Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM
Numero speciale
16

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI.

Impaginazione:
Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI.

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
matematica

16

Novembre 2024

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), I - II, DOI: 10.33683/ddm.24.16.0 OPEN ACCESS

Editoriale

Questo sedicesimo numero della rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* è un numero speciale, in quanto i suoi contributi sono focalizzati su un tema specifico. È la seconda volta che il comitato redazionale e scientifico decide di fare una scelta di questo tipo: la prima occasione si è presentata nel 2021, quando si è dedicato il numero 9 della rivista al tema del rapporto fra matematica e lingua italiana, un'unione tra due discipline considerate solitamente agli antipodi; questa volta, invece, la rivista ha deciso di trattare da diversi punti di vista il rapporto tra l'insegnamento-apprendimento della matematica e lo *storytelling*, un rapporto non così distante da quello trattato nel numero speciale precedente.
Lo *storytelling*, in tutte le sue forme (orale, scritta e visuale), è la più antica forma di comunicazione, attraverso cui le conoscenze sono state tramandate e si sono evolute. La rilevanza del suo uso in ambito educativo è sempre più crescente, sia per le discipline umanistiche sia per quelle scientifiche, per varie ragioni, come ad esempio l'accessibilità, attraverso la possibilità di creare collegamenti tra informazioni astratte e situazioni concrete, e l'aggancio affettivo, creato dalla possibilità di immedesimarsi nei personaggi. Lo *storytelling* favorisce così il coinvolgimento degli studenti sul piano dell'immaginazione e delle emozioni. Nell'insegnamento-apprendimento della matematica l'introduzione di problemi attraverso lo *storytelling* vuole promuovere nello studente la sinergia tra pensiero logico e pensiero narrativo per giungere alla risoluzione della situazione problematica. È bene però sottolineare che per l'attivazione efficace di questa sinergia è necessario che la dimensione narrativa e la dimensione logica del problema-storia siano ben integrate (Zan, 2012a, 2012b).
In questo numero della rivista presentiamo diverse sfaccettature dell'uso dello *storytelling* come contesto metodologico nel quale si sviluppa il processo di insegnamento-apprendimento della matematica.

Come di consueto, nella sezione *Riflessione e ricerca* sono presenti tre articoli. Il primo contributo presenta e discute un dispositivo metodologico, chiamato *Digital Interactive Storytelling in Mathematics* (DIST-M), basato sull'integrazione di istanze provenienti da ricerche in tre ambiti: la didattica della matematica, che dedica una sempre maggiore attenzione all'equilibrio tra pensiero narrativo e pensiero logico-scientifico nella costruzione di contesti basati sulle competenze; la psicologia dell'educazione, che riconosce il successo dell'apprendimento come risultato di un processo sociale e individuale; l'insegnamento-apprendimento digitale online, che negli ultimi anni sta assumendo un ruolo preponderante. Il secondo articolo ripercorre e analizza la parabola artistica di Italo Calvino come scrittore e intellettuale che ha saputo lavorare, precorrendo le necessità dei tempi attuali, integrando proficuamente molte idee e strutture di ragionamento matematico con le tecniche e le procedure creative tipiche della narrazione; nell'articolo si arriva così a proporre un insegnamento della matematica che contribuisca alla formazione di un cittadino capace di affrontare sfide globali con creatività e scientificità. Il terzo articolo presenta la selezione e traduzione di tre capitoli del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009), nei quali gli autori forniscono numerosi esempi di come l'avvicinamento a concetti matematici con la mediazione delle storie consenta un coinvolgimento attivo degli studenti nella costruzione di significati matematici e ne favorisca la comprensione profonda: l'uso di storie che spiegano un concetto, il cambiamento del contesto e della struttura narrativa di un problema, la riformulazione in chiave narrativa di un problema descrittivo ecc.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Il primo presenta alcune esperienze a carattere immersivo, rese possibili grazie all'uso del dispositivo didattico del DIST-M; le esperienze hanno coinvolto studenti di scuole secondarie di primo grado[1] nello sviluppo delle competenze argomentative e del formalismo simbolico in ambito di teoria dei numeri, in particolare legate al discorso algebrico e allo sviluppo del pensiero relazionale. Il secondo articolo descrive l'esperienza delle autrici all'interno della terza edizione del progetto "Proud of You", che si pone l'obiettivo di prevenire l'abbandono scolastico in alcune scuole situate in periferie svantaggiate di territori del Meridione d'Italia; il progetto ha proposto alle scuole coinvolte un *librogame*, che ha fatto da cornice di senso alle diverse attività didattiche, raccontate nell'articolo in chiave narrativa. Il terzo articolo presenta le riflessioni degli autori in merito alle ricadute e alle potenzialità di una sperimentazione didattica attuata secondo il quadro teorico e il protocollo del DIST-M; in particolare, viene evidenziato come la metodologia del DIST-M possa diventare un utile strumento di valutazione formativa delle competenze degli studenti, nonché occasione di autovalutazione per docenti e studenti. L'ultimo articolo, infine, presenta un'esperienza didattica sperimentale progettata sulla base della teoria della mediazione semiotica e dello *storytelling*, realizzata in una classe di prima primaria;[2] l'esperienza ha avuto come obiettivo la costruzione del senso di numero naturale e la linea dei numeri, attraverso le potenzialità offerte dalla struttura narrativa delle fiabe, l'ausilio del gioco e l'utilizzo di artefatti in una prospettiva di curricolo verticale.

Anche le *Recensioni* contengono raccolte di libri e documenti dedicati allo *storytelling* nell'insegnamento-apprendimento della matematica, in ordine crescente di scolarità: la prima recensione commenta 50 albi illustrati adatti per proporre percorsi di matematica nella scuola dell'infanzia e nella scuola elementare; la seconda raccoglie libri di narrativa per giovani lettori, da Topolino fino a misteriosi gialli matematici; la terza descrive i fascicoli di riflessione, i racconti e le poesie nati nel contesto della preparazione al concorso letterario *Matematica a parole*; la quarta riguarda il sito del progetto DIST-M, che ne raccoglie i fondamenti teorici, le tecnologie usate, l'implementazione e le sperimentazioni che sono state condotte; la quinta riguarda la collana *Comics&Science*, una raccolta di fumetti che affrontano a vari livelli contenuti scientifici; la sesta recensione, infine, presenta il libro *Matematica come narrazione* di Gabriele Lolli, nel quale si esplorano i nessi e le analogie tra le due aree del sapere.

Auguriamo a tutti una buona lettura e ci rendiamo disponibili a ospitare in futuro altre tematiche di particolare interesse per la didattica della matematica.

Prof.ssa Giovannina Albano
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e Matematica applicata, UNISA – Italia

Prof.ssa Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

Bibliografia

Zan, R. (2012a). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35A*(2), 107–126.

Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35A*(5), 437–468.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling.* Brill.

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), III - IV, DOI: 10.33683/ddm.24.16.0 OPEN ACCESS

Editorial

This sixteenth issue of the *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* journal is a special issue, as its contributions focus on a specific theme. This is the second time that the editorial and scientific committee has made such a choice: the first occasion came in 2021, when the ninth issue of the journal was dedicated to the theme of the relationship between mathematics and the Italian language, a union between two disciplines usually considered to be at the opposite ends of the spectrum. This time the journal has chosen to explore a relationship that is not so distant from the one addressed in the previous special issue, but focuses rather on the connection between the teaching and learning of mathematics and storytelling, viewed from different perspectives.
Storytelling, in all its forms (oral, written and visual), is the oldest form of communication, through which knowledge was passed on and evolved. Its relevance in education is increasing, for both humanities and science disciplines, for various reasons, such as accessibility, through the possibility of making connections between abstract information and concrete situations, and affective attachment, created by the possibility of identifying with the characters. Storytelling thus fosters students' involvement on both the imaginative and emotional levels. In the teaching and learning of mathematics, the introduction of problems through storytelling aims to promote a synergy between logical thinking and narrative thinking, which can help students resolve a problematic situation. However, it is important to emphasize that for this synergy to be effectively activated, the narrative and logical dimensions of the problem-story must be well integrated (Zan, 2012a, 2012b).
In this issue we present different facets of the use of storytelling as a methodological context in which the process of teaching and learning of mathematics is developed.

As usual, this issue features three articles in the *Riflessione e ricerca* section. The first contribution presents and discusses a methodological tool called *Digital Interactive Storytelling in Mathematics* (DIST-M), which is based on the integration of research insights from three areas: mathematics education, which increasingly focuses on balancing narrative thinking with logical-scientific thinking in the development of competency-based contexts; educational psychology, which recognizes learning success as the result of both social and individual processes; and online digital teaching and learning, which has taken on a dominant role in recent years. The second article traces and analyzes the artistic trajectory of Italo Calvino, highlighting his work as a writer and intellectual who, ahead of his time, successfully integrated many ideas and structures of mathematical reasoning with the storytelling typical techniques and creative procedures; the article suggests that teaching mathematics could contribute to educate citizens who are capable of facing global challenges with creativity and scientific rigor. The third article presents the selection and translation of three chapters from the book *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009), in which the authors provide numerous examples of how introducing mathematical concepts through storytelling actively engages students in constructing mathematical meanings and promotes deep understanding. Examples include using stories to explain a concept, altering the context and narrative structure of a problem, and reframing a descriptive problem in narrative terms.

There are four articles in the *Esperienze didattiche* section. The first article presents some immersive experiences made possible through the use of the DIST-M teaching tool; the experiences involved lower secondary school students[1] in developing argumentative skills and symbolic formalism in the area of number theory, particularly related to algebraic discourse and the development of relational thinking. The second article describes the authors' experience within the third edition of the "Proud of You" project, which aims to prevent school dropout in disadvantaged suburbs in the South of Italy; the project offered participating schools a *gamebook*, which served as a framework for various educational activities, some of which are recounted in the article through a narrative lens. The third article reflects on the impact and potential of an educational experiment carried out according to the DIST-M theoretical framework and protocol; in particular, the contribution highlights how the DIST-M methodology can serve as a valuable tool for formative assessment of students' competences, as well as an opportunity for teachers' and students' self-assessment. Finally, the fourth article presents an experimental teaching experience grounded on semiotic mediation theory and storytelling, carried out in a first-grade class in primary school.[2] The experience aimed at building the sense of natural number and the number line through the narrative structure of fairy tales, the use of play and the incorporation of artefacts, all within a vertical curriculum perspective.

The *Recensioni* section also includes collections of books and papers devoted to storytelling in mathematics teaching and learning, presented in ascending order of schooling: the first review comments on 50 illustrated books suitable for introducing mathematical concepts in preschool and primary school; the second collects fiction books for young readers, from Mickey Mouse to mysterious mathematical thrillers; the third review covers reflection booklets, short stories, and poems created in the context of the literary competition *Matematica a parole*; the fourth focuses on the DIST-M project website, which presents its theoretical foundations, the technologies used, its implementation, and the experiments conducted; the fifth review is about the *Comics&Science* series, a collection of comic strips that address scientific content at various levels; finally, the sixth review presents the book *The Meaning of Proofs: Mathematics as Storytelling* by Gabriele Lolli, in which the connections and similarities between the two areas of knowledge are explored.

We wish all readers an enjoyable experience and remain open to hosting further topics of particular interest for mathematics education in the future.

Prof.ssa Giovannina Albano
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e Matematica applicata, UNISA – Italy

Prof.ssa Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Switzerland

References

Zan, R. (2012a). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35A*(2), 107–126.

Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35A*(5), 437–468.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling.* Brill.

1. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.
2. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.

Riflessione e ricerca

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), 9 - 35, DOI: 10.33683/ddm.24.16.1
OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Digital Interactive Storytelling in Matematica: un dispositivo metodologico per l'apprendimento sociale orientato alle competenze

Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a methodological device for competence-oriented social learning

Giovannina Albano•, Cristina Coppola•• e Maria Polo°
•Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e Matematica applicata, Università degli Studi di Salerno – Italia
••Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno – Italia
°Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari – Italia

✉ galbano@unisa.it, ccoppola@unisa.it, mpolo@unica.it

Sunto / Il lavoro presenta un dispositivo metodologico, chiamato DIST-M, basato sull'integrazione di istanze provenienti da ricerche negli ambiti della didattica della matematica, della psicologia dell'educazione e dell'insegnamento-apprendimento digitale online: l'attenzione crescente verso un approccio contestualizzato basato sulle competenze in matematica, fondata su un buon equilibrio tra pensiero narrativo e pensiero logico-scientifico; l'enfasi che le teorie della psicologia dell'educazione danno al successo dell'apprendimento come risultato di un processo che è sociale e individuale, attraverso l'interiorizzazione dei concetti; il ruolo preponderante assunto nell'istruzione recentemente dagli ambienti digitali e online. I quadri teorici alla base del dispositivo metodologico sono presentati e discussi come guida a priori agli elementi di progettazione e come re-inquadramento a posteriori.

Parole chiave: *storytelling*; matematica; ambienti digitali; *roleplaying*.

Abstract / In this paper we present a methodological device, called DIST-M, based on the integration of instances from research in the fields of mathematics education, educational psychology and online digital teaching/learning: the increasing focus on a contextualised competence-based approach to mathematics, based on a good balance between narrative and logical-scientific thinking; the emphasis that educational psychology theories place on learning as the result of a process that is social and individual, through the internalisation of concepts; and the predominant role assumed in education recently by digital and online environments. The theoretical frameworks underpinning the methodological device are presented and discussed as an a priori guide to design elements and as a posteriori re-framing.

Keywords: storytelling; mathematics; digital environments; roleplaying.

1 Introduzione e contesto

La ricerca descritta in questo lavoro è stata sviluppata nell'ambito del progetto PRIN 2015[1] *Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a social competence-oriented approach*, un progetto che ha visto la cooperazione di ricercatori in didattica della matematica, in psicologia dell'educazione, in ambito tecnologico (collegato all'educazione) e insegnanti-ricercatori. L'idea progettuale è nata proprio dalla necessità di integrare istanze urgenti provenienti da diversi ambiti.
Per quanto riguarda l'ambito della didattica della matematica, i quadri di riferimento delle valutazioni internazionali pongono sempre più l'accento sulla necessità di formare individui che siano attivi risolutori di problemi (Organization for Economic, Cooperation and Development [OECD], 2016). La *mathematical literacy*, intesa come la capacità di un individuo di usare la matematica in contesto, richiede lo sviluppo di competenze matematiche (Magenes & Maracci, 2015; Niss, 2003) e la necessità che la scuola offra esperienze didattiche ricche che ne favoriscano il raggiungimento (OECD, 2016). D'altro canto, la ricerca in psicologia dell'educazione afferma con sempre maggiore forza che l'apprendimento è il risultato di un processo sia sociale, attraverso la comunicazione e l'interazione tra pari e con l'esperto, sia individuale, attraverso l'interiorizzazione dei concetti. Inoltre, l'avvento del Web 2.0, con Internet che diventa una piattaforma in cui l'utente non è solo fruitore ma diventa autore e collaboratore, ha portato un cambiamento sociale epocale, fortemente caratterizzato dalla regola dello «sfruttamento dell'intelligenza collettiva» (Needleman, 2007, p. 202), che ha cambiato la nostra vita e non può non investire anche il mondo dell'educazione.
La prospettiva di integrare questi aspetti, in questi diversi ambiti, ha generato una direzione nuova della ricerca, quasi inesplorata, che suggerisce di indagare l'uso di piattaforme online nell'insegnamento-apprendimento della matematica, assumendo un approccio orientato allo sviluppo di competenze in contesto, come risultato di un processo sociale. Da qui l'idea germinale alla base della progettazione di un dispositivo metodologico, il *Digital Interactive Storytelling in Matematica* (DIST-M), basato su un approccio vygotskiano, secondo il quale l'apprendimento è prima socializzato e poi interiorizzato. L'uso dello *storytelling*, quindi di una storia nella quale potersi immergere favorendo l'integrazione del pensiero narrativo e di quello logico-scientifico, sembra funzionale sia ad un apprendimento basato sulle competenze sia allo sviluppo di capacità di uso contestualizzato (nel senso del quadro PISA (OECD, 2016). L'accento sul digitale e sull'interazione è fortemente connesso allo sviluppo della società determinato dal Web 2.0.
Di seguito presenteremo i principi teorici che hanno fatto da cornice alla progettazione del DIST-M e all'intero processo di ricerca, gli strumenti metodologici che lo hanno caratterizzato, e descriveremo più in dettaglio i punti chiave del DIST-M.

2 Il background teorico

Il background teorico che presentiamo si articola su due livelli. Il quadro fornitoci dalla teoria dell'attività inquadra più propriamente la progettazione (e realizzazione) del DIST-M; il riferimento teorico all'*expansive learning* ci dà modo di inquadrare, più in generale, il processo con cui la ricerca sul DIST-M si è evoluta (e si sta evolvendo).

1. Progetto di Ricerca di Interesse Nazionale – Bando 2015 – Prot. 20155NPRA5 Durata: 5 febbraio 2017-5 febbraio 2020.

2.1 Teoria dell'attività

La teoria dell'attività si inserisce nella tradizione vygotskiana di cui ne reinterpreta l'eredità attraverso tre generazioni di studiosi e ricercatori. Più precisamente, si inserisce nell'approccio storico-culturale che Cole (1996) ha sistematizzato a partire dagli studi di Vygotskij (1929), Leont'ev (1932) e Lurja (1928). È proprio per evidenziare l'importanza della dimensione storico-culturale che questo approccio è stato denominato teoria dell'attività storico-culturale (*Cultural Historical Activity Theory*, spesso abbreviato con l'acronimo CHAT) (Ligorio & Cacciamani, 2013).
Il concetto centrale della teoria è quello di *attività*, che viene intesa come qualcosa caratterizzata da *interazione* (è un'azione nel mondo) e *intenzionalità* (l'azione risponde a uno scopo). È importante sottolineare che è un processo, che mette in relazione un *soggetto* e un *oggetto*, che si influenzano a vicenda e così entrambi sono trasformati dall'attività stessa (ad esempio, se è vero che le abilità matematiche influenzano il modo di risolvere un problema matematico, è anche vero che la risoluzione di problemi matematici contribuisce a formare le abilità matematiche).
Il concetto alla base della teoria dell'attività è che tutti i processi psicologici si sviluppano nell'attività e l'azione, mediata dagli strumenti culturali, rappresenta l'unica unità di analisi possibile.
In una sistematizzazione di questa teoria ad opera di Kaptelinin e Nardi (2006), basata su quanto fatto da Wertsch (1981), sono stati identificati alcuni principi cardine, che brevemente descriviamo di seguito.

