco, Mara Gentilini, Monica Mantovan, Sabrina Sansebastiano, Maria Antonietta Simeoli e Tiziana Villa per la loro partecipazione alla discussione che ha portato alla progettazione e alla sperimentazione didattica del gioco *Betta l'apetta*. Ringraziamo inoltre Alessia Prandi, Elisa Pera, Chiara Tappero e Noemi Zenari per il loro contributo nella progettazione delle risorse didattiche del gioco.

---

8. Lavoro di tesi di Francesca Amianto (2024), intitolato "Dove si è nascosto Otto il maialotto? Un gioco di carte per sviluppare le competenze logico-matematiche alla scuola primaria", svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in scienze della formazione primaria, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino. Relatrici: Carlotta Soldano e Carola Zornotti.

9. Lavoro di tesi di Elisa Giusiano (2025), intitolato "Dove si è nascosta Gisella la pipistrella? Un gioco di carte per promuovere il riconoscimento di proprietà geometriche in figure non prototipiche", svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in scienze della formazione primaria, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino. Relatrici: Carlotta Soldano e Raffaele Casì.

10. Lavoro di tesi di Chiara Cantoni (2025), intitolato "Dove si è nascosto Ciccio il riccio? Un gioco di carte su abilità logiche e regolarità numeriche alla scuola primaria", svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in Scienze della formazione primaria, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino. Relatori: Raffaele Casì e Carlotta Soldano.

## Bibliografia

- Amianto, F. (2024). *Dove si è nascosto Otto il maialotto? Un gioco di carte per sviluppare le competenze logico-matematiche alla scuola primaria*. Tesi di laurea magistrale non pubblicata in scienze della formazione primaria. Università degli Studi di Torino.
- Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M. G. (1998). Italian trends in research in mathematics education: A national case study in the international perspective. In J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (vol. 2, pp. 243–262). Kluwer Academic Publishers.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Kluwer Academic Publishers.
- Cantoni, C. (2025). *Dove si è nascosto Ciccio il riccio? Un gioco di carte su abilità logiche e regolarità numeriche alla scuola primaria*. Tesi di laurea magistrale non pubblicata in scienze della formazione primaria. Università degli Studi di Torino.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Dehaene, S. (1992). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.
- Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Nardi, E., & Winsløw, C. (Eds.). (2021). *Research and development in university mathematics education: Overview produced by the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429346859>
- Giusiano, E. (2025). *Dove si è nascosta Gisella la pipistrella? Un gioco di carte per promuovere il riconoscimento di proprietà geometriche in figure non prototipiche*. Tesi di laurea magistrale non pubblicata in scienze della formazione primaria. Università degli Studi di Torino.
- Huizinga, J. (1971). *Homo ludens: A study of the play-element in culture*. Beacon Press. (Prima pubblicazione nel 1938).
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- McKenney, S., & Reeves, T. C. (2019). *Conducting educational design research* (2nd ed.). Routledge.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. [https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254\\_2012.pdf](https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf)
- Prandi, A. (2025). *Ciascun\* divers\* e tutt\* uguali con Betta l'apetta. Un albo illustrato per promuovere gli aspetti logico-matematici alla scuola dell'infanzia*. Tesi di laurea magistrale non pubblicata in scienze della formazione primaria. Università degli Studi di Torino.
- Russo, J., Kalogeropoulos, P., Bragg, L. A., & Heyeres, M. (2024). Non-digital games that promote mathema-

tical learning in primary years students: A systematic review. *Education Sciences*, 14(2), 200. <https://doi.org/10.3390/educsci14020200>

Russo, J., Russo, T., & Bragg, L. A. (2018). Five principles of educationally rich mathematical games. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(3), 30–34.

Zenari, N. (2024). *Dal gioco di Betta l'apetta allo sviluppo di risorse didattiche per promuovere il pensiero logico e le abilità di problem solving. Una sperimentazione alla scuola primaria*. Tesi di laurea magistrale non pubblicata in scienze della formazione primaria. Università degli Studi di Torino.



## La moltiplicazione di *numeri rotti*: un'esperienza didattica sulle frazioni ispirata al Liber Abbaci di Fibonacci

The multiplication of *broken numbers*: an educational experience on fractions inspired by Fibonacci's Liber Abbaci

Silvia Cerasaro\* e Silvia Salvatori°

\*Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" e Liceo Statale "L. Pietrobono", Alatri (FR) – Italia

°Istituto Comprensivo "San Nilo", Grattaferrata (RM) – Italia

✉ [cerasaro@axp.mat.uniroma2.it](mailto:cerasaro@axp.mat.uniroma2.it), [silvia.salvatori@icsanilo.edu.it](mailto:silvia.salvatori@icsanilo.edu.it)

**Sunto** / In questo articolo si racconta un'esperienza didattica svolta presso una scuola secondaria di primo grado sull'uso della storia nella didattica della matematica. In particolare, si descrivono le attività presentate agli studenti della classe seconda in merito alla moltiplicazione tra quelli che Leonardo Pisano Fibonacci denomina nel Liber Abbaci *numeri rotti*, e che altro non sono che moderne frazioni. Le attività presentate sono finalizzate alla comprensione autonoma da parte degli studenti della regola della moltiplicazione tra frazioni; per fare questo, si sono costruite attività laboratoriali che prevedono l'utilizzo di diversi artefatti: la fonte storica, il *vocabolario dei rotti*, aste frazionarie, e altro ancora.

**Parole chiave:** frazione; moltiplicazione; storia delle matematiche; Liber Abbaci.

**Abstract** / This article describes a teaching experience carried out in a lower secondary school about the use of history in mathematics teaching. In particular, it describes the activities presented to 7th grade students regarding the multiplication of those that Leonardo Pisano Fibonacci calls *broken numbers* in the Liber Abbaci, and which are nothing but modern fractions. The activities presented are aimed at the autonomous understanding by the students of the rule of multiplication of fractions; to this purpose, laboratory activities were built that involve the use of various artifacts: the historical source, the *vocabulary of broken numbers*, fractional rods, and more.

**Keywords:** fraction; multiplication; history of mathematics; Liber Abbaci.

# 1 Introduzione

L'esperienza didattica qui presentata nasce da una serie di fortunati incontri, la cui storia viene raccontata come introduzione di questo articolo. Il primo incontro è avvenuto quando la prima autrice, da insegnante della scuola secondaria di primo grado,<sup>1</sup> appassionata di storia delle matematiche fin dagli studi universitari, è venuta a contatto con il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, detto Fibonacci. Tale contatto è avvenuto grazie a un progetto di ricerca curato dai proff. Franco Ghione e Laura Catastini finalizzato alla prima traduzione dal latino all'italiano di questo importante trattato di aritmetica, la cui prima edizione risale al 1202, ampliata e sistemata nel 1228 (Catastini & Ghione, 2023). La prima autrice ha in seguito avviato una collaborazione con Progetto Fibonacci<sup>2</sup> ideando esempi di attività didattiche ispirate all'aritmetica del Liber Abbaci: avendo avuto un positivo riscontro da parte degli alunni in merito agli apprendimenti, alla motivazione e all'interesse durante lo svolgimento delle attività laboratoriali, ha deciso di intraprendere una ricerca più approfondita sulla didattica delle frazioni con l'uso della stessa fonte storica. L'aritmetica dei *numeri rotti* è dunque divenuta oggetto di approfondimento di diversi studi condotti dalla prima autrice come dottoranda presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", nonché oggetto di alcuni corsi di formazione organizzati dall'Ateneo. In uno di tali corsi è avvenuto un altro importante incontro, questa volta tra le due autrici nei ruoli di formatrice e corsista: da questa collaborazione è nata la volontà di sperimentare un percorso sull'aritmetica dei *numeri rotti* in una classe di scuola secondaria di primo grado.

In particolare, in questo articolo vengono mostrate una serie di attività laboratoriali proposte in una classe seconda, finalizzate alla comprensione della moltiplicazione tra due frazioni, il cui risultato è individuato come rapporto tra il prodotto dei numeratori e quello dei denominatori: in simboli, cioè, la consueta uguaglianza  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ .

L'apprendimento delle frazioni e delle operazioni tra frazioni coinvolge aspetti didatticamente molto delicati e fonte di difficoltà per gli studenti (Campolucci et al., 2011; Castelnuovo, 1952), che rischiano di portare a un apprendimento meccanico di procedimenti e formule per eseguire operazioni, con ricadute negative in termini di acquisizione profonda dei significati in gioco. Per questo motivo è importante effettuare scelte didattiche ricche, grazie alle quali lo studente possa esplorare i concetti matematici da diversi punti di vista. Queste considerazioni hanno condotto alla progettazione del percorso descritto nei prossimi paragrafi, risultato dall'integrazione di elementi provenienti dalla storia delle matematiche e dall'uso di artefatti concreti e digitali.

## 2 L'uso della storia nella didattica della matematica

Sviluppare una pianificazione didattica che abbia come perno l'utilizzo della storia delle matematiche significa prendere sul serio l'idea che essa possa favorire, sostenere, e rendere sensato l'apprendimento della disciplina da parte degli studenti. Questa convinzione, d'altra parte, è ben espressa anche nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012, p. 7), in cui si legge che «lo studio dei contesti storici, sociali, culturali nei quali si sono sviluppate le conoscenze è condizione di una loro piena comprensione».

1. La scuola secondaria di primo grado italiana corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

2. Progetto Fibonacci è un gruppo di studiosi che operano "volontariato intellettuale". La loro attività è raccolta in un sito, [www.progettofibonacci.it](http://www.progettofibonacci.it), autogestito e autofinanziato, dove è riportata la prima traduzione in assoluto dal latino in italiano del Liber Abbaci di Leonardo Pisano Fibonacci, realizzata dal gruppo stesso. Gli aderenti al progetto studiano il contenuto storico-matematico del trattato medievale con lo scopo di ideare attività didattiche che utilizzino la storia nella didattica della matematica finalizzata alla diffusione della cultura.

Non solo come cornice narrativa, dunque, ma come strumento per una più efficace introduzione dei concetti matematici: la storia e le fonti storiche sono considerate come un artefatto utile a introdurre o a veicolare in maniera diversa un concetto già conosciuto, permettendo di valutarne l'evoluzione, rielaborandolo e adeguandolo in base ai nuovi elementi emersi, sia matematici sia culturali.

In effetti, esistono diversi studi e ricerche in cui si discute l'uso della storia delle matematiche nella didattica. Le riflessioni su questo tema partono addirittura dal 1899, quando Poincaré scrive che alcuni concetti matematici definiti primitivi e essenziali (come sono ad esempio le frazioni) possono essere studiati attraverso la storia per comprenderne il significato iniziale. Spostandoci nella contemporaneità, vale la pena citare Barbin (1997) la quale, attraverso le sue esperienze con l'uso della storia per l'apprendimento della matematica, conclude come tale uso possa causare uno *choc culturel* che genera inizialmente disorientamento negli studenti, favorendo in seguito un *remplacement* dei concetti trattati, rivisti e sistemati tenendo in considerazione i nuovi apprendimenti. Esempi di usi della storia nella didattica della matematica sono presentati in Demattè e Furinghetti (2022) e in Radford (2022) che illustrano gli utilizzi in chiave didattica di trattati d'abaco e testi medievali.

Per il presente contributo un ulteriore riferimento è costituito dal lavoro di Bartolini Bussi e colleghi (2014) che rileva come ancora oggi, in alcuni paesi asiatici, la frazione venga scritta a partire dal denominatore, per poi scrivere il numeratore. Osservando che ciò avveniva già nella descrizione di *numero rotto* di Leonardo Fibonacci, Bartolini Bussi e colleghi (2014) sottolineano come l'uso della storia nella didattica possa facilitare riflessioni epistemologiche sui significati matematici coinvolti e sulla loro presentazione agli studenti.<sup>3</sup> Tali riflessioni epistemologiche sottolineano la valenza educativa del dialogo, a vantaggio dell'apprendimento discorsivo, come affermato da Sfard (2015). Nel suo studio Sfard mostra come il concetto di frazione possa essere presentato agli studenti attraverso la storia che ne testimonia l'evoluzione, dal rapporto euclideo al numero razionale dei trattati d'abaco medievali, suggerendo che il significato matematico attribuito a questo concetto vada di pari passo con lo sviluppo del pensiero dello studente.

Se utilizzata in modo ragionato e in funzione dell'apprendimento, quindi, la storia delle matematiche può essere un valido supporto alla didattica: da un lato infatti permette di comprendere che la matematica è frutto di un processo in continua evoluzione, e non un "prodotto finito"; dall'altro permette di riflettere sugli oggetti matematici già incontrati, mettendoli in discussione e operando una loro sistemazione via via più articolata e profonda.

Inoltre, l'uso della storia nella didattica della matematica prova l'esistenza di possibilità matematiche diverse da quelle di cui oggi si dispone, oltre che arricchire a livello educativo: essere consapevoli dell'esistenza di modalità diverse di fare matematica contribuisce alla comprensione del concetto di alterità e il conseguente senso del rispetto del differente (Radford, 2023). In quest'ottica, l'uso della storia può essere considerata anche un'opportunità per il raggiungimento degli obiettivi previsti dall'insegnamento dell'educazione civica, in linea con l'obiettivo di una "matematica umana" ben espressa in questo estratto di D'Amore e Sbaragli (2017):

«A parte le difficoltà che hanno molti studenti per costruire cognitivamente nella loro mente gli oggetti matematici in modo corretto, siamo anche interessati ad un fatto solo apparentemente secondario: che gli studenti, finito il loro iter scolastico, abbiano della matematica un ricordo ricco, denso, non solo formale ma anche umano, perché, secondo noi, la matematica è un *umanesimo*».

(D'Amore & Sbaragli, 2017, p. 10)

3. Uno degli intervistati nella ricerca, perplesso, afferma che non si possono considerare le parti da prendere in una suddivisione senza sapere in quanti parti è suddivisa, come per dire che prima va letto il denominatore e solo dopo il numeratore.

### 3 Il Liber Abbaci e i *numeri rotti* di Fibonacci

Il Liber Abbaci di Fibonacci tratta l'aritmetica che fa uso di quelle che sono denominate "figure indiane", ovvero i simboli che ancora oggi utilizziamo per scrivere i numeri, dallo 0 al 9, alla base del nostro sistema numerico decimale e posizionale. In questo trattato, il cui titolo è tradotto come *Libro del calcolo*, Leonardo Pisano descrive con accuratezza gli algoritmi che permettono di fare i conti senza l'uso dell'abaco romano (Cerasaro, 2020), mostrando molti esempi e applicazioni, soprattutto in ambito commerciale ed economico. Nelle spiegazioni relative agli aspetti algoritmici presenti nel Liber Abbaci, si evince una trattazione dell'aritmetica mediante l'uso della geometria, come accadeva anche per l'aritmetica greca. Tale relazione è esplicitata dallo stesso Fibonacci nel prologo del testo:

«E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri; modo che è assunto per molte argomentazioni e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche».

(Boncompagni, 1857, p. 1, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Se si prosegue la lettura del prologo, Leonardo Pisano sembra suggerire anche la modalità per la trattazione degli argomenti presentati (sorprendentemente in linea con alcuni moderni approcci didattici e neuroscientifici) tenendo in considerazione la manipolazione per il conseguimento dell'apprendimento:

«Così chi volesse conoscere bene la pratica di questa scienza dovrà applicarsi con uso continuo ed esercizio giornaliero nella pratica di essa, perché se la conoscenza si muta in abitudine attraverso la pratica, la memoria e l'intelligenza concordano a tal punto con le mani e i segni che quasi in un unico impulso e anelito, in uno stesso istante, si accordano naturalmente su tutto; e allora quando il discepolo avrà conseguito un abito mentale, a poco a poco potrà pervenire facilmente alla perfezione di questa».

(Boncompagni, 1857, p. 1, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

A partire dal capitolo V del Liber Abbaci, Fibonacci introduce il concetto di frazione: dopo aver descritto l'operazione di divisione tra due numeri interi  $a$  e  $b$ , scrive il risultato della divisione come somma della parte intera e parte "frazionaria". Il risultato della divisione  $a : b$  sarà  $q + \frac{r}{b}$ , dove  $q$  ed  $r$  rappresentano rispettivamente il quoziente e il resto. Nel paragrafo V.2 introduce i termini "denominato" e "denominante", da cui derivano i nostri attuali "denominatore" e "numeratore":

«Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato e quello superiore è chiamato denominante».

(Boncompagni, 1857, p. 24, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Queste frazioni, denominate da Fibonacci *numeri rotti*, sono l'oggetto matematico su cui è impostato il percorso qui presentato. Nel linguaggio attuale si tratta di frazioni del tipo  $\frac{r}{b} < 1$ , (con  $r$  e  $b$  interi positivi), che noi oggi chiamiamo "proprie".<sup>4</sup> Fibonacci non dà una vera e propria definizione esplicita di *numero rotto*, adottando in tutto il Liber Abbaci anche altre denominazioni quali *minuto* e *fratto* (parla dunque di *ruptus*, *minutus*, *fractus*).

Dalle descrizioni matematiche presenti nei numerosi esempi che Fibonacci utilizza per spiegare un nuovo concetto matematico, si evince che il *numero rotto* si ottiene rompendo l'unità in tante parti uguali tra loro, quante quelle riportate nel denominatore, e considerando tante di esse quante scritte nel numeratore (Catastini & Ghione, 2023). Si noti a latere che Leonardo Pisano utilizza il termine "parte" come presentato da Euclide nel settimo libro degli Elementi, quando scrive che «un numero è parte di un altro se lo misura»;<sup>5</sup> tenendo in considerazione tale definizione, rompere l'intero in tante parti uguali significa dire che ogni parte misura lo stesso numero di volte l'intero considerato.

## 4 Gli artefatti utilizzati nell'esperienza sui *numeri rotti*

In questo paragrafo sono descritti gli artefatti<sup>6</sup> utilizzati nelle attività laboratoriali sulla moltiplicazione tra *numeri rotti*, cercando al contempo di metterne in luce le implicazioni didattiche. Questi artefatti sono suddivisi per tipologia: da un lato gli artefatti legati all'uso della storia, qui detti "artefatti storici" (par. 4.1), attraverso i quali viene facilitata la riflessione epistemologica sui significati matematici trattati; dall'altro lato gli artefatti qui chiamati "manipolativi e digitali", che coinvolgono l'uso di alcuni oggetti come le aste frazionarie e il *moltiplicatore di rotti* (par. 4.2) oppure il software GeoGebra, con i quali si cercherà di affrontare gli aspetti procedurali che conducono alla comprensione della moltiplicazione tra frazioni.

### 4.1 Gli artefatti storici

La fonte storica che ha fatto da sfondo a tutto il percorso è il Liber Abbaci (Figura 1), libro che gli studenti hanno consultato nelle biblioteche digitali presenti sul web, facendo riferimento alla traduzione dal latino all'italiano dal sito del Progetto Fibonacci; esso è stato considerato uno strumento per favorire l'apprendimento di contenuti sia matematici sia di tipo culturale e interdisciplinare.

4. In parti successive del Liber Abbaci, Leonardo Pisano chiama *numero rotto* anche un numero non intero maggiore di 1, inteso come somma di un intero con un *numero rotto*. Nel corso di questo articolo si denoterà tale numero come "numero misto", ricondotto a quella che oggi viene definita come "frazione impropria". La classificazione delle frazioni nel periodo medievale era diversa da quella odierna. Moyon e Spiesser (2015) hanno classificato le frazioni descritte da Fibonacci, distinguendole in 5 "generi", riconducibili alle attuali frazioni proprie. La distinzione che spesso si usa oggi tra frazioni proprie, improprie e apparenti si delineò solo più tardi, nel 1600 circa, come si può leggere nelle descrizioni riportate da Clavio (Castellano, 1678).

5. Def. VII.3 degli *Elementi*.

6. Il termine "artefatto" indica in generale un oggetto, materiale o simbolico, che può diventare uno strumento: «per un dato individuo, l'artefatto inizialmente non ha un valore strumentale. Diventa uno strumento attraverso un processo, chiamato genesi strumentale, che coinvolge la costruzione di schemi personali o, più generalmente, l'appropriazione di schemi sociali preesistenti» (Artigue, 2002, p. 250). Si è scelto in questo contributo di non approfondire il quadro teorico relativo a questo costruito e di dare più peso all'importanza dell'uso della storia.



Figura 1. Incipit del Liber Abbaci, Biblioteca Nazionale centrale, Firenze, Conv. Soppr. C. 1. 2616, ff. 1r-214-r, versione digitale sul sito del Museo Galileo.

La fonte storica si presenta come un mediatore interattivo, utile a creare degli oggetti matematici concreti sui quali può essere costruito un discorso. Già nell'estetica delle pagine è possibile notare il cambiamento che ha subito la disciplina nel tempo: sono presenti decorazioni floreali e capilettera nelle pagine scritte in latino con linguaggio naturale, senza l'uso di simboli algebrici, con numeri interi, frazioni e tabelle scritti in rosso, per metterli in evidenza rispetto al testo stesso, in quanto simboli che si collegano direttamente ai contenuti matematici. Queste differenze contribuiscono a rendere lo studente consapevole che ciò che abbiamo non è sempre esistito, e che la matematica non è un prodotto finito, ma un'attività intellettuale in continuo cambiamento. Inoltre, la lettura della fonte storica può essere accompagnata da discussioni e riflessioni su quanto letto, partendo da concetti già conosciuti (Guillemette & Radford, 2022): ciascuno studente potrà avanzare ipotesi ed esprimere la propria opinione, formalizzando, attraverso una verbalizzazione scritta sul proprio quaderno, quanto ha osservato e appreso dalla discussione fatta affinché si possano tenere in considerazione gli apprendimenti pregressi, per consolidarli o integrarli. Per progettare le attività da proporre agli studenti, si può tenere conto delle narrazioni riguardanti gli aspetti matematici presenti sulla fonte storica.

Un altro artefatto utilizzato in classe e direttamente collegato con la fonte storica è il *vocabolario dei rotti*: costruito insieme da alunni e insegnante in concomitanza con la lettura della fonte storica, il vocabolario contiene termini ed espressioni linguistiche ispirati sia alla traduzione dal latino all'italiano dei termini presenti nel Liber Abbaci, sia all'italiano volgare di alcuni trattati di aritmetica successivi (consultati attraverso le versioni digitalizzate presenti nel web) chiaramente ispirati all'opera di Fibonacci. Questa scelta è stata effettuata con la consapevolezza delle difficoltà degli studenti riguardo all'uso del linguaggio specifico, che non risulta essere sempre associato all'azione matematica compiuta. La finalità è quella di incentivare la manipolazione di un linguaggio simbolico, dopo averlo



concordato convenzionalmente (Coppola et al., 2021), discusso e condiviso con il gruppo classe per interpretarlo affinché si costruiscano dinamicamente i significati matematici legati ai numeri razionali. L'utilizzo del *vocabolario dei rotti* può contribuire a creare una cornice in cui la matematica in classe viene drammatizzata, creando anche un'atmosfera di condivisione di uno strumento all'interno della comunità basata su significati matematici "più vicini" a quelli descritti.