La teoria dell'attività è object-oriented. Gli oggetti motivano e dirigono le attività e tutte le attività umane sono dirette ai loro oggetti. Questo principio è strettamente legato al concetto chiave di *relazione soggetto-oggetto*. L'oggetto ha una duplice sfaccettatura: da un lato ha un proprio significato *oggettivo*, che nasce dalle interazioni con le altre entità presenti nel mondo (compreso il soggetto); dall'altro lato, assume un significato soggettivo cioè determinato dall'uso che il soggetto ne fa. Il principio dell'*orientamento all'oggetto* afferma che intorno ad esso le attività sono coordinate e in esso si cristallizzano quando le attività, o l'uso che il soggetto ne fa, sono completate.

Strutturazione gerarchica dell'attività. L'*attività* è un costrutto di alto livello, in genere di tipo collaborativo, che è guidato da un *motivo* orientato all'oggetto. L'attività è in cima a una gerarchia dove sono previste altre due componenti: le *azioni* e le *operazioni*. Mentre l'oggetto di un'attività non è sempre chiaro ai partecipanti, le azioni sono intraprese consapevolmente e intenzionalmente per raggiungere degli *obiettivi* che servono a realizzare l'oggetto. Le azioni sono attuate mediante una serie di operazioni, spesso inconsapevoli, generate dall'azione stessa. Tali operazioni, che rappresentano le *modalità* attraverso cui si realizza l'azione, sono automatiche ed indipendenti dalle caratteristiche dell'attività stessa, azioni di routine che utilizzano gli strumenti disponibili (**Figura 1**).

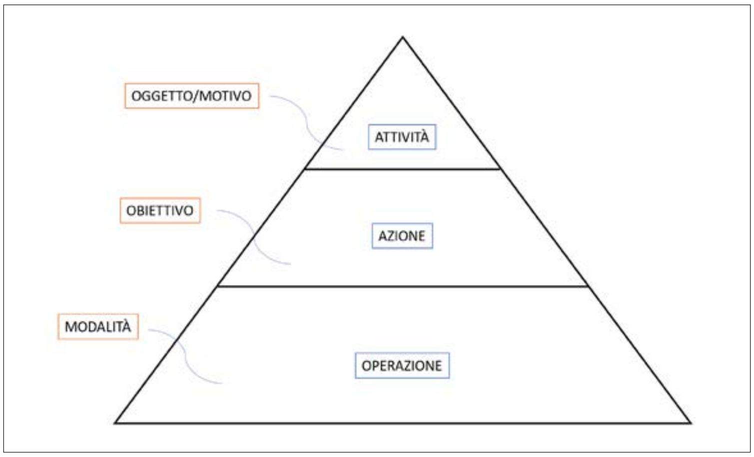


Figura 1. Strutturazione gerarchica dell'attività.

Mediazione. L'interesse per la mediazione proviene dalla scuola storico-culturale di Vygotskij. La mediazione è la dimensione primaria che distingue l'essere umano: ogni interazione con il mondo è mediata da strumenti che, nella visione di Leont'ev, permettono di appropriarsi di forme socialmente sviluppate di agire nel mondo. Il focus di Leont'ev sulla mediazione è stato rivolto ai mezzi che mediano un'attività orientata all'oggetto nel suo complesso.

Internalizzazione ed esternalizzazione. Le attività (umane) sono costituite da due componenti, una interna ed una esterna, che si influenzano continuamente e si modificano l'una con l'altra. I concetti di *internalizzazione* ed *esternalizzazione* possono essere ridefiniti in un contesto di attività sociali. Nel caso di un'attività inizialmente distribuita, cioè portata avanti da più persone, può avvenire un processo di internalizzazione nel momento in cui un individuo si appropria di quell'attività "sociale" e poi la porta avanti individualmente. Di contro, perché l'attività di un individuo possa essere ridistribuita tra più persone, è necessario un processo di esternalizzazione. Le dimensioni di interno/esterno e individuale/sociale sono strettamente correlate.

Sviluppo dell'attività. Per comprendere le attività bisogna sempre monitorarne i cambiamenti e analizzarne lo sviluppo nel tempo. In questo senso lo sviluppo dell'attività ha più a che fare con una strategia metodologica, che dia importanza allo sguardo sugli aspetti evolutivi, in contrapposizione allo studio dell'attività cristallizzata in un dato momento, più tipico della metodologia sperimentale (Ligorio & Cacciamani, 2013).

2.1.1 Un modello di sistema di attività

Nel corso delle tre evoluzioni della teoria dell'attività verso la teoria dei sistemi di attività e la teoria delle reti di attività, si passa dalla modellizzazione classica vygotskiana (Figura 2) al triangolo complesso (Figura 3), in cui vengono inclusi ruoli, comunità e divisione del lavoro.

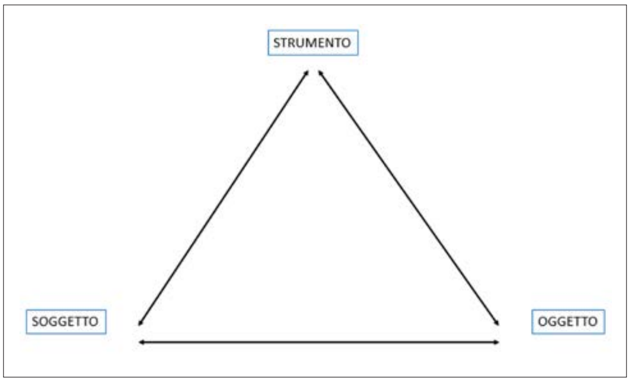


Figura 2. Il triangolo di Vygotskij.

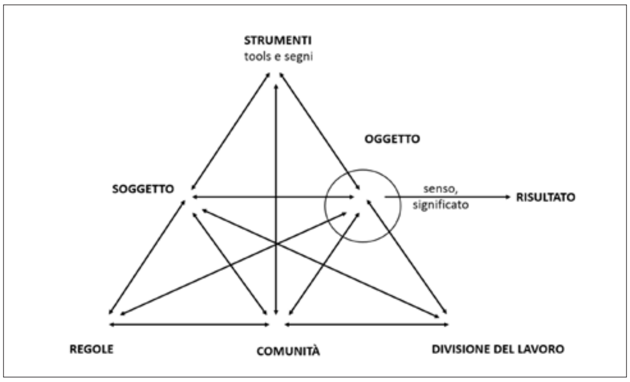


Figura 3. Modello generale di un sistema di attività, tratto da Engeström e Sannino (2010, p. 6).

Il triangolo classico (**Figura 2**) esplicita il fatto che l'interazione tra soggetto e oggetto è mediata da strumenti che aiutano il soggetto a costruire significati. Questo modello non dà conto delle azioni collettive; per questo motivo Engeström aggiunge il nodo *comunità*, composta dagli individui che condividono lo stesso oggetto, e dentro la quale si esplicita la dimensione sociale dell'azione del soggetto. Con l'aggiunta di questo nuovo nodo, come accadeva per la relazione soggetto-oggetto, ognuna delle nuove relazioni soggetto-comunità e comunità-oggetto assume i propri specifici mezzi di mediazione. La relazione soggetto-comunità è mediata dalle *regole*, che costituiscono i principi o le condizioni (esplicite o implicite) secondo cui si sviluppano le azioni nel sistema di attività. La relazione comunità-oggetto è mediata dalla *divisione del lavoro*, che si riferisce alla divisione orizzontale dei compiti tra i membri della comunità e alla divisione verticale in base allo status e al potere (Zucchermaglio, 1996). Il triangolo classico viene quindi esteso come in **Figura 3**.
L'oggetto è il "*problem space*" a cui l'attività è diretta. L'oggetto viene convertito in risultato attraverso artefatti, strumenti o segni. Va inoltre sottolineato che l'oggetto è duplice: un *oggetto generalizzato*, cioè inteso nel suo significato socialmente accettato e condiviso, e un *oggetto specifico*, cioè connesso al senso personale, di uno specifico soggetto, in uno specifico momento e in una data attività (Engeström & Sannino, 2010).
Il nuovo modello prevede, inoltre, un *risultato* del sistema di attività nel suo complesso, che consiste nel risultato di una trasformazione dell'oggetto dovuta all'attività e che può essere utilizzato da altri sistemi di attività.

Man mano che si sono sviluppati gli studi sui sistemi di attività, sono stati osservati sistemi di attività interconnessi e interdipendenti: si è quindi passati a considerare costellazioni/network di due o più sistemi di attività i cui oggetti sono parzialmente sovrapposti, cioè dove tutti i sistemi coinvolti condividono parzialmente (almeno) uno stesso oggetto (**Figura 4**).

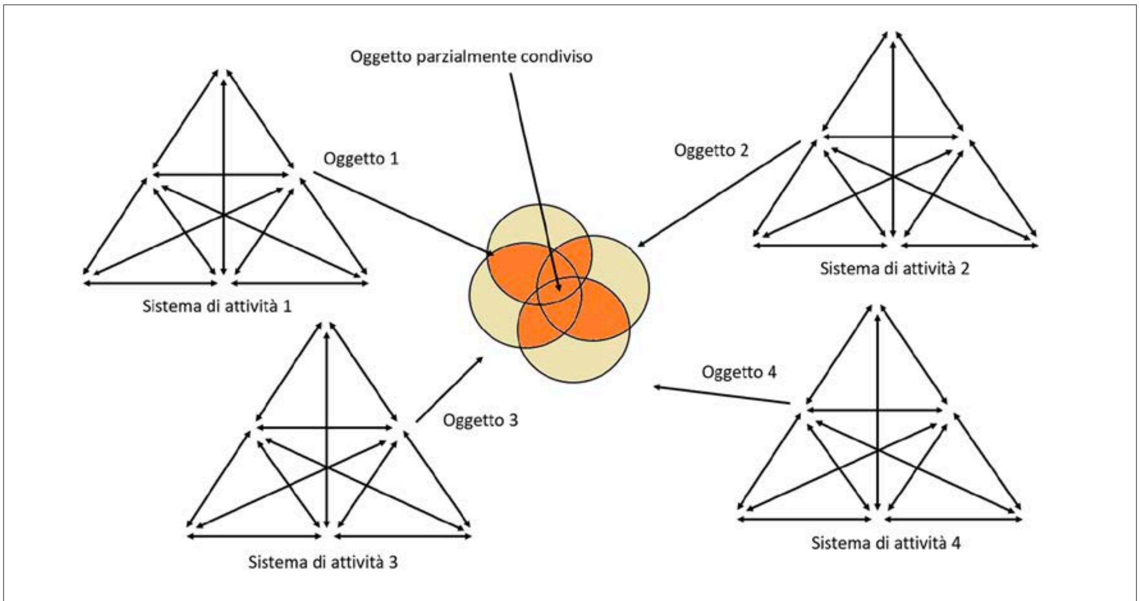


Figura 4. Rete di sistemi di attività con oggetti parzialmente condivisi.

Attraverso la teoria delle reti di attività, Engeström (1999) ri-definisce alcuni principi della teoria dell'attività. In particolare, fa riferimento a cicli sempre più estesi attraverso cui i sistemi di attività si trasformano, in modo che le attività non siano ripetute sempre allo stesso modo ma vadano verso un miglioramento progressivo (Ligorio & Cacciamani, 2013): nasce la teoria dell'*expansive learning* di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

2.2 *Expansive learning*

Secondo la teoria dell'apprendimento dell'*expansive learning* chi apprende è coinvolto nella costruzione e implementazione di un oggetto e di un concetto sostanzialmente nuovi, più ampi e complessi per la propria attività (Engeström & Sannino, 2010).
Mentre Sfard (1998), passando dalla metafora dell'acquisizione a quella della partecipazione, resta comunque in una teoria unidimensionale, che sceglie di considerare lo studente principalmente come comunità e non come individuo, Engeström con la sua teoria dell'*expansive learning* passa a un modello multidimensionale, in cui oltre alla dimensione studente con la dicotomia individuo-comunità, ci sono altre tre dimensioni che riguardano come viene inteso l'apprendimento:

- processo che crea e trasforma la cultura piuttosto che come processo che trasmette e conserva la cultura;
- sviluppo orizzontale relativo a scambio e ibridazione tra diversi contesti culturali e standard di competenza piuttosto che sviluppo verticale che segue scale di competenza uniformi;
- processo che porta alla formazione di conoscenze e concetti teorici piuttosto che acquisizione e creazione di conoscenze e concetti empirici.

La teoria dell'*expansive learning* non è basata né sulla metafora dell'acquisizione, né su quella della partecipazione, ma su una metafora propria che è quella dell'espansione. Gli studenti imparano qualcosa che non è ancora lì: costruiscono un nuovo oggetto e concetto per la loro attività collettiva, e implementano questo nuovo oggetto e concetto nella pratica.
La metafora dell'espansione deriva dalla considerazione che le modalità tradizionali di apprendimento si occupano di compiti in cui i contenuti da apprendere sono noti in anticipo da coloro che progettano, gestiscono e implementano vari programmi di apprendimento. Tuttavia, esse non sono sufficienti quando interi sistemi di attività collettive, come i processi lavorativi e le organizzazioni, hanno bisogno di ridefinire se stessi in un processo continuo di ottimizzazione (Engeström, 1999; Engeström & Sannino, 2010).
Nelle radici teoriche dell'*expansive learning* si ritrovano otto idee cardine, di cui sei provengono dalla scuola russa (Vygotskij, Leont'ev, Il'enkov, Davydov) e altre due sono dovute a Bateson e Bakhtin (Engeström & Sannino, 2010). Le elenchiamo e descriviamo brevemente tutte di seguito, approfondendo subito dopo soltanto le due maggiormente rilevanti per il nostro lavoro: il principio della doppia stimolazione e il principio dell'ascesa dall'astratto al concreto.

1. Leont'ev distingue *azioni* e *attività*, e questa distinzione emerge come conseguenza della divisione del lavoro. Un'attività collettiva si riproduce, generando azioni apparentemente simili. Tuttavia, nell'attività c'è un cambiamento continuo e a volte drammaticamente discontinuo: nuove attività derivano da azioni che manifestano le contraddizioni interne della forma precedente dell'attività in questione. In questo senso, l'*expansive learning* si caratterizza come movimento dall'azione all'attività.
2. Il concetto di Vygotskij di *zona di sviluppo prossimale* che originariamente si riferiva alla distanza tra il livello di sviluppo effettivo – determinato dalla risoluzione indipendente di problemi – e il livello di sviluppo potenziale – determinato dalla risoluzione di problemi sotto la guida di un adulto, o in collaborazione con coetanei più capaci – viene ridefinito in termini di apprendimento e sviluppo a livello di attività collettive. La zona di sviluppo prossimale diventa lo spazio di transizione espansiva dalle azioni alle attività.
3. Essendosi sviluppata nell'ambito della teoria dell'attività, la teoria dell'*expansive learning* è *object-oriented*.
4. Dal momento che la teoria dell'attività è una teoria dialettica, un ruolo chiave è giocato dal concetto dialettico di *contraddizione*. Le contraddizioni interne all'oggetto di un'attività sono viste

come sorgente di movimento e cambiamento e quindi sono la forza che guida la trasformazione dell'oggetto stesso (Sannino & Engeström, 2018).

5. Il metodo dialettico di *ascendere dall'astratto al concreto*, sviluppato da Davydov (1990). Nell'attività di apprendimento l'idea semplice iniziale viene trasformata in un oggetto complesso, in una nuova forma di pratica e l'apprendimento porta alla formazione di concetti teorici. In questo quadro, "astratto" significa "parziale" rispetto a un tutto e un'astrazione cattura la più piccola e semplice unità di un sistema interconnesso. L'estensione di questo principio dà vita a un modello come ciclo ideale tipico dell'*expansive learning* che è un dispositivo concettuale euristico.
6. Il principio della *doppia stimolazione* di Vygotskij, che si basa sulla centralità dell'agentività[2] del soggetto, della sua capacità di cambiare il mondo e il proprio comportamento. Questo principio si concretizza nel fornire al soggetto, oltre al problema iniziale, un ulteriore stimolo che il soggetto può utilizzare per reinterpretare il problema. Basandosi su questo principio, l'*expansive learning* definisce i cosiddetti *interventi formativi*.
7. Il concetto di *Apprendimento III* e il concetto associato di *doppio vincolo* di Bateson. Il primo è essenzialmente l'attività di *expansive learning*, nel senso che gli individui apprendono qualcosa che non hanno mai visto prima. La nozione di doppio vincolo deve essere interpretata come «un dilemma sociale, socialmente essenziale, che non può essere risolto (solo) attraverso azioni individuali separate – ma come un contesto nel quale le azioni cooperative congiunte possono far emergere una nuova forma di attività» (Engeström & Sannino, 2010, p. 5).
8. L'idea di Bakhtin (1982) delle *voci multiple*. Nell'*expansive learning* significa che tutte le voci contrastanti e complementari dei vari gruppi e strati del sistema devono essere coinvolte e utilizzate, non solo accademiche, ma anche di gente comune. L'*expansive learning* è intrinsecamente un processo a più voci di dibattito, negoziazione e orchestrazione.

2.2.1 Il principio della doppia stimolazione

La *doppia stimolazione* consiste nel fornire ai partecipanti un primo stimolo (o set di stimoli) che è il problema stesso, dunque con un *goal* che i partecipanti non possono raggiungere con le sole capacità già in loro possesso; successivamente viene fornito un secondo set di stimoli (ad es. una domanda, un segno, un'indicazione) che crea un conflitto. Il punto chiave è sempre creare una zona di tensione tra quello che i partecipanti già sanno e quello che dovrebbero raggiungere. Il secondo stimolo (o set di stimoli) non consiste nel fornire qualcosa di direttamente collegato alla risoluzione del problema, quanto piuttosto degli stimoli esterni anche indirettamente collegati alla soluzione. I partecipanti incorporano gli stimoli esterni nella situazione problematica e con il loro aiuto acquisiscono il controllo della propria azione e costruiscono una nuova comprensione del problema iniziale. Attraverso questo processo, l'individuo trasforma una situazione che ha un significato non ancora chiaro in una situazione che ha un significato più chiaro.

Il processo di costruzione del significato, però, non può essere controllato rigidamente dall'esterno, ma richiede la volontà dell'individuo. Sannino (2011) ha ripreso il concetto di *volition* (intenzionalità, volontà) che era presente nella forma originaria di Vygotskij ma poi trascurato nelle successive trasposizioni nel contesto occidentale. Il concetto di *volition* è individuale: è il soggetto che esprime una volontà di azione (Vygotskij non ha mai denigrato la dimensione soggettiva complementare a quella sociale). Secondo Vygotskij, la doppia stimolazione emerge come un processo che coinvolge due apparati. L'apparato 1 consiste nel prendere la decisione di agire in un certo modo con l'aiuto di un motivo ausiliario (per esempio, l'orologio che suona ad una certa ora). L'apparato 2 consiste nell'attuare questa decisione.

Il secondo set di stimoli può tanto consistere in stimoli (mezzi) esterni, preparati dagli sperimentatori

2. «L'agentività risiede nella capacità degli individui di sviluppare e utilizzare artefatti per ridefinire la situazione ed esercitare controllo sulle loro azioni» (Morselli, 2019, p. 49).

e messi a disposizione dei partecipanti mentre stanno affrontando il compito problematico dato, quanto in stimoli che i partecipanti applicano spontaneamente coinvolgendo mezzi ausiliari specifici come simboli individuati da loro stessi (Sannino, 2011).
La doppia stimolazione è il meccanismo fondamentale che attiva l'agentività del soggetto. Pertanto, la doppia stimolazione è la porta di accesso alle funzioni mentali superiori a partire da un conflitto (di obiettivi, sentimenti, volontà, propositi ecc.). Gli studi di Vygotskij sulla doppia stimolazione riguardano l'individuo ma con questo non si vuole negare l'azione della collettività. Le funzioni psicologiche compaiono prima sul livello interpsicologico, quindi tra gli individui in una azione collaborativa, e dopo sul livello intrapsicologico, quando cioè tali funzioni vengono interiorizzate dall'individuo (Engeström, 2011, citato in Morselli, 2019).

2.2.2 Il principio dell'ascesa dall'astratto al concreto
È un metodo che permette di cogliere l'essenza di un concetto, riproducendo la logica del suo sviluppo storico attraverso l'emergere e la risoluzione dei conflitti che lo hanno generato. Un concetto nasce come idea semplice e poi viene gradualmente arricchita e trasformata nella pratica (cioè in un sistema concreto di relazioni multiple in continuo sviluppo ed espansione).
Nel pensiero teorico-dialettico, l'astratto rappresenta l'idea (l'unità) più piccola e più semplice di tutto il sistema. L'ascesa dall'astratto al concreto si realizza attraverso specifiche azioni epistemiche o di apprendimento che, secondo Davydov, sono: 1) trasformare le condizioni del compito per rivelare la relazione universale dell'oggetto in studio, 2) modellare la relazione identificata in una forma materiale, grafica o letterale, 3) trasformare il modello della relazione per studiare le sue proprietà nella loro "veste pura", 4) costruire un sistema di compiti particolari che vengono risolti in un modo generale, 5) monitorare l'esecuzione delle azioni precedenti, 6) valutare l'assimilazione del modo generale che viene fuori dalla risoluzione del compito di apprendimento dato (Engeström & Sannino, 2010).
Il metodo dell'ascesa dall'astratto al concreto porta alla costruzione di un concetto teorico (che quindi sarebbe il *concreto*). L'emergere di questo concetto teorico può avvenire senza l'aiuto di un "istruttore", ma piuttosto può emergere dalla situazione e dagli ostacoli incontrati nella situazione.

2.3 Il modello della spirale espansiva
A partire dalle azioni epistemiche o di apprendimento individuate da Davydov nel principio di ascesa dall'astratto al concreto, Engeström ha elaborato un modello che si evolve come una spirale (Figura 5).

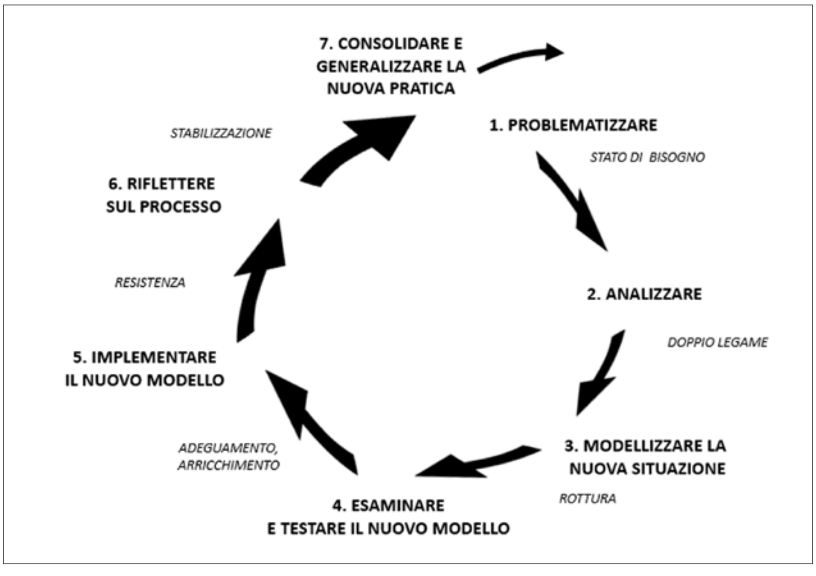


Figura 5. Il modello del ciclo espansivo, ripreso da Engeström e Sannino (2010).

Le comunità professionali, attraverso la metodologia indicata dalla spirale, riescono a immaginare, sviluppare e concretizzare nuovi orizzonti nelle loro pratiche, espandendosi costantemente in una zona di sviluppo prossimale collettiva. La spirale espansiva consta di sette azioni epistemiche elencate e brevemente descritte di seguito (Engeström & Sannino, 2010):

1. *Problematizzare*: mettere in discussione, criticare o rigettare aspetti di pratiche accettate o conoscenze note.
2. *Analizzare*: analizzare la situazione attraverso una trasformazione mentale, discorsiva o pratica della situazione per trovare le cause o i meccanismi esplicativi; si possono fare due tipi di analisi per spiegare la situazione: storico-genetica, basata sul tracciamento delle sue origini e della sua evoluzione; reale-empirica, basata sulla costruzione di un quadro delle sue relazioni sistemiche interne.
3. *Modellizzare*: costruire un modello esplicito e semplificato della nuova idea che spiega e offre una soluzione alla situazione problematica.
4. *Esaminare*: esaminare il modello, lavorarci, applicarlo in modo da capire se e come funziona e coglierne potenzialità e limiti.
5. *Implementare*: implementare il modello attraverso applicazioni pratiche, arricchimenti ed estensioni concettuali.
6. *Riflettere*: riflettere e valutare il processo.
7. *Consolidare*: consolidare i risultati del processo in una nuova forma stabile di pratica.

Il modello del ciclo espansivo è rappresentato in **Figura 5**, dove le frecce sempre più spesse indicano l'espansione dello scopo e della partecipazione delle varie azioni.

3 Alcuni strumenti metodologici

In questo paragrafo presentiamo alcuni costrutti e elementi teorici che sono stati alla base della progettazione del DIST-M.

3.1 Interventi formativi

Nel solco delle idee di Vygotskij, che aprono la pista a un tipo di ricerca rivolto alla promozione del cambiamento attraverso modelli che collegano teoria e pratica, Engeström sviluppa l'idea di *interventi formativi*, basati sul principio di doppia stimolazione. Questi si contrappongono ai *design experiments* o *design research* (le prime formulazioni risalgono a Brown (1992) e Collins (1992)), che aderiscono a una visione lineare tipica del pensiero *gold standard*, secondo cui i ricercatori sanno cosa vogliono implementare, come vogliono cambiare la pratica educativa, avendo ben definito in anticipo l'intervento e i risultati desiderati. L'assunto della *design research*, dunque, è che i ricercatori progettano il disegno dell'esperimento avendo in mente i principi e gli obiettivi e portando avanti la realizzazione e gli eventuali rifinimenti. Gli insegnanti si limitano a implementare il disegno, dando per scontato l'esito finale del successo dell'apprendimento da parte degli studenti. In questo tipo di processo, si tende ad avere il controllo di tutte le variabili in gioco, senza problematizzare gli assunti di partenza. La sperimentazione serve solo a rifinire il disegno in modo tale da eliminare discordanze con i risultati attesi. Al contrario invece gli interventi formativi si inseriscono in una nuova metodologia in cui non c'è il controllo totale e rigido da parte dei ricercatori di tutte le variabili. Qui entra in gioco l'autonomia del partecipante.

Le caratteristiche principali che distinguono gli interventi formativi dai *design experiments* sono:

1. *Punto di partenza*: a differenza degli interventi lineari in cui i ricercatori conoscono contenuti e obiettivi sin dall'inizio e in maniera precisa, negli interventi formativi i partecipanti affrontano un problema, intrinsecamente contraddittorio, che viene analizzato ed espanso dando vita ad un nuovo concetto, i cui contenuti non sono del tutto noti a priori dai ricercatori;
2. *Processo*: a differenza degli interventi lineari in cui ci si aspetta che i partecipanti implementino l'intervento senza resistenza, negli interventi formativi i partecipanti sono coinvolti in processi di continua negoziazione dei contenuti e della sequenza degli interventi stessi; in questo senso il principio di doppia stimolazione è un meccanismo che supporta i partecipanti sia all'autonomia di azione sia a prendersi carico del processo;
3. *Risultati*: a differenza degli interventi lineari in cui controllando tutte le variabili si mira ad ottenere una soluzione standardizzata che funziona nello stesso modo anche in altri contesti, negli interventi formativi si mira a generare nuovi concetti che possono essere utilizzati in altri contesti come cornice per la progettazione di nuove soluzioni localmente appropriate e anche a favorire il coinvolgimento dei partecipanti;
4. *Ruolo del ricercatore*: a differenza degli interventi lineari dove il ricercatore tende a controllare tutte le variabili, negli interventi formativi il ricercatore mira a provocare e sostenere un processo di trasformazione espansivo gestito dagli stessi partecipanti.

3.2 Come "sceneggiare" la collaborazione per un efficace apprendimento

In contesti di apprendimento collaborativo, oltre ai processi cognitivi e metacognitivi, che si riferiscono a un livello individuale, assumono notevole importanza anche i processi socio-cognitivi, che sono processi sociali. Durante le interazioni con i compagni, da un lato ogni studente risente delle azioni degli altri, che vanno ad influenzare il proprio pensiero e la propria conoscenza, attivando così un processo cognitivo individuale; dall'altro lato tutti gli studenti sono coinvolti in un processo congiunto di negoziazione di significati e di costruzione di conoscenza, che è un processo socio-cognitivo. Alla fine di un'attività collaborativa, il singolo studente potrà aver interiorizzato la nuova conoscenza co-costruita ma anche le abilità cognitive messe in gioco personalmente e dai vari membri del gruppo durante l'attività.

3.2.1 Gli script

L'efficacia di lavorare in gruppi collaborativi nell'apprendimento non è scontata, come molte ricerche ci ricordano. Non è scontato, infatti, che nella collaborazione gli studenti riescano a mettere in pratica forme di interazione efficaci e a indirizzare l'interazione al compito che stanno affrontando, senza essere supportati esplicitamente da una guida. Per questo, molti sono gli studi che si possono trovare focalizzati sulla strutturazione e regolazione dell'interazione. A maggior ragione, la necessità di pre-strutturare e regolare i processi sociali e cognitivi è accentuata negli ambienti dove la collaborazione è mediata dal computer (Weinberger et al., 2009). È a questo proposito che è nato il termine *scripting* (o *scripted*) *collaboration*, per indicare l'apprendimento collaborativo che viene strutturato dall'esterno sia in contesti online che in presenza.
Il concetto di *script* nasce in psicologia cognitiva e fa riferimento a uno schema di memoria interna corrispondente a una sequenza di azioni che definiscono una ben nota situazione. Uno *script* può essere inteso come una guida ai ruoli e alle azioni che una persona deve seguire per sapere cosa fare in una specifica situazione sociale (Schank & Abelson, 1977). Una persona sviluppa un certo *script* estraendo gli elementi comuni che ritrova quando partecipa più volte a situazioni del medesimo tipo. Acquisito uno *script*, questo viene attivato ogni volta che la persona si trova in una situazione simile fungendo da guida in quella situazione.
I ricercatori in psicologia dell'educazione hanno preso in prestito il concetto di *script* dandogli un significato leggermente diverso. In questa accezione, lo *script* consiste in una *sceneggiatura* (*scripting*) delle interazioni, esternamente imposta, che regola ruoli e azioni che gli studenti coinvolti devono as-

sumere e svolgere, in modo da sollecitare specifici processi cognitivi, socio-cognitivi e metacognitivi, necessari perché l'apprendimento abbia successo.
Una differenza sostanziale tra le due visioni consiste nel fatto che nel contesto didattico gli *script* sono creati da persone (docente, facilitatore, designer) diverse da quelle che li implementano (studenti) e sono esplicitamente imposti a questi ultimi. In ottica vygotskiana, l'aspettativa è quella di un'interiorizzazione degli *script* esterni da parte dello studente, col tempo e attraverso la pratica sociale, quindi un passaggio da una etero-regolazione ad una auto-regolazione.

3.2.2 L'apprendimento collaborativo in matematica
Molti studi sull'apprendimento collaborativo in matematica evidenziano che l'efficacia dei gruppi collaborativi si basa sull'assegnazione ad ogni membro di un gruppo di un ruolo dedicato ad uno specifico obiettivo. Ad esempio, Pesci (2004) individua i seguenti ruoli con i relativi obiettivi:

1. l'*orientato al compito*, responsabile del raggiungimento del risultato ottimale;
2. l'*orientato al gruppo*, responsabile del clima comunicativo all'interno del gruppo;
3. il *relatore*, portavoce delle soluzioni proposte dal suo gruppo;
4. la *memoria*, responsabile della verbalizzazione scritta dei risultati raggiunti;
5. l'*osservatore*, responsabile dell'osservazione del processo interattivo nel gruppo.

A questi ruoli, nell'ambito di un approccio di tipo *inquiry* (Arzarello & Soldano, 2016), ne è stato aggiunto un altro:

6. l'*avvocato del diavolo*, che mette in discussione ciò che i compagni propongono, pone domande su quanto i compagni affermano, insinua dubbi.

Pesci (2009) sottolinea come l'assegnazione dei ruoli tra i membri del gruppo incoraggi la collaborazione e l'interdipendenza, convogli le capacità individuali nel lavoro comune e riduca alcuni comportamenti inefficaci, come la non partecipazione al lavoro del gruppo o la prevaricazione di uno dei componenti del gruppo sugli altri. Inoltre, mette in evidenza il fatto che il fare esperienza di tutti i ruoli per poterne comprendere i compiti connessi è necessario allo sviluppo delle risorse degli studenti.

3.3 Il concetto di orchestrazione
3.3.1 L'orchestrazione nella ricerca educativa basata sulla tecnologia
Dillenbourg (2013) si riferisce all'orchestrazione come a una forma di gestione (processo di regolazione) di scenari pedagogici e tecnici integrati: da un lato le attività, che possono essere in presenza o online, e dall'altro lato gli strumenti che consentono la realizzazione delle attività. A suo parere, l'orchestrazione non riguarda solo l'apprendimento, ma anche vari vincoli estrinseci (tempo, spazio, disciplina, curriculum, ...). Questa è una delle caratteristiche che distingue l'orchestrazione dalla progettazione didattica, oltre al fatto che si riferisce a un gruppo di studenti piuttosto che ad un individuo e che il controllo dell'insegnante prevale su quello del sistema. Dillenbourg afferma che l'orchestrazione rafforza il potenziale degli insegnanti nel dirigere le attività in classe e le tecnologie «permettono di vedere cose altrimenti invisibili» (Dillenbourg, 2013, p. 491).
In risposta alla posizione di Dillenbourg, gli studiosi Kollar e Fischer (2013) sostengono che la metafora dell'orchestra musicale può essere efficace se si riferisce non solo agli aspetti di gestione in tempo reale delle attività e degli eventi ma anche all'intero processo alla base della creazione della musica, che include anche gli aspetti di composizione e direzione. Così si riferiscono all'orchestrazione come al «processo di creazione, adattamento e messa in atto di uno scenario di apprendimento potenziato dalla tecnologia in condizioni di classe complesse» (Kollar & Fischer, 2013, p. 508), individuando l'orchestrazione come un processo in cui si distinguono tre sotto-processi: comporre, organizzare,

dirigere. *Comporre* consiste nella definizione/descrizione che i ricercatori/sviluppatori fanno di uno scenario, costituito da risorse e strumenti, specificando come vengono combinati e utilizzati dall'insegnante e dagli studenti. *Organizzare* è ciò che l'insegnante fa adattando lo scenario ai vincoli della sua classe (ad esempio i vincoli legati alla possibilità di avere disponibili alcuni strumenti tecnologici). *Dirigere* è realizzare, mettere in atto lo scenario nella propria classe sotto la guida dell'insegnante. Dal loro punto di vista, ciò a cui Dillenbourg si riferisce come "orchestrare" significa in realtà "dirigere", mentre essi evidenziano come tutti e tre i processi siano da considerarsi essenziali perché l'apprendimento potenziato dalla tecnologia (*Technology Enhanced Learning* – TEL) sia efficace in classe. Infine, sottolineano che l'obiettivo principale della TEL è quello di facilitare l'apprendimento degli studenti, che dovrebbe essere sempre preso in considerazione, ed evidenziano un forte spostamento del focus dall'insegnamento all'apprendimento.
Un'ulteriore concettualizzazione dell'orchestrazione riguarda il modo in cui gli studenti sono coinvolti nelle attività: individuale, a piccoli gruppi, a grandi gruppi. L'attività può prevedere più di una modalità di coinvolgimento o i vincoli reali possono interferire con quelle progettate che dovranno essere cambiate. Così, Weinberger e Papadopoulos (2016) introducono l'idea di orchestrazione di diverse modalità sociali di apprendimento. Gli studenti possono imparare individualmente o in modo collaborativo, in piccoli e grandi gruppi. Orchestrare le modalità sociali di apprendimento significa organizzare l'apprendimento scegliendo una di esse o fondendone alcune. Essi sostengono che la transizione da una modalità sociale all'altra dovrebbe essere attentamente pianificata dall'insegnante tenendo conto di come ciascuna di esse aiuti gli studenti a raggiungere gli obiettivi globali di apprendimento. L'insegnante è riconosciuto come il centro di un complesso ambiente tecnologico, dove la tecnologia richiede di essere orchestrata e può facilitare l'orchestrazione.