#### 4.2 Gli artefatti manipolativi e digitali



Figura 2. La scatola delle aste per la costruzione dei *numeri rotti* e misti.

Questa categoria di artefatti comprende artefatti manipolativi e artefatti digitali. Fanno parte della prima tipologia le *aste dei numeri rotti* (Figura 2), ovvero strisce di carta plastificata di lunghezza variabile: l'intero è rappresentato da una striscia di carta lunga 12 cm e larga 1 cm; le frazioni di tipo  $\frac{1}{n}$ , per  $n = 2, \dots, 12$ , sono rappresentate da strisce di carta plastificata lunghe, rispettivamente,  $12 : n$  cm e larghe 1 cm. L'uso di aste corrispondenti a frazioni con denominatore fino a 12 è finalizzato alla manipolazione di pochi oggetti per intuire visivamente regole da confermare, in un momento successivo, con ragionamenti astratti. Considerare come un'unità frazionaria l'asta ottenuta dividendo l'asta unitaria in un determinato numero di parti di ugual lunghezza<sup>7</sup> può ricordare il senso "misura" della frazione, costruita secondo la classificazione di Kieren (1980): questo permette di associare la frazione al concetto di numero posizionato sulla retta orientata dei numeri. La scelta del numero 12 è strategica perché consente di avere frazioni con denominatore 12 e numeratore uno dei diversi divisori di 12, e questo crea maggiori possibilità di lavoro con frazioni equivalenti. Tra l'altro, la scelta di utilizzare numeri con molti divisori è condivisa anche da Leonardo Pisano, che li utilizza in diversi contesti in svariati esempi riportati nel trattato.

Un altro artefatto manipolativo utilizzato è il moltiplicatore di *numeri rotti*, un semplice strumento a forma quadrangolare che ha al suo interno due guide su cui vengono inserite le aste lunghe un intero o le sue frazioni, poste ai lati di una superficie quadrangolare equivalente al quadrato unitario (Figura 3). Inizialmente ideato in legno, è stato poi sostituito da un'altra versione in carta plastificata per facilità di realizzazione e di reperibilità del materiale.

7. La larghezza dell'asta è trascurabile nell'utilizzo del materiale, in quanto è la stessa per tutte. Lo studente focalizzerà l'attenzione solo sull'unico aspetto variabile, ovvero la lunghezza.

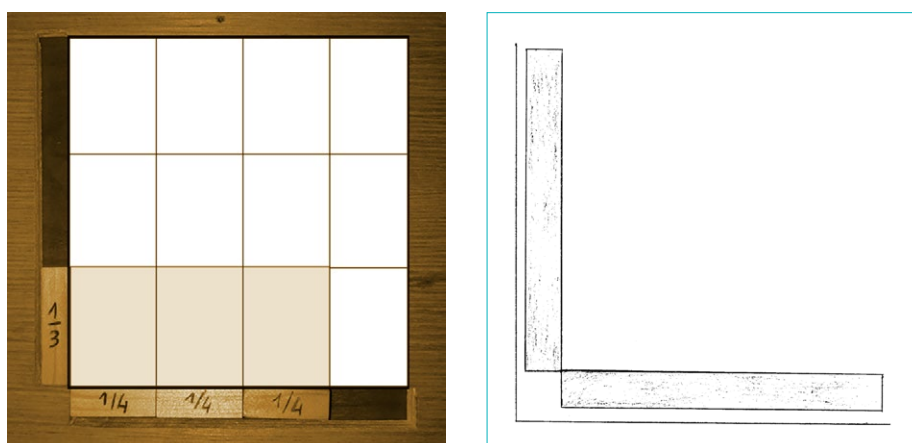


Figura 3. Il moltiplicatore di *numeri rotti* nelle due versioni.

Il moltiplicatore di *numeri rotti* è stato riprodotto in forma digitale tramite il software GeoGebra che, messo a disposizione degli studenti, ha costituito il moltiplicatore digitale, l'artefatto digitale utilizzato nelle attività presentate.

## 5 Attività preliminari e struttura del percorso

Il percorso legato alla moltiplicazione di *numeri rotti* è stato preceduto da numerose attività preliminari (Cerasaro, 2020), sempre legate ai *numeri rotti*, e che hanno coinvolto diversi degli artefatti descritti nel paragrafo precedente. Gli studenti hanno letto la traduzione del paragrafo V.2 del Liber Abbaci dal sito del Progetto Fibonacci, familiarizzando con il linguaggio naturale usato da Fibonacci per descrivere procedimenti matematici. Hanno manipolato le aste utilizzando, contemporaneamente, le espressioni concordate nel *vocabolario dei rotti*: hanno parlato di *denominante* e *denominato* per indicare il numeratore e denominatore della frazione; hanno ridotto in numeri *simiglianti*, cioè hanno trovato la frazione unitaria il cui denominatore è il minimo comune multiplo dei denominatori, attraverso la manipolazione delle aste dei *numeri rotti*; hanno *schisato* una frazione, ossia l'hanno ridotta ai minimi termini, associando all'onomatopea della parola *schisare* il gesto di una matita che traccia rapidamente numeratore e denominatore, riscrivendo la frazione in modo diverso. Gli studenti hanno poi effettuato la *riduzione ai numeri rotti più piccoli*, ovvero sono state ricercate le frazioni ridotte ai minimi termini, e sono stati *confrontati* i *numeri rotti* attraverso un metodo euristico basato sull'osservazione,<sup>8</sup> "tradotto" in seguito in procedura matematica. È stato costruito il numero misto, corrispondente alle attuali frazioni del tipo  $\frac{a}{b} > 1$ , affiancando alle aste dell'intero (tante quante il quoziente  $q$  di  $a : b$ , essendo  $a = b \times q + r$ ) quella del *numero rotto* ( $\frac{r}{b}$ ); sono stati addizionati e sottratti *numeri rotti* e misti, passando dalla riduzione ai *numeri rotti* più piccoli attraverso la sostituzione delle aste considerate con quelle più piccole idonee. Il percorso si è concluso con una ricerca sul proprio libro di testo dei vocaboli usualmente utilizzati per lo studio dei significati matematici trattati relativi alle frazioni: frazioni proprie e improprie, frazioni equivalenti, la riduzione al minimo comune denominatore e la semplificazione di una frazione ai minimi termini; ciò che è stato ritrovato ha por-

8. Il confronto tra *numeri rotti* basato sull'osservazione consiste nel confrontare la somma delle lunghezze delle aste che costituiscono il *numero rotto*.

tato ciascuno studente a reinterpretare attivamente all'interno del gruppo classe i significati attribuiti mediante il linguaggio convenzionale usato (Radford et al., 2005). Inoltre, il percorso matematico è stato preceduto da una introduzione, curata dalla docente di lettere, del periodo in cui il Liber Abbaci è stato scritto, il tredicesimo secolo, percorrendo un interessante itinerario riguardante i testi che potevano essere reperiti nelle biblioteche europee e quelle del mondo islamico: gli studenti hanno svolto una ricerca in base ai suggerimenti dati dall'insegnante, realizzando una presentazione multimediale per un'esposizione su quanto appreso. Questo percorso ha suscitato molta curiosità negli studenti, motivandoli nella consultazione della fonte storica, nata in un ambiente culturale profondamente ispirato alla cultura islamica; inoltre, la ricerca ha permesso di contestualizzare storicamente il percorso didattico presentato, per trasmettere il senso dell'evoluzione della matematica nel tempo.

Dopo queste attività introduttive, si è proceduto a realizzare il percorso incentrato in modo specifico sulla moltiplicazione tra *numeri rotti*, di cui ora viene fornita la struttura. Esso si compone di differenti attività, riportate nella **Tabella 1**, il cui ordine è coerente con l'ordine di presentazione in classe e con gli esempi che Fibonacci descrive nel Liber Abbaci.

| Attività                                                         | Finalità didattiche                                                                                                                                                                                               | Artefatti e materiali utilizzati                                                                               |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. La frazione tra divisione e moltiplicazione.                  | Legare il concetto di frazione ai concetti di divisione e moltiplicazione.                                                                                                                                        | <i>Vocabolario dei rotti</i> ; descrizione di <i>numero rotto</i> tratta dal Liber Abbaci.                     |
| 2. Si inizia a moltiplicare.                                     | Moltiplicare frazioni unitarie per numeri interi; moltiplicare una frazione con la sua inversa.                                                                                                                   | Tabella di moltiplicazione a doppia entrata.                                                                   |
| 3. Moltiplicazione tra due <i>numeri rotti</i> unitari.          | Comprendere la regola della moltiplicazione tra frazioni unitarie.                                                                                                                                                | <i>Vocabolario dei rotti</i> ; Liber Abbaci.                                                                   |
| 4. Il quadrato unitario.                                         | Introdurre il passaggio dall'asta unitaria al quadrato unitario.                                                                                                                                                  | Asta unitaria, quadrato unitario; scheda per la costruzione del quadrato con GeoGebra.                         |
| 5. Il moltiplicatore di <i>numeri rotti</i> .                    | Comprendere il funzionamento geometrico dello strumento "Moltiplicatore di <i>numeri rotti</i> "; generalizzare la regola della moltiplicazione tra frazioni unitarie alla moltiplicazione tra frazioni proprie.  | <i>Vocabolario dei rotti</i> ; moltiplicatore di <i>numeri rotti</i> ; quadrato unitario; aste delle frazioni. |
| 6. Il moltiplicatore digitale.                                   | Rinforzare gli obiettivi dell'attività 5.                                                                                                                                                                         | File GeoGebra.                                                                                                 |
| 7. Moltiplicazione tra un <i>numero rotto</i> e un numero misto. | Applicare il procedimento geometrico del moltiplicatore tra <i>numeri rotti</i> dell'attività 5 alla moltiplicazione di una frazione propria per un numero misto.                                                 | <i>Vocabolario dei rotti</i> ; aste delle frazioni; file GeoGebra.                                             |
| 8. Moltiplicazione tra due numeri misti.                         | Applicare il procedimento geometrico del moltiplicatore tra <i>numeri rotti</i> dell'attività 5 alla moltiplicazione tra due numeri misti; formulare una regola generale per la moltiplicazione tra due frazioni. | <i>Vocabolario dei rotti</i> ; Liber Abbaci.                                                                   |
| 9. "Schisare" nella moltiplicazione tra <i>numeri rotti</i> .    | Comprendere la procedura di semplificazione nella moltiplicazione tra frazioni.                                                                                                                                   | <i>Vocabolario dei rotti</i> ; Liber Abbaci.                                                                   |

Tabella 1. Sintesi delle attività proposte nel percorso sulla moltiplicazione tra *numeri rotti*.

## 6 Descrizione delle attività svolte

In questo paragrafo viene descritto il percorso realizzato così come schematizzato in Tabella 1.

### 6.1 La frazione tra divisione e moltiplicazione

L'attività inizia con una riflessione proposta dall'insegnante sulla possibilità di vedere una frazione come il quoziente di una divisione non svolta, equivalente al multiplo di una frazione unitaria ( $\frac{m}{n}$  è sia  $m : n$  sia  $m \times \frac{1}{n}$ ). Questo serve per mostrare la presenza implicita della moltiplicazione, operazione su cui si sta ponendo l'attenzione in questa serie di attività proposte.

Si presenta agli studenti la seguente descrizione di Fibonacci (già citata e commentata nel par. 3):

«Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato e quello superiore è chiamato denominante».

(Boncompagni, 1857, p. 24, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Gli studenti leggono con attenzione le parole del matematico relativamente alla costruzione di frazione come multiplo di una frazione unitaria, cioè deducono che  $\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$ , aiutandosi con la manipolazione delle aste.

Sottolineando il significato attribuito alla lineetta che separa il numeratore dal denominatore, equivalente al simbolo della divisione, l'insegnante chiede di rappresentare con le aste la frazione  $\frac{3}{2}$  intesa come  $3 : 2$ . Molti sono perplessi, mentre qualche studente prende 3 aste unitarie dalla scatola del materiale e le pone una dietro l'altra (Figura 4): ponendo l'indice esattamente nel punto medio della linea di aste ottenuta, afferma che proprio in quel punto c'è  $3 : 2$ . Anche i compagni riescono a seguire, provando a fare la stessa cosa con la frazione  $\frac{5}{2}$ , prendendo 5 aste unitarie e affermando che il punto che individua la metà è il punto medio di un segmento, visto in geometria. A seguito di questa affermazione, altri studenti realizzano  $\frac{5}{4}$  con 5 aste unitarie, affermando di applicare due volte di seguito la costruzione del punto medio, ossia facendo la metà della metà. A questo punto, l'insegnante chiede di rappresentare con le aste, come già sanno fare, le frazioni considerate, rispettivamente, nelle tre situazioni emerse. Per cui, nel primo caso, si allineano 3 aste da  $\frac{1}{2}$ , nel secondo 5 aste da  $\frac{1}{2}$ , nel terzo 5 aste da  $\frac{1}{4}$ : avendole sistemate sotto la costruzione già effettuata con le aste unitarie, notano che le ultime arrivano esattamente nei punti che avevano indicato, affermando che le lunghezze considerate sono le stesse. Alla richiesta di una spiegazione più argomentata, emerge che le due operazioni svolte portano allo stesso risultato, per cui  $\frac{m}{n}$  è sia  $m : n$  sia  $m \times \frac{1}{n}$ .



Figura 4. La frazione  $\frac{3}{2}$  rappresentata come  $3 : 2$  e come  $3 \times \frac{1}{2}$ .

Con il materiale a disposizione e guidati dalle domande poste dall'insegnante, gli studenti comprendono che la frazione, nel contesto del Liber Abbaci, rappresenta una divisione e ha un legame implicito anche con la moltiplicazione: infatti, la moltiplicazione di un *numero rotto* unitario per un numero intero  $m$  è la somma ripetuta di  $m$  aste unitarie  $\frac{1}{n}$ . Le riflessioni effettuate con i compagni e con l'insegnante sono istituzionalizzate sui loro quaderni (Figura 5).

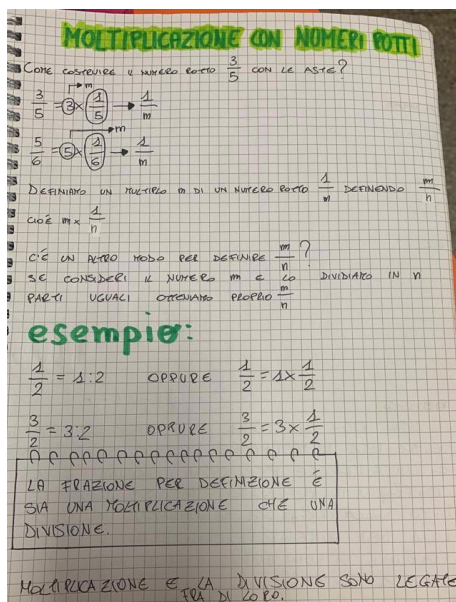


Figura 5. Il quaderno di uno studente che sintetizza quanto discusso in classe.

## 6.2 Si inizia a moltiplicare

Viene presentata agli studenti una particolare tabella per le frazioni, avente per prima riga gli interi  $n = 1, \dots, 12$  e per prima colonna le frazioni unitarie  $\frac{1}{n}$ . Si compila la tabella moltiplicando riga per colonna, in quanto dall'attività precedente è stato compreso che una frazione si può esprimere come un multiplo dell'unità frazionaria (Figura 6): gli alunni osservano che  $n \times \frac{1}{n} = 1$ .

La presenza di 2 diagonali con tutti i 1 fa capire che  $n \times \frac{1}{n} = 1$

Quello che è uguale alla 1 ci dice che quella simmetria centrale

che sembrano numeratore e denominatore

Nella colonna accanto a quella degli 1 ho frazioni dopo 1 2m fraz  
per 1/2, 1/3

Cosa not? not che se un di eguale di 1 =  $n \times \frac{1}{n}$

|      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1/1  | 1    | 1/2  | 1/3  | 1/4  | 1/5  | 1/6  | 1/7  | 1/8  | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/2  | 1/2  | 1    | 1/3  | 1/4  | 1/5  | 1/6  | 1/7  | 1/8  | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/3  | 1/3  | 1/3  | 1    | 1/4  | 1/5  | 1/6  | 1/7  | 1/8  | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/4  | 1/4  | 1/4  | 1/4  | 1    | 1/5  | 1/6  | 1/7  | 1/8  | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/5  | 1/5  | 1/5  | 1/5  | 1/5  | 1    | 1/6  | 1/7  | 1/8  | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/6  | 1/6  | 1/6  | 1/6  | 1/6  | 1/6  | 1    | 1/7  | 1/8  | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/7  | 1/7  | 1/7  | 1/7  | 1/7  | 1/7  | 1/7  | 1    | 1/8  | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/8  | 1/8  | 1/8  | 1/8  | 1/8  | 1/8  | 1/8  | 1/8  | 1    | 1/9  | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/9  | 1/9  | 1/9  | 1/9  | 1/9  | 1/9  | 1/9  | 1/9  | 1/9  | 1    | 1/10 | 1/11 | 1/12 |
| 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1    | 1/11 | 1/12 |
| 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1/11 | 1    | 1/12 |
| 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1    |

Cosa noti?

che per ogni riga cambia il numeratore ma non  
il denominatore.

E per ogni colonna cambia solo il denominatore  
e non il numeratore.

Figura 6. La tavola pitagorica delle frazioni dal quaderno di un'alunna.



Si nota che in alcune caselle, simmetriche rispetto alla diagonale con tutti 1, si trovano le frazioni  $\frac{n}{m}$  e  $\frac{m}{n}$ . Viene richiesto di prendere in considerazione una coppia di frazioni di questo tipo: uno studente, ad esempio, considera  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{2}$  e scrive  $\frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{2}$ ; analogamente,  $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ . L'insegnante gli chiede di moltiplicarle, così scrive  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$ : ricordando quanto già scritto e applicando la proprietà commutativa (moltiplicando cioè 2 e  $\frac{1}{2}$ , 3 e  $\frac{1}{3}$ ), arriva a vedere che il loro prodotto è 1. Anche gli altri studenti provano a fare lo stesso con altre coppie di frazioni dello stesso tipo, arrivando a descrivere le frazioni inverse attraverso una trasposizione sulle operazioni inverse già conosciuta per i numeri interi. Gli studenti formalizzano sui loro quaderni i loro apprendimenti (Figura 7).

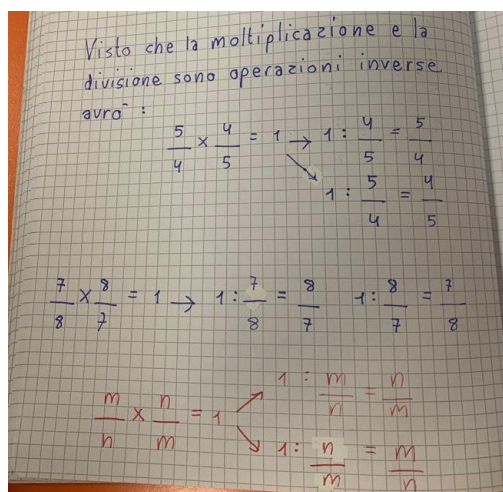


Figura 7. Attività svolte per arrivare a definire l'inversa di una frazione.

### 6.3 Moltiplicazione tra due *numeri rotti unitari*

Si propone la lettura del seguente passo:

«Se vorrai moltiplicare  $\frac{1}{3}$  per  $\frac{1}{4}$ , moltiplica l'1 che è sopra il 3 per l'1 che è sopra il 4, farà 1; dividilo per 3 e per il 4 che sono sotto le linee [...], farà [...] un dodicesimo [...] e che tu intenda tutto questo ugualmente per tutti i *rotti*; perché sempre la moltiplicazione di un *rotto* per un qualunque *rotto* fa quanto la ricezione di uno di essi dall'altro: perché quando si moltiplica 1 per  $\frac{1}{4}$ , allora sempre risulta  $\frac{1}{4}$ , quindi quando si moltiplica la terza [parte] per la quarta si ha sempre un terzo di un quarto, e così dalla moltiplicazione di un terzo per un quarto risulta un dodicesimo».

(Boncompagni, 1857, p. 59, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Dalle prime parole del brano gli studenti deducono che  $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n \times m}$ , concludendo che la moltiplicazione tra le frazioni unitarie ha al numeratore 1 (nel testo Fibonacci suggerisce di moltiplicare 1 per 1) e al denominatore il prodotto dei denominatori. Dopo aver svolto molte operazioni tra frazioni unitarie, seguendo il suggerimento letto nel Liber Abbaci, gli studenti osservano anche che moltiplicare due frazioni unitarie significa dividere la prima frazione per un intero, che è l'inverso della seconda frazione unitaria considerata, in linea con quanto appreso nell'attività precedente. Dunque, comprendono la seguente uguaglianza  $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n} : m$ . Si chiede di verbalizzare quanto appena effettuato, dopo aver ripercorso con l'insegnante lo svolgimento dell'attività proposta.

### 6.4 Il quadrato unitario

La lettura sulla moltiplicazione tra due frazioni unitarie è stata posta come attività stimolo per chiedere come procedere per ricavare il prodotto di due *numeri rotti* non unitari.



In tutte le attività preliminari, gli alunni hanno usato le aste, che rappresentano frazioni dell'asta unitaria. Ora si vuole considerare il prodotto tra numeri come l'area di un rettangolo che ha per lunghezza dei lati i due fattori, sfruttando la geometria per la comprensione di concetti legati all'aritmetica. Occorre passare, in questo momento, a un'unità frazionaria che faccia riferimento all'area di una superficie e non alla lunghezza di un segmento. Per fare questo, si passa dall'asta unitaria al quadrato unitario. La moltiplicazione tra *numeri rotti* risulta essere rappresentata, quindi, da una parte del quadrato che ha per lato l'asta unitaria. Si chiede agli allievi come si può fare, secondo loro, per costruire con le aste il prodotto tra due *numeri rotti* unitari, partendo dal prodotto di  $\frac{1}{3}$  per  $\frac{1}{4}$ , come letto nel brano di Fibonacci. In **Figura 8** vengono mostrate le risposte di due alunni: in una si nota l'intuizione di una nuova necessità per effettuare l'operazione; nell'altra, invece, si riscontra un'evidente contrarietà.

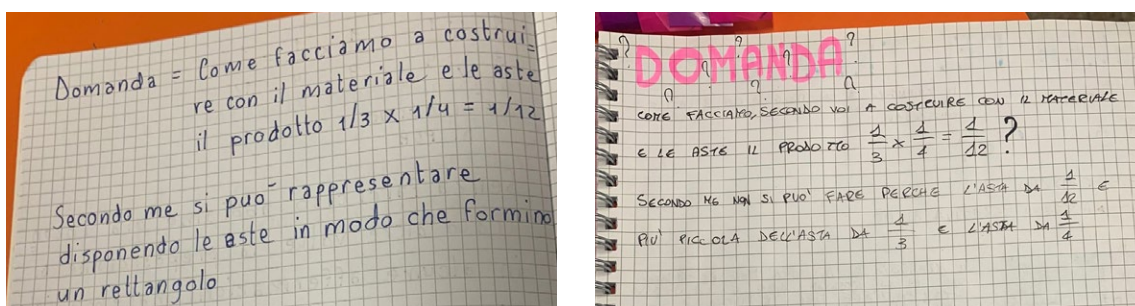


Figura 8. Risposte di due studenti alla domanda-stimolo riguardo al prodotto tra *numeri rotti*.

Per favorire l'apprendimento del passaggio dall'asta al quadrato unitario, presupposto per la comprensione della moltiplicazione tra frazioni, si coinvolge il docente di tecnologia, il quale pianifica un laboratorio per costruire, con squadrette e compasso, un quadrato a partire da un segmento dato, parafrasando la costruzione euclidea della prop. I.46 degli *Elementi* (Figura 9).

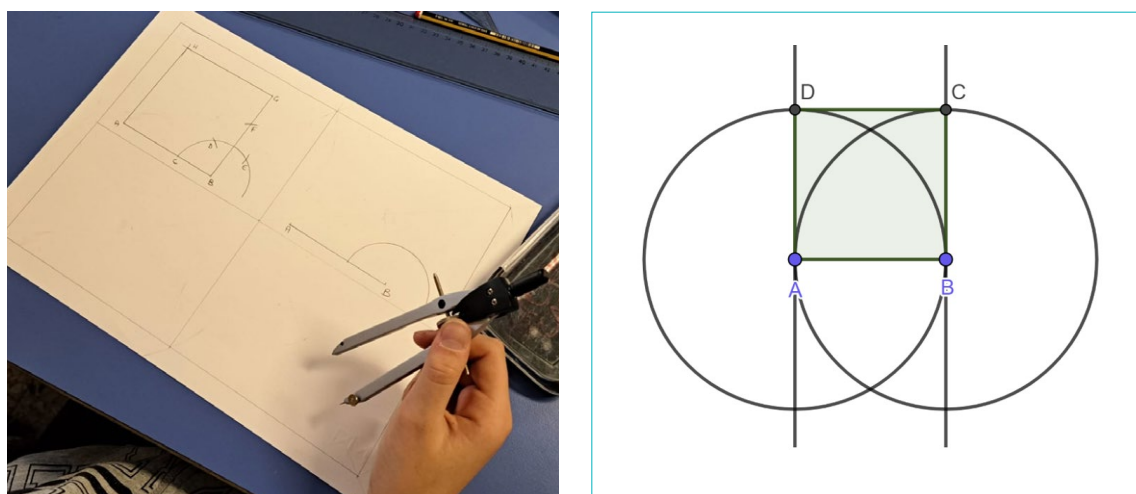


Figura 9. Costruzione euclidea del quadrato unitario realizzato con squadrette e compasso, e con GeoGebra.

La stessa costruzione viene realizzata attraverso il software GeoGebra, con la guida dell'insegnante, che mostra agli studenti come usare gli opportuni comandi, le cui istruzioni sono riportate in maniera dettagliata in una scheda che gli studenti possono consultare a casa per ripetere quanto svolto in classe.

Dunque, dopo la costruzione del quadrato unitario, avente il lato lungo quanto l'asta unitaria, gli studenti si avvicinano a questo nuovo artefatto, di cui comprenderanno le modalità d'uso per effettuare una moltiplicazione.

### 6.5 Il moltiplicatore di *numeri rotti*

La docente presenta agli studenti una sorta di lista dell'occorrente per procedere alla comprensione del "funzionamento" del moltiplicatore di *numeri rotti*. Gli alunni hanno a disposizione, oltre al moltiplicatore di *numeri rotti*, il quadrato unitario e le aste, alcune graffette, le squadre e la matita (Figura 10).



Figura 10. I materiali a disposizione per comprendere come usare il moltiplicatore di *numeri rotti*.

Si richiede di capire come usare il moltiplicatore di *numeri rotti* eseguendo, ad esempio, la moltiplicazione che Leonardo Pisano descrive nel Liber Abbaci, cioè  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ .

Alcuni studenti aprono la loro scatola dei *numeri rotti* e prendono le aste unitarie usate da Fibonacci, e fissano il quadrato unitario al moltiplicatore con le graffette e anche le aste considerate, ricordando di dover svolgere la stessa operazione descritta da Fibonacci: c'è chi ipotizza che il prodotto sia un rettangolo, ma non è ancora chiaro come "trovare" questo prodotto sul moltiplicatore di *numeri rotti*, il cui funzionamento è ancora ignoto, tanto che si osservano differenti ipotesi d'uso del materiale dato (Figura 11).

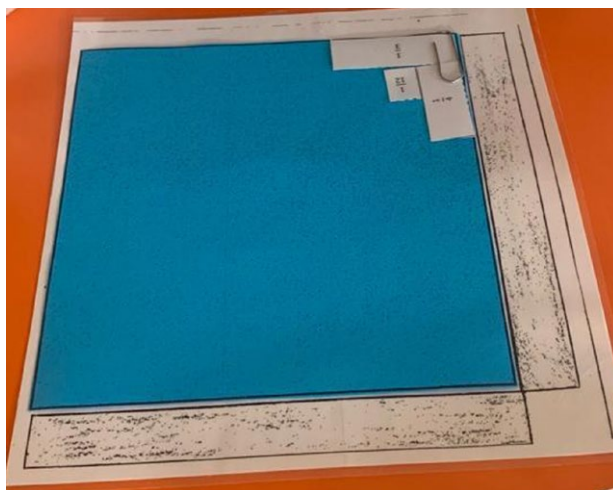


Figura 11. Tentativo di uso del moltiplicatore di *numeri rotti*.

Ci sono studenti che fissano le aste dei fattori con le graffette sulle sagome, cioè una da  $\frac{1}{3}$  su un lato e una da  $\frac{1}{4}$  dall'altro, mentre altri pongono sulle sagome del moltiplicatore tre aste da  $\frac{1}{3}$  da una parte, quattro da  $\frac{1}{4}$  dall'altra (Figura 12).

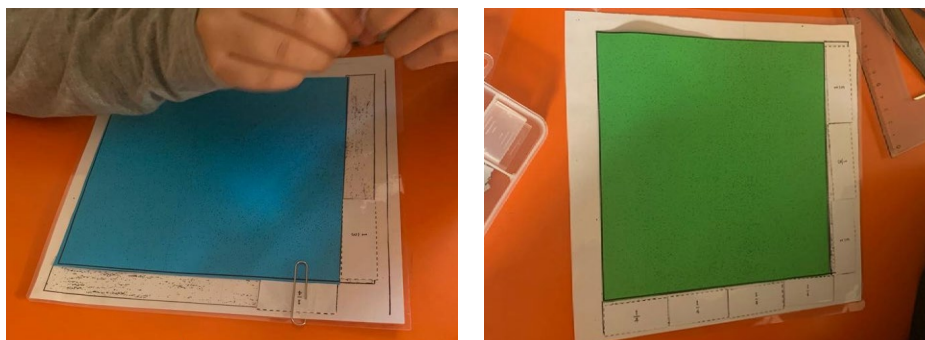


Figura 12. Uso differente delle aste nelle sagome del moltiplicatore.

Nel notare diversi modi di usare le aste sul moltiplicatore di *numeri rotti*, e nel tentativo di spiegarne le modalità di utilizzo, gli studenti si mostrano spaesati, non sapendo come continuare. L'insegnante chiede se le aste abbiano un posto specifico nelle sagome scure: gli studenti rispondono negativamente, forse ricordando la proprietà commutativa della moltiplicazione. Poi si chiede quale sia il ruolo del quadrato unitario, e gli studenti affermano che ha per lato l'asta. A questo punto viene rivolta la domanda-stimolo: «Il prodotto dei due fattori darà come risultato un quadrato o un rettangolo?». Conoscendo il ruolo del quadrato unitario, alcuni alunni rispondono che sarà un quadrato solo se si farà  $1 \times 1$ , senza pensare al risultato di un *numero rotto* per sé stesso. Alla richiesta di riflettere sul ruolo del materiale a disposizione, nessuno considera le squadrette, che invece sono state elencate dall'insegnante nella lista dell'occorrente per spiegare il funzionamento dello strumento. Alla domanda posta riguardo il loro ruolo, un alunno risponde che dovrebbero servire a disegnare il rettangolo prodotto. Questa risposta sblocca la situazione, facilitando le attività pratiche dei ragazzi. In continuità con le due diverse situazioni che si sono create precedentemente, c'è chi disegna i lati paralleli alle aste per individuare il rettangolo, chi invece suddivide il quadrato unitario tracciando tante linee verticali quante il numero delle aste sulla striscia orizzontale, e tante in orizzontale quante il numero delle aste presenti sulla striscia in verticale (Figura 13).

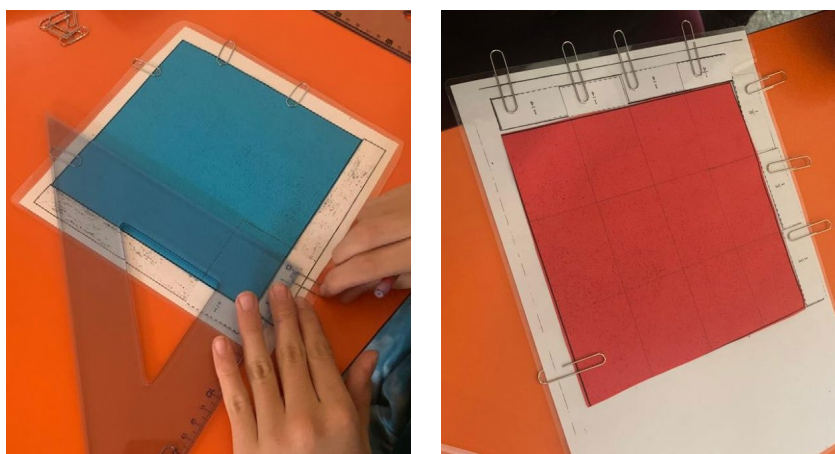


Figura 13. Uso delle squadre nel moltiplicatore di *numeri rotti*.

Giunti a questo punto, le soluzioni diverse presentate trovano il loro punto d'incontro: all'interno di ciascun gruppo gli studenti cominciano a discutere se sia giusta una o l'altra mentre l'insegnante si occupa di chi chiede spiegazioni o chi mostra qualche perplessità sul da farsi. Qualcuno nota che il rettangolo che ha per lati le aste è interno alla griglia disegnata nel quadrato unitario (Figura 14) e ne rappresenta proprio  $\frac{1}{12}$ .

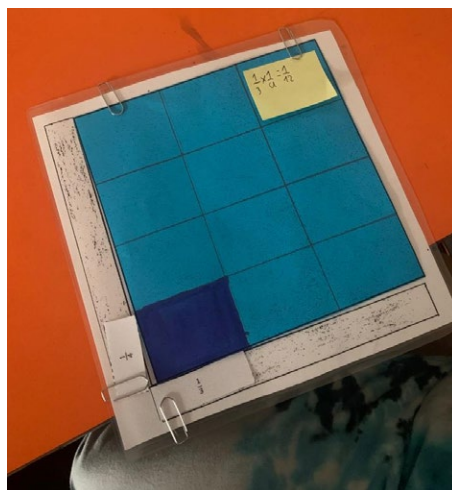


Figura 14. La moltiplicazione richiesta con il moltiplicatore di *numeri rotti*.

Si chiede di svolgere altre operazioni (Figura 15), con la raccomandazione di scrivere numericamente la moltiplicazione effettuata e di spiegare, attraverso una verbalizzazione scritta, quanto stanno svolgendo: lo scopo è di attivare strategie metacognitive su quanto appreso, ripercorrendo le azioni compiute con il moltiplicatore, usando un linguaggio adeguato ed enunciando formulazioni appropriate.

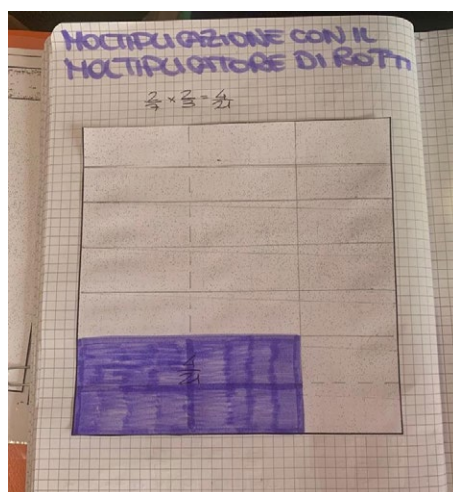


Figura 15. Una moltiplicazione con il moltiplicatore di *numeri rotti*.

L'insegnante assegna le operazioni da svolgere sia come compito da effettuare a casa, sia in classe nella lezione successiva, e incentiva una sistemazione dei saperi raggiunti mediante la compilazione delle istruzioni d'uso del moltiplicatore di *numeri rotti* (Figura 16).



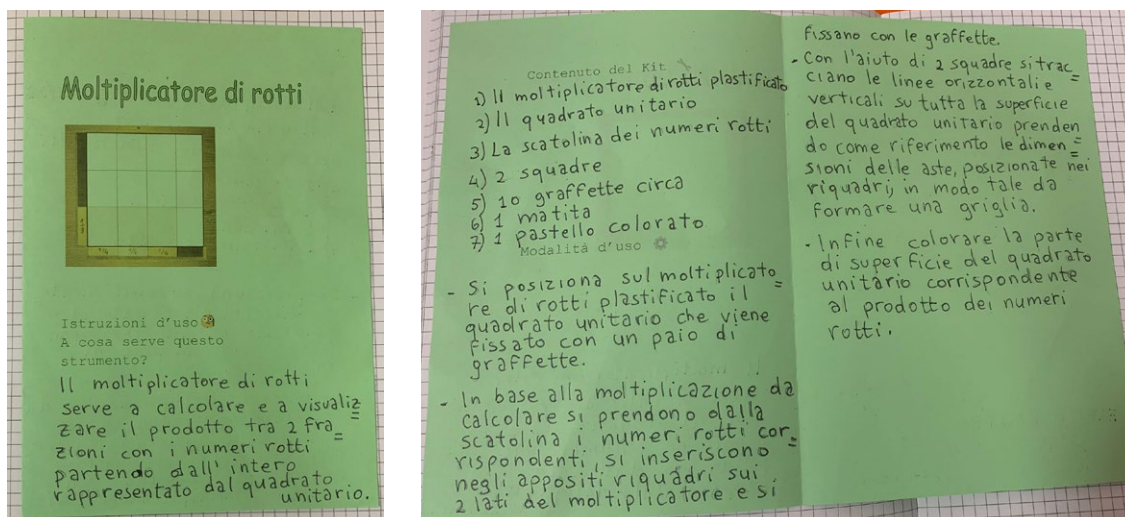


Figura 16. Le istruzioni d'uso del moltiplicatore di *numeri rotti*.

## 6.6 Il moltiplicatore digitale

Il funzionamento del moltiplicatore di *numeri rotti* è ripercorso attraverso un file GeoGebra<sup>9</sup> appositamente programmato per gli studenti: il moltiplicatore digitale (Figura 17).

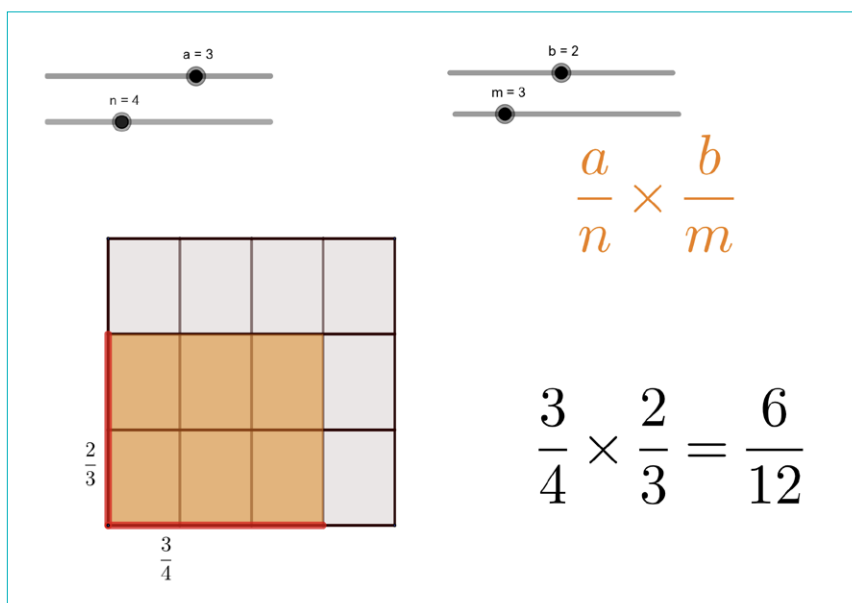


Figura 17. Il moltiplicatore digitale per *numeri rotti*.

Muovendo gli slider è possibile costruire le aste dei fattori, variando i numeratori e i denominatori delle frazioni di cui si vuole calcolare il prodotto. Se l'attività con il moltiplicatore fisico permette di concentrare l'attenzione sull'aspetto procedurale della moltiplicazione tra frazioni proprie, il moltiplicatore digitale opera per rinforzare questo risultato dal punto di vista visivo, poiché può intervenire su una numerosità di casi che ne enfatizzano l'aspetto riproduttivo.

9. È possibile visionare il file del moltiplicatore digitale al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/zgsv3ezn>.

Impostando un numero sufficiente di prodotti attraverso il moltiplicatore digitale, viene sottolineato che il prodotto tra due *numeri rotti* ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori. Tale risultato viene poi formalizzato riportando per iscritto sul proprio quaderno quanto compreso.

### 6.7 Moltiplicazione tra un *numero rotto* e un *numero misto* e tra due *numeri misti*

Un procedimento geometrico analogo a quello utilizzato nell'attività precedente permette di affrontare la moltiplicazione tra un *numero rotto* e un *numero misto* e tra due *numeri misti*, senza usare uno strumento specifico ma solo una rappresentazione grafica di un rettangolo che ha per lati le aste delle frazioni utilizzate (Figura 18). In particolare, gli studenti verificano che per moltiplicare un *numero rotto* con uno *misto* o due *misti* occorre applicare la proprietà distributiva, prerequisito indispensabile per la trattazione della moltiplicazione di un monomio per un polinomio e tra polinomi in algebra, verificata anche attraverso un software specifico, il moltiplicatore digitale tra *numeri misti*.<sup>10</sup>

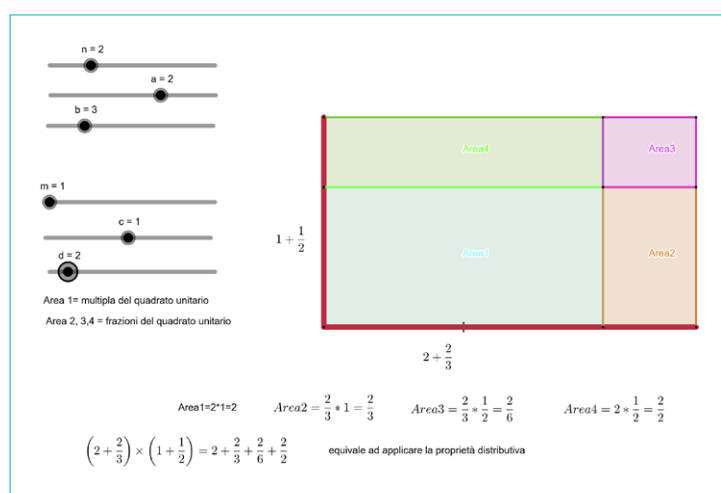


Figura 18. Il moltiplicatore digitale tra *numeri misti*.

Inoltre, attraverso la consultazione della fonte storica a loro disposizione (par. VI.1.1 del Liber Abbaci, riportato di seguito), gli alunni possono constatare che per effettuare una moltiplicazione tra un *numero rotto* e un *misto*, o tra due *misti*, è possibile trasformare i *numeri misti* in frazioni improprie ed estendere a questo tipo di moltiplicazione il risultato scoperto attraverso l'uso del moltiplicatore tra *numeri rotti*:

«E ancora quando vorrai moltiplicare qualunque numero di qualunque posizione [con un numero qualunque di cifre] che contiene uno o più *rotti* per un qualunque numero con uno o più *rotti*, scrivi il numero maggiore con il suo *rotto*, o *rotti*, sotto il numero minore con i suoi pezzetti, cioè numero sotto numero e pezzetti sotto pezzetti. E prendi il numero superiore con i suoi pezzetti. E da lì fai pezzetti uguali a quelli [che sono] con lo stesso numero. E similmente farai i suoi pezzetti dal numero inferiore. E moltiplicherai i pezzetti fatti del numero superiore per quelli fatti del numero inferiore. E dividerai il risultato per i pezzetti di entrambi i numeri sotto un'unica linea di frazione, cioè unita insieme, e avrai le moltiplicazioni di qualunque numero per i pezzetti».

(Boncompagni, 1857, p. 47, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

10. È possibile visionare il file del moltiplicatore digitale al seguente link: <https://www.geogebra.org/classic/jgrz23q2>.



## 6.8 “Schisare” nella moltiplicazione tra *numeri rotti*

Nell'ultima attività si presenta agli studenti il seguente brano, tratto dal Liber Abbaci, par. VI.1.7, in cui si discute in merito al prodotto  $\frac{25}{2} \times \frac{118}{5}$ :

«Ebbene puoi trovare il risultato della detta moltiplicazione in altro modo, cioè prima di moltiplicare 25 per 118, dividi 25 per il 5 sotto la linea di frazione; poiché si può dividere interamente, farà 5, che terrai da parte; e dividi 118 per il 2 che è sotto la linea di frazione; poiché la loro metà è intera, farà 59, che devi moltiplicare per il 5 che era stato tenuto da parte era la quinta parte di 25, risulterà 295, che è il totale della detta moltiplicazione, come si è trovato più sopra: e questa semplificazione è molto da considerare, perché con essa si evita la fatica del moltiplicare e del dividere: infatti è più faticoso moltiplicare 25 per 118 che 5 per 59; per la moltiplicazione di questi, cioè di 5 per 59, non c'è bisogno di dividere per alcun *rotto*. Per cui dovendo moltiplicare un numero qualsiasi per un numero qualsiasi, e dovendo dividere il loro totale per un numero, o numeri qualsiasi, per il quale, o per i quali tu possa interamente dividere uno di quei numeri, cercherai sempre di dividere quelli che potrai dividere interamente, prima di moltiplicarli: poi moltiplicherai a vicenda il resto dei numeri, e dividerai per il *rotto*, o per i *rotti* che resteranno da questa semplificazione che avremo cura di mostrare nel seguito».

(Boncompagni, 1857, p. 48, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Grazie alle parole di Leonardo Pisano, gli alunni discutono tra loro sulla comprensione del testo e con l'insegnante sull'operazione dello *schisare*, cioè del semplificare i fattori comuni al numeratore e al denominatore prima della moltiplicazione dei *numeri rotti*.