3.3.2 L'orchestrazione nella ricerca in didattica della matematica

Nella didattica della matematica, Trouche (2004) propone il termine *orchestrazione strumentale* in un ambiente di apprendimento computerizzato (*Computer Learning Environment* – CLE). Uno strumento comprende un artefatto (cioè un oggetto dato) insieme a schemi di utilizzo socialmente costruiti dal soggetto. Il processo che dà origine a uno strumento è chiamato genesi strumentale. Secondo Trouche i complessi artefatti presenti nel CLE producono un insieme di strumenti. Il processo di genesi strumentale così come l'articolazione degli strumenti in CLE non può essere lasciato agli studenti, ma richiede la guida dell'insegnante, che può agire attraverso l'orchestrazione strumentale.
In questo filone, Drijvers e colleghi (2009) propongono un modello a tre livelli: configurazione didattica, cioè l'impostazione dell'ambiente di insegnamento dotato di artefatti (strumenti tecnologici e compiti); modalità di utilizzo, cioè il modo in cui l'insegnante utilizza la configurazione didattica per raggiungere i suoi obiettivi didattici; e performance didattica, riferendosi alle decisioni ad hoc e *run-time* prese dall'insegnante durante l'insegnamento.
All'interno della teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), oltre all'accezione di orchestrazione riferita a Trouche in relazione all'uso di artefatti, viene utilizzata anche un'accezione relativa alla discussione matematica (Bartolini Bussi et al., 1995), definita come «una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento e apprendimento» (Bartolini Bussi et al., 1995, p. 7). All'interno di un'attività, l'insegnante, che ha in mente il motivo generale, guida i suoi studenti nella costruzione della conoscenza matematica monitorando le interazioni tra loro e stimolando la verbalizzazione e le discussioni generali. Le verbalizzazioni che avvengono in un'attività sono significative nella misura in cui risultano adeguate «a rappresentare una parte del dramma giocato dall'umanità in relazione a quella particolare conoscenza» (Bartolini Bussi et al., 1995, p. 7). Ciò che caratterizza un dramma è la presenza di diverse voci, nel senso di Bakhtin (1982). Ogni voce può essere messa in relazione con un ruolo nel dramma. Inoltre, affinché tutte le voci siano riconosciute, è necessario prevedere tempi e modi della loro articolazione, senza il "monologo" dell'insegnante o una voce che monopolizza

tutta la discussione mettendo a tacere quelle divergenti. Tuttavia, la voce dell'insegnante è comunque fondamentale, dal momento che rappresenta la cultura di riferimento. L'insegnante funge da guida assicurando l'articolazione delle diverse voci. Lo fa in diversi modi: unendosi ad una discussione nel flusso dell'attività di classe o influenzando lo sviluppo della discussione attraverso i suoi interventi.

4 Metodologia della ricerca

La metodologia seguita nello sviluppo della ricerca è stata quella dell'uso di più cicli espansivi (vedi par. 2.3 e Figura 5). Il DIST-M presentato in questo lavoro è frutto di tre cicli espansivi principali.

4.1 Il primo ciclo espansivo

La prima fase, quella del *problematizzare* (vedi Figura 5), per il primo ciclo espansivo è partita dalla volontà di proporre a scuola, dunque in ambito di apprendimento formale, esperienze didattiche basate su una metodologia che mirasse al raggiungimento di obiettivi didattici necessari per la formazione di cittadini consapevoli, che possano stare al passo con la rivoluzione tecnologica cominciata col Web 2.0.
L'analisi della situazione di partenza, condotta dal gruppo di ricercatori e insegnanti e basata sui risultati della ricerca nei diversi ambiti e su dati provenienti dall'esperienza sul campo, ha portato a chiarire gli elementi chiave del progetto. L'idea *storytelling*, come contesto metodologico nel quale sviluppare il processo di insegnamento/apprendimento e, in particolare, di *digital storytelling*, che in didattica è stato prevalentemente declinato come pratica che vede gli studenti costruire storie focalizzate su un certo argomento utilizzando vari media (ipertesti, immagini, video, suoni, …) hanno portato alla definizione di un contesto come problema-storia implementato attraverso fumetti digitali. D'altra parte, tra gli elementi chiave individuati dagli studi di Zan (2012) sull'uso dei problemi-storia per favorire l'efficace integrazione di pensiero narrativo e pensiero logico c'è l'esigenza che la storia presenti una situazione che evolve nel tempo, in cui sono presenti personaggi animati, e che sia "aperta", cioè che lo studente possa contribuire con la propria risoluzione del problema a proseguire/chiudere la storia. Da qui, la riflessione sul significato da attribuire all'aggettivo *interactive* che diamo a *storytelling*: l'interazione dello studente (con i pari, con la piattaforma, con l'esperto…) deve servire al completamento della storia.
Gli elementi sopra descritti emersi dall'analisi sono stati l'impalcatura sulla quale è stato costruito il primo modello di DIST-M, per definire il quale sono state fatte alcune scelte generali e alcune scelte specifiche, che andiamo di seguito ad elencare.
Le scelte generali hanno riguardato l'organizzazione didattica:

- l'uso di fumetti digitali per creare una storia in cui contestualizzare la situazione problematica;
- la storia data in forma di canovaccio per garantire che sia una storia "aperta" nella quale gli studenti possono intervenire e costruire la propria versione della storia;
- la storia come successione di episodi per garantire un'evoluzione temporale;
- la definizione della modalità *immersiva* di partecipazione degli studenti: ogni studente è un personaggio della storia e agisce per costruire una versione originale della storia;
- le modalità per una collaborazione efficace: ogni studente ha un ruolo predefinito in accordo al quale si muove rispetto alla risoluzione del problema;
- la modalità di partecipazione: gli studenti della classe sono divisi in gruppi che lavorano in parallelo come attori della storia;
- la scelta delle funzionalità tecnologiche abilitanti.

Le scelte particolari, invece, hanno riguardato gli obiettivi matematici, per i quali si è fatto riferimento a come sono state "recepite" le istanze del quadro PISA (OECD, 2016) all'interno delle Indicazioni nazionali (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010a; MIUR, 2012) e delle Linee guida per gli istituti tecnici e professionali (MIUR, 2010b; MIUR, 2010c):

– focus sulla competenza argomentativa;
– definizione delle caratteristiche del problema in modo da essere adeguate al focus;
– scelta di Moodle come piattaforma.

Attraverso il confronto tra ricercatori e tra ricercatori e insegnanti, è stato fatto un esame a priori della robustezza del modello e si sono definite le modalità di implementazione e di sperimentazione di un primo studio pilota. Le prime sperimentazioni sono state seguite da ulteriori fasi di discussione e riflessione che hanno portato a stabilizzare alcuni risultati e a problematizzare altre questioni, processi che hanno dato vita ad un secondo ciclo espansivo.

4.2 Il secondo ciclo espansivo

Il secondo ciclo espansivo è partito con la *problematizzazione* dei seguenti punti:

– i ruoli, inizialmente definiti sulla base delle teorie sull'apprendimento collaborativo sono stati ri-definiti in base alle funzioni cognitive che intervengono nei processi di *problem solving* (Albano et al., 2021);
– l'esperienza dei nuovi ruoli è stata implementata per favorire la costruzione dell'identità matematica dello studente e a tal fine si è deciso di supportare lo studente in una riflessione sul significato dei ruoli che ha impersonificato;
– nella fase di collaborazione simmetrica, tra pari, è stata introdotta la possibilità di interazione con l'esperto, attraverso uno specifico canale;
– i gruppi di studenti sono stati divisi nella storia in Attori ed Osservatori (vedi par. 5).

4.3 Il terzo ciclo espansivo

Il terzo ciclo espansivo è partito con la *problematizzazione* dei seguenti punti:

– una strutturazione più fine della meta-narrazione matematica, ha portato alla ridefinizione degli episodi della storia;
– l'inserimento del DIST-M nelle attività curriculari ha portato alla necessità di prevedere una fase di valutazione della narrazione matematica prodotta collaborativamente dagli studenti. A questo proposito, l'ulteriore obiettivo che è stato fissato riguarda il fatto che gli studenti diventino anche consapevoli della meta-narrazione matematica, cioè che si approprino dell'oggetto di ogni episodio, non limitandosi al solo risultato;
– è stata infine introdotta un'ulteriore riflessione, in termini di autovalutazione a posteriori, sui ruoli giocati, per favorirne l'appropriazione da parte dello studente.

Nel prossimo paragrafo descriveremo il DIST-M corrispondente al terzo ciclo espansivo.

5 Il DIST-M

Le considerazioni teoriche e le scelte specifiche che abbiamo esposto nei paragrafi precedenti hanno ispirato alcuni principi di design, che sono stati alla base dell'architettura metodologica-tecnologica del DIST-M, e che elenchiamo di seguito:

1. la storia in cui la situazione problematica è immersa evolve in forma di successione di episodi e gli episodi sono parte di una narrazione coerente;
2. gli studenti agiscono come personaggi della storia mossi da uno scopo;
3. l'azione dello studente per il raggiungimento dello scopo è guidata da un ruolo che gli viene assegnato;
4. lo scopo è collegato al quesito matematico ed emerge dalla storia;
5. la comunicazione tra i personaggi della storia avviene esclusivamente in forma scritta.

L'architettura metodologica si sviluppa attorno a una storia digitale, in forma di fumetto, che evolve lungo episodi e ruota intorno a cinque personaggi animati (quattro adolescenti e un adulto, zio di uno degli adolescenti) che si trovano ad affrontare problemi matematici nati in maniera spontanea dalla storia stessa.
Ogni studente è un personaggio della storia e, all'interno di essa, ha un ruolo e azioni da svolgere, talvolta da solo, talvolta in collaborazione con altri. A differenza di quanto succede nelle pratiche diffuse, lo studente non è né colui che ascolta e riproduce una storia né colui che ne inventa una nuova. In analogia a quello che accade nella commedia dell'arte italiana, sulla base di un canovaccio ne diventa protagonista, assumendo il ruolo di uno dei personaggi, determinandone la sceneggiatura su improvvisazione. In tal modo, gli studenti, interagendo tra loro, orientano lo sviluppo della storia. Lo stesso vale per il ruolo di mediatore dell'esperto, anch'egli personaggio della storia, che si muove sulla base degli stimoli/risposte/silenzi degli altri attori avendo anche la possibilità di introdurre supporti tecnologici predisposti a priori.
Il focus dell'architettura metodologica non è solo su chi agisce nella storia, ma anche su chi riflette sull'azione, guardando la storia dall'esterno.
Le azioni del docente e degli studenti evolvono sui seguenti quattro livelli interconnessi.

5.1 Livello MACRO. La (meta-)narrazione matematica

In accordo al modello C&D (Contesto e Domanda) (Zan, 2012), una storia è caratterizzata da una evoluzione temporale. Abbiamo scelto di collegare l'evoluzione della storia all'evoluzione del processo di dimostrazione (Albano et al., 2020), modellandolo con fasi di produzione di congetture e di costruzione di dimostrazioni (Boero, 1999):

1. *Esplorare*: gli studenti sono coinvolti in una fase di indagine, a partire da una o più domande, alla fine della quale è atteso che producano un report di ciò che hanno osservato; in questa fase gli studenti esplorano la situazione problematica e cominciano ad emergere le prime congetture "locali", ossia enunciati spesso relativi ad esempi che provengono dalla situazione in gioco, dove gli studenti riescono ad identificare delle regolarità, che talvolta cominciano a provare anche su altri esempi costruiti da loro stessi in modo da indagare se e sotto quali condizioni la regolarità identificata continua a valere;
2. *Congetturare*: dopo l'esplorazione di vari casi gli studenti producono un testo che generalizza quanto hanno trovato nella fase di esplorazione, ossia una congettura generale, su quanto osservato, generalmente espressa in forma verbale e scritta in modo tale che possa essere resa pubblica;
3. *Formalizzare*: dopo aver trovato la congettura, comincia a porsi l'esigenza di trovare degli argomenti opportuni per la sua validazione; spesso il testo prodotto nella fase precedente non è adeguato a questo scopo; nasce quindi l'esigenza di manipolare la congettura prodotta al fine di avere una formulazione funzionale alla sua dimostrazione che è oggetto del lavoro degli studenti in questa fase;
4. *Dimostrare*: la nuova formulazione è il punto di partenza perché gli studenti siano coinvolti nella produzione di una dimostrazione accettabile secondo gli standard matematici adeguati al livello scolare in cui operano; gli studenti sono quindi impegnati a produrre un "calcolo ragionato", cioè una organizzazione degli argomenti in catena deduttiva e a giustificare ogni passo deduttivo.

Il racconto evolve lungo quattro episodi, corrispondenti alle fasi sopra descritte. Tali fasi sono progettate e implementate separatamente ma, nella pratica, non sono da intendersi né strettamente separate né esperite in un flusso lineare. Sono però indispensabili nella loro interezza affinché gli studenti diventino anche consapevoli della meta-narrazione matematica, cioè che si approprino dell'oggetto di ogni episodio, non limitandosi al solo risultato.

5.2 Livello MICRO. Role-playing e collaborazione

In accordo al modello C&D (Zan, 2012), una storia è caratterizzata dalla presenza di almeno un personaggio animato. Qual è il personaggio nel nostro DIST-M? Un matematico che si trova di fronte a una situazione sfidante. Per favorire la costruzione dell'identità di un matematico, ci siamo chiesti: *Quali sono i processi che si mettono in moto nella mente di un matematico quando affronta (e risolve) un problema? Quali funzioni cognitive entrano in gioco durante questi processi? E quali sono le interazioni che collegano queste specifiche funzioni?* (Albano et al., 2021).
Pensando a quello che i matematici fanno durante un processo di *problem solving*, abbiamo individuato interazioni tra diverse "voci", cioè forme di pensiero e di discorso che rappresentano il punto di vista di un personaggio (Bartolini Bussi, 1996). Ogni voce rappresenta una funzione cognitiva necessaria per un *problem solver* di successo. Il processo è naturalmente collaborativo tra le varie voci esistenti e operanti all'interno della persona. Mentre comunichiamo con noi stessi, le "varie parti di noi" (cioè le varie funzioni cognitive) che entrano in gioco nel *problem solving*, stanno effettivamente comunicando tra loro. Pertanto, in linea con la cornice dello *storytelling* del progetto, abbiamo modellato tale processo come una collaborazione tra personaggi, ognuno dei quali assume il ruolo di una funzione cognitiva. La nostra storia è quindi caratterizzata dai seguenti personaggi animati, le azioni di ognuno dei quali sono guidate dalla funzione cognitiva che personifica:

- *Boss*: svolge la funzione di organizzatore, necessaria per portare avanti l'intero processo di *problem solving*;
- *Peste*: svolge la funzione di mente critica, necessaria per testare e validare quello che man mano viene trovato;
- *Blogger*: svolge la funzione di redattore, necessaria per produrre un testo pubblicabile;
- *Promoter*: svolge la funzione di esploratore, necessaria per avviare il processo di *problem solving*.

A questi si affianca un personaggio che ha un ruolo asimmetrico rispetto al gruppo dei pari precedenti:

- *Guru*: svolge la funzione della conoscenza e della saggezza ed è l'esperto in senso vygotskiano.

Questa collaborazione e interazione tra ruoli avviene in ogni episodio secondo una strutturazione a due fasi.
In una fase iniziale, è prevista solo l'interazione nel gruppo dei pari, vale a dire il gruppo composto dai personaggi Boss, Peste, Blogger e Promoter, senza un intervento esplicito dell'esperto. Tuttavia, Guru è presente in background e ha un canale di comunicazione privato con Promoter. Nel rapporto privilegiato tra Promoter ed Guru, le due direzioni della comunicazione sono su piani diversi. Dal lato "Promoter verso Guru", Promoter si rivolge a Guru nella sua veste di funzione cognitiva, cioè Promoter, e il gruppo per suo tramite, fa ricorso alla saggezza, alla sapienza, all'esperienza, quando si rende conto di non avere al suo interno altre risorse da mettere in gioco per la risoluzione del problema. Dal lato "Guru verso Promoter", Guru, potendo osservare quanto accade nelle interazioni tra pari, può supportare Promoter, e attraverso di lui l'intero gruppo dei pari, nell'avvio della fase di *problem solving* o in momenti di stallo. L'intervento di Guru riguarda non necessariamente solo la matematica in gioco, ma anche l'organizzazione didattica (ruoli giocati, utilizzo di varie *app* opzionali all'interno

del design, …). Questo verso della comunicazione si è reso necessario a valle di un primo esperimento pilota che ha visto qualche gruppo non riuscire a uscire da un momento di stallo durante il lavoro tra pari. La fase di lavoro tra pari termina quando il gruppo ha raggiunto un prodotto condiviso in risposta al quesito emerso dall'episodio in corso.
Segue una seconda fase che ruota intorno alla discussione del prodotto condiviso dal gruppo in un confronto esplicito con Guru. Questa seconda fase serve a sistematizzare quanto prodotto dai pari, e permette di passare all'episodio successivo.