## 7 Bilancio conclusivo

Nel presente contributo si è descritto un percorso didattico finalizzato all'apprendimento della moltiplicazione tra due frazioni attraverso la storia delle matematiche. In particolare si è utilizzato il Liber Abbaci di Fibonacci come fonte storica, accompagnato dal *vocabolario dei rotti*. Ruolo rilevante ha avuto l'interazione anche con altri due artefatti: il primo, il moltiplicatore di *numeri rotti*, prevedeva la comprensione di una procedura geometrica che permettesse di intuire che il prodotto fosse una frazione del quadrato unitario, mentre il secondo, il moltiplicatore digitale, focalizzava l'attenzione su come ricavare la formula dalla scrittura della moltiplicazione, derivante, a sua volta, dalla comprensione del significato “visivo” di quanto svolto.

Al termine delle attività presentate, è stata proposta un'intervista finale sull'uso della fonte e degli artefatti: sono stati confermati i dati qualitativi emersi in altri studi (Dematté & Furinghetti, 2022; Radford, 2022), ovvero la motivazione, l'interesse alla storia, la consapevolezza di aver svolto attività interdisciplinari, il riconoscimento di elementi non matematici presenti nella fonte storica. Inoltre, è stato rilevato un positivo riscontro sull'utilizzo della metodologia adottata: infatti, alla domanda «Come ritieni studiare la matematica integrando l'uso dei libri antichi con la storia e le altre discipline, oltre all'uso dell'informatica?» gli studenti hanno comunicato pareri positivi, come è possibile constatare direttamente dalle loro parole (Figura 19).

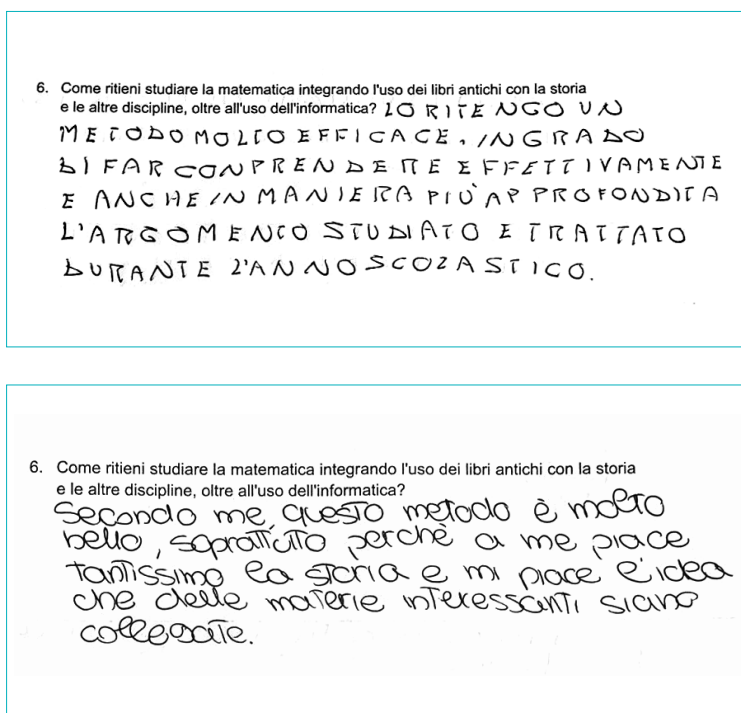


Figura 19. Esempi di risposte degli alunni riguardanti la metodologia utilizzata.

In alcuni casi si è anche verificato un certo spaesamento causato dal confronto con la fonte storica: dalle risposte degli studenti emerge qualche difficoltà legata a un linguaggio matematico differente da quello utilizzato sino alla trattazione di questo percorso didattico (Figura 20).

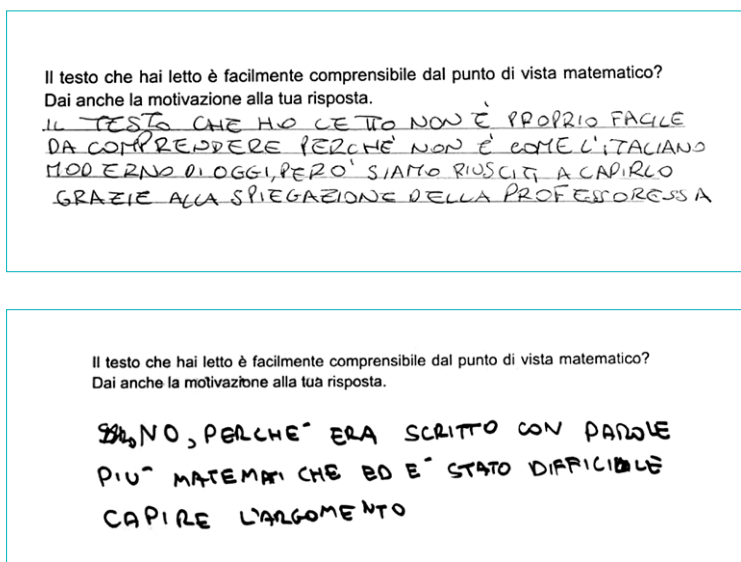


Figura 20. Esempi di risposte degli alunni riguardanti il linguaggio matematico della fonte.

Questo tipo di reazione è in linea con un certo *dépaysement*, in grado di causare uno *choc culturel* (Barbin, 1997) che porta gli studenti a mettere in discussione le certezze pregresse (Sfard, 2015).

Dal punto di vista dell'insegnante che ha condotto l'esperienza, si può mettere in evidenza la generale soddisfazione rispetto alla metodologia utilizzata, tanto da scegliere di riproporla nella classe dell'anno scolastico successivo; la stessa docente è inoltre intenzionata a formarsi sull'uso della storia delle matematiche nella didattica, perché tale approccio le ha permesso di collaborare con i docenti dell'area umanistica e perché si è messa in discussione attraverso le riflessioni epistemologiche che la storia delle matematiche permette di effettuare, oltre ad aver visto una maggiore motivazione negli studenti. In ultimo, la docente si ritiene pienamente soddisfatta della profondità dell'apprendimento messo in gioco nei propri allievi, affermando che «è stato illuminante come tutto fosse radicato ormai in loro, fatto proprio come qualcosa di compreso talmente bene da non sfuggire più».

---

## Bibliografia

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin AMQ*, 37(1), 20–25.
- Bartolini Bussi, M. G., Baccaglioni-Frank, A. E., & Ramploud, A. (2014). Intercultural dialogue and the geography and history of thought. *For the Learning of Mathematics*, 34(1), 31–33. <https://www.jstor.org/stable/43894877>
- Boncompagni, B. (1857). *Liber Abbaci*. Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche. (Traduzione in italiano a cura del Progetto Fibonacci: <https://www.progettofibonacci.it/>).
- Campolucci, L., Fandiño Pinilla, M. I., & Maori, D. (2011). *Frazioni*. Pitagora Editrice.
- Castellano, L. (1678). *Aritmetica pratica composta del molto R. P. Christoforo Clauio ... et tradotta dal latino in italiano dal sig. Lorenzo Castellano*. Stefano Curti.
- Castelnuovo, E. (1952). L'insegnamento delle frazioni. *La Scuola Secondaria*, 2, 73–80.
- Catastini, L., & Ghione, F. (2023). *La matematica che trasformò il mondo: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci*. Carocci editore.
- Cerasaro, S. (2020). L'aritmetica con il Liber Abaci di Fibonacci. *Periodico di matematiche*, 12-XIV(3), 175–193.
- Coppola, C., Iannaccone, A., Mollo, M., & Pacelli, T. (2021). Interazioni conversazionali, manipolazioni linguistiche e emergenza di abilità logiche in attività matematiche. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 9, 9–31. <https://doi.org/10.33683/ddm.21.9.1>
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia: Dalle origini al miracolo greco*. Edizioni Dedalo.
- Demattè, A., & Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abacus problems. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7), 1521–1536. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01397-9>

- Guillemette, D., & Radford, L. (2022). History of mathematics in the context of mathematics teachers' education: A dialogical/ethical perspective. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7), 1493–1505. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01437-4>
- Kieren, T. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125–150). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. [https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254\\_2012.pdf](https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf)
- Moyon, M., & Spiesser, M. (2015). *L'Arithmétique des fractions dans l'œuvre de Fibonacci : Fondements & usage*. Springer.
- Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157–162. <https://doi.org/10.5169/seals-1226>
- Radford, L. (2022). Body, matter and signs in the constitution of meaning in mathematics. In C. Houdement, C. de Hosson & C. Hache (Eds.), *Semiotic Approaches in Science Didactic* (pp. 247–282). ISTE.
- Radford, L. (2023). Accogliere l'altro come problema educativo. *CEMeR – Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 13(2), 113–125.
- Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. In E. Hargreaves & D. Scott (Eds.), *The Sage Handbook of Learning* (pp. 129–138). Sage Publications.

## La geometria ricorrente: un percorso didattico sul processo ricorsivo in geometria

Recurrent geometry: a learning path on the recursive process in geometry

Giovanna Rinchiusa e Maria Alessandra Vaccaro

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo – Italia

✉ [giovanna.rinchiusa@unipa.it](mailto:giovanna.rinchiusa@unipa.it), [marialessandra.vaccaro@unipa.it](mailto:marialessandra.vaccaro@unipa.it)

**Sunto** / L'esperienza didattica qui descritta è stata svolta in una classe terza di un liceo scientifico italiano, con lo scopo di stimolare l'attivazione di congetture e dell'argomentazione verso il pensiero dimostrativo, tramite l'utilizzo del software GeoGebra. Per fare questo, si è scelto di lavorare sulla geometria ricorrente, ideata dal matematico francese Gaston de Longchamps, in stretta relazione con il processo ricorsivo e il principio di induzione. In questo lavoro si mostra come tale percorso abbia favorito l'apprendimento di concetti della geometria euclidea e sviluppato dal punto di vista didattico le capacità argomentative degli alunni. Per valutare il raggiungimento degli obiettivi è stata effettuata un'analisi qualitativa delle produzioni degli studenti.

**Parole chiave:** congettura; argomentazione; configurazioni geometriche; processo ricorsivo; mediazione semiotica.

**Abstract** / The learning path described here was carried out with eleventh grade students attending an Italian scientific upper secondary school, with the aim of stimulating the activation of conjectures and argumentation towards demonstrative thinking, using the dynamic geometry software GeoGebra. To this end, we chose to work on recurrent geometry, developed by the French mathematician Gaston de Longchamps, which is closely related to the recursive process and the mathematical induction. In this paper we show how such a course can promote the learning of Euclidean geometry topics and educationally develop students' argumentation skills. A qualitative analysis of the students' productions was carried out to evaluate the achievement of our goals.

**Keywords:** conjecture; argumentation; geometric configurations; recursive process; semiotic mediation.

# 1 Introduzione

---

La ricerca in didattica della matematica indaga da diversi anni come l'uso di artefatti di geometria dinamica possa favorire la capacità degli studenti di formulare congetture in geometria. Questo contributo si inserisce in quest'ottica: descriveremo un'esperienza didattica il cui obiettivo principale è stato di incentivare, attraverso l'uso di GeoGebra, la capacità degli studenti di esplorare proprietà e di enunciare e validare congetture nell'ambito della geometria ricorrente. Si è scelto questo argomento perché si è pensato che il carattere proprio della geometria ricorrente potesse spingere gli alunni alla ricerca di caratteristiche comuni alle configurazioni esaminate ad ogni passo della catena e potesse indurli a formulare congetture e produrre argomentazioni a supporto di esse. Inoltre, la scelta di tale tematica ci è sembrata appropriata vista la carenza di percorsi didattici incentrati sul processo ricorsivo in geometria nella scuola secondaria di secondo grado.<sup>1</sup> Non da ultimo, realizzare un percorso didattico in laboratorio facendo uso di un software di geometria dinamica permette di proporre un metodo alternativo all'insegnamento tradizionale della geometria.

Nel par. 2 forniremo alcune coordinate teoriche utili per inquadrare i temi della congettura dal punto di vista del modello di Toulmin e l'uso degli artefatti cognitivi nella didattica. Proseguiremo poi con il par. 3, nel quale presenteremo i problemi di geometria ricorrente che hanno rappresentato il cuore disciplinare del percorso didattico. Nel par. 4 esplicheremo le scelte metodologiche e didattiche operate, mentre nel par. 5 descriveremo nel dettaglio le fasi del percorso. Infine, nel par. 6 proporremo l'analisi di alcune interviste realizzate a fine percorso, per poi avviarci alle conclusioni esposte nel par. 7.

## 2 Quadro teorico

---

### 2.1 Congetturare in matematica grazie all'uso di artefatti

Il quadro teorico di riferimento scelto per progettare ed analizzare i risultati dell'esperienza si basa su due nuclei teorici: il modello di Toulmin (Blum et al., 2016; Pedemonte & Balacheff, 2016; Toulmin, 1958) per la produzione e l'analisi di argomentazioni, di cui la congettura è parte integrante; la prospettiva Vygostkiana relativa all'utilizzo degli artefatti cognitivi come elemento principale dell'apprendimento (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, 2009; Vygotsky, 1981).

Il modello di Toulmin<sup>2</sup> (1958) è uno schema metodologico efficace nell'analisi delle argomentazioni degli studenti. In base a tale modello, i vari passi di cui si compone un'argomentazione volta a sostenere un enunciato, vengono descritti attraverso l'esplicitazione di tre elementi: dati (*data*), conclusione (*claim*) e garanzia (*warrant*). I dati sono le ipotesi, la conclusione è in buona sostanza la tesi dell'enunciato, la garanzia è un principio generale che mediante l'inferenza consente di passare dai dati alla conclusione, ovvero di stabilire un legame tra essi. L'uso del modello di Toulmin permette di mostrare le competenze necessarie a produrre e dimostrare una congettura:

«Tali competenze riguardano aspetti specifici relativi all'argomentazione, ed in particolare la relazione tra un'argomentazione volta a convincersi della correttezza delle affermazioni che via via emergono nella ricerca della congettura, e una dimostrazione, ovvero una argomentazione accettabile nel contesto matematico».

(Mariotti, 2022, p. 65)

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Cantone Ticino.

2. Il modello è stato ideato nel 1958 dal filosofo britannico Stephen Edelstone Toulmin (1922-2009).



La congettura è un'ipotesi che nasce da osservazioni o intuizioni e che, benché appaia plausibile, non è stata ancora dimostrata in modo formale. A sostegno di una congettura vi è un'argomentazione, che ne supporta la credibilità, ma non è detto che ne fornisca una prova rigorosa mediante un processo logico deduttivo. L'attività dimostrativa in senso più proprio si realizza infatti mettendo in atto una serie di concatenazioni logiche che, organizzate a partire da conoscenze pregresse, portano alla conferma della congettura prodotta. In generale, il passaggio dalla formulazione di una congettura e delle argomentazioni che l'accompagnano alla sua validazione in termini ipotetico deduttivi è tutt'altro che semplice: in questo senso, diversi studi hanno messo in evidenza le possibili difficoltà e rotture cognitive nel passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione (si vedano, ad esempio, Balacheff, 2001; Duval, 1998). Uno dei problemi più frequenti che incontrano in classe sia gli insegnanti che i discenti (a livello di scuola primaria e secondaria di primo grado,<sup>3</sup> ma secondo noi anche nella scuola secondaria di secondo grado), infatti, è il complesso rapporto tra dimostrazione e argomentazione, «ovvero tra una dimostrazione e un discorso che esprime un perché producendo una motivazione convincente» (Mariotti, 2022, p. 6).

In tale contesto gli artefatti, oggetti prodotti dall'uomo che hanno come fine il raggiungimento di uno scopo, assumono un ruolo significativo. In particolare, l'ingresso nelle scuole degli artefatti digitali ha favorito la diffusione di studi inerenti all'analisi del contesto in cui la classe opera e al relativo comportamento degli alunni. All'interno di questo quadro, occupa un ruolo centrale il termine mediazione di cui riportiamo la definizione data da Hasan:

«il sostantivo mediazione deriva dal verbo mediare, che si riferisce ad un processo con una complessa struttura semantica [...] Queste complesse relazioni semantiche non sono evidenti in ogni uso grammaticale del verbo, ma sommerse sotto la superficie e possono essere riportate alla luce tramite associazioni paradigmatiche, per esempio le loro relazioni sistemiche».

(Hasan, 2005, p. 136)

Dunque, il termine si riferisce a tutte quelle azioni didatticamente mirate che l'insegnante mette in atto per condurre gli alunni verso lo svolgimento di un compito, ovvero verso la costruzione della conoscenza da parte dell'allievo.

«L'insegnante eserciterà il suo ruolo di mediazione sia in modo diretto, attraverso l'introduzione degli strumenti matematici necessari in relazione alle diverse situazioni didattiche, sia in modo indiretto, utilizzando le produzioni individuali degli alunni (da confrontare e discutere in classe) e attraverso la valorizzazione dei contributi degli alunni durante la discussione in classe e il lavoro di gruppo».

(Anichini et al., 2003, p. 33)

Gli strumenti tecnici utilizzati dall'insegnante prendono il nome di mediatori didattici. Spesso questo è il ruolo degli artefatti, che secondo la prospettiva di Vygotsky hanno una potenzialità espressiva; tale caratteristica li rende strumenti di mediazione semiotica. In altre parole, l'insegnante agendo come mediatore usa l'artefatto per mediare il sapere matematico: «così un artefatto sarà chiamato strumento di mediazione semiotica quando sarà usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente» (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 285).

Nell'insegnamento della geometria sono sempre più utilizzati i software di geometria dinamica, artefatti digitali nei quali si ha il passaggio dallo spazio grafico e dagli strumenti di disegno usuali (il foglio,

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

la matita, la riga, il compasso) a uno spazio grafico virtuale e ai comandi grafici in esso disponibili. Così

«lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere “fatti geometrici” e può essere avviato a un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all’interno di una teoria più o meno ben precisata, perché una certa proprietà osservata vale».

(Anichini et al., 2003, pp. 28–29)

Nel presente lavoro poniamo l’attenzione sull’artefatto digitale GeoGebra (Accomazzo, 2013; Brigaglia et al., 2021), che è uno dei software di geometria dinamica più diffusi in ambito scolastico ed è disponibile gratuitamente. Il potenziale didattico di GeoGebra è dato in particolare dalla modalità di trascinamento che, tramite l’uso del cursore, permette di muovere gli elementi di una figura nello spazio virtuale e di ottenere altre figure della stessa famiglia della prima. Grazie alla dinamicità del software non siamo più di fronte all’unica copia prodotta dal disegno statico tradizionale, ma possiamo visualizzare un ampio spettro di rappresentazioni della stessa figura. Un’altra importante caratteristica di GeoGebra è la possibilità di costruire e salvare le Macro, ovvero nuovi strumenti che permettono di ripetere una serie, anche molto complessa, di operazioni mediante un semplice comando. Come verrà delineato nei paragrafi successivi, nell’attività da noi proposta, le Macro sono molto utili per analizzare cosa accade nei passi successivi della sequenza di configurazioni, visto che questi dipendono l’uno dall’altro in modo iterativo.

In questo contributo si vuole evidenziare come un software di geometria dinamica possa aiutare gli alunni a colmare eventuali lacune pregresse e, permettendo loro di esplorare, formulare e validare congetture, realizzi un intreccio fra l’aspetto pratico-esplorativo e quello teorico. Tale intreccio è spesso da ristrutturare: infatti, quando si propone agli allievi di lavorare con un software di geometria dinamica, essi pensano che poter costruire e visualizzare le proprietà caratteristiche di una configurazione sia la prova stessa della loro validità e quindi non sentono la necessità di darne una dimostrazione. L’impostazione del percorso segue un approccio di tipo laboratoriale, in accordo con le Indicazioni Nazionali per i licei (Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca [MIUR], 2010) in cui viene consigliato «l’uso costante del laboratorio per l’insegnamento delle discipline scientifiche» (p. 7). Per lavorare in quest’ottica, abbiamo fatto nostra la seguente descrizione di laboratorio riferito in modo specifico alla matematica:

«il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L’ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti».

(Anichini et al., 2003, p. 28)

La metafora della bottega d’arte del Rinascimento descrive pienamente uno dei principali obiettivi del laboratorio di matematica, l’*apprendistato cognitivo*: «l’esperto modella e struttura l’attività del principiante, che osserva l’esperto e confronta e valuta il suo operato rispetto alle proprie attività intellettuali» (Anichini et al., 2003, p. 33).

## 2.2 Induzione e ricorsione

Come anticipato, l’esperienza didattica verte sull’argomento induzione e ricorsione. All’interno delle Indicazioni Nazionali per i licei, infatti, tra i gruppi di concetti e metodi che gli alunni devono saper

dominare al termine del percorso, vi è un esplicito riferimento al principio di induzione:

«una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico».

(MIUR, 2010, p. 22)

Il principio di induzione è un processo che permette di dimostrare una proprietà riconducibile ai numeri naturali se sono soddisfatte le seguenti due condizioni: la proprietà vale per un dato numero naturale inteso come primo elemento dell'insieme che la verifica (base dell'induzione), e supposta vera la proprietà per un numero naturale  $n$ , lo è anche per il suo successivo  $n + 1$  (passo induttivo). La dimostrazione per induzione, ovvero la tecnica dimostrativa che si basa sul principio di induzione, spesso risulta un argomento ostico per gli alunni. La causa principale di difficoltà riguarda il fatto che l'asserzione che deve essere provata diventa essa stessa ipotesi nel passo induttivo e ciò può generare confusione. L'idea chiave alla base del principio di induzione è rappresentata da una sorta di reazione a catena, tipica anche di un processo ricorsivo, ovvero un processo nella cui definizione richiama sé stesso. La stretta relazione fra l'induzione matematica e la ricorsione è stata oggetto di studio in diversi articoli di didattica della matematica (Leron & Zazkis, 1986; Nannini & Telloni, 2022). A tal proposito, utilizzando l'espressione di Leron e Zazkis (1986, p. 28) la ricorsione può essere considerata come una «versione esecutiva dell'induzione». Pensando al processo ricorsivo come una possibile chiave di volta per una più facile comprensione dell'induzione, abbiamo ritenuto interessante progettare e realizzare un percorso didattico incentrato proprio sulla ricorsione, anche ai fini delle possibili ricadute didattiche nella pratica dei docenti. Come emerge dai *Principles and standards for school mathematics* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), da *Matematica 2003* (Anichini et al., 2003) e dalle Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010),<sup>4</sup> nella scuola secondaria di secondo grado il concetto di ricorsione si incontra trattando il principio di induzione, le successioni numeriche e le funzioni definite per ricorrenza, ma non vi è traccia del processo ricorsivo in ambito geometrico. Per tale motivo abbiamo focalizzato la nostra attenzione verso la cosiddetta "geometria ricorrente", così denominata dal matematico francese Gaston de Longchamps (1842-1906) nel suo lavoro *La géométrie récurrente* del 1883, pubblicato nel *Journal de Mathématiques Élémentaires*. Egli, partendo da alcuni punti notevoli del triangolo, quali il circocentro, l'ortocentro e il baricentro, e da oggetti legati sempre alla geometria del triangolo, quali il cerchio dei nove punti e la retta di Simson-Wallace, diede vita ad alcune serie di teoremi che dipendono l'uno dall'altro in modo iterativo (de Longchamps, 1883). Tra le catene ideate da de Longchamps abbiamo proposto in una classe terza di un liceo scientifico quella associata al circocentro, le cui configurazioni risultano a nostro parere le più intuitive per gli alunni poiché coinvolgono solo semplici teoremi di geometria piana. Nel paragrafo che segue illustreremo brevemente i teoremi affrontati poi in classe.

### 3 Geometria ricorrente: la catena sul circocentro

La catena sul circocentro è una delle serie di configurazioni di geometria ricorrente ideate da Gaston de Longchamps, che, partendo dal concetto geometrico di circocentro, e quindi dalla circonferenza

4. Più nello specifico, si tratta delle seguenti pagine all'interno dei lavori qui citati: NCTM (2000, pp. 38, 59, 296); Anichini et al. (2003, pp. 75, 94, 246, 387, 406) e MIUR (2010, pp. 337, 340, 364, 367).

circoscritta ad un triangolo, dimostra una sequenza di teoremi che dipendono l'uno dall'altro in modo ricorsivo. I vari passi della suddetta catena sono riportati qui di seguito e illustrati in Figura 1 e in Figura 2.

- Se da quattro rette nel piano, 1, 2, 3 e 4, che si intersecano a due a due, se ne esclude una alla volta, si ottengono quattro insiemi di tre rette ciascuno. Ogni insieme di tre rette determina un triangolo e quindi una circonferenza circoscritta: si hanno dunque quattro triangoli e quattro circonferenze circoscritte. Indicando con  $O_{ijk}$  il circocentro del triangolo formato dalle rette  $i, j$  e  $k$ , ovvero il centro della circonferenza circoscritta a tale triangolo, si hanno i quattro punti  $O_{123}$ ,  $O_{124}$ ,  $O_{134}$  e  $O_{234}$ . Si dimostra che:

1. le quattro circonferenze si incontrano in un punto  $P$ ;
2. i quattro circocentri  $O_{123}$ ,  $O_{124}$ ,  $O_{134}$  e  $O_{234}$  appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro è denotato con  $O_{1234}$ .

Si vuole evidenziare che anche il punto  $P$  appartiene alla circonferenza per i punti  $O_{123}$ ,  $O_{124}$ ,  $O_{134}$  e  $O_{234}$  (Figura 1).

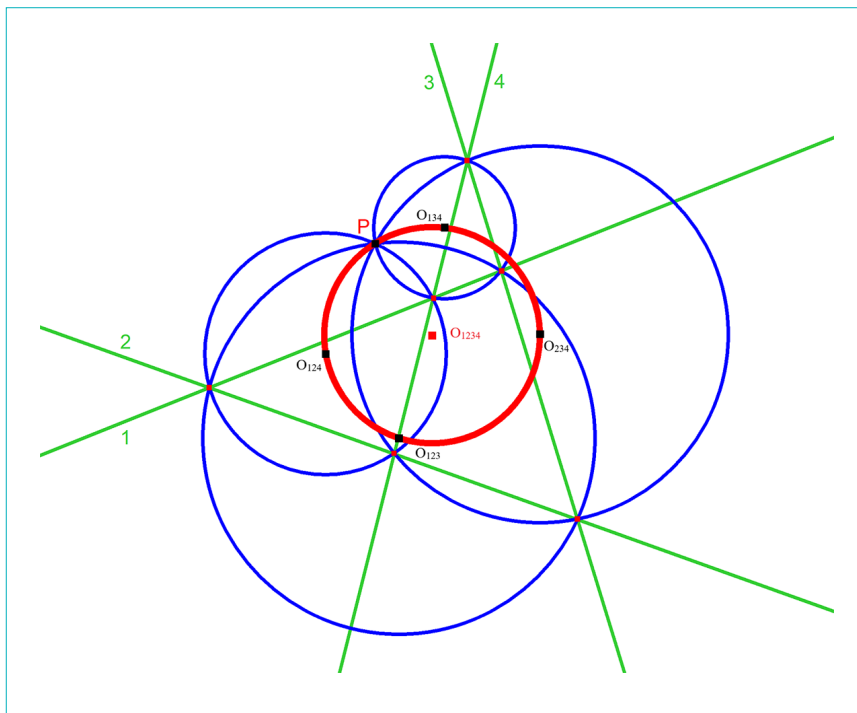


Figura 1. Configurazione con quattro rette.

- Se da cinque rette nel piano, 1, 2, 3, 4 e 5, che si intersecano a due a due, se ne esclude una alla volta, si ottengono cinque insiemi di quattro rette ciascuno. Secondo quanto descritto nel passo precedente, da ognuno di tali insiemi si determinano una circonferenza e un punto, il suo centro. Quindi si hanno in totale cinque circonferenze e cinque punti indicati con  $O_{1234}$ ,  $O_{1235}$ ,  $O_{1245}$ ,  $O_{1345}$  e  $O_{2345}$ . De Longchamps ha provato che:

1. le cinque circonferenze determinate si incontrano in un punto  $P$ ;
2. i cinque punti  $O_{1234}$ ,  $O_{1235}$ ,  $O_{1245}$ ,  $O_{1345}$  e  $O_{2345}$  appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro denotiamo con  $O_{12345}$ .

Notiamo che, contrariamente a quanto osservato nel passo precedente, il punto  $P$  non appartiene alla circonferenza per i punti  $O_{1234}$ ,  $O_{1235}$ ,  $O_{1245}$ ,  $O_{1345}$  e  $O_{2345}$  (Figura 2).

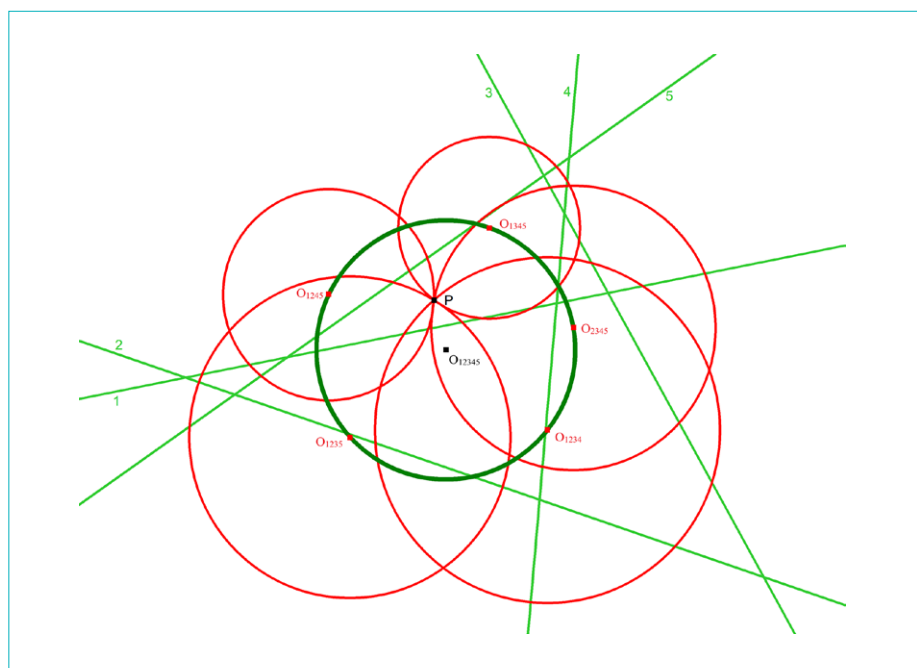


Figura 2. Configurazione con cinque rette.

Tale ragionamento è stato generalizzato da de Longchamps nel modo seguente:

- Se da  $n$  rette nel piano,  $1, 2, 3, \dots, n$ , che si intersecano a due a due, se ne esclude una alla volta, si ottengono  $n$  insiemi di  $n - 1$  rette ciascuno e da ognuno di questi insiemi una circonferenza e un punto, il suo centro, definiti per ricorrenza. Allora si ha che:
    1. le  $n$  circonferenze determinate si incontrano tutte in uno stesso punto  $P$ ;
    2. i centri di tali circonferenze appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro viene denotato con  $O_{123\dots n}$ .
- Si vuole sottolineare che tale circonferenza non contiene il punto  $P$ , proprietà soddisfatta soltanto nel caso  $n = 4$ .

## 4 Scelte metodologiche e didattiche

L'esperienza oggetto di questo contributo è incentrata sulla costruzione di configurazioni geometriche che, come mostrato nel lavoro di de Longchamps, dipendono l'una dall'altra in modo iterativo. Come anticipato, il percorso è rivolto ad alunni delle classi terze di un liceo scientifico. Si presuppone che questi, avendo studiato la geometria euclidea del piano durante il primo biennio, abbiano già una certa dimestichezza con le relative definizioni e proprietà elementari. I prerequisiti richiesti sono gli elementi di base della geometria piana, in particolare: i punti notevoli del triangolo, i criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli, la somma degli angoli interni di un poligono, la relazione tra angoli alla circonferenza e angoli al centro che insistono sullo stesso arco, la congruenza di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco e la condizione di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza.

Con riferimento al curriculum Matematica 2003 (Anichini et al., 2003) riportiamo di seguito le cono-

scienze e le abilità formative che si vogliono far acquisire durante il percorso:

- proprietà fondamentali della circonferenza, proprietà angolari;
- poligoni inscrittibili in una circonferenza;
- individuare e riconoscere proprietà di figure del piano;
- analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini;
- realizzare costruzioni geometriche elementari mediante software di geometria;
- applicare in semplici casi il principio di induzione;
- esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà;
- verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione;
- produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni;
- confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri.

Tali conoscenze e abilità sono perfettamente coerenti con i risultati di apprendimento delle aree logico-argomentativa e scientifica, matematica e tecnologica, e con gli obiettivi specifici di apprendimento riportati nelle Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010).<sup>5</sup>

Al fine di favorire un approccio graduale e sistematico al pensiero teorico, si è pensato di utilizzare lo strumento metodologico della *discussione matematica*, opportunamente gestito dall'insegnante-mediatore. Infatti

«in essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo, in quanto ha presenti gli obiettivi generali e specifici dell'attività proposta».

(Anichini et al., 2003, p. 32)

Il percorso è stato organizzato in cinque fasi:

1. *Verifica dei prerequisiti e introduzione dei concetti utili per la comprensione di quanto proposto in seguito.*

Come prima attività si prevede un ripasso dei prerequisiti, ovvero gli argomenti di base della geometria piana sopra elencati. Successivamente si vuole stimolare una discussione sulla definizione di una circonferenza per i punti di intersezione di tre rette del piano che si intersecano a due a due e sulla formalizzazione della relativa dimostrazione.

2. *Introduzione del principio di induzione.*

Ci si propone di introdurre il principio di induzione come processo dimostrativo mediante il quale si possono provare numerosi problemi di aritmetica elementare, quali determinare la somma dei primi  $n$  numeri dispari e la somma dei primi  $n$  numeri pari. In un secondo momento si cercherà di utilizzare il principio di induzione anche per dimostrare alcune proprietà geometriche, quali determinare la somma degli angoli interni di un poligono di  $n$  lati.

3. *Il processo ricorsivo. Esplorazione con GeoGebra.*

L'obiettivo di tale fase è condurre gli alunni a riflettere sui possibili scenari che si presentano quando si incrementa di una unità il numero delle rette, ovvero considerando quattro rette che si intersecano a due a due. La finalità è che considerino le quattro rette di partenza in gruppi da tre escludendo una retta alla volta, in modo tale da far entrare in gioco il processo ricorsivo. Infatti, avendo già provato che è possibile costruire una circonferenza partendo da tre rette, gli alunni sono in grado di applicare, con l'ausilio di GeoGebra, il ragionamento per tutti e quattro i gruppi, ottenendo quattro circonferenze.<sup>6</sup>

5. Si vedano nello specifico la p. 7 e le pp. 338–341 di tale documento.

6. È possibile interagire con la configurazione cliccando sul seguente link: <https://www.geogebra.org/m/evjrnkkg>.



#### 4. *Dall'argomentazione alla dimostrazione.*

La prima attività di questa fase consiste nell'indagare quale relazione sussiste tra le quattro circonferenze e i relativi centri ponendo sotto forma di intervista alla classe, suddivisa in gruppi, le seguenti domande stimolo:

- i. Quanti triangoli si generano da quattro rette che si intersecano a due a due?
- ii. Quante circonferenze?
- iii. Che caratteristica hanno tali circonferenze?
- iv. E i loro centri?

A questo punto si prevede una fase di interazione fra gli alunni di ciascun gruppo: essi potranno produrre delle congetture e confrontarsi fra loro al fine di rispondere alle domande stimolo poste, argomentando anche sulle dovute motivazioni. Ci si aspetta che dall'esplorazione della configurazione ottenuta osservino che le quattro circonferenze si intersecano tutte in uno stesso punto e che, determinati i loro centri, riescano ad individuare la circonferenza per tre di tali centri e verificare che anche il quarto appartiene alla circonferenza trovata.<sup>7</sup>

Successivamente ci si propone di ragionare sull'esigenza di determinare una giustificazione formale di quanto rilevato graficamente mediante il software (primo passo della catena). Per giungere ad una dimostrazione all'interno di un processo logico-deduttivo si può procedere in diversi modi, a seconda del contesto classe o del gruppo di studenti che partecipano al percorso. Di fronte ad alunni abituati al processo dimostrativo gli si può chiedere di trovare individualmente o in piccoli gruppi una possibile dimostrazione, o i primi passi della stessa. Nel caso in cui non riescano a giungere a conclusioni accettabili, nel senso di Mariotti (2000), oppure se non hanno familiarità con le dimostrazioni, si procede discutendo insieme a loro sui vari passi che portano alla relativa formalizzazione.

#### 5. *Generalizzazione dei teoremi trattati.*

La prima attività di tale fase consiste nel chiedere agli alunni cosa accade quando si incrementa ancora di una unità il numero delle rette, ovvero quando si considerano cinque rette che si intersecano a due a due. A questo punto sarà evidente se hanno compreso appieno il processo ricorsivo. Infatti, ci aspettiamo che, ripetendo il ragionamento del passo precedente, riescano a individuare cinque gruppi di quattro rette ciascuno e a determinare cinque circonferenze con le proprietà succitate.<sup>8</sup> Per aiutarli nella costruzione della nuova configurazione si prevede di dedicare del tempo all'introduzione e definizione delle Macro necessarie, che possono essere utilizzate anche per realizzare configurazioni con un maggior numero di rette. In tal modo si vuole guidare gli alunni verso la generalizzazione dei passi della catena studiata.

Per poter valutare il raggiungimento degli obiettivi del percorso si utilizzeranno le registrazioni delle discussioni in classe, le produzioni degli alunni in itinere e le interviste, avvenute a distanza di alcune settimane dalla conclusione delle attività, sia degli allievi sia dei rispettivi insegnanti di matematica.

## 5 Descrizione del percorso

---

Il percorso didattico di geometria ricorrente è stato svolto in una classe terza del liceo scientifico statale "Stanislao Cannizzaro" di Palermo durante le ore curriculari. Da un incontro preliminare con l'insegnante di matematica è emerso che anche gli alunni più preparati presentavano diffuse lacune in

7. Sia la costruzione che la relativa Macro sono disponibili al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/xxxxe9jg>.

8. La relativa costruzione è disponibile al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/u4btwwsc>.

geometria avendo acquisito gli obiettivi di apprendimento del primo biennio soltanto parzialmente. Si è pensato che in un tale contesto il reiterare le costruzioni, come richiesto da un percorso incentrato sulla ricorsione, potesse contribuire a favorire l'apprendimento degli argomenti di geometria euclidea. La durata del percorso è stata di quindici ore suddivise in sei incontri, uno a settimana dalla fine di marzo all'inizio di maggio 2023. Entrambe le autrici erano presenti in classe, una ha rivestito il ruolo di insegnante-mediatore proponendo e conducendo le attività, mentre l'altra si è occupata di registrare le produzioni degli alunni.

### 5.1 Primo e secondo incontro: prerequisiti ed elementi di geometria piana

Durante il primo incontro della durata di due ore è stata presentata per somme linee l'attività didattica con un'introduzione all'ambiente di geometria dinamica GeoGebra. La maggior parte degli alunni ha dichiarato di non saper usare il software, pur conoscendone l'esistenza. Al fine di far familiarizzare gli allievi con GeoGebra è stato proposto di realizzare sul proprio foglio di lavoro virtuale alcune costruzioni elementari, quali il punto medio e l'asse di un segmento, la bisettrice di un angolo e la circonferenza per tre punti, anche se nel software risultano già definiti. Inoltre, mediante una discussione di gruppo stimolata dall'insegnante-mediatore, è stata svolta un'indagine preliminare sulle conoscenze relative alla geometria del triangolo, in particolare sui punti notevoli, sui criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli. Considerato che in relazione ai punti notevoli sono state rilevate parecchie difficoltà – gli alunni hanno mostrato una certa padronanza solo del concetto di ortocentro – tale argomento è stato ripreso nel complesso.

Nel corso del secondo incontro, durato un'ora e trenta minuti, sono state introdotte alcune proprietà di geometria piana utili per la trattazione degli argomenti oggetto del percorso. In particolare, si è posta l'attenzione sulla somma degli angoli interni di un poligono, sulla relazione tra angolo al centro e angolo alla circonferenza, sulla congruenza di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco e sulla condizione di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza.

### 5.2 Terzo incontro: il processo ricorsivo e la costruzione della configurazione con quattro rette

La prima parte del terzo incontro, durato in tutto due ore e trenta minuti, è stata dedicata all'introduzione del processo ricorsivo. È stato definito il principio di induzione, che è stato utilizzato insieme agli alunni per determinare la somma dei primi  $n$  numeri dispari, la somma dei primi  $n$  numeri pari e la somma degli angoli interni di un poligono. Successivamente, riprendendo la proprietà secondo cui tre rette nel piano che si intersecano a due a due determinano un triangolo e quindi una circonferenza che lo circoscrive, si è spostata l'attenzione al caso in cui si incrementa di una unità il numero delle rette iniziali, ovvero si considerano quattro rette. A tal proposito sono state poste dall'insegnante-mediatore le domande stimolo i-iv illustrate al punto 4 del par. 4. La classe, suddivisa in sei gruppi,<sup>9</sup> ciascuno formato da quattro o cinque allievi, ha avviato con l'ausilio di GeoGebra una fase di esplorazione e di formulazione di congetture. Dopo alcuni minuti di interazione e dibattito fra i componenti di ogni gruppo sono state registrate le interviste in cui gli alunni hanno esplicitato a voce ciò su cui hanno riflettuto precedentemente. Riportiamo le risposte a nostro parere più interessanti secondo quanto sarà esplicitato in seguito.

#### *Intervista gruppo 1:*

P.: «Abbiamo incominciato a fare l'intersezione fra le varie rette, come ci aveva detto la professoressa. Abbiamo individuato che i triangoli... che sono quattro. Poi successivamente abbiamo appunto detto... [Chiede a un compagno di continuare]».

9. La suddivisione in gruppi è avvenuta in modo casuale.

V.: «Allora dai punti che avevamo trovato tra l'intersezione fra le rette abbiamo trovato poi le circonferenze e trovando i punti di queste circonferenze abbiamo scoperto che...»

Intervistatore: «Quante circonferenze?»

V.: «Quattro circonferenze... e trovando i centri di queste circonferenze abbiamo scoperto che con il centro di ogni circonferenza si formava un poligono che aveva gli angoli opposti supplementari».

Intervistatore: «Che poligono?»

V.: «Un poligono che era... un quadrilatero».

Intervistatore: «Che caratteristica comune hanno le circonferenze?»

V.: «Che si intersecano tutte tra di loro».

#### *Intervista gruppo 2:*

G.: «Abbiamo disegnato quattro circonferenze passanti per quattro triangoli e i centri di queste quattro circonferenze formano poi un quadrilatero che a sua volta può essere inscritto in una circonferenza».

Intervistatore: «[Ripropone la terza domanda a cui gli allievi non hanno risposto] Che caratteristica hanno le circonferenze che avete costruito?»

I.: «Sono tutte per un punto, si intersecano, no? Cioè sono tutte...»

C.: «Passanti per un punto».

#### *Intervista gruppo 4:*

E.: «Allora la prima domanda, quanti triangoli si formano, si formano quattro triangoli. Alla seconda domanda, quante circonferenze si formano, si formano a loro volta quattro circonferenze. Le caratteristiche di queste circonferenze sarebbero che hanno tutte un punto in comune e i loro centri, i centri di queste circonferenze formano a loro volta un quadrilatero in cui la somma degli angoli opposti è  $180^\circ$ ».

Intervistatore: «Quindi? [Nessuna risposta da parte degli alunni] Se la somma degli angoli opposti è  $180^\circ$ ... [Ancora nessuna risposta] Qual è stata l'ultima cosa che avete fatto? [Riferendosi alla costruzione visibile nello schermo]».

E.: «La circonfer... Ah! Quindi si può formare una circonferenza che prende i quattro punti [riferendosi ai vertici del poligono] del nostro poligono per il teorema di inscrivibilità».

M.: «Più... [Si interrompe]».

Intervistatore: «Più? [Volendo spronare M.] Cosa stavi dicendo?»

M.: «[Completando quanto dichiarato da E.] Che prende i quattro punti delle circonferenze più il punto in comune fra loro».

Dai contributi degli alunni si evince che essi non hanno avuto difficoltà a rispondere alle prime due domande proposte e a osservare, mediante l'apposito strumento di GeoGebra, che i centri delle quattro circonferenze costituiscono i vertici di un quadrilatero con gli angoli opposti supplementari. Inoltre, il criterio di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza, trattato durante la lezione precedente, per almeno uno dei gruppi costituisce la garanzia (secondo il modello di Toulmin) che consente loro di individuare facilmente l'esistenza della circonferenza passante per i quattro circocentri relativi alla configurazione in esame. Contrariamente alle nostre aspettative, gli alunni dei primi due gruppi non hanno evidenziato autonomamente che le quattro circonferenze circoscritte ai quattro triangoli si intersecano in uno stesso punto, invece i membri del quarto gruppo non solo hanno rilevato tale fatto, ma hanno anche sottolineato che la circonferenza per i quattro circocentri passa pure per il suddetto punto di intersezione. Durante i primi tre incontri GeoGebra ha rivestito una funzione di primaria importanza divenendo mediatore nel processo di creazione di contenuti matematici. Infatti, permettendo agli studenti di

esplorare autonomamente le costruzioni realizzate, essi hanno potuto interagire con gli oggetti delle configurazioni e riconoscerne le proprietà caratteristiche.

### 5.3 Quarto e quinto incontro: dimostrazione del primo passo della catena

Dopo aver effettuato un riepilogo dei risultati ottenuti nella lezione precedente, la prima parte del quarto incontro, della durata di tre ore, si è incentrata sulla definizione della Macro relativa alla circonferenza passante per i circocentri associati alla configurazione con quattro rette. Successivamente si è posta l'attenzione sull'esigenza di fornire una dimostrazione dei risultati congetturati durante la fase esplorativa con GeoGebra. Poiché la classe durante il primo biennio non era stata abituata al processo dimostrativo, si è ritenuto opportuno avviare una discussione guidata, mediante domande mirate, per condurli a dimostrare che le quattro circonferenze circoscritte ai triangoli individuati da quattro rette si incontrano in uno stesso punto. Tra le varie dimostrazioni presenti in letteratura, ai fini didattici abbiamo scelto quella di Pickering (1806) che si compone di due parti: nella prima parte si prova che il punto  $P$ , comune a due circonferenze, appartiene a una terza circonferenza usando la condizione di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza; nella seconda parte, in maniera del tutto analoga alla prima, si dimostra che il punto  $P$  appartiene anche alla quarta circonferenza.<sup>10</sup> Vogliamo evidenziare che nel provare la seconda parte, ripercorrendo lo stesso ragionamento effettuato in precedenza e giustificando in modo chiaro ogni passaggio, gli alunni si sono mostrati più reattivi e autonomi piuttosto che nella dimostrazione della prima, in cui sono apparsi più vincolati alla guida dell'insegnante-mediatore.