5.3 Livello MESO. Attori/Osservatori

Il modello ideato ha come obiettivo educativo l'appropriazione e l'interiorizzazione dei ruoli da parte degli studenti grazie alla pratica sociale. Questo implica non solo riflettere sulle azioni appropriate da svolgere in ogni ruolo, ma anche riflettere sulle caratteristiche di quelle stesse azioni.
Il modello è pensato affinché gli studenti partecipino alla storia con due diverse modalità. Per ciascun episodio:

– un gruppo agisce come *Attori*: ogni studente del gruppo assume il ruolo di uno dei personaggi sopra descritti;
– gli altri gruppi agiscono come *Osservatori*: sono attivi e consapevoli degli Attori della storia; ogni studente si incarica di osservare un personaggio specifico della storia e riflette su come il personaggio osservato si comporta rispetto sia al problema matematico che al ruolo che sta giocando.

Nel modello proposto ruotano sia i gruppi di Attori e Osservatori, sia i ruoli all'interno di ciascun gruppo. Ad esempio, se nel primo episodio un gruppo ha giocato come Attori, nel secondo episodio giocherà come Osservatori e un gruppo che ha giocato da Osservatori giocherà come Attori. Inoltre, se uno studente ha giocato da Boss nel primo episodio, nel secondo episodio giocherà in un ruolo diverso da Boss. In questo modo, ciascuno studente fa esperienza (da Attore o da Osservatore) di tutte le funzioni cognitive, e ciò può portare all'appropriazione di tali funzioni da parte di ciascuno. Questo contribuisce a fare emergere queste funzioni come risorse interne all'individuo e a contribuire allo sviluppo dell'identità di matematico (Albano et al., 2021).
Inoltre, gli studenti hanno la possibilità di osservare come viene svolto il ruolo di Guru e, ad un certo punto, potrebbero assumerlo e, dunque, appropriarsene. Il ruolo di Guru, quindi, dovrebbe progressivamente svanire e i pari dovrebbero assumere la responsabilità di Guru.
Val la pena di sottolineare il duplice valore degli Osservatori. In primo luogo, la presenza degli Osservatori rende esplicita la coralità della storia matematica: infatti quando gli studenti si trovano a giocare come Attori in un nuovo episodio, dopo aver giocato da Osservatori in quello precedente, conoscono già il processo matematico emerso negli episodi precedenti, e questa consapevolezza viene messa in gioco nella prosecuzione della storia. In secondo luogo, la presenza degli Osservatori favorisce un apprendimento significativo e consapevole: questo ruolo agevola la riflessione sulle azioni proprie e degli altri, permettendo di guardarle da un punto di vista diverso; gli studenti si immedesimano nelle azioni e nello stesso tempo possono distaccarsene, passando a una *riflessione nell'azione*.
Nella globalità dell'attività, è preponderante l'attuazione da Osservatori, dal momento che ogni studente gioca una volta da Attore e tutte le restanti volte da Osservatore. I gruppi di Osservatori sono importanti nel contesto della storia: gli studenti attraverso l'osservazione fanno esperienza dei processi, da un lato chi agisce prima da Attore può cogliere meglio i processi vivendoli in un secondo momento dall'esterno, dall'altro chi agisce prima da Osservatore può percepire i processi in modo più acuto rispetto agli Attori nel momento in cui li esperiscono proprio perché li hanno già vissuti in fase di riflessione.

5.4 Livello meta-cognitivo. Riflessione

La riflessione sul proprio operato come partecipanti è prevista nel DIST-M come momento di rivisitazione finale di tutta la storia ma anche in itinere sui ruoli giocati. Gli studenti che hanno impersonificato i diversi personaggi, talvolta come Attori talvolta come Osservatori, hanno a disposizione un diario personale che è visibile in ogni fase anche al Guru (tipicamente impersonificato dal docente di classe). Questi diari, che nascono come personali di ciascuno studente, devono diventare patrimonio della classe per una riflessione collettiva sul processo di apprendimento globale e sulle caratteristiche e gli scopi rispetto all'apprendimento di ciascun ruolo. Nella fase finale dell'attività, fuori dalla storia, ogni gruppo di studenti deve tornare indietro a "rivedere" la storia, ossia a riguardare i fumetti, le chat e i diari personali. Lo scopo di questa fase è quello di permettere agli studenti di prendere coscienza del "senso matematico" dell'intera storia e di ogni episodio per creare una "narrazione matematica" come racconto di un percorso che attraversa fatti matematici (Lolli, 2018). Il prodotto di questa fase è la redazione collettiva da parte di ogni gruppo della ricostruzione del processo di risoluzione del problema matematico. A tal fine è importante favorire un approfondimento sul significato di ciascun ruolo rispetto alla risoluzione del problema. In particolare, è importante che gli studenti riconoscano la necessità che in una situazione problematica ciascun componente del gruppo sia in grado di ricoprire tutti i ruoli e che l'efficacia di questi ruoli ai fini della risoluzione del problema stia nella loro collaborazione. Alla fine della storia, quando lo studente ha una visione d'insieme di tutta l'attività svolta, viene coinvolto in un'autovalutazione nella quale riflette su se e come cambierebbe la sua personificazione del ruolo e quindi il suo contributo e la sua partecipazione alla storia e alla risoluzione del problema nelle varie fasi. Oltre all'autovalutazione, il DIST-M prevede una valutazione individuale fatta sotto forma di prosecuzione della storia, attraverso il *task*: «*Ora continua tu la storia…*». Lo scopo è quello di indagare cosa lo studente ha interiorizzato dell'esperienza fatta.

L'architettura tecnologica è stata basata su piattaforma digitale online (Moodle). Il modello prevede l'integrazione di varie tecnologie online, alcune di uso generale (forum, chat), altre specifiche per la matematica (fogli di calcolo, CAS, DGS), e altre ancora opportunamente costruite per supportare lo sviluppo di alcune specifiche competenze, quali *toolkit* linguistici (Albano & Dello Iacono, 2019).
L'architettura DIST-M è stata validata nel caso di studio relativo a un problema aritmetico-algebrico-verbale (Mellone & Tortora, 2015), il problema per il caso di studio è stato scelto in modo che fosse adatto a supportare l'introduzione degli studenti alla modellazione algebrica e lo sviluppo di competenze argomentative e dimostrative.

6 Il DIST-M alla luce dei riferimenti teorici e metodologici

Dopo aver presentato il DIST-M, proviamo a re-inquadrarlo alla luce degli elementi teorico-metodologici descritti nei par. 2 e 3.

6.1 Il DIST-M come intervento formativo

Il dispositivo metodologico progettato si inquadra come intervento formativo. Infatti, all'inizio i ricercatori hanno in mente solo una cornice entro cui si colloca il problema che i partecipanti dovranno affrontare. Più precisamente hanno in mente: a) un macro-obiettivo prioritario, legato alla scelta della competenza matematica su cui focalizzarsi, che inizialmente è stato descritto semplicemente come *supportare lo sviluppo di competenze argomentative*; b) un obiettivo più specifico relativo al particolare problema matematico scelto, inizialmente descritto come *uso dell'algebra come strumento di generalizzazione*.

La scelta di usare la storia come canovaccio su cui i partecipanti (studenti e docenti) costruiscono la loro improvvisazione, che si concretizza nella definizione di un opportuno *script*, lascia loro autonomia nello sviluppo del percorso in modi e con contenuti che non sono totalmente noti a priori.
Tutti i partecipanti affrontano un oggetto problematico. Dal lato studenti esso consiste nel quesito matematico che viene presentato in modo tale da generare un conflitto cognitivo e quindi una discussione tra gli studenti e col docente. Dal lato docenti l'oggetto problematico è il ruolo stesso di docente, nel personaggio del Guru, con tutte le questioni che riguardano come dovrà agire rispetto alla narrazione matematica prodotta dagli studenti, cioè quali saranno le scelte di gestione sia all'interno della storia, sia all'esterno della storia (in classe). Il docente potrà avvalersi del supporto di un'analisi a priori, ma questa potrebbe essere anche completamente disattesa.
Va anche osservato che l'oggetto problematico è immerso nelle attività vitali dei partecipanti. Dal lato studenti, questa immersione nasce dal fatto che essi sono personaggi della storia quando sono Attori e quindi il loro apporto serve alla continuazione della storia, ed è legato alla coralità della storia quando sono Osservatori. Dal lato docente, l'immersione è legata alla professionalità dell'insegnante.
Dal punto di vista del processo, la progettazione fatta è tale che la narrazione matematica viene costruita attraverso continui processi di negoziazione dei contenuti che determinano il corso della storia (deviazioni, velocità, ordine degli episodi ecc.). Questi processi di negoziazione vengono supportati dall'uso del principio di doppia stimolazione, che tende a favorire l'assunzione di responsabilità del processo sia negli studenti, attraverso l'offerta di ulteriori stimoli finalizzati al raggiungimento autonomo dell'obiettivo dell'attività in gioco, sia nei docenti, a cui è lasciata la libertà di intervento (ad esempio la scelta relativa a quando intervenire, rispetto a quale tema e a quali ulteriori stimoli offrire). Nel caso degli studenti alcuni stimoli sono progettati a priori (strumenti a disposizione in piattaforma, come ad esempio fogli di calcolo); nel caso dei docenti la doppia stimolazione è stata lasciata accadere spontaneamente, i docenti hanno avuto discrezionalità di movimento a seconda dell'evoluzione della situazione e dello specifico gruppo di studenti in gioco, sviluppando la loro autonomia a partire dalle analisi a priori e dagli incontri di formazione con i ricercatori.
Dal punto di vista dei risultati, il dispositivo DIST-M non si pone come soluzione standardizzata che funziona nello stesso modo anche in altri contesti. È piuttosto una metodologia in cui alcuni elementi risultano essere potenzialmente trasferibili e utilizzabili per la progettazione di soluzioni DIST-M specifiche per diversi contesti (es. competenze diverse da quella argomentativa) e per diversi contenuti matematici (es. geometria).
Il ruolo dei ricercatori in questi interventi non mirava a tenere sotto controllo tutte le variabili. Per questo i docenti sono stati lasciati liberi di giocare in autonomia il ruolo di Guru ma sono stati supportati con discussioni e confronti in cui sono state negoziate delle linee di azione, senza dare delle "regole". Lo scopo dei ricercatori è stato quello di provocare un processo trasformativo del loro ruolo di insegnanti grazie al loro coinvolgimento nelle sperimentazioni e nel corso del progetto.

6.2 Il DIST-M e i sistemi di attività

Tutto il dispositivo si inquadra nella teoria dei sistemi di attività. Ogni episodio della storia può essere visto come un sistema di attività, il cui oggetto va a sovrapporsi parzialmente con l'oggetto degli altri episodi. Pertanto l'intera storia può essere vista come una costellazione di sistemi di attività.
Ogni episodio evolve secondo uno stesso *script*. In termini del triangolo di Engeström, questo significa che alcuni elementi restano invariati:

- il soggetto, che è ciascuno degli studenti del gruppo Attore o del gruppo Osservatore;
- la comunità, che è il gruppo dei personaggi della storia (comprendente sia gli studenti che il docente);
- le "regole" che regolano il rapporto del soggetto con la comunità sono rappresentate dai ruoli nella storia (ovvero dalle funzioni cognitive nel processo);

- la divisione del lavoro che corrisponde alla collaborazione (tra pari o asimmetrica) all'interno della comunità (studenti e insegnante) guidata dalle azioni caratterizzanti i vari ruoli;
- alcuni mediatori che il soggetto utilizza per il raggiungimento dell'oggetto (strumenti digitali generalisti – ad esempio chat, forum o fumetti, o strumenti digitali specifici – ad esempio tessere digitali, linguaggio verbale, linguaggio algebrico).

Osserviamo che lo *script* di ogni episodio è sostanzialmente impostato come processo dialogico a più voci e a più livelli: un livello orizzontale in cui ci sono le voci dei pari che danno luogo a un dibattito e a negoziazioni, un livello verticale in cui si aggiunge la voce dell'esperto che orchestra una discussione matematica, un livello opzionale obliquo in cui la voce dell'esperto interviene o viene interpellata attraverso un pari "privilegiato" e fornisce un secondo set di stimoli. Le regole che mediano la relazione soggetto-comunità, secondo cui gli interventi degli studenti nel discorso sono guidati dai ruoli che essi interpretano all'interno della storia, a cui soggiacciono le funzioni cognitive del *problem solving*, strutturano e favoriscono il processo di dibattito e negoziazione con voci multiple.
I sistemi di attività corrispondenti ai diversi episodi differiscono principalmente per l'oggetto, che è l'obiettivo dello specifico episodio che a sua volta si concretizza in uno specifico risultato (congettura, formalizzazione e così via). I diversi sistemi di attività però concorrono a produrre un risultato più globale che è l'argomentazione come processo (Boero, 1999).
Nella fase di riflessione collettiva, a conclusione della storia, si realizza un apprendimento espansivo con un movimento da azioni ad attività: si passa dalle azioni che il gruppo fa in ciascun episodio al senso di quell'episodio (cioè alle attività che quell'episodio rappresenta). Ripercorrendo la storia, gli studenti passano (o si spera che passino – eventualmente anche con un supporto successivo del docente) dalle *azioni* di ogni episodio all'*attività* di quell'episodio. È questo il momento in cui gli studenti interpretano le azioni svolte durante l'attività in un'ottica sistemica e diventano (o si auspica che diventino) consapevoli del significato degli episodi come esplorare, congetturare, formalizzare e dimostrare. In questo senso, «l'attività di apprendimento [espansiva] è un'attività che produce attività» (Engeström & Sannino 2010, p. 4): lo studente prende coscienza e, col tempo e la pratica sociale, interiorizza uno *script* di attività dimostrativa.

6.3 DIST-M e i principi cardine dell'*expansive learning*

La progettazione del dispositivo metodologico DIST-M ha inglobato i due principi cardine dell'*expansive learning*, presentati nei par. 2.2.1 e 2.2.2: il principio della doppia stimolazione e quello dell'ascesa dall'astratto al concreto.
Il principio della doppia stimolazione è sostanzialmente alla base di tutto il disegno del DIST-M. In alcuni casi esso è inglobato nella progettazione a priori, ad esempio interviene nella comunicazione che appare nei fumetti, dove ogni rilancio è uno stimolo che orienta e produce un effetto (indiretto). In altri casi, invece, è lasciato alla gestione autonoma di Guru-insegnante. Questo può avvenire in forma implicita (nascosta) quando ad esempio Guru prende l'iniziativa di contattare Promoter, nel loro canale di comunicazione privato, per fornire ulteriori *input* (domande, strumenti ecc.) che il gruppo può utilizzare per reinterpretare la soluzione problematica e uscire da momenti di *empasse* del processo risolutivo. Naturalmente avviene in forma esplicita durante la discussione matematica orchestrata nella parte finale di ciascun episodio. La possibilità per il docente di osservare in modo discreto tutto quanto fatto dagli studenti e l'asincronicità dei suoi interventi, cioè la scelta del momento in cui intervenire, gli permette di poter andare avanti e indietro sul processo di apprendimento in corso degli studenti e di poterci riflettere sopra, e quindi poter fornire eventuali nuovi stimoli ponderati.
Alla base dell'evoluzione della storia si può riconoscere un processo di ascesa dall'astratto al concreto che si muove su diversi livelli. Rispetto allo specifico problema matematico, si possono riconoscere alcune azioni epistemiche o di apprendimento individuate da Davydov: gli studenti sono impegnati in un compito specifico (che coinvolge quaterne specifiche) e lo trasformano per far emergere una rela-

zione universale dell'oggetto di studio (fanno prove su nuove quaterne e replicano su queste la relazione osservata nelle quaterne specifiche), poi lavorano alla sua modellazione che può essere fatta in diverse forme (verbale, algebrica), trasformano il modello in maniera funzionale allo studio più "puro" dell'oggetto di studio che ne permette quindi la dimostrazione. Successivamente vengono costruiti nuovi compiti in cui il modello costruito viene generalizzato (interi pari e interi dispari, progressioni, …). Il processo di ascesa dall'astratto al concreto viene supportato dall'insegnante, ma talvolta può emergere dalle contraddizioni interne alla situazione. Ad esempio, può capitare (è capitato) che un gruppo di studenti si accorga da solo che le lettere usate per la formalizzazione della congettura non sono adeguate allo scopo, non necessariamente allo scopo della dimostrazione, ma anche solo allo scopo della comunicazione.

6.4 Il DIST-M e l'orchestrazione

Come abbiamo scritto nel par. 3.3, nel nostro progetto abbiamo considerato due diverse accezioni di orchestrazione, una riferita agli ambienti tecnologici *general purposes*, integrata con elementi che vengono dalla ricerca disciplinare, e una riferita alla discussione matematica (Bartolini Bussi et al., 1995) per quanto riguarda il coordinamento delle voci che emergono durante i processi di *problem solving*.

6.4.1 L'orchestrazione tecnologica

Il nostro approccio all'orchestrazione tecnologica integra i modelli di Kollar e Fischer (2013) e di Drijvers e colleghi (2009), che risultano essere compatibili. Come nel caso di Kollar e Fischer e a differenza di Drijvers, l'orchestrazione non ha come scopo quello di supportare la genesi strumentale degli studenti. Gli artefatti tecnologici utilizzati sono generalisti, non incorporano conoscenze matematiche di per sé e come tali non richiedono la costruzione di particolari e opportuni schemi di uso da parte degli studenti. Nel nostro caso, la prima fase di orchestrazione, che prevede la definizione di uno scenario didattico, è gestita da ricercatori e insegnanti in collaborazione e non prevede una determinazione completa a priori di come verranno utilizzate le risorse dall'insegnante e dagli studenti. Questa fase integra anche l'orchestrazione delle diverse modalità sociali di apprendimento che entrano in gioco nei diversi momenti delle attività (Weinberger & Papadopoulos, 2016). Una seconda fase di orchestrazione, che va a riferirsi più specificamente a come calare nella classe lo scenario definito, tiene conto di quelli che Dillenbourg (2013) chiama vincoli estrinseci. Una terza fase di orchestrazione, che si riferisce alla fase di fruizione dell'attività, tiene conto anche della possibilità di una gestione da parte dell'insegnante non del tutto predefinita ma dettata dalla contingenza.
Il modello integrato di orchestrazione che viene fuori nel nostro caso, dunque, prevede:

- *definizione dello scenario*: descrizione sistemica dell'attività, sulla base del modello di Engeström;
- *trasposizione didattica dello scenario*: adattamento dell'attività da parte dell'insegnante tenendo conto dei vincoli della classe (ad esempio, possibilità di usare determinati strumenti, tempi scolastici, esigenze curriculari, ecc.);
- *realizzazione dello scenario*: messa in opera dell'attività trasposta da parte dell'insegnante, che può anche prendere decisioni e fare scelte ad hoc e *run-time* durante lo svolgimento dell'attività.

Val la pena di sottolineare che l'orchestrazione della tecnologia risulta essere chiave nel permettere a docenti e studenti di vivere un'esperienza "aumentata" in cui anche gli studenti-Ossevatori, oltre al docente, possono seguire in tempo reale quello che accade, permettendo di rendere visibile quello che altrimenti sarebbe invisibile.

6.4.2 L'orchestrazione di voci multiple

Il nostro approccio all'orchestrazione delle diverse voci che emergono nel corso dell'attività fa riferimento alla discussione matematica (Bartolini Bussi et al., 1995), secondo cui il docente guida i suoi studenti nella costruzione della conoscenza matematica a vari livelli monitorando le interazioni tra loro e stimolando la verbalizzazione e le discussioni generali. In questo processo di orchestrazione, ci sono due momenti importanti per l'insegnante: un'analisi a priori e una a posteriori. Questo si adatta bene al doppio ruolo dell'insegnante nel DIST-M. L'analisi a priori riguarda l'organizzazione delle interazioni. Nel nostro lavoro questo si realizza con la progettazione delle attività che si concretizzano negli episodi della storia, con particolare attenzione al ruolo del Guru/insegnante all'interno della narrazione e a come può interagire e intervenire nel flusso del processo di *problem solving*. Nell'analisi a posteriori, grazie all'accesso alle chat e ai documenti redatti individualmente e in gruppo, l'insegnante può analizzare tutte le discussioni svolte lungo la storia, estrarre alcuni punti chiave e trattarli nuovamente in classe, orchestrando così nuove discussioni matematiche.

7 Conclusioni

In questo lavoro abbiamo presentato una ricerca che ha portato alla progettazione – e successiva realizzazione e sperimentazione – di un dispositivo metodologico, il DIST-M, *Digital Interactive Storytelling in Matematica.*

Tale dispositivo vuole supportare i docenti fornendo elementi utili per progettare e implementare attività digitali in matematica a partire da un problema aperto; organizzare la partecipazione della classe alle attività; progettare e riflettere sulle sue azioni nello sviluppo dell'attività; integrare le attività nel curriculum per mezzo di una valutazione innovativa che per l'alunno ha caratteristiche di autovalutazione formativa ma anche di riflessione consapevole sulle proprie azioni.

Inoltre, nel corso della ricerca sono state individuate alcune caratteristiche del DIST-M che sembrano promettenti, come una riflessione sulla costruzione dell'identità di un matematico. Infatti, i ruoli, nati inizialmente, soprattutto in ambienti *computer-based*, dalla necessità, di regolare il lavoro di gruppo affinché produca effettivamente l'apprendimento voluto, rappresentano anche funzioni cognitive che entrano in gioco quando un singolo individuo si trova in una situazione di *problem solving*. In ottica vygotskiana, la pratica sociale ne permette l'interiorizzazione, contribuendo, in tal modo, alla costruzione dell'identità dello studente come "buon risolutore" di problemi (Albano et al., 2021).

Un altro elemento di riflessione emerso riguarda quella che possiamo chiamare "realtà aumentata" per il docente e per lo studente. L'architettura prevista a priori ha fasi di lavoro della classe dentro e fuori dalla storia, che possono essere attuate in classe o a casa. Il docente e gli studenti possono riprendere in differita nel tempo e in presenza spunti di discussione, riflessione, e rilancio di domande basandosi sulla possibilità data dalla tecnologia di risalire alle discussioni online (tracciabili attraverso la tecnologia e utilizzabili come "nuove risorse"). L'architettura tecnologica viene quindi a concretizzarsi come "realtà aumentata", sia per il docente sia per lo studente, che risulta importante dal punto di vista epistemologico, didattico e educativo di costruzione dell'identità individuale nelle sue componenti cognitiva, affettiva e sociale. La **Tabella 1** mostra i dati che l'architettura tecnologica permette di memorizzare e di rendere accessibili agli utenti.

Risorsa	Docente	Studente
Chat	Tutte, sia di Attori che di Osservatori	Quelle del proprio gruppo
Logbook	Quelli di tutti gli studenti	Solo il proprio
Narrazione matematica	Quella di tutti i gruppi	Quella del proprio gruppo

Tabella 1. I dati a disposizione.

I dati accessibili possono diventare, dal lato docente, risorsa didattica da utilizzare anche fuori dalla storia e con obiettivi didattici diversi da quelli inizialmente previsti; dal lato studente, elementi di riflessione a più livelli, sia sui contenuti matematici, sia sull'attività matematica, sia sulla propria identità matematica.

In generale, guardando a tutti gli elementi fondanti del DIST-M possiamo individuare alcuni "invarianti" e altre cose che, invece, possono variare. Ad esempio, a seconda del contesto (o del livello scolastico) può scomparire la storia come contesto del problema. A questo proposito, è stata fatta una sperimentazione a livello universitario (Albano et al., 2024). In alternativa, potrebbe restare una storia come contesto del problema ma potrebbero cambiare le fasi del processo matematico legato alla competenza obiettivo. La competenza matematica su cui lavorare è ovviamente qualcosa che può variare e può essere scelta dall'insegnante a seconda degli obiettivi didattici.
Questi elementi aprono una nuova pista di ricerca, su cui stiamo lavorando, volta alla definizione di un meta-modello.
Così come la ricerca è stata condotta attraverso un processo iterativo di più cicli espansivi, come descritto nel lavoro, che, a partire dalla problematizzazione di alcuni aspetti della pratica didattica usuale ha portato a definire orizzonti solo parzialmente immaginati prima, la stessa metodologia ha contribuito alla definizione di un percorso di formazione docenti.[3] Nell'ottica dell'*expansive learning*, il dispositivo metodologico è stato oggetto di riflessione e, a partire dagli invarianti dell'architettura metodologica, i docenti hanno progettato nuovi DIST-M, centrati su diverse competenze matematiche e diversi contenuti, che sono in fase di implementazione in scuole secondarie di primo e di secondo grado[4] (si vedano ad esempio Aceto et al. (2024) e Coen et al. (2024), in questo numero). I nuovi oggetti in costruzione si stanno rivelando delle vere e proprie fucine di scambio culturale tra scuola e università, permettendo il generarsi di domande e nuove problematiche indagabili a più livelli di approfondimento. I docenti lavorano in piccoli gruppi supportati da un ricercatore/tutor, che agisce come facilitatore lasciando spazio all'autonomia dei partecipanti. Le piccole comunità professionali così costituite, attraverso la metodologia indicata dalla spirale espansiva, riescono a immaginare, sviluppare e concretizzare nuovi orizzonti nelle proprie pratiche, espandendosi costantemente in una zona di sviluppo prossimale collettiva. La riflessione collettiva genera la co-progettazione e la realizzazione in classe delle attività e ci sembra determinante per consolidare culturalmente e professionalmente le nuove pratiche.

Ringraziamenti
Ringraziamo gli insegnanti e i ricercatori che hanno partecipato allo sviluppo del progetto PRIN 2015 *Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a social competence-oriented approach:*
Giuseppe Fiorentino, Umberto Dello Iacono, Anna Pierri, Roberto Tortora, Giuseppina Marsico, Monica Mollo, Anna Concas, Rossella Ascione, Gabriella Deiana, Piera Romano.

Bibliografia

Aceto, M., De Santis, M. L., Donatiello, A., Lemmi, G., Manzoni, S., Montervino, C. R., Picariello, L., Scaramuzzino, V., & Vadalà, G. (2024). Due esperienze didattiche di early-algebra con il DIST-M: Dalla costruzione del problema all'implementazione in aula. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *16*, 94–115. http://dx.doi.org/10.33683/ddm.24.16.4

3. Percorsi "Digital Interactive Storytelling in mathematics" #1 e #2, dedicati a docenti della scuola secondaria rispettivamente di primo e di secondo grado, promossi dalla Fondazione "I Lincei per la Scuola" nell'ambito del PNSN https://www.linceiscuola.it/percorsi-digitali/.
4. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

Albano, G., Antonini, S., & Miranda, A. (2024). Digital Experiences of Mathematical Cognitive Functions in Learning the Basic Concepts of General Topology. International *Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s40753-024-00245-3

Albano, G., Coppola, C., & Dello Iacono, U. (2021). What does 'Inside Out' mean in problem solving? *For the Learning of Mathematics*, *41*(2), 32–36. https://www.jstor.org/stable/27091202

Albano, G., Coppola, C., Dello Iacono, U., Fiorentino, G., Pierri, A., & Polo, M. (2020). Technology to enable new paradigms of teaching/learning in mathematics: The digital interactive storytelling case. *Journal of e-learning and Knowledge Society*, *16*(1), 65–71. https://doi.org/10.20368/1971-8829/1135201

Albano, G., & Dello Iacono, U. (2019). A scaffolding toolkit to foster argumentation and proofs in mathematics: Some case studies. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *16*, 4. https://doi.org/10.1186/s41239-019-0134-5

Arzarello, F., & Soldano, C. (2016). Da Peirce a Hintikka (senza dimenticare Dewey): La logica dell'indagine in classe. In F. Morselli, G. Rosolini & C. Toffalori (Eds.), *Educare alla razionalità. Tra Logica e Didattica della Matematica. Atti del Convegno di Sestri Levante. In ricordo di Paolo Gentilini* (pp. 9–53). Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.

Bakhtin, M. M. (1982). *The dialogic imagination: Four essays*. University of Texas Press.

Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1–2), 11–41. https://doi.org/10.1007/BF00143925

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Centro documentazione educativa.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (pp. 746–783). Lawrence Erlbaum.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof, July/August 1999.*

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141–178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2

Coen, A., Cravotta, A., Romano, P., & Tarallo, C. (2024). Progettare e sperimentare a scuola attraverso il DIST-M: Opportunità didattiche e riflessioni. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *16*, 147–163. http://dx.doi.org/10.33683/ddm.24.16.6

Cole, M. (1996). *Cultural Psychology. A Once and Future Discipline*. Harvard University Press.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology* (pp. 15–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-77750-9_2

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction. Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet studies in mathematics education, volume 2*. National Council of Teachers of Mathematics.

Dillenbourg, P. (2013). Design for classroom orchestration. *Computers & Education*, *69*, 485–492. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.04.013

Drijvers, P., Doorman, D., Boon, P., & Van Gisbergen, S. (2009). Instrumental orchestration: Theory and practice. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. 1349–1358). Institut national de recherche pédagogique.

Engeström, Y. (1999). Expansive visibilization of work: An activity-theoretical perspective. *Computer Supported Cooperative Work*, *8*, 63–93. https://doi.org/10.1023/A:1008648532192

Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational research review*, *5*(1), 1–24. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.12.002

Kaptelinin, V., & Nardi, B. A. (2006). *Acting with technology: Activity theory and interaction design*. MIT press.

Kollar, I., & Fischer, F. (2013). Orchestration is nothing without conducting – But arranging ties the two together! A response to Dillenbourg (2011). *Computers & Education*, *69*, 507–509. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.04.008

Leont'ev, A. N. (1932). Studies on the Cultural Development of the Child. *Journal of Generic Psychology*, *40*, 52–83. https://doi.org/10.1080/08856559.1932.10534207

Ligorio, M. B., & Cacciamani, S. (2013). *Psicologia dell'educazione*. Carocci Editore.

Lolli, G. (2018). *Matematica come narrazione*. Il Mulino.

Lurja, A. R. (1928). The Problem of the Cultural Behavior of the Child. *Journal of Genetic Psychology*, *35*, 493–506. https://doi.org/10.1080/08856559.1928.10532168

Magenes, A., & Maracci, A. (2015). Le competenze nella soluzione di problemi di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *38 A-B*(5), 637–656.

Mellone, M., & Tortora, R. (2015). Ambiguity as a cognitive and didactic resource. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 1434–1439). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali.* https://www.istruzione.it/alternanza/allegati/NORMATIVA%20ASL/INDICAZIONI%20NAZIONALI%20PER%20I%20LICEI.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Linee guida per il passaggio al nuovo orientamento. Istituti professionali.* https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida/_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Linee guida per il passaggio al nuovo orientamento. Istituti tecnici.* https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione.* https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Morselli, D. (2019). L'attualità degli studi di matrice vygotskijana e il loro contributo alla ricerca educativa. *Formazione & Insegnamento. Rivista internazionale di Scienze dell'educazione e della formazione*, *17*(1), 39–58. https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.2662120

Needleman, M. (2007). Web 2.0/Lib 2.0—What is it? (If it's anything at all). *Serials Review*, *33*(3), 202–203. https://doi.org/10.1016/j.serrev.2007.05.001

Niss, M. A. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 215–220). National Council on Education and the Disciplines.

Organization for Economic, Cooperation and Development. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy.* PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-en

Pesci, A. (2004). Insegnare e apprendere cooperando: Esperienze e prospettive. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *27 A-B*(6), 637–670.

Pesci, A. (2009). Cooperative learning and peer tutoring to promote students' Mathematics education. In L. Paditz & A. Rogerson (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference "Models in Developing Mathematics Education". The Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 486–490). Dresden University of Applied Sciences.

Sannino, A. (2011). Activity theory as an activist and interventionist theory. *Theory & Psychology*, *21*(5), 571–597. https://doi.org/10.1177/0959354311417485

Sannino, A., & Engeström, Y. (2018). Cultural-historical activity theory: founding insights and new challenges. *Cultural-Historical Psychology*, *14*(3), 43–56. https://doi.org/10.17759/chp.2018140304

Schank, R., & Abelson, R. (1977). *Scripts, plans, goals and understandings: An Inquiry Into Human Knowledge Structures.* Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1998). On two metaphors of learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27*(2), 4–13. https://www.jstor.org/stable/1176193

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281–307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Vygotsky, L. S. (1929). The Problem of the Cultural Development of the Child. *Journal of Genetic Psychology*, *36*, 415–434. https://doi.org/10.1080/08856559.1929.10532201

Weinberger, A., Kollar, I., Dimitriadis, Y., Mäkitalo-Siegl, K., & Fischer, F. (2009). Computer-supported collaboration scripts: Perspectives from educational psychology and computer science. In N. Balacheff, S. Ludvigsen, T. de Jong, A. Lazonder & S. Barness (Eds.), *Technology-enhanced learning* (pp. 155–173). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9827-7_10

Weinberger, A., & Papadopoulos, P. M. (2016). Orchestration of Social Modes in e-Learning. *Proceedings of the 10th International Conference on e-Learning* (pp. 219–222). International Association for Development of the Information Society.

Wertsch, J. V. (1981). Trends in Soviet cognitive psychology. *Storia e critica della psicologia*, *2*(2), 219–295.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I–II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35 A*(2 e 5), 107–126 e 437–468.

Zucchermaglio, C. (1996). *Vygotskij in azienda.* Carocci Editore.

Matematica e letteratura

Mathematics and literature

Gabriele Lolli
già Scuola Normale di Pisa – Italia

✉ gabrielelolli42@gmail.com

Sunto / Consapevoli dei drammatici compiti che attendono le nuove generazioni, è necessario che, se si vuole conservare una cultura che permetta di essere partecipi e non sudditi, l'insegnamento della matematica sia proposto a un livello superiore. Il principio che deve guidare i docenti deve essere quello di una continua disposizione creativa appoggiandosi agli esempi storici, ma anche, per fortuna, alla stessa attenzione mostrata da intellettuali umanisti. Abbiamo un esempio convincente che non solo la matematica è narrazione, ma la narrazione deve seguire i percorsi aperti dalla matematica.

Parole chiave: nuove generazioni; obiettivi educativi; matematica creativa; narrazione.

Abstract / Aware of the tragic tasks faced by the new generations, in order to make them grow up as actively participants, teachers must provide high education standards including the resources of a creative view of mathematics. The guiding principle for teachers must be a continuous creative disposition, relying on historical examples, but also, fortunately, on the same attention shown by humanist intellectuals. We give an example of a humanistic intellectual teaching us that mathematics is storytelling as well as storytelling can be inspired by mathematics.

Keywords: new generations; education standards; creative mathematics; storytelling.