Durante il quinto incontro, durato anch'esso tre ore, mediante una discussione guidata gli allievi sono stati avviati a dimostrare, seguendo l'idea di de Longchamps, che i circocentri dei quattro triangoli appartengono a una stessa circonferenza.<sup>11</sup> Per realizzare ciò, abbiamo suddiviso la dimostrazione in alcuni passi intermedi, ottenendo in tal modo una concatenazione di più argomentazioni, in cui la conclusione di un passaggio parziale diviene la garanzia per il successivo fino al raggiungimento della tesi. Come primo passo l'insegnante-mediatore ha chiesto alla classe di porre l'attenzione alle due coppie di triangoli  $BDE$ ,  $O_1O_3O_4$  e  $AEF$ ,  $O_1O_2O_3$  (Figura 3)<sup>12</sup> e la grande maggioranza degli alunni ha rilevato in modo autonomo la similitudine dei triangoli di ciascuna coppia, avendo utilizzato come garanzia il primo criterio di similitudine, ovvero la congruenza degli angoli corrispondenti verificata mediante l'apposito strumento di GeoGebra.

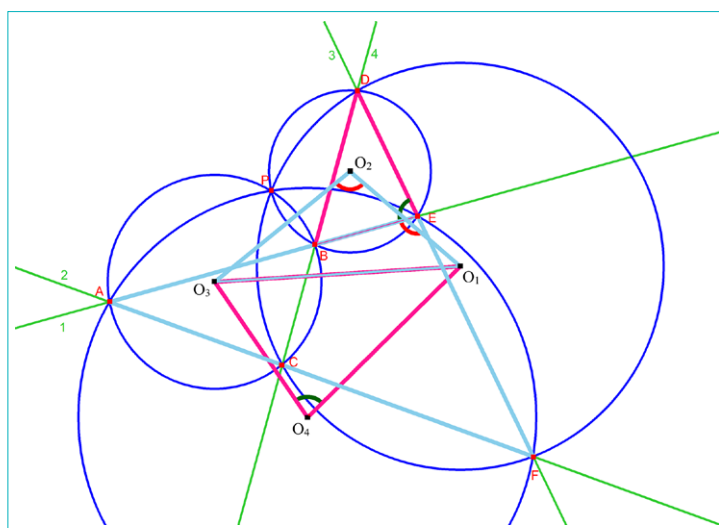


Figura 3. Configurazione della dimostrazione di de Longchamps.

10. Per la dimostrazione completa si rimanda al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/radbkhj6>.

11. Per la dimostrazione in dettaglio si rimanda al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/ajyfyh74>.

12. Per facilitare la notazione  $O_i$  denota il circocentro del triangolo ottenuto escludendo la retta  $i$ . Ad esempio, con  $O_1$  indichiamo il circocentro del triangolo individuato dalle rette 2, 3 e 4.

In seguito, un alunno si è accorto che il quadrilatero di vertici i circocentri  $O_1, O_2, O_3$  e  $O_4$  ha due angoli opposti supplementari affermando, seppur con un linguaggio non del tutto appropriato, che:

G.: «I due angoli [riferendosi a  $\hat{B}\hat{E}\hat{D}$  e  $\hat{A}\hat{E}\hat{F}$ ] proiettati sulla retta formano un angolo di  $180^\circ$  perché  $D, E$  ed  $F$  appartengono alla stessa retta... e quindi di conseguenza essendo gli stessi angoli [riferendosi agli angoli  $\hat{O}_4 = \hat{B}\hat{E}\hat{D}$  e  $\hat{O}_2 = \hat{A}\hat{E}\hat{F}$ ] la loro somma è di  $180^\circ$ ».

Come si evince dall'intervento dell'alunno G., egli prova che gli angoli  $\hat{B}\hat{E}\hat{D}$  e  $\hat{A}\hat{E}\hat{F}$  sono supplementari usando come garanzia l'allineamento dei punti  $D, E$  ed  $F$ . Tale conclusione ( $\hat{B}\hat{E}\hat{D}$  e  $\hat{A}\hat{E}\hat{F}$  supplementari) diviene garanzia per affermare che gli angoli  $\hat{O}_2 = \hat{A}\hat{E}\hat{F}$  e  $\hat{O}_4 = \hat{B}\hat{E}\hat{D}$  sono supplementari. Per completare la dimostrazione, ovvero per provare che il quadrilatero  $O_1O_2O_3O_4$  è inscrittibile in una circonferenza, dal dibattito in classe emerge l'idea di utilizzare nuovamente il criterio di inscrittibilità di un quadrilatero in una circonferenza. Analizzando il comportamento degli studenti nell'ottica di Toulmin, si evince che la maggior parte di essi ha sviluppato argomentazioni corrette, ma soltanto l'alunno G. è riuscito a raggiungere la tesi fornendo una giustificazione accettabile in ambito matematico.

Durante la discussione guidata avviata nel corso del quarto e quinto incontro per dimostrare il primo passo della catena di de Longchamps, abbiamo osservato un miglioramento, seppur lieve, nelle capacità argomentative degli studenti. Questi, infatti, all'inizio del percorso mostravano parecchie difficoltà anche nel fornire le motivazioni di alcuni semplici passaggi. Anche in questo contesto si vuole evidenziare il ruolo fondamentale rivestito da GeoGebra, strumento di mediazione semiotica che funge da ponte tra la fase esplorativa nella quale sono state prodotte delle congetture e quella dimostrativa nella quale sono state validate.

Alla fine del quinto incontro, gli alunni sono stati esortati a ragionare su cosa accade quando si incrementa ancora di un'unità il numero di rette della configurazione iniziale, ovvero passando da quattro a cinque rette del piano che si intersecano a due a due. Dopo aver costruito la nuova configurazione con cinque rette mediante la Macro definita in precedenza, si è dato il via a una nuova fase esplorativa che è durata fino alla fine della lezione.

#### 5.4 Sesto incontro: passi successivi della catena

Nel corso dell'ultimo incontro, durato tre ore, sono state poste delle nuove domande stimolo, similari alle precedenti, sulla configurazione con cinque rette; inoltre gli alunni sono stati invitati a riflettere sulle eventuali differenze tra le due configurazioni. Analogamente a quanto fatto in precedenza sono stati registrati gli interventi dei vari gruppi. Riportiamo di seguito i contributi di coloro che, applicando il processo ricorsivo, hanno effettuato la costruzione della configurazione relativa a cinque rette in modo pressoché automatico.

##### *Intervista gruppo 1:*

L.: «Allora abbiamo trovato queste cinque circonferenze con la macro fatta in precedenza, abbiamo notato che queste cinque circonferenze si incontrano in un punto che abbiamo denominato  $P$ . E poi... unendo i centri di queste circonferenze abbiamo... trovato, diciamo, un poligono, e questo poligono può essere inscritto dentro, diciamo, un'altra circonferenza».

Intervistatore: «Il fatto che le circonferenze si intersecano in un punto l'avevamo già trovato con quattro rette. Il fatto che i centri appartengono ad una stessa circonferenza l'avevamo già determinato anche con quattro rette. Rispetto alla configurazione con quattro rette c'è una differenza oppure no?»

P.: «All'inizio delle quattro rette era un quadrilatero, mentre adesso è un pentagono».

Intervistatore: «Sì, ovviamente questo sì, è una differenza, ma non era questo quello a cui io facevo riferimento».

V.: «Forse che la circonferenza che... inscritta [sic circoscrive] il poligono non passa invece per il punto  $P$ ».

Intervistatore: «Che era il punto?»

V.: «Punto di intersezione di tutte le altre circonferenze».

#### *Intervista gruppo 2:*

G.: «Abbiamo notato che i centri delle cinque circonferenze formano un poligono di cinque lati irregolare e che per i vertici di questo poligono passa un'ulteriore circonferenza e inoltre le cinque circonferenze si incontrano tutte in un unico punto».

Intervistatore: «Notate qualche differenza tra questa costruzione con cinque rette e quella con quattro rette?»

G.: «Praticamente ci sono più circonferenze perché si formano più triangoli con le intersezioni, ma una differenza particolare no».

Dalle interviste è emerso che tutti i gruppi, usando la Macro senza difficoltà, hanno visualizzato con GeoGebra che le cinque circonferenze, determinate mediante il processo ricorsivo, si intersecano in uno stesso punto e che i centri delle cinque circonferenze appartengono tutti a un'altra circonferenza. D'altronde la differenza tra la configurazione con quattro rette e quella con cinque rette a cui si riferisce l'intervistatore è stata determinata da un solo gruppo. In particolare, il primo ha anche osservato che il punto di intersezione delle cinque circonferenze non appartiene alla circonferenza determinata dalle cinque rette, contrariamente a quanto avviene nella configurazione con quattro rette.<sup>13</sup>

Nella parte conclusiva dell'incontro gli alunni hanno definito la Macro relativa alla circonferenza associata alla configurazione con cinque rette e l'hanno applicata ripetutamente alla successiva configurazione con sei rette. Mediante una fase esplorativa con GeoGebra hanno notato che la nuova configurazione è del tutto analoga alla precedente: le sei circonferenze determinate si intersecano in uno stesso punto e i loro centri sono concidici. In tal modo, avendo osservato che aumentando il numero delle rette rimangono invariate sia la relazione tra le circonferenze determinate mediante ricorsione che quella tra i relativi centri, gli alunni hanno potuto evincere la generalizzazione della catena in esame.

## 6 Interviste finali

---

In questo paragrafo presentiamo i risultati delle interviste conclusive, effettuate a circa tre settimane di distanza dall'ultimo incontro: nella prima parte verranno discusse le risposte date dagli studenti a sei domande; nella seconda invece si riporteranno stralci dell'intervista all'insegnante della classe coinvolta. Tali interviste vanno a indagare l'apprezzamento degli studenti dell'esperienza sia dal punto di vista dei contenuti trattati sia dal punto di vista dell'utilizzo di GeoGebra; servono inoltre come spunto per valutare la consapevolezza sul lascito formativo e disciplinare del percorso.

Di seguito riportiamo le domande poste agli alunni.

1. Hai trovato interessante il percorso sulla geometria ricorrente?
2. Durante l'attività hai incontrato difficoltà? Se sì, come hai cercato di superarle?

---

<sup>13</sup>. È possibile che le risposte fornite dall'alunno V. del gruppo 1 siano legate a un "effetto Topaze": l'intervistatore con il suo intervento potrebbe aver indotto l'alunno a ragionare per fornire una risposta diversa.



3. Riguardo all'utilizzo di GeoGebra, pensi che sia effettivamente un valido strumento nell'affrontare argomenti di geometria?
4. Sapresti illustrare come funziona il principio di induzione di cui abbiamo parlato durante la nostra attività?
5. Secondo te c'è una qualche connessione tra tale principio e le nostre configurazioni realizzate con GeoGebra?
6. Pensi che sarebbe per te utile partecipare in futuro ad altri corsi di questo tipo?

**Prima domanda:** «Hai trovato interessante il percorso sulla geometria ricorrente?». Riguardo questa domanda, la totalità degli allievi intervistati ha risposto in modo positivo. Trascriviamo qui di seguito alcune delle risposte registrate.

- V.: «Oltre ad aver imparato appunto molte delle regole geometriche che non conoscevo prima per altri motivi, ho imparato anche ad utilizzare GeoGebra che mi è servito perché comunque io oggi lo uso, quando magari la professoressa lascia degli esercizi riguardanti le rette, le parabole, io oggi lo uso e se lo so usare è grazie al corso perché prima non avevo idea di come si usasse GeoGebra».
- S.: «Allora a me è piaciuto perché secondo me è un approccio diverso per una materia che noi spesso trascuriamo, cioè in particolare la geometria noi non l'avevamo studiata bene, e secondo me studiarla in laboratorio ha suscitato maggiore interesse un po' in tutti noi, perché l'abbiamo sempre un pochino messa da parte, quindi l'ho trovato interessante per questo».
- G.: «Assolutamente sì, l'ho trovato sia interessante perché comunque abbiamo utilizzato anche i computer che non abbiamo la possibilità di utilizzare spesso a scuola soprattutto nell'ambito della geometria, e l'ho trovato anche utile per il mio futuro, perché oltre ad approfondire le conoscenze di geometria, ho riscontrato magari delle tecniche di studio che possono essere utili per l'università, magari, dove l'apprendimento si sposta dai libri sul digitale».

Da tali interventi emerge che, grazie al percorso sulla geometria ricorrente, gli alunni hanno avuto l'opportunità di scoprire un diverso approccio didattico per una materia che in passato non era stata sufficientemente affrontata. In particolare, dalle risposte di V. e di G. si evince che l'aver imparato a usare l'artefatto GeoGebra può tornare utile anche in altri contesti, come ad esempio nello studio della geometria analitica.

**Seconda domanda:** «Durante l'attività hai incontrato difficoltà? Se sì, come hai cercato di superarle?». Le risposte a questa domanda sono state abbastanza eterogenee; ne riportiamo un paio a nostro parere considerevoli.

- M.: «Forse qualche difficoltà perché geometria non ne avevo mai fatta bene... sulle basi della geometria però ci siamo ritornati in generale perché tutta la classe credo che forse aveva qualche problema, infatti siamo tornati. Siamo partiti un po' dalle basi e quindi anche le cose che forse avremmo dovuto sapere poi le abbiamo ripassate. E poi pure se avevo problemi col programma quando chiamavo voi mi aiutavate».
- G.: «In realtà non ho incontrato grandi difficoltà... ma anche là, il fatto che fossimo insieme agli altri compagni, quindi che avessimo comunque un piccolo gruppo, tanti piccoli gruppi di lavoro, mi aiutava anche a confrontarmi e a riscontrare una validità nei risultati che ottenevo... Riguardo le difficoltà degli argomenti di teoria, delle basi più solide avrebbero aiutato anche magari a comprendere in maniera completa il corso a trecentosessanta gradi da tutti i punti di vista. Comunque, devo dire che non ho riscontrato grandi difficoltà, anche per via delle spiegazioni, dell'interazione che c'era tra gli studenti e la professoressa, perché comunque parlando tanto abbiamo avuto la possibilità di chiarire i nostri dubbi».

La maggior parte degli allievi ha riconosciuto di avere avuto delle difficoltà sui contenuti di base della geometria piana, ma ha anche dichiarato di aver avuto la possibilità di ripassare (o forse di studiare per la prima volta) alcuni argomenti che avrebbero dovuto essere noti. Inoltre, la risposta di G. evidenzia un aspetto fondamentale del lavoro di gruppo: il confronto delle idee consente loro di condividere le argomentazioni, rafforzando le congetture proposte, e migliorare in tal modo la qualità del lavoro.

**Terza domanda:** «Riguardo all'utilizzo di GeoGebra, pensi che sia effettivamente un valido strumento nell'affrontare argomenti di geometria?». Per quanto riguarda questa domanda gli alunni all'unanimità hanno risposto positivamente sottolineando l'utilità di strumenti di supporto didattico per la geometria. Di seguito alcune delle risposte.

- F.: «Sì, assolutamente, perché queste cose fatte alla lavagna e fatte tutte, cioè tutti che facevano questa cosa in contemporanea, sarebbe stato veramente impossibile. GeoGebra ci ha dato la possibilità, per l'appunto, di costruire delle cose nel computer che effettivamente avevano un senso, capivamo come farle e capiamo come erano costruite, era tutto fatto da noi».
- R.: «Sì, penso che sia utile, soprattutto nei prossimi anni per fisica o matematica... potrebbe esserci utile per rappresentazioni grafiche, quindi saperlo usare ci sarà utile secondo me nei prossimi anni».
- G.: «Certo sì. Assolutamente sì. Anche perché il mondo è in continua evoluzione e da questo punto di vista sarà necessario iniziare a utilizzare sempre più strumenti tecnologici che comunque garantiscono una certa precisione in più rispetto anche alla carta».

**Quarta domanda:** «Saresti illustrare come funziona il principio di induzione di cui abbiamo parlato durante la nostra attività?». In relazione alle risposte a questa domanda, la grande maggioranza degli alunni intervistati ha mostrato una certa difficoltà a illustrare il principio d'induzione. Soltanto un alunno, di cui trascriviamo la risposta, ha cercato di renderne l'idea.

- G.: «Allora il principio di induzione è un principio che giunge ad una soluzione generale, partendo da tanti casi specifici se non mi sbaglio... abbiamo verificato la legge per quanto riguarda la somma degli angoli interni di un poligono: prima per il triangolo, poi per un quadrato, poi per il pentagono e così via giungendo alla conclusione che se diciamo funziona per la maggior parte, per la quasi totalità di questi... se funziona per uno dovrebbe funzionare per tutti. Cioè funziona per uno e abbiamo fatto chiaramente delle prove su più poligoni, anche magari con dei numeri più alti, più particolari quindi per cercare di arrivare a tutti i casi possibili, cosa ovviamente impossibile, però, perché i numeri sono infiniti».

Da quest'intervento si evince che l'alunno G. non ha compreso (o forse non ricordava) l'utilizzo che è stato fatto in classe del principio di induzione per dimostrare la proprietà relativa alla somma degli angoli interni di un poligono. Dalla sua risposta appare evidente che egli confonde il principio di induzione con il processo di ragionamento inferenziale che, partendo da alcuni casi particolari, permette di generalizzare.

**Quinta domanda:** «Secondo te c'è una qualche connessione tra tale principio e le nostre configurazioni realizzate con GeoGebra?». Riguardo le risposte a questa domanda ne abbiamo registrate alcune molto interessanti.

- G.: «Per quanto riguardava le circonferenze che si formavano dalle intersezioni di più rette ci accorgevamo che indipendentemente dall'angolazione delle rette, comunque si andava a formare sempre un certo numero di circonferenze che si intersecavano in un unico punto, poi in

base anche al numero quattro, cinque, sei rette la conclusione era sempre la stessa... però le figure, le posizioni dei punti variavano proprio per via della differente angolazione delle rette. Ma diciamo la conclusione a cui dovevamo arrivare non variava».

- F.: «Credo penso sia il fatto che... noi, per esempio, abbiamo preso quattro rette e per ogni retta siamo riusciti a trovare una circonferenza, abbiamo trovato che queste circonferenze, i centri di queste circonferenze avevano una circonferenza, cioè facevano parte di una singola circonferenza e poi abbiamo creato il tool su questa cosa e quindi abbiamo dimostrato<sup>14</sup> che valeva la stessa cosa con cinque rette».
- A.: «Abbiamo sempre aggiunto, man mano che disegnavamo di più, diverse rette, abbiamo visto come cambiava il numero delle circonferenze, però in un certo senso restava sempre uguale il procedimento, il risultato che ottenevamo».

Dai contributi si evince che gli alunni, reiterando il procedimento sviluppato per la configurazione di quattro rette e utilizzando le Macro definite, sono riusciti a produrre congetture sviluppando le loro capacità argomentative e ad individuare le caratteristiche comuni alle configurazioni man mano che aumentava il numero delle rette di partenza. Tuttavia, dalle risposte fornite è emerso che non è stato ben recepito il nesso tra il principio di induzione e l'attività sulla ricorsione su cui è stato incentrato il percorso didattico.

**Sesta domanda:** «Pensi che sarebbe per te utile partecipare in futuro ad altri corsi di questo tipo?». Per ciò che concerne l'ultima domanda tutti gli intervistati hanno manifestato concordemente la stessa opinione mettendo in evidenza ancora una volta il ruolo rilevante di un artefatto digitale, come si evince dalle seguenti risposte.

- G.: «Assolutamente sì, perché comunque si tratterebbe di ampliare, migliorare, perché no, anche apprendere nuove conoscenze da zero, per cui ovviamente, sia che si tratti dei corsi che poi hanno un fine, ovvero magari una gara finale o comunque che sia un corso semplice, diciamo per puro apprendimento, che come fine ha il puro apprendimento, io sono assolutamente favorevole».
- A.: «Sì, direi di sì, perché diciamo comunque queste cose che abbiamo fatto penso che siano delle cose abbastanza basiche, invece poi magari anche fare qualcosa di più complicato, più difficile, non dispiacerebbe».
- F.: «Sì, sì, assolutamente, perché secondo me è un metodo di apprendimento abbastanza importante e, che rispetto a una noiosa lezione, magari con l'ausilio di GeoGebra può darti, può aiutarti con un divertimento a un metodo di studio più apprendibile».
- R.: «Sì, sicuramente è interessante partecipare a corsi del genere durante le ore scolastiche, anche per fare qualcosa di diverso... e spezzare la monotonia della scuola, diciamo».

Infine, riportiamo di seguito l'intervista effettuata dalle autrici all'insegnante della classe.

Intervistatore: «Hai notato un cambio di atteggiamento da parte degli alunni nei confronti della geometria, in senso lato della matematica?»

Insegnante: «Allora io ti devo dire di sì, ora io non so se è effettivamente legato al contesto del corso, secondo me sì o perlomeno anche alla reciproca conoscenza che ormai si è in qualche modo assodata. Però io ti devo dire che, e lo dicevo anche alla coordinatrice, che li vedo diversi nell'atteggiamento e hanno una disponibilità all'ascolto maggiore, seguono di più e

14. L'alunno F. qui usa impropriamente il termine "dimostrato".

fanno domande più interessanti, complessivamente ti dico; in effetti più partecipi. Sì, devo dire di sì, senza ombra di dubbio. Ora da cosa dipende effettivamente io non te lo so dire, però c'è questo cambio di atteggiamento. Ma anche il fatto di essere in aula informatica, e quindi vedere in qualche modo, rendere più concreto quello che stanno facendo, secondo me è servito moltissimo. Cioè, hanno visto un aspetto della matematica che forse non avevano ancora visto».

Intervistatore: «Che cosa pensi relativamente alla geometria fatta in laboratorio mediante GeoGebra?»

Insegnante: «Secondo me è eccezionale; proprio GeoGebra, secondo me, è uno strumento eccezionale, io lo uso regolarmente in seconda perché i ragazzi vedono proprio, per cui comprendono meglio. Quindi, secondo me, questo aspetto è assolutamente da sottolineare. Per me funziona, funziona tanto, funziona veramente tanto. Poi loro che non l'avevano mai fatto, secondo me hanno proprio scoperto questo aspetto».

Intervistatore: «Ritieni che il percorso sia stato utile anche per una futura progettazione di attività in ambito geometrico nella stessa classe?»

Insegnante: «Assolutamente sì. Anzi mi auguro che tu possa fare anche quello di geometria analitica nello spazio. Mi piacerebbe moltissimo l'anno prossimo proprio con loro».

## 7 Bilancio conclusivo

---

In quest'ultimo paragrafo si propone un bilancio conclusivo dell'esperienza descritta nelle pagine precedenti, basato principalmente sulle osservazioni effettuate in itinere dalle due autrici.

Il percorso sulla geometria ricorrente ha consentito agli alunni di affrontare lo studio della geometria piana secondo una differente prospettiva: da semplici osservatori sono divenuti i protagonisti delle attività. Dallo svolgimento del percorso effettuato, dalle interviste in itinere e da quelle finali abbiamo dedotto che gli allievi non solo hanno avuto la possibilità di colmare alcune lacune pregresse, ma il fatto di ripetere lo stesso procedimento nelle costruzioni delle varie configurazioni ha permesso loro di assimilare gli argomenti di base della geometria euclidea affrontati. Durante l'attività svolta in classe abbiamo osservato che la grande maggioranza degli alunni, partendo dai casi particolari esaminati e reiterando l'utilizzo delle Macro definite in piena autonomia, ha rivolto l'attenzione alle configurazioni della catena di de Longchamps con un maggior numero di rette, facendo propria la nozione di generalizzazione. Considerato che in passato la classe non aveva affrontato il processo ricorsivo neanche in ambito aritmetico, riteniamo che la definizione del concetto di ricorsione in geometria sia stata recepita. Tuttavia, dalle interviste finali è emerso che gli studenti hanno confuso il principio di induzione con l'induzione intesa come processo inferenziale. Quest'ultima è stata correttamente utilizzata dagli alunni per generalizzare le proprietà caratteristiche della catena studiata.

Dalla discussione guidata dall'insegnante-mediatore durante le varie attività è risultato che la quasi totalità degli alunni ha partecipato attivamente alla fase argomentativa. Inoltre, poiché la classe non era stata educata al processo dimostrativo, abbiamo ritenuto opportuno guidare gli studenti nel formalizzare la dimostrazione del teorema relativo alla configurazione con quattro rette. Nonostante la grande maggioranza della classe abbia contribuito efficacemente alla realizzazione di buona parte della dimostrazione, soltanto un alunno è riuscito a giungere alla tesi in modo autonomo. Esaminando nel complesso l'intero percorso abbiamo notato un moderato sviluppo delle capacità argomentative degli alunni. Sebbene durante le prime attività l'intera classe avesse mostrato difficoltà nel giustificare anche i passaggi più semplici, abbiamo rilevato un progressivo miglioramento per ciò che concerne le verbalizzazioni fornite dagli allievi con maggiore consapevolezza seguendo ragionamenti logici appropriati.

Volendo esprimere le nostre considerazioni sull'andamento generale di tale esperienza, evidenziamo che la maggior parte degli alunni ha partecipato vivacemente alle lezioni, manifestando un entusiasmo via via sempre più crescente. Anche quei pochi studenti che hanno mostrato una certa indifferenza iniziale si sono lasciati facilmente coinvolgere, hanno collaborato nei gruppi di lavoro, e, durante gli ultimi incontri, hanno fornito pure il proprio contributo personale. Sulla base di quanto espresso dagli alunni e dall'insegnante della classe e in virtù delle nostre valutazioni, riteniamo che il percorso abbia portato risultati positivi e non escludiamo l'ipotesi di poterlo replicare proponendo alcune delle altre catene di teoremi ideate da de Longchamps.

### Ringraziamenti

Si ringraziano gli alunni e l'insegnante di matematica della classe III D a.s. 2022-23 del liceo scientifico statale "Stanislao Cannizzaro" di Palermo che hanno partecipato con entusiasmo al percorso didattico. Un ringraziamento speciale va al prof. Benedetto Di Paola per la sua disponibilità e per il supporto ricevuto durante la progettazione delle attività e la stesura di quest'articolo.

Questo lavoro è stato parzialmente supportato dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi" (INDAM), gruppo di ricerca GNSAGA.

---

### Bibliografia

- Accomazzo, P., Beltramo, S., Sargenti, A., & Robutti, O. (Eds.) (2013). *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*. Ledizioni.
- Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2003). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. Ciclo secondario*. MIUR, UMI, SIS, Mathesis.
- Balacheff, N. (2001). *Imparare la prova*. Pitagora Editrice.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746–783). Routledge.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: Artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 32(3), 270–294.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M. A., Sträßer, R., & den Heuvel-Panhuizen, V. (2016). *European traditions in didactics of mathematics*. ICME-13 Monographs, Springer Open.
- Brigaglia, A., Raspanti, M. A., & Rogora, E. (2021). L'uso di un software di geometria dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 6(1), 37–67.
- de Longchamps, G. (1883). La Géométrie Récurrente. *Journal de Mathématiques Élémentaires*, 2(2), 3–10, 25–33, 49–56, 73–78, 121–126.
- Duval, R. (1998). *Argomentare, dimostrare, spiegare: Continuità o rottura cognitiva?* Pitagora Editrice.

- Hasan, R. (2005). Semiotic mediation and tree exotropic theories: Vygotsky, Halliday and Bernstein. In J. J. Webster (Ed.), *Language, society and consciousness: The collected work of Ruqaiya Hasan* (Vol. 1, pp. 130–156). Equinox eBooks Publishing.
- Leron, U., & Zazkis, R. (1986). Computational Recursion and Mathematical Induction. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 25–28.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1–3), 25–53.
- Mariotti, M. A. (2022). *Argomentare e dimostrare come problema didattico*. UTET Università.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Schema di regolamento recante le Indicazioni Nazionali per i percorsi liceali* [Decreto 15 marzo 2010]. <https://www.istruzione.it/alternanza/allegati/NORMATIVA%20ASL/INDICAZIONI%20NAZIONALI%20PER%20I%20LICEI.pdf>
- Nannini, B., & Telloni, A. I. (2022). Levels of generalization in the objectification of the recursion step. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Eds.). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 235–242). PME & Universidad de Alicante.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the *ck<sub>g</sub>*-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104–122.
- Pickering, G. (1806). First Solution, by Mr. George Pickering. *New series of the Mathematical Repository by Thomas Leybourn*, 1, 170. Royal Military College.
- Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press.
- Vygotsky, L. S. (1981). The instrumental method in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology* (pp. 144–188). M. E. Sharpe.



## **Recensioni**

**DdM**

## Recensioni<sup>1</sup>

D'Amore, B. (2024). *Arte, matematica, futurismo. Un racconto tra scienza e pittura da Giacomo Balla a oggi*. Pendragon.



“Racconto” è il termine scelto dall'autore per descrivere il suo ultimo lavoro dedicato agli incontri fra arte e matematica. Termine quanto mai appropriato, dato che è la cronistoria artistica a scandire una scrittura puntuale, ove gli affondi teorici si alternano alle immagini di creazioni artistiche accuratamente selezionate. Questo “racconto tra scienza e pittura” è vivamente consigliato a chi s'interessa di arte e di matematica come espressioni contigue di un umanesimo improntato all'analisi. Non a caso D'Amore da sempre confessa la sua ammirazione per Filiberto Menna, storico e critico d'arte italiano autore de *La linea analitica dell'arte moderna* (prima edizione 1975), al quale va riconosciuto il merito di avere approfondito una concezione dell'arte intesa come struttura linguistica. Entrando nello specifico del saggio *Arte, matematica, futurismo*, il rigore scientifico che Menna ha riscontrato, per esempio, nella ricerca di Piet Mondrian e di Enrico Prampolini non sarebbe presente in modo altrettanto consapevole nell'arte di Giacomo Balla, come nota anche Piergiorgio Odifreddi nell'introduzione. Odifreddi e lo stesso D'Amore mettono in luce la pseudoscientificità del Futurismo, i cui esponenti erano di fatto «poco competenti nella matematica come disciplina scientifica» (p. 20) e che pertanto potevano interpretarla solo in modo «un po' ingenuo» (p. 18). Tale giudizio non è però ingeneroso, dato che D'Amore riconosce all'arte futurista, e a Balla in particolare, un ruolo significativo rispetto all'evoluzione che il linguaggio pittorico compiva in quegli anni verso l'astrazione.

Oltre a Balla e ai futuristi, cui il saggio di D'Amore dedica due capitoli, il lettore scopre interessanti analisi di opere di Marcel Duchamp (*Nudo che scende le scale*, 1912), di Pablo Picasso (*Ritratto di Ambroise Vollard*, 1910) e di Salvador Dalí (*Corpus Hypercubus*, 1954). Il tema specifico di queste pagine riguarda l'annoso problema della quarta dimensione, ovvero del tempo, che non è rappresentabile

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

con immagini fisse e che pure, interrogandosi sulla possibilità di una quarta dimensione dello spazio, Aristotele negò affermando che «un solido, muovendosi, non dà luogo a una figura con un maggior numero di dimensioni. Dunque il massimo possibile delle dimensioni dello spazio è tre» (p. 40). Le opere di Duchamp e Picasso, ma soprattutto l'iper cubo di Dalí, dimostrano invece che la ricerca artistica trae linfa dall'esplorazione di possibilità nuove, al di là delle attese estetiche della sua epoca. E se fu solo con l'arte del secolo XX che tali sfide figurative trovarono espressione, il problema della quarta dimensione venne affrontato scientificamente assai prima. Sta in queste pagine il merito forse maggiore di *Arte, matematica, futurismo*, perché offre al lettore passaggi eruditi – talvolta anche impegnativi e per addetti ai lavori – ma inseriti in un avvincente racconto a due voci fra arte e matematica. Si passa quindi dal vescovo-matematico Nicola d'Oresme, in epoca medievale, al monaco agostiniano seguace di Martin Lutero Michael Stifel, entrambi predisposti alla speculazione sul tempo ma intimoriti di prendere posizione a favore di una quarta dimensione, la quale sarebbe "contro natura". Il fatto che sia l'epoca illuminista a salutare una teoria dello spazio a quattro dimensioni conferma come il lento procedere delle ricerche dell'ingegno umano non sia l'esito di saperi decontestualizzati, ma dipenda dalla cultura e dalle condizioni sociali e di potere in cui i ricercatori si trovano a operare. A proposito della relazione fra scienza (fisica, matematica, meccanica) e arte visiva, Bruno D'Amore riprende nella premessa ad *Arte, matematica, futurismo. Un racconto tra scienza e pittura da Giacomo Balla a oggi* la nota polemica contro l'idea delle "due culture", che a suo parere non esisterebbero: «esiste la cultura» (p. 12). Tuttavia, giusta l'unicità della cultura, quale connotazione assume tale unicità nel suo irriducibile nucleo fondante? È qui che l'autore professa il suo ideale umanista, contestando l'errore di chi crede nell'assolutismo dogmatico della matematica: «essendo tale disciplina null'altro che un umanesimo tra gli umanesimi, con tutto ciò che questo comporta» (p. 84). Su tale linea concettuale, e grazie alla sua preparazione di critico d'arte, D'Amore tratteggia efficacemente il carattere di novità di molte operazioni artistiche contemporanee, richiamando la difficoltà di distinguere l'opera d'arte dalle immagini prodotte dal discorso formale del matematico. Si tratta di un argomento tutt'altro che trascurabile e di ampia portata interpretativa perché rammenta, a chi faticasse ad apprezzare l'arte contemporanea, l'utilità di adottare un nuovo paradigma che potremmo definire "trans-estetico". Per dirla con le parole dell'autore: «Uno stesso disegno, uno stesso oggetto, per volontà del suo produttore o espositore, può assumere valenze che lui stesso giudica voler essere esplicitamente artistiche» (p. 66). È quindi l'intenzionalità autoriale a determinare se un oggetto fa parte o meno del campo dell'arte, più che le caratteristiche intrinseche dell'artefatto. Conseguenza quasi paradossale di ciò è che a sostanziare l'arte visiva, oggi, siano spesso elementi invisibili, con buona pace dei principi classici come la forma, l'espressione, la tecnica: tutti decisamente ridimensionati da un discorso artistico più attento a suscitare sorpresa che piacere estetico.

---

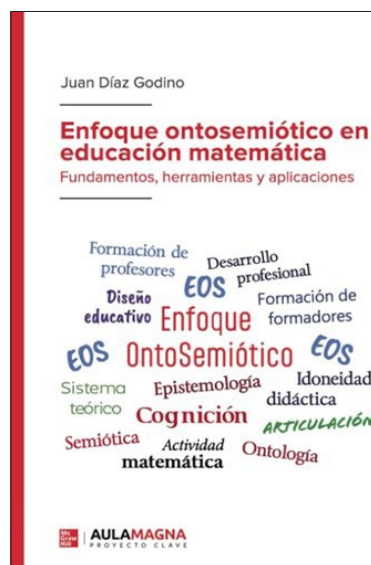
## Bibliografia

Menna, F. (2001). *La linea analitica dell'arte moderna. Le figure e le icone*. Einaudi.

**Mario Bottinelli Montandon**

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica  
SUPSI, Svizzera

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill.



### Premessa

Ho avuto la fortuna di ricevere questo libro prima della sua pubblicazione ufficiale e definitiva, quando il collega e amico Juan Godino lo inviò ad alcuni ricercatori che avevano negli anni dato contributi allo sviluppo della sua creazione scientifica, l'approccio ontosemiotico (EOS). Letto con attenzione totale d'un fiato e apprezzato per la sua portata senza limiti, nonostante la mole enorme, lo ricevo di nuovo a distanza di mesi, pubblicato in forma definitiva, elegante, ricco. Basta leggere l'indice per capire che siamo di fronte a una bomba culturale di potenza straordinaria. Ma bisogna con attenzione leggere le pagine a una a una...

Juan appartiene al ristretto gruppo di coloro che hanno saputo creare teorie significative, profonde, dalla portata enorme, tali da reindirizzare la ricerca nel nostro campo, quello della didattica della matematica, su binari nuovi, potenti, significativi, con una visione che si apre su numerosi fronti. Ricordo di aver avuto parte non banale sia nel far conoscere (parecchi decenni fa, almeno cinque) la teoria delle situazioni di Guy Brousseau, e poi di favorire in tutti i modi possibili lo studio teorico e concreto della teoria della oggettivazione di Luis Radford, almeno da 25 anni, creando numerose occasioni di confronti teorici e di divulgazione, per esempio invitando Luis in Italia ai frequentatissimi convegni da me diretti dal 1986 e in Svizzera (favorendo un celebre incontro di discussione fra lui stesso e Brousseau, che si protrasse per ore).

Ora, in questo 2024, credo si possa affermare che sono ben oltre una ventina le teorie significative della didattica della matematica, quelle di cui ha senso parlare; ho suggerito ai miei migliori allievi di dedicarsi all'impresa di presentarle al pubblico dei giovani ricercatori, già che mi rendo conto che le nuove teorie tendono a far... dimenticare le vecchie (Asenova et al., 2022).

La collaborazione con Juan è sempre stata profondissima e ricca; a partire da decenni fa... non ricordo più quando... Ma nel 2006, quando Luis Radford e io fummo editor di un numero speciale della rivista *Relime* (Messico), decidemmo di comune accordo di chiedere a Juan uno degli articoli (Radford & D'Amore, 2006).

Nel 2005 avevo avuto modo di fermarmi a Granada con Martha Isabel Fandiño Pinilla, ospiti di Juan e di Carmen Batanero, per una serie di attività di grande interesse comune; ma c'era stato qualche anno prima un formidabile incontro a Chivilcoy (Argentina), nel 2003, durante il quale Martha e io

avevamo favorito uno scambio di opinioni orali fra Guy e Juan; per esempio, durante un lungo viaggio in bus, i due si erano affrontati (sì, è proprio il caso di dirlo) sul piano teorico e la mia funzione di traduttore non era stata banale (Brousseau parlava sì spagnolo, ma non sempre in maniera del tutto comprensibile). [Va detto che, prima del covid, si facevano incontri veri, con viaggi, hotel, pasti in comune, formidabili occasioni di scambio personale; il che oramai è raro assai, sempre più raro. Molte volte Juan è venuto a Bogotá per lavorare al nostro fianco, per esempio in occasione di prove finali di dottorato, approfittando per scambiare idee, fare seminari e preparare testi].

A partire dai primi anni 2000, con Juan e talvolta con altri autori, fra i quali Vicenç Font e Martha, scrivemmo vari articoli destinati ad approfondire l'analisi critica del potere della teoria o a farla conoscere a studiosi di altri Paesi; questa attività durò vari anni, anzi: non è mai terminata. Per far ciò erano necessarie riunioni di approfondimento, tra le quali ricordo quella a Santiago di Compostela (2006), noi quattro autori impegnati lì per tesi di dottorato come esperti.

A proposito di tesi, in occasione della discussione del lavoro di uno dei miei migliori allievi dottorali, George Richard Paul Santi, nel marzo 2010 invitai a fare da relatori a Palermo (Italia) sia Juan sia Luis e fu un'occasione fantastica di discussione e approfondimento. Così come il convegno di Santa Marta (Colombia), indetto dalla università la Sabana di Chia, in occasione del quale si pubblicarono atti molto significativi per i quali chiedemmo un contributo a Juan e ad altri amici (per esempio: Brousseau, Arzarello, Cantoral, Duval, Font, Llinares, Gagatsis, ...).

Altre occasioni di contatto in convegni furono più volte a Luján (Argentina, per esempio nel 2021); a Bologna in occasione di un convegno internazionale che si tenne in mio onore nel 2011 (Sbaragli, 2011); un convegno virtuale a Granada nel 2017, nel quale Martha e io presentammo un'analisi approfondita di alcuni aspetti della EOS che ci appaiono tenuti in considerazione in questo ultimo fantastico libro di Juan; e altri. Moltissimi lavori di Juan sulla EOS sono stati da noi tradotti in italiano, già che la teoria EOS faticava un po' a entrare fra i ricercatori di quella nazione. E infine ricordo un libro scritto da Juan, Martha e da me, pubblicato in italiano nel 2003 e poi in spagnolo in Colombia nel 2008 (D'Amore et al., 2008).

Potrei proseguire, ma mi fermo qui; tutto quanto precede è scritto per confermare che la collaborazione sulla e lo studio della EOS sono sempre stati prepotenti e forti fra noi: Juan (che l'ha elaborata) e noi che ci abbiamo creduto e che abbiamo contribuito nell'analisi critica e nella diffusione.

Così che risulta ora chiaro che, quando abbiamo visto l'indice di questo libro e letto la prima versione, il nostro cuore ha palpitato; non ci sembrava fosse possibile entrare in maggiori e più profondi dettagli di quella che consideriamo una delle teorie più complete e affascinanti dell'intero panorama di ricerca in didattica della matematica. Eppure, così è: questo libro di molto approfondisce il lavoro di decenni precedenti proponendo estensioni e analisi inattesi, ma necessari.

A delineare alcuni punti fondamentali di tale teoria, dedicheremo le seguenti pagine (tratte da Azenova et al., 2022), che vanno interpretate come contributo alla diffusione della EOS e come specifico orientamento alla lettura di questo nuovo, potente, profondo, dotto libro.

### Cenni generali alla EOS

Con l'accesa discussione sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica negli anni '80, sono nate diverse teorie che hanno affrontato aspetti assai diversi della didattica della matematica, talmente diversi che apparentemente le differenze epistemologiche e ontologiche assunte da ciascuna le rendevano distanti e inconciliabili. Tuttavia, in Spagna, Godino e Batanero (1994) trovano nella nozione di *significado* un punto di convergenza tra le tante posizioni dell'epoca.

Per Godino e Batanero (1994) l'idea di significato è centrale nella didattica della matematica perché è direttamente correlata al problema della comprensione che gli studenti raggiungono degli oggetti matematici. In risposta a ciò, l'approccio ontosemiotico (EOS) è emerso come un sistema teorico che trova nella posizione pragmatica del significato (Peirce, 1958) un'opportunità di precisione concettuale che, legata ai concetti di pratica e oggetto matematico, consente una descrizione dettagliata

dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica che è compatibile con molteplici teorie sviluppate in questo campo.

La EOS parte dalla definizione di pratica come qualsiasi «azione o manifestazione (linguistica e non) compiuta da qualcuno per risolvere problemi matematici, comunicare la soluzione ad altri, validare la soluzione e generalizzarla ad altri contesti e problemi» (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Quel "qualcuno" che sviluppa una pratica matematica può essere una persona o un'istituzione, intendendo quest'ultima come un gruppo di persone impegnate a risolvere un problema. In questo modo, viene dato un ruolo principale al problem solving considerandolo come l'attività che fa emergere significativamente la conoscenza matematica, aggiungendo così una visione antropologica agli approcci teorici in didattica della matematica.

Per quanto riguarda gli oggetti matematici, essi sono intesi come entità astratte, cariche di aspetti culturali che emergono con ruoli rappresentativi, strumentali, regolativi, esplicativi e giustificativi nelle pratiche matematiche (D'Amore & Godino, 2007), il che implica che essi abbiano componenti personali e rivelino un dualismo istituzionale. Un oggetto matematico personale è l'emergere del sistema di pratiche personali che un soggetto sperimenta durante il suo processo di apprendimento; mentre l'oggetto istituzionale ha un carattere sociale che corrisponde all'ambito dei problemi in cui è accolto e proposto da un'istituzione (Godino & Batanero, 1994). In tal modo il significato è definito come la corrispondenza che si stabilisce tra un oggetto matematico e il sistema di pratiche in cui esso emerge e del quale fa parte.

Un altro aspetto che la EOS evidenzia è che la natura culturale delle pratiche matematiche porta con sé la necessità di usare il linguaggio come un mezzo che ci permette di comunicare con gli altri; così che, nell'attività matematica, i processi di interpretazione sono essenziali, intendendo la nozione di funzione semiotica come quel rapporto di dipendenza tra i vari oggetti che emergono e regolano le pratiche matematiche, che consente la modellazione e la descrizione della conoscenza personale e istituzionale degli oggetti matematici.

Proprio in vista della ricerca della modellizzazione delle pratiche matematiche, nella EOS viene proposta la nozione di processo matematico come sequenza di azioni che si sviluppano nel corso della risoluzione di un problema (Font & Rubio, 2016). La relazione dinamica che si instaura tra oggetti matematici e significati attraverso i processi che si sviluppano in una pratica matematica ci porta a concepire l'apprendimento come l'appropriazione che una persona fa dei significati istituzionali di un oggetto (Godino et al., 2020).