1 Il futuro

I nostri nipoti saranno cittadini del mondo, e dovranno affrontare problemi come il riscaldamento globale, la crescita demografica, lo smaltimento dei rifiuti, la plastica, la modifica degli ecosistemi, la contaminazione delle specie con le pandemie associate, le guerre locali continue con nuove armi (finché saranno locali).

Difficilmente in questo panorama resteranno paesi democraticamente governati; le popolazioni saranno accontentate dal nuovo oppio dei popoli digitale; una minoranza solo di persone sarà fortunata, e coloro che saranno privilegiati potranno dare un contributo come cittadini solo se saranno dotati di una preparazione adeguata, vale a dire con una mentalità e una conoscenza scientifica superiore capace di affrontare problemi ora apparentemente insolubili, e con una cultura umanistica sensibile al disinteresse altruistico, alla generosità.

Un intellettuale italiano nel 1967 diceva:

> «L'ampiezza d'informazione di cui ha potuto godere chi ha fatto i suoi studi negli ultimi quindici anni è enormemente più ricca di quanto poteva esserlo la nostra nell'Italia prebellica, bellica e postbellica; ora il punto di partenza non è più nell'allaccio a una tradizione ma nei problemi aperti; il quadro di riferimento non è più la compatibilità con un sistema collaudato ma lo stato della questione su scala mondiale».[1]

Lo stesso intellettuale, vedremo, nel dare un elenco di nuovi indirizzi citava ripetutamente matematica e modelli matematici, pur non essendo questo il suo campo. Anche noi, in ritardo, vogliamo che non solo nel bagaglio culturale delle nuove generazioni ci sia la matematica, ma sia centrale nell'insegnamento pubblico.

Nella ricerca matematica moderna prevalgono argomenti che neanche s'immaginerebbero studiando gli *Éléments* di Bourbaki. Per curiosità, si vedano gli argomenti matematici che sono intervenuti negli episodi della serie televisiva *Numb3rs* (Devlin & Lorden, 2007): profilazione criminale geografica, statistica, inferenza bayesiana, affidabilità dei testimoni, *data mining*, esame del DNA, ritocco e ricostruzione di immagini, reti neurali, analisi del rischio (il dilemma del prigioniero), svariati algoritmi (potatura di alberi, *squish-squash* per scoprire segnali deboli in ambiente rumoroso), reti *small world*, analisi di Fourier, ondine, moto browniano, equazioni di Fokker-Planck per il moto caotico di un corpo soggetto a certe forze, teoria della percolazione, modello predatore-preda, matematica del flusso fluido, e altri ancora.

Come possano fare i responsabili dell'insegnamento per trasmettere almeno il desiderio di conoscerla non è facile dirlo; bisognerebbe prendere in considerazione la concorrenza di altre forme di diversa informazione e acculturazione e lo spazio che resta al rapporto in presenza con i discenti; ma una condizione imprescindibile è che essi stessi siano innanzi tutto convinti della necessità che nella formazione sia presente la matematica, e ne sappiano la ragione. La promessa utilità nel lavoro, la capacità di ragionare non sono più argomenti che accendano l'entusiasmo.

L'intellettuale continuava:

> «La letteratura non è la scuola [come era ed è concepita ora]; la letteratura deve presupporre un pubblico più colto, *più colto di quanto non sia lo scrittore*, che questo pubblico esista o no non importa. […] La letteratura non può che giocare al rialzo, puntare sul rincaro, rilanciare la posta, seguire la logica della situazione, che necessariamente si aggrava».[2]

1. L'autore e l'opera verranno svelati in seguito.
2. L'autore e l'opera verranno svelati in seguito.

Sostituiamo "matematica" a "letteratura". La matematica è indispensabile non tanto perché è richiesta per la maggior parte delle tecnologie già disponibili e di quelle future, peraltro patrimonio occulto d'incontrollabili società private, quanto perché nella sua essenza essa è alle radici ed esprime la nostra attuale condizione esistenziale. Questa potrebbe essere descritta dalla seguente dichiarazione:

> «Appartengo a quella parte dell'umanità […] che passa gran parte delle sue ore di veglia in un mondo speciale, un mondo fatto di righe orizzontali dove le parole si susseguono una per volta, dove ogni frase e ogni capoverso occupano il loro posto stabile in un mondo che può essere molto ricco, magari anche più ricco di quello non scritto, ma che comunque richiede un aggiustamento speciale per situarsi al suo interno. Quando mi stacco dal manoscritto per ritrovare [il mondo fatto di tre dimensioni] questo equivale per me ogni volta a ripetere il trauma della nascita».[3]

Parla un programmatore? Un *computer nerd* (o *geek* o *freak* che sia) che non si stacca dalla tastiera? O un matematico che ha imparato a usare i *proof assistant* per comporre le sue chilometriche dimostrazioni?
No, è il nostro intellettuale, uno scrittore quasi contemporaneo, Italo Calvino[4] (1923-1985), il quale confessa di non riuscire a prevedere nulla, sui rapporti tra le generazioni, tra i sessi, che tipo di pace o di guerra ci sarà, quali macchinari si useranno, «il futuro del mare, dei fiumi, degli animali, delle piante». Questa ignoranza è condivisa «con coloro che, al contrario, pretendono di sapere: economisti, sociologi, politici»; qualche sollievo gli dà «il pensiero che la letteratura ha sempre capito qualcosa di più delle altre discipline […] che gli antichi vedevano nelle lettere una scuola di saggezza» (Calvino, 1995b, p. 1867).
Calvino constata che «Le principali correnti filosofiche del momento dicono [la prima che] il mondo non esiste; esiste solo il linguaggio. La seconda dice: il linguaggio comune non ha senso; il mondo è ineffabile». Ma testardamente e giustamente s'impegna a tenerle insieme: «Le storie che possiamo raccontare sono contrassegnate da una parte dal senso dell'ignoto e dall'altra da un bisogno di costruzione, di linee tracciate con esattezza, d'armonia e geometria» (Calvino, 1995b, p. 1867).
La prima corrente ha le sorgenti principali nella Parigi del dopoguerra, la seconda risale all'inizio del secolo a Vienna (futurismo e formalismo? Calvino non si esprime). In realtà le due filosofie di cui parla Calvino sono la versione letteraria di tendenze che hanno iniziato a prendere forma sempre più decisamente prima nella matematica, e poi nel pensiero in generale, a partire da metà Ottocento. Nonostante la sua posizione di Cenerentola della cultura, la matematica e la sua immagine in genere corrispondono più che non si creda allo spirito di un'epoca come viene espresso dagli interpreti più ascoltati, che purtroppo non sono i matematici.
La matematica contemporanea matura nell'intreccio di due movimenti che nella loro opposizione e apparente divergenza si sostengono l'uno con l'altro. Una volta si sarebbe parlato di dialettica. Le due tendenze sono da una parte la meccanizzazione del pensiero e dall'altra l'astrazione, una sfrenata fantasia che costruisce strutture con insiemi infiniti di insiemi di insiemi… di niente, come le immagini che il vento scolpisce nel vapore nel cielo.
Le due tendenze sono ora fuse, una non può reggersi senza l'altra; gli apparati simbolici ispirano la visione di universi quando si scrivono le loro stringhe di simboli, mentre la conoscenza delle proprietà degli insiemi si traduce nelle formule scritte, e per questo si può dire intrasoggettiva, nel senso di Cantor.

3. L'autore e l'opera verranno svelati in seguito.
4. L'autore delle tre precedenti citazioni è Calvino: la prima e la seconda sono tratte da Calvino (1995a), *Per chi si scrive*, del 1967, rispettivamente da p. 201 e da p. 202; la terza da Calvino (1995b), *Mondo scritto e mondo non scritto*, del 1983, da p. 1865 e da p. 1070. Per i riferimenti alle opere di Calvino usiamo l'edizione completa dei Meridiani Mondadori e l'anno indica la stampa del volume. Quindici anni prima del 1967 significa 1950, il dopoguerra.

Georg Cantor (1845-1918), l'iniziatore della teoria degli insiemi, nel 1883 dichiarava:

> «In ragione di questa straordinaria posizione che distingue la matematica da tutte le altre scienze, e che fornisce una spiegazione per il modo relativamente leggero e privo di vincoli di svilupparla, essa merita in modo speciale il nome di *matematica libera*, una descrizione che, se ne avessi il potere, io preferirei a quella ora usuale di "matematica pura"».[5]
>
> (Cantor, 1883, p. 182, traduzione dell'autore)

La "posizione straordinaria" consiste nel fatto che secondo Cantor la matematica è una *conoscenza intrasoggettiva*, o conoscenza di una realtà intrasoggettiva o immanente [*intrasubjektive oder immanente Realität*] a differenza di quella *transsoggetiva* o transiente [*transsubiektive oder transiente*]; la prima è composta di idee che prendono un posto coerente attraverso definizioni nel nostro pensiero, la seconda è rappresentazione di cose che occorrono effettivamente nella realtà corporea e spirituale. Gli aggettivi usati da Cantor sono un tentativo di fornire una spiegazione della posizione particolare della matematica con un'incursione nella gnoseologia, nascondendo dietro parole difficili il fantasma di qualche fondata teoria della conoscenza. In termini più semplici, e senza scomodare i grandi filosofi, il senso dell'appellativo "libera" sembra essere che basta che i matematici si capiscano e siano d'accordo *intra* loro su quello che studiano, senza bisogno di fare appello al mondo reale per confermare la plausibilità di quello che dicono – una dichiarazione molto coraggiosa e dirompente, che tuttavia al tempo di Cantor sintetizzava una serie di tendenze che percorrevano l'Ottocento.
Così la matematica aveva vinto in anticipo la sfida che Calvino poneva allo scrittore: «La vera sfida per uno scrittore è parlare dell'intricato groviglio della nostra situazione usando un linguaggio che sembri tanto trasparente da creare un senso d'allucinazione, come è riuscito a fare Kafka» (Calvino, 1995b, p. 1872).
La parola "allucinazione" non è intesa in senso clinico; si usa per indicare un'immaginazione concepita come realtà, il senso di avere una percezione senza la presenza di un oggetto, di vedere l'ignoto; la sua radice è "luce".
Certo non bisogna dimenticare che esiste anche una matematica senza dimostrazioni; essa è fatta di manipolazioni, esplorazioni, riconoscimento di forme e relazioni, scoperte di costruzioni geometriche e di regolarità numeriche (anche nelle quattro operazioni) che ne rivelano inaspettate meraviglie e intrichi nascosti. In particolare è di questo genere spesso la prima esperienza con la matematica, concreta, fatta con le mani; ma la sua attrattiva può mantenersi oltre l'iniziazione infantile, plasmare un atteggiamento e talvolta determinare anche una particolare professionalità.
Da quali fonti – si chiedeva David Hilbert (1862-1943) nella presentazione dei problemi per il millennio al congresso di Parigi del 1900 – la matematica trae i suoi problemi? I primi e i più antichi «traggono origine dall'esperienza e sono stati suscitati dal mondo dei fenomeni esterni». Anche le regole del calcolo con i numeri interi sono state scoperte in questo modo, «e anche oggi il bambino impara l'uso di queste leggi con il metodo empirico». La stessa fisicità entra in gioco per i primi problemi di geometria, come la duplicazione del cubo, e quelli sulle equazioni algebriche o la teoria delle curve.

> «Con lo sviluppo di una disciplina matematica, però, lo spirito umano, incoraggiato dalla riuscita delle soluzioni, diviene consapevole della propria autonomia; esso trae da se stesso, e spesso senza riconoscibili stimoli esterni, nuovi e fecondi problemi, eseguendo soltanto nel modo più felice combinazioni logiche, generalizzazioni e particolarizzazioni, separazioni e unioni dei concetti, ed emerge [lo spirito umano] in primo piano come il vero e proprio soggetto interrogante. Sono sorti in questo modo il problema dei numeri primi e altri problemi aritmetici».
>
> (Hilbert, 1901/1978, p. 148)

5. Siamo noi ad assumere tale dichiarazione come un manifesto, Cantor chiedeva solo di essere lasciato lavorare e voleva prevenire le critiche mosse alle sue ricerche. Cercava sostegno in Platone e Spinoza perché convinto del valore anche filosofico di quelle. Usava la sua più approfondita conoscenza del continuo anche per considerazioni metafisiche.

Ma gli argomenti di Hilbert hanno un peso solo se l'esperienza della prima introduzione alla matematica non ha bloccato irrimediabilmente l'interesse dei discenti; allo sviluppo della disciplina occorre dedicare altrettanta attenzione quanta è richiesta nella fase sperimentale. Quando viene il momento che «lo spirito [divenga] consapevole della propria autonomia», chissà quanti sono gli insegnanti che possono accogliere gli studenti in classe dicendo loro con entusiasmo che li aspetta un'avventura, che il motivo per cui è previsto che debbano studiare matematica è la sua bellezza.

L'idea qui applicata di rivolgersi a Italo Calvino per ricavare per analogia informazioni o illuminazioni su quello che può succedere nello studiare matematica, e combattere la disposizione diffusa a ritenerla difficile, a considerarsi "non tagliato per", e altri luoghi comuni, è suggerita dal fatto che in letteratura s'inventa e si crea, è richiesta la manifestazione di capacità creative. D'altra parte anche la matematica è soprattutto creazione, non lettura, non apprendimento mnemonico – o non mnemonico –, ma sempre un'aggiunta ed estensione di quanto già concepito. Bisogna impostare lo studio della matematica come un esercizio di creazione. Calvino tuttavia non è semplicemente un intellettuale con una cultura che include la scienza, come altri se ne trovano anche in Italia e fuori.[6] Vedremo nei par. 4 e 6 che Calvino ha concepito, per i suoi nuovi racconti, una motivazione indipendente che ricalca quasi alla lettera l'impostazione della matematica che Nicolas Bourbaki ha reso imprescindibile.

Il contenuto dell'esposizione che segue non è tutto originale, ma vuole raccogliere precedenti interventi parziali, sia dell'autore sia di altri matematici, affinché il pensiero di Calvino sulla matematica sia espresso e commentato in modo completo e sistematico, a vantaggio della consultazione.[7] Perciò l'autore è grato ai responsabili della rivista per avere permesso ampie citazioni che raccontano anche le origini dei momenti di creatività.

2 L'intellettuale impegnato

L'interesse documentato di Calvino per la matematica in generale, con un'apertura precoce ai calcolatori e una filosofia impostata su una visione discreta e combinatoria della realtà, caratterizza la seconda fase della sua carriera.

Calvino stesso ha riassunto le tappe principali del suo percorso, peraltro facilmente riconoscibili dalla relativa produzione artistica, a partire da una prima fase che comprende i racconti partigiani, la trilogia dei racconti fantastici, racconti politici come *La speculazione edilizia* e *La nuvola di smog*, guidata dall'«ambizione giovanile […] del progetto di costruzione d'una nuova letteratura che a sua volta servisse alla costruzione di una nuova società» (Calvino, 1995a, p. 7).[8]

La conferenza *Il midollo del leone* (1955) rappresenta un po' la sintesi di tutto il primo periodo, «in quanto voleva definire una linea letteraria e, come si diceva allora, "morale-civile" nell'ambito della problematica culturale della sinistra post-resistenziale» (Calvino, 1995a, p. 402).[9] Ancora nei primi scritti degli Anni Cinquanta Calvino cerca «d'investirsi d'una personale caratterizzazione nel ruolo che allora teneva la ribalta: "l'intellettuale impegnato" […]» (Calvino, 1995a, p. 8).