L'applicazione di questa concezione di oggetti, pratiche e significati nell'analisi di specifiche situazioni di apprendimento e insegnamento della matematica ha portato la EOS a riflettere sulla presenza di ulteriori elementi non riconosciuti in queste dimensioni epistemiche (istituzionali) e cognitive (personali), ampliando le considerazioni del suo sistema teorico con quattro ulteriori sfaccettature: affettiva, mediativa, interazionale ed ecologica. Secondo Godino et al. (2020), grazie a questa estensione, si possono affrontare diverse questioni e considerare diverse componenti della pratica matematica:

- l'emersione e lo sviluppo della matematica (aspetto epistemico), assumendo la visione pragmatica e antropologica precedentemente spiegata;
- i modi di conoscere gli oggetti matematici e che cosa essi significano per un soggetto (aspetto cognitivo), dove la funzione semiotica e la configurazione ontosemiotica (relazioni tra processi, pratiche e oggetti) sono usate per modellare e descrivere pratiche matematiche, oltre che per anticipare i conflitti che uno studente può incontrare;
- il modo di concepire e mettere in relazione insegnamento e apprendimento (aspetto didattico), per il quale la configurazione didattica si propone come strumento di rappresentazione e studio delle relazioni dinamiche fra tre aspetti: (1) le pratiche, gli oggetti e i processi che il docente ritiene necessari per avvicinarsi a un oggetto matematico, (2) il sistema delle funzioni didattiche e i mezzi utilizzati e (3) i fattori cognitivi e affettivi presenti nel processo di apprendimento;



- i fattori e le norme che condizionano, sostengono e regolano le pratiche matematiche (aspetto ecologico), affermando che possono essere di natura sociale o disciplinare e che, attraverso di essi, è possibile riflettere, valutare e modificare le pratiche matematiche per il loro miglioramento;
- le motivazioni, gli interessi, gli atteggiamenti, le credenze e le emozioni sia degli studenti che degli insegnanti (aspetto affettivo), comprendendo che essi inducono e condizionano le pratiche matematiche, motivo per cui sono direttamente correlati al grado di coinvolgimento degli studenti nel processo di insegnamento e apprendimento;
- il tipo di azioni e risorse che dovrebbero essere utilizzate in un processo di insegnamento e apprendimento di uno specifico oggetto matematico (aspetto mediazionale), alludendo all'importanza della disponibilità e dell'uso tempestivo di risorse materiali e temporanee.

Queste sfaccettature che si propongono nella EOS sono in relazione tra loro e sono destinate a soddisfare le esigenze di descrizione e prescrizione che, secondo Font e Godino (2011), deve affrontare la didattica della matematica. Per questo la EOS, oltre a offrire strumenti di studio per i processi di insegnamento e apprendimento in ogni loro sfaccettatura, offre anche a docenti e ricercatori una serie di criteri che consentono loro di studiare, riflettere, valutare e guidare il miglioramento di tali processi. Questi criteri sono associati a ciascuna delle sfaccettature e si presentano come il risultato di un processo consensuale di riconoscimento dei risultati delle molteplici teorie della didattica della matematica, per le quali non sono visti come una guida compiuta o rigida da considerare da parte degli insegnanti, ma si propongono come punto di partenza nella ricerca del consolidamento della didattica della matematica come disciplina scientifica ad alto impatto sociale.

È proprio lo studio dei processi di miglioramento dell'apprendimento e dell'insegnamento della matematica che conduce a uno dei costrutti centrali della EOS, l'idoneità didattica. Per la EOS, la didattica della matematica ha come preoccupazione primaria l'identificazione e lo studio dei problemi e dei fattori che condizionano l'apprendimento della matematica, al fine di fornire soluzioni alternative o migliorative. Per questo propone che, pur non esistendo "classi buone o cattive", sia importante disporre di criteri che permettano di riflettere su ciò che accade in aula e prendere decisioni che portino a pratiche significative per l'apprendimento degli studenti, essendo l'idoneità didattica di un processo di insegnamento e apprendimento lo stato di equilibrio tra i criteri delle sfaccettature della EOS. Questa idoneità è relativa ai fattori contestuali, culturali e storici in cui si inquadrano le pratiche matematiche.

È importante inoltre ricordare, all'interno della EOS, i contributi degli ultimi due decenni in relazione alla connessione tra questo sistema teorico e la formazione dell'insegnante di matematica. A questo proposito, la EOS ha proposto un modello di conoscenze e competenze didattico-matematiche (CCDM) basato su tre dimensioni: (1) didattica, alludendo alle conoscenze degli insegnanti in relazione alle sei facce della EOS precedentemente illustrate; (2) matematica, corrispondente alla conoscenza della matematica, dei suoi problemi, procedure, oggetti e connessioni; (3) obiettivo didattico-matematico, relativo alla conoscenza delle norme e metanorme dei processi di insegnamento e apprendimento, nonché alla valutazione dell'idoneità didattica (Pino-Fan & Godino, 2015).

Il CCDM si propone come un modello a doppia intenzione: da un lato consente lo studio e la descrizione delle conoscenze degli insegnanti e dall'altro fornisce criteri che consentono di determinare i fattori da considerare nella progettazione dei piani di formazione degli insegnanti. In particolare, propongono l'analisi, la progettazione, l'implementazione e la valutazione dei processi di insegnamento e apprendimento attraverso le sfaccettature e i criteri della EOS, come una possibilità di gestione delle competenze professionali dell'insegnante di matematica.

Le possibilità di espansione della EOS sono molteplici per la sua disponibilità al dialogo e all'interazione con i progressi di tutte le teorie di didattica della matematica, naturalmente discutendo e superando le differenze epistemologiche e ontologiche che esistono.

### Il libro di Juan Godino

Visto l'enorme successo internazionale della EOS, ma viste anche le diverse interpretazioni che hanno fatto seguito alla sua diffusione, e le altre teorie che sono state create prima e dopo, notevole è la diffusione internazionale della EOS, tanto che considero necessario questo possente lavoro esplicativo del suo creatore, dettagliato, profondo e critico.

Questo nuovo testo di Juan fa spesso riferimento a teorie che non si situano solo alla base della EOS, il che amplia il suo studio, il suo senso e le sue applicazioni. È estremamente rilevante e significativo che vi siano molti riferimenti ad attività matematiche concrete e di vario genere, con esempi espliciti trattati con dettaglio.

La matematica è presentata con mille sfaccettature diverse, tutte coerenti, ma tali che ciascuna richiede interpretazioni, linguaggi e modalità distinte, che vengono esplicitati e discussi.

Profonda e assai utile è l'analisi delle diverse teorie del significato e delle loro relazioni con la EOS, in particolare, per quanto riguarda me stesso, gli studi di Peirce.

Estremamente interessanti le analisi relative alla teoria del significato in relazione specifica con la didattica della matematica.

Essa, la didattica della matematica è presentata, discussa e analizzata da moltissimi punti di vista diversi, che non solo sono esaustivi, ma che finalmente danno della didattica della matematica il suo senso molteplice e onnicomprensivo, ciò che molte altre teorie non riescono a dare.

A mio avviso sono interessanti non solo le analogie, ma anche e forse soprattutto le differenze che quasi mai si danno a vedere in analoghe occasioni. Anche in questo caso, gli esempi specifici sono calzanti e molto significativi, soprattutto i paragrafi sui numeri naturali, il concetto di funzione e dunque il linguaggio delle relazioni, cardini della educazione matematica in tutto il mondo.

Molto efficace e necessario il paragrafo che porta il nome di *Approccio ontosemiotico al dominio affettivo in didattica della matematica*, tematica assente in molte altre opere che trattano temi di carattere didattico, ma qui centrale e significativo.

Nel capitolo 4 si sviluppa una teoria del progetto educativo in matematica basata sulla EOS e si prende in esame, come non ho mai visto fare, con dettagli assai specifici e interessanti, la dimensione normativa in tutti i suoi specifici aspetti (norme epistemiche, norme ecologiche, norme sulle interazioni, norme mediazionali, norme cognitive, norme affettive, dimensione metanormativa). In tutto il libro sono presi in esame i criteri di idoneità didattica e la dinamica di un processo educativo-istruzionale (nelle sottotraiettorie epistemica, istruzionale, cognitiva e affettiva).

Trovo molto efficaci i paragrafi destinati all'analisi delle prospettive teoriche relazionate con il progetto, temi allo stesso tempo molto concreti ma anche profondamente teorici e analitici.

Fin dalla nascita della teoria EOS, ricordo vennero messi in evidenza aspetti che sono stati oggetto di discussione e che oggi vengono presentati con notevole profondità e dettaglio, qualcosa che Juan chiama teoria dell'idoneità didattica, basata su vari aspetti (epistemico, ecologico, mediazionale, interazionale, cognitivo, affettivo), i quali hanno interesse di per sé ma soprattutto per le loro interazioni, tema che occupa un ruolo centrale in questo libro.

Dicevo sopra, e lo ripeto qua, che Juan presenta sempre in profondità le relazioni della EOS con altre teorie su temi centrali, relazioni talvolta di concordanza almeno parziale, ma non sempre.

Molta attenzione presta Juan al docente, alla sua professionalità, alla consapevolezza del suo ruolo e alla sua formazione, tema anche a me caro che ho affrontato in tante occasioni ma che, in questo libro, riesce a essere non solo tema concreto, pratico, reale, ma anche di profondo carattere teorico.

Ho molto apprezzato il capitolo 7, dedicato al sistema teorico che sottende la EOS, di una profondità culturale enorme, sottile, precisa, scientifica. Fino a proporre la EOS come quadro teorico di ricerca.

Molto attuale è il tema delle relazioni fra teorie diverse, come cito io stesso in molte ricerche degli ultimi 10 anni e come invito i miei allievi a studiare; dunque, ben vengano i paragrafi concernenti le concordanze e complementarietà con altre teorie che sono le seguenti: teoria delle situazioni didattiche, teoria antropologica in didattica della matematica, didattica della matematica realista, teoria APOS,

teoria dell'oggettivazione, programma etnomatematico. Juan non solo coglie le differenze, ma anche le analogie, e ciò da due punti di vista: i loro costituenti e le diversità di uso nella pratica didattica. Paragrafi finali di prestigio culturale ma anche di generosità intellettuale, quelli destinati al confronto di teorie secondo la dualità comprensione-uso (uno dei temi più cari a Juan, spesso ricorrente) e questioni aperte all'interno del sistema teorico EOS, come strumento non concluso, in perenne evoluzione. Il che testimonia, a mio avviso, la visione critica e autocritica di estrema forza intellettuale di Juan.

---

## Bibliografia

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúñeme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica*. Bonomo.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 191–218.

D'Amore, B., Godino J. D., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Magisterio.

Font, V., & Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria y bachillerato. In J. Goñi (Ed.), *Formación del Profesorado. Educación Secundaria* (pp. 9–56). Grao.

Font, V., & Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La matematica e la sua didattica*, 24(1-2), 97–123.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3–15.

Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce. 1931-1935*. Harvard UP.

Pino-Fan, L., & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Revista Paradigma*, 36(1), 87–109.

Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial de la revista *Relime*. Clame.

Sbaragli, S. (Ed.) (2011). *La matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*. Pitagora.

**Bruno D'Amore**

Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia

Peres, E., & Siminovich, S. (2024). *L'armonia dei numeri primi. Giochi matematici e nuove simmetrie creative*. Edizioni Dedalo.



Non è possibile parlare di questo libro senza ricordare prima di tutto il legame, affettivo e professionale, tra uno dei due autori, Ennio Peres, e il Centro competenze didattica della matematica del DFA/ASP della SUPSI di Locarno. Giocolologo di fama internazionale, con la sua intelligenza e creatività Ennio ha curato la rubrica *Matematica magica*, disponibile nella piattaforma [www.matematicando.supsi.ch](http://www.matematicando.supsi.ch), e inventato numerosi giochi per l'iniziativa *Ludolinguistica*, rientrante nel progetto Agora del Fondo nazionale svizzero *Italmatica per tutti: la lingua italiana per favorire l'insegnamento-apprendimento della matematica*, pubblicata nella stessa piattaforma.

Grazie Ennio,

Il Centro competenze didattica della matematica ti ricorda sempre con tanto affetto e stima

*L'armonia dei numeri primi. Giochi matematici e nuove simmetrie creative* è uscito dopo la scomparsa di Ennio Peres, grazie alla dedizione e alla tenacia della moglie Susanna Serafini. Il libro nasce dall'incontro tra due uomini affini, ma anche complementari l'uno all'altro, le cui vite si sono intersecate grazie a due passioni comuni, quella per la matematica e quella per la musica. Passioni vissute da entrambi, ma in modo speculare: Ennio Peres aveva infatti una formazione matematica, ma anche una passione come musicista autodidatta; Sergio Siminovich, invece, al contrario è un musicista italo-argentino di professione, ma anche un appassionato matematico autodidatta. Un connubio non insolito, quello per due «aree molto vicine in passato, oggi artificialmente divise sin dalla scuola con epiteti come "scienza esatta" e "mondo artistico"» (p. 10). Questi aspetti potrebbero a prima vista apparire marginali, ma in realtà sono molto importanti: rendono vivo un insegnamento sotterraneo a tutto il libro, che ha a che fare da un lato con l'importanza di riconoscere e saper vivere una vita intellettuale in cui, nel rispetto della propria identità, possono tuttavia coesistere e dialogare diverse discipline, dall'altro con la consapevolezza che questo dialogo interiore si instaura solo se è vissuto anche esteriormente, aprendoci e accogliendo le prospettive altrui. Stando poi ai contenuti del libro e al rapporto che, pagina dopo pagina, si instaura con il lettore, non può non venire in mente che a fare da sfondo allo stile di entrambi sia nuovamente un medesimo approccio: quello del gioco, che d'altra parte non è che un modo particolare e non convenzionale di guardare la realtà che ci circonda. Così si può ipotizzare che sia stato questo "giocosu risuonare" del matematico nel musicista, e

del musicista nel matematico, a condurre i due autori a ideare un libro in cui ragionamenti e giochi riguardanti i numeri primi coesistono armoniosamente con una inedita, vera e propria teoria di analisi dei numeri primi.

Numeri primi, sì. Perché è di questo che il libro parla, in due parti ben calibrate fra loro. La prima è scritta da Ennio Peres, e presenta diversi ragionamenti matematici uniti a una grande quantità di giochi curiosi riguardanti questi numeri millenari e misteriosi. Ad esempio, il capitolo 2 della prima parte descrive diverse tipologie di numeri primi (chi sa che esistono numeri primi “sexy”?) dalle caratteristiche affascinanti; oppure il capitolo 8, in cui vengono presentati divertenti “trucchi di magia” possibili grazie alle proprietà dei numeri primi. La seconda parte è scritta da Sergio Siminovich, il quale ci fa entrare in un originale mondo di nuovi metodi di indagine e inedite classificazioni, sempre relative ai numeri primi. Ad esempio, nel capitolo 3 della seconda parte, giustamente intitolato “rare bellezze”, vengono presentate “furtive” simmetrie e feconde promesse di strutture in forma di progressioni di numeri primi; oppure il capitolo 6, forse il più curioso e originale, in cui viene presentato un vero e proprio dialogo platonico tra Zenone e Socrate, ovviamente a tema numeri primi.

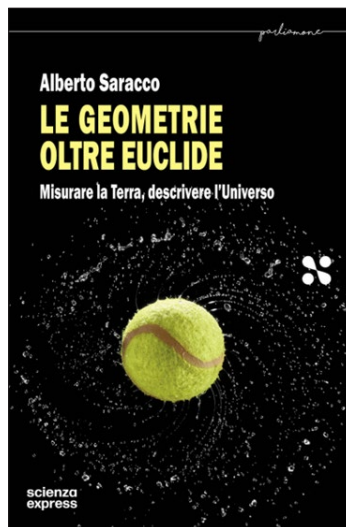
Se nella prima parte tutto è articolato con allegria, ma anche appassionato rigore deduttivo, nella seconda parte si lascia maggiormente spazio all’esperienza, all’analogia, all’osservazione di casi che inducono a speranzose generalizzazioni. Anche in questa complementarità di approcci il libro rende onore a un’altra verità troppo spesso nascosta (chissà poi perché): l’attività matematica ha a che fare tanto con il rigore (a volte un po’ ingabbiante) di una prova, quanto con la creatività (spesso liberante) della ricerca disinvolta ed esplorativa di associazioni e schemi ricorrenti.

Come concludere questa recensione? Forse con un appello alla didattica, come si conviene in una rivista di settore come questa, rimarcando il valore eccezionale di testi come questo. Valore che risiede principalmente nel ricordare a tutti gli attori del grande teatro della didattica della matematica che la nostra disciplina è bella, creativa, giocosa, appassionante... ma anche logica, organizzata, intellegibile, razionale... in una parola: armoniosa.

**Michele Canducci**

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica  
SUPSI, Svizzera

Saracco, A. (2024). *Le geometrie oltre Euclide. Misurare la Terra, descrivere l'Universo*. Scienza Express.



*Le geometrie oltre Euclide* di Alberto Saracco (ed. Scienza Express) mi ha colpito fin dalle prime righe. Il testo scorre agile e preciso e, pagina dopo pagina, il lettore è guidato con destrezza alla scoperta di un ricco paesaggio di idee geometriche.

Idee esposte nel modo più coinvolgente: con sobrietà e trasparenza, senza sensazionalismi o altri elementi di distrazione.

Il testo si snoda attraverso la geometria antica, l'impostazione euclidea, la diffusione dell'approccio analitico, il programma di Erlangen e la riflessione sui fondamenti, senza tralasciare accenni ad alcune sfaccettature più recenti (differenziali, complesse, metriche, topologiche). Il profondo legame tra geometria e descrizione del mondo fisico è discusso sia all'inizio sia al termine del racconto e forma così la cornice del libro.

La narrazione si avvale della forza trainante che è intrinseca allo sviluppo del pensiero matematico. Domande generano idee, soluzioni generano domande, la curiosità diventa principio creativo.

Questo conferisce freschezza ad un testo ricco di spunti che possono aprire nuovi orizzonti anche agli assidui frequentatori della divulgazione matematica (anche grazie alla cura prestata alla scelta dei riferimenti bibliografici!). Penso ad esempio alla bella trattazione delle geometrie non euclidee che include, tra l'altro, una breve ma circostanziata finestra sulle relazioni tra i lavori di al-Tusi, Khayyam e Saccheri. Ricordo anche l'interessante discussione degli approcci assiomatici, dove l'architettura dell'assiomatizzazione di Hilbert è descritta in modo esplicito pur senza disperdersi in lunghe liste, e che termina parlando anche dei contributi di Birkhoff, tanto interessanti quanto (mi sembra) raramente affrontati a livello divulgativo.

Il testo presenta inoltre un ottimo equilibrio tra i vari ingredienti che concorrono alla qualità della divulgazione. Ad esempio, equilibrio nella rinuncia al facile sensazionalismo: una scoperta matematica è opera di un romantico genio solitario o mera compilazione di elementi preesistenti? Saracco ricorda che spesso «la verità sta nel mezzo» (p. 76). E già che ci siamo: scoperta o invenzione? «Ogni matematico di professione ha la sua idea in proposito, nella maggior parte dei casi un misto tra le due» (p. 96).

Mi rendo conto di non poter elencare qui tutte le gemme incontrate durante la lettura e che mi ero riproposto di descrivere nella recensione. Invito dunque tutti a gustare in prima persona questo libro che unisce rigore espositivo e appassionante narrativa.

**Emanuele Delucchi**

Istituto Dalle Molle di studi sull'intelligenza artificiale  
USI/SUPSI, Svizzera



Sbaragli, S., & De Carli, A. (2024). Altri nove personaggi per la raccolta “*Matematici a fumetti*”.  
[www.matematicando.supsi.ch/iniziative/matematici-a-fumetti/](http://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/matematici-a-fumetti/)



Silvia Sbaragli (didatta della matematica) e Andrea De Carli (docente di arti visive e illustratore) aggiungono nove nuove storie a quelle già pubblicate nella prima edizione di *Matematici a fumetti*. Un'edizione uscita sia in forma cartacea presso la casa editrice Dedalo (Sbaragli & De Carli, 2021) sia in versione online scaricabile gratuitamente.

In queste nuove storie, sempre molto belle dal punto di vista grafico, Ellie e suo zio Angelo, incontrano e interagiscono con nuovi personaggi e nuove idee matematiche.

L'idea di unire matematica e fumetto non è nuova, ma l'opera di Silvia Sbaragli e Andrea De Carli fa intravedere scelte di fondo particolarmente originali e interessanti dal punto di vista educativo.

La prima scelta, a mio avviso fondamentale, è quella relativa al ruolo della matematica in questa "serie" di fumetti. In un lavoro rivolto a bambini e ragazzi dagli 8 ai 14 anni, la matematica non è infatti la cornice o il contesto per un racconto particolare all'interno di una serie di racconti – come, ad esempio, accade in alcuni notissimi e interessanti fumetti Disney o, nei cartoon, in alcune puntate dei Simpson – no, in questo caso la matematica è la vera protagonista dei racconti e filo che li unisce, a prescindere dalle varie ambientazioni in epoche diverse e dai personaggi di Ellie e dello zio Angelo che fungono da narratori delle storie, quasi da voci fuori campo.

La seconda scelta riguarda l'espedito narrativo dei continui rimbalzi nel tempo che permette di raccontare storie ambientate in epoche diverse, senza seguire un percorso temporale lineare, ma raccontando, attraverso le storie romanzate e divertenti che vedono in azione Ellie e lo zio, idee matematiche interessanti e curiose, condividendo il fatto che queste idee sono il frutto dei pensieri e dei dubbi di personaggi vissuti realmente, e in epoche diverse. Insomma si mostra, senza dirlo esplicitamente, ma appunto rappresentandolo, come la matematica sia una disciplina umanistica in senso etimologico, un prodotto del pensiero dell'uomo, e sempre in evoluzione. Quest'ultimo aspetto viene condiviso attraverso i racconti che vedono protagonisti i personaggi più recenti come, nel caso di queste nuove uscite, Sierpiński.

La terza scelta riguarda il fatto di essere un lavoro non solo interessante di per sé, ma che esplicitamente offre lo spunto per sviluppare in proprio, in classe, esperienze di creazione di fumetti sulla matematica, con tutto ciò che ne consegue: ricerca di personaggi e idee, discussione delle stesse finalizzata anche alla creazione di una sceneggiatura, per poi arrivare alla realizzazione del fumetto. Nella prima edizione del libro *Matematici a fumetti*, la parte finale è proprio dedicata alla condivisione di idee e tecniche per la creazione e realizzazione di storie a fumetti.

Due ultimi aspetti da considerare.

Il primo riguarda le scelte delle nuove storie che discutono idee matematiche anche complesse, come i paradossi (ad esempio quello di Zenone), che suscitano curiosità e permettono lavori di argomentazione anche filosofica, e che introducono personaggi noti anche in altri campi, come ad esempio Piero della Francesca e Albrecht Dürer, permettendo quindi di sviluppare in classe discussioni sul rapporto tra matematica e arte (in qualche modo insito nel progetto di matematica e fumetto, ma da un altro punto di vista), ma anche considerazioni storiche sull'evoluzione nel corso dei secoli della figura dello studioso. La seconda riguarda una caratteristica unica e preziosissima non solo di questo progetto, ma di moltissimi (direi quasi tutti) i progetti condotti da Silvia Sbaragli: quella di creare materiale pensato, ragionato, ben confezionato per l'educazione matematica, e renderlo fruibile.

I singoli episodi del progetto sono infatti tutti pubblicati in versione digitale open access al seguente link: [www.matematicando.supsi.ch/iniziative/matematici-a-fumetti/](http://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/matematici-a-fumetti/).

---

## Bibliografia

Sbaragli, S., & De Carli, A. (2021). *Matematici a fumetti*. Edizioni Dedalo.

**Pietro Di Martino**  
Dipartimento di Matematica  
Università di Pisa, Italia