Poi «l'immedesimazione in questa parte viene meno a poco a poco col dissolversi della pretesa d'interpretare e guidare un processo storico» (Calvino, 1995a, p. 8). Negli anni Sessanta Calvino incomincia a vedere «il mondo umano come qualcosa in cui ciò che conta si sviluppa attraverso processi

6. Per esempio l'iniziativa di Leonardo Sinisgalli (1908-1981) con la rivista Civiltà delle macchine, o Hans Magnus Enzensberger (1929-2022) in Germania.
7. In particolare rielaboriamo le osservazioni raccolte in Lolli (2011, 2021, 2023a, 2023b), e per l'argomento della teoria della complessità riassumiamo Bischi (2023).
8. Dalla premessa a *Una pietra sopra*, del 1980 (Calvino, 1995a, pp. 5–405).
9. Dall'appendice a *Una pietra sopra*, del 1980 (Calvino, 1995a, pp. 5–405).

millenari oppure consiste in avvenimenti minutissimi e quasi microscopici [...] prende via via più rilievo [...] il senso del complicato e del molteplice e del relativo e dello sfaccettato che determina una perplessità sistematica» (Calvino, 1995a, p. 401).[10]
Un'influenza importante è stata quella di Giorgio de Santillana (1902-1974), conosciuto a New York durante un soggiorno nel 1959-1960 finanziato da una borsa di studio della Ford Foundation. Calvino è colpito soprattutto dall'osservazione su «quale intensità di attenzione e di memoria ci volle per fermare in mente nella loro posizione i cinque lampeggiamenti in otto anni del pianeta [stella di Venere] che appare per poi perdersi subito nella luce del mattino», da parte degli "antichi" del V millennio a.C. prima della scrittura cominciata verso il 4000 a.C. (Calvino, 1995b, p. 2085).[11]

3 La traversata degli anni Sessanta

In particolare a partire da *Il mare dell'oggettività*, che è del 1959, «si sente che siamo entrati in un'altra epoca» (Calvino, 1995a, p. 21),[12] non per le sue vicende personali riguardanti i rapporti con il Partito Comunista Italiano, ma perché «il paesaggio culturale che mi circonda si è trasformato ed esige altre sistemazioni. Comincia la traversata degli anni Sessanta [...]» (Calvino, 1995a, p. 402). Questi anni «sono un'epoca di rinnovamento dell'orizzonte culturale, vista l'inadeguatezza del modo di conoscenza umanistico a comprendere il mondo» (Calvino, 1995a, p. 403).
Le «altre sistemazioni» si esprimono in un fascio di scienze, antiche o nuove: «[l]inguistica, antropologia culturale, semiologia [...] le scienze della natura oltre alle "scienze umane", l'astronomia e la cosmologia, il deduttivismo e la teoria dell'informazione», che Calvino amerà disporre intorno a sé per «l'esplorazione delle possibilità espressive dei linguaggi scientifici» (Calvino, 1995a, pp. 403–404), o come dirà proprio alla fine del suo percorso «ficc[ando] il naso» nei libri scientifici «alla ricerca di stimoli per l'immaginazione» (Calvino, 1995a, p. 688).[13]
Entrato nei suoi quaranta, appare chiaro come Calvino si costruisca una visione più ricca e complessa rispetto a quella condizionata dagli obiettivi della sua iniziale partecipazione alla politica in una congiuntura culturalmente bloccata.
Un'elencazione dettagliata delle nuove discipline che sembrano inglobare tutto lo scibile si trova in una conferenza del periodo in esame, *Cibernetica e fantasmi (Appunti sulla narrativa come processo combinatorio)* del 1967 (Calvino, 1995a, pp. 205–225).[14] In essa Calvino offre le linee di una caratterizzazione unitaria del nuovo orizzonte: elenca i campi dove si ha «una rivincita della discontinuità, divisibilità, combinatorietà, su tutto ciò che è corso continuo, gamma di sfumature che stingono l'una sull'altra. Il secolo decimonono, da Hegel a Darwin, aveva visto il trionfo della continuità storica e della continuità biologica che superava tutte le rotture delle antitesi dialettiche e delle mutazioni genetiche. Oggi questa prospettiva è radicalmente cambiata: nella storia non seguiamo più il corso di uno spirito immanente [...] ma le curve dei diagrammi statistici, la ricerca storica si va sempre più matematizzando»; nella biologia, con Watson e Crick «è la teoria dell'informazione che impone i suoi modelli»; la

10. Citazioni rispettivamente dalla premessa e dall'appendice a *Una pietra sopra*.
11. Dalla recensione di *Fato antico e fato moderno* di Giorgio de Santillana, in Calvino (1995b, pp. 2085–2091).
12. Tuttavia «noi siamo [sempre] tra quelli che credono in una letteratura che sia presenza attiva nella storia, in una letteratura come educazione», da *Il midollo del leone* del 1955 (Calvino, 1995a, p. 21).
13. Da *Lezioni americane* (Calvino, 1985/1988), in *Esattezza*.
14. "Cibernetica" era il termine coniato da Norbert Wiener (1894-1964) per indicare lo studio del controllo e della comunicazione, con speciale interesse per il computer; il termine fu presto surclassato da quello di Intelligenza Artificiale, salvo che in URSS, e in Italia, dove la ricerca si svolgeva quasi solo presso il Laboratorio di Cibernetica del CNR ad Arco Felice (Napoli) diretto da Eduardo Caianiello (1921-1993). L'unico divulgatore in Italia, oltre che sperimentatore nella traduzione automatica, che poteva essere noto a Calvino, era Silvio Ceccato (1914-1997) con articoli giornalistici e libri per cui rinviamo alla bibliografia (Ceccato, 1968, 1972). La letteratura mostrava attenzione alla cibernetica solo in un'opera di Dino Buzzati, si veda la nota 30.

linguistica strutturale, nata su un altro terreno, ha «preso a ragionare in termini di codici e messaggi, a cercare di stabilire l'entropia del linguaggio a tutti i livelli […]. I processi che parevano più refrattari a una formulazione numerica, a una descrizione quantitativa, vengono tradotti in modelli matematici» (Calvino, 1995a, pp. 210–211). La scuola «neo-formalista» in Unione Sovietica, capeggiata dal matematico Kolmogorov, «impiega per l'analisi letteraria le ricerche cibernetiche e la semiologia strutturale» basate sul calcolo delle probabilità. «Un altro incontro tra matematica e letteratura […] è l'Ouvroir de Littérature Potentielle fondato da Raymond Queneau e da alcuni matematici suoi amici» (Calvino, 1995a, p. 212). Si noterà il richiamo ripetuto alla matematica e ai modelli matematici, in particolare al discreto e alla combinatoria.
L'influenza di Raymond Queneau (1903-1976), matematico, oltre che scrittore e filosofo, è nota, ma si esprime su un terreno già vangato con originalità da Calvino: ne *Il midollo del leone* aveva confessato che

> «ciò che ci interessa sopra ogni altra cosa sono le prove che l'uomo attraversa e il modo in cui egli le supera. Lo stampo delle favole più remote, il bambino abbandonato nel bosco o il cavaliere che deve superare incontri con belve e incantesimi, resta lo schema insostituibile di tutte le storie umane, resta il disegno dei grandi romanzi esemplari in cui una personalità morale si realizza muovendosi in una natura o in una società spietate».
>
> (Calvino, 1995a, p. 23)

L'incontro con le fiabe era stato favorito anche dai suoi impegni editoriali.[15]

4 Racconti deduttivi

«Le Fiabe italiane aprono il mio periodo "scientifico",[16] (Calvino, 2000, p. 1182) dichiarazione ripetuta nella *Lezione* "Rapidità": «Se in un'epoca della mia attività letteraria sono stato attratto dai *folktales*, dai *fairytales*, non è stato per fedeltà a una tradizione etnica […] né per nostalgia delle letture infantili […] ma per interesse stilistico e strutturale, per l'economia, il ritmo, la logica essenziale con cui sono raccontate» (Calvino, 1995a, p. 660).
E proprio alla fine del suo percorso Calvino riconoscerà che «[l]'essermi occupato di fiabe popolari in epoca in cui nessuno si curava dei loro misteriosi meccanismi, mi ha reso recettivo alle problematiche strutturaliste, appena esse s'imposero all'attenzione generale una decina d'anni dopo» (Calvino, 1995b, p. 2928).[17] Con «una decina d'anni dopo» ci spostiamo dal periodo delle fiabe al 1965 e al 1967, anni di pubblicazione delle *Cosmicomiche* e di *Ti con zero* ed entriamo nel merito di questo intervento.
Un matematico che legga Calvino non può che restare sorpreso e catturato, quasi folgorato, incontrando la sua dichiarazione «negli ultimi racconti che chiudono il volume "Ti con zero" ho cercato di *far diventare racconto un mero ragionamento deduttivo*» (Calvino, 1995a, p. 234, corsivo dell'autore).[18]
Calvino ha iniziato a chiarire a se stesso la propria «metodologia della narrazione» fin dal 1960, o meglio ha iniziato a chiarirla con l'aiuto di François Wahl, editore delle edizioni du Seuil, al quale il 1° dicembre scrive: «Lei ha organizzato e sviluppato spunti di una mia metodologia della narrazione […]: che il mio punto di partenza sia l'*immagine* e che la narrazione sviluppi una *logica* interna dell'im-

15. Calvino aveva lavorato sull'edizione delle fiabe italiane dall'inizio del 1954, come risulta da una lettera a Giuseppe Cocchiara, fino alla fine del 1956, all'uscita delle *Fiabe italiane* per Einaudi.
16. Tratto dalla lettera a Giovanni Falaschi del 4.11.1972.
17. Dall'intervista di Maria Corti del 1985.
18. Dalla risposta a una intervista di *L'Approdo letterario*, n. 41, 1968.

magine stessa». Calvino è piacevolmente sorpreso dal fatto che «è la prima volta che si analizza il mio modo di immaginare e costruire una storia. Cioè Lei dice delle cose che io non so, ma in cui mi riconosco, spiega un meccanismo di cui io non sono perfettamente cosciente, ma che riconosco come vero» (Calvino, 2000, p. 669).
In una lettera successiva, del 5.6.1967, scrive felice a Wahl: «J'ai écrit le plus beau récit de ma vie» (Calvino, 2000, p. 956), che non richiede commenti, alludendo a *L'inseguimento*, *La memoria del mondo* e *Il guidatore notturno*, scritti tra aprile e giugno 1967.
L'anno successivo si esprime di nuovo su questi racconti in una lettera ad Angelo Guglielmi del 1° marzo 1968 dove afferma:

> «[…] questo tipo di racconto logico-deduttivo, che tu del resto descrivi molto bene, è per me – almeno per ora, finché eventuali sviluppi del mio lavoro non mi faranno cambiare idea come spesso mi succede – il risultato cui tengo di più. Certo c'è meno "slancio e furore" ma appunto questa freddezza da degré zéro è un valore (non nuovo, siamo d'accordo) che ho cercato di proposito, soprattutto nell'*Inseguimento* (su cui basi tutto il tuo giudizio) e nel *Guidatore notturno*, mentre il racconto *Ti con zero* mi è venuto, con altrettanto rigore, con una tensione linguistica certo maggiore. E poi mi dispiace che salti *Il conte di Montecristo* che è una cosa già diversa dai precedenti […]».
> (Calvino, 2000, pp. 992–993)

Dopo altre analoghe informazioni e precisazioni sui racconti inclusi nelle *Cosmicomiche* e *Ti con zero Calvino* chiama quest'ultimo «una "mostra personale" in cui ho attaccato alle pareti le tele che considero più indicative per documentare il mio lavoro degli ultimi due anni, con le varie direzioni che mi si aprivano» (Calvino, 2000, pp. 992–993).[19]
Il proposito di una letteratura fantastica come concatenazioni di operazioni logiche è realizzato nella terza parte di *Ti con zero*, in modo particolarmente evidente nei racconti *Il guidatore notturno* e *Il conte di Montecristo*; nel secondo si spiega la necessità di costruire una mappa della prigione perfetta, un modello, per trovare eventualmente una differenza che permetta di sfuggire da essa:

> «è giusto principio di metodo negare che ciò che si combatte possa essere sistema, per distinguerne le componenti, le contraddizioni, le brecce, e batterlo pezzo a pezzo. [sembrerebbe il contrario di Montecristo] E invece no: il *Montecristo* nasce in questo contesto, vuole indicare il modo giusto in cui il sistema assoluto, la prigione perfetta va ipotizzata proprio per dimostrare che la prigione reale non è perfetta: cioè il modello di sistema totalitario, astratto e l'empiria delle verifiche dell'Abate Faria devono operare contemporaneamente, il sistema deduttivo ha continuamente bisogno dell'esperimento induttivo che lo confermi o lo smentisca».[20]
> (Calvino, 2000, p. 1181)

Nel primo racconto, chi narra la propria avventura afferma:

> «Ciò che conta è *comunicare l'indispensabile* lasciando perdere tutto il superfluo, ridurre noi stessi a *comunicazione essenziale*, a segnale luminoso che si muove in una data direzione, abolendo la complessità delle nostre persone e situazioni ed espressioni facciali, lasciandole nella scatola d'ombra che i fasci [delle automobili che sfrecciano sull'autostrada] si portano dietro e nascondono».[21]
> (Calvino, 1992, p. 340, corsivo dell'autore)

19. Calvino in queste righe usa il corsivo per *Ti con zero* sia come titolo del libro sia dell'articolo, e anche il corsivo per i titoli dei racconti.
20. Lettera a Giovanni Falaschi del 4.11.1972.
21. Chi parla è il protagonista di *Il guidatore notturno* che corre sull'autostrada per andare dalla sua donna.

L'intenzione di inserire nei racconti l'"indispensabile", di "lasciar perdere tutto il superfluo", la restrizione di limitarsi a una "comunicazione essenziale", quali caratteristiche di un racconto deduttivo, oltre all'esonerare dalla descrizione fisica dei protagonisti indica la volontà dell'autore di trasformare in una cosciente analogia strutturale la forma dei racconti e quella delle deduzioni formali.
In una intervista a *L'Approdo letterario* del 1968 spiegava infatti che con l'esperimento di

> «far diventare racconto un mero ragionamento deduttivo [...] mi sono allontanato dall'antropomorfismo: o meglio da un certo antropomorfismo perché queste *presenze umane definite solo da un sistema di relazioni*, da una funzione, sono proprio quelle che popolano il mondo intorno a noi, nella nostra vita di ogni giorno, buona o cattiva che possa apparirci questa situazione».[22]
> (Calvino, 1995a, pp. 233–234, corsivo dell'autore)

In questa ammissione sono presenti, nei nostri corsivi, due richiami, uno con le «presenze definite solo da un sistema di relazioni» al metodo assiomatico, e il secondo con i «racconti che sono meri ragionamenti deduttivi» alle deduzioni formali. Calvino associa i due concetti esattamente come faceva Nicolas Bourbaki, che legava tra loro metodo assiomatico e dimostrazioni formali.

5 Bourbaki

Nicolas Bourbaki è il nome fittizio di un gruppo di giovani matematici (inizialmente) francesi che negli anni Trenta del Novecento si proposero di rinnovare la matematica del loro paese, ed ebbero un'influenza epocale con la loro opera *Éléments de mathématique*, che è stata letta, studiata e accolta dai matematici della nuova generazione e ha cambiato il modo di concepire la matematica, sollevando anche critiche e proteste tra i tradizionalisti, gli utenti e il mondo della scuola.
Il primo libro del trattato, intitolato *Théorie des ensembles*,[23] inizia con un capitolo dedicato alla *Description de la mathématique formelle*. Bourbaki cerca di conciliare la pratica quotidiana con un modello ideale, e nello stesso tempo di giustificare la trattazione formale della matematica come indistinguibile dal metodo assiomatico.
Il metodo assiomatico è la presentazione di una teoria con un elenco di assiomi; li usava già Euclide negli *Elementi* (IV-III sec. a.C.), chiamandoli "postulati" (in traduzione latina), o meglio "richieste" (greco: αἰτήματα). Euclide però li associava alle definizioni degli enti da studiare, definizioni non matematiche (come la prima: "D1. Un punto è ciò che non ha parti") che fissavano tuttavia un'auspicata relazione tra l'astratto e il concreto. Nel metodo assiomatico contemporaneo mancano le definizioni, sicché la teoria si può pensare che parli di diversi sistemi di enti. Per Bourbaki gli assiomi di ogni teoria esprimono alcune proprietà di classi di strutture, ma più in generale fuori del suo circolo si dice che si riferiscono a enti arbitrari, e ogni teoria ammette perciò diverse interpretazioni (che per Bourbaki sono sempre una struttura di un certo tipo). La formalizzazione è così descritta:

> «un testo di matematica sufficientemente esplicito potrà essere espresso in un linguaggio convenzionale comprendente solamente un piccolo numero di "parole" invariabili assemblate mediante una sintassi che consisterà in un piccolo numero di regole inviolabili: un testo del

22. Il riferimento all'"antropomorfismo" è introdotto in risposta a una domanda dell'intervista.
23. Citiamo dalla terza edizione degli *Éléments de mathématique*.

> genere si dice formalizzato»: la sua necessità consiste nel fatto che «in un testo non formalizzato si è esposti a errori di ragionamento che rischiano di causare, per esempio, un uso improprio dell'intuizione o un ragionamento per analogia».[24]
>
> (Bourbaki, 1966, p. 1)

Bourbaki esclude però che la si usi rigorosamente, accogliendo le esigenze del cosiddetto *working mathematician*, perché questi

> «si accontenta in generale di portare l'esposizione fino a un punto dove la sua esperienza e il suo istinto (*flair*) di matematico gli insegnano che la traduzione in un linguaggio formalizzato non sarebbe più che un esercizio di pazienza (senza dubbio molto faticoso)».
>
> (Bourbaki, 1966, p. 2)

Per eventuali errori sfuggiti, «la correzione si fa invariabilmente, presto o tardi, con la redazione di testi che si avvicinano sempre di più a un testo formalizzato, fino a che, a giudizio generale dei matematici, sia diventato superfluo spingere questo lavoro più avanti». E conclude: «Il metodo assiomatico a essere precisi non è altro che quest'arte di redigere testi la cui formalizzazione è facile da concepire» (Bourbaki, 1966, p. 6).

Queneau partecipava alle riunioni di Bourbaki (anche se il suo lavoro matematico più importante rientrava in una disciplina non inserita negli *Éléments*)[25] e ha scritto la migliore difesa appassionata di Bourbaki (Queneau, 1962) quando già cominciavano le critiche che denunciavano la faziosità del suo progetto e si opponevano o deprecavano la sua adozione.

Non è tuttavia solo l'impronta di Queneau che Calvino segue. Essa gli servirà più avanti per riassumere e inquadrare meglio il suo nuovo progetto. Sul momento si rifà alla propria esperienza con le fiabe.

6 Metodo assiomatico e fiabe

Nelle fiabe spesso si prescinde dal significato dei termini: un orco non è mai definito, qualche volta è descritto come essere deforme, o mostro antropomorfo, ma gli sono associati elementi caratteristici ricorrenti: fa paura, è brutto, cattivo, antropofago, con poteri superiori se non magici, ma anche stupido, vulnerabile ecc. Si potrebbe dire che è caratterizzato assiomaticamente con alcuni tratti. Ognuno poi se lo immagina come vuole.

Lo stesso vale per gli altri personaggi o elementi delle fiabe: il re, la principessa, la strega, il castello, il reame sono solo simboli, segnaposti con una precisa funzione nell'economia della storia. Il re deve mandare i figli a compiere una missione. Il reame si estende per diversi giorni di cammino. La strega è malvagia. Il castello contiene la principessa prigioniera, per il resto è indifferente come sia costruito, se abbia o no un ponte levatoio.

Sono «presenze definite solo da un sistema di relazioni, da una funzione», come detto ne *L'Approdo*. Questa caratterizzazione delle presenze, che suggerisce la condizione del metodo assiomatico, Calvino non la dichiara esplicitamente per i personaggi delle fiabe, bensì per famosi protagonisti di capolavori della letteratura. Ne *I livelli della realtà in letteratura*, del 1978 (Calvino, 1995a), dice di Don Quijote che è un personaggio dotato

24. Tratto dal *Livre 1 – Théorie des ensembles*.
25. Ci riferiamo al lavoro di combinatoria di Queneau (1972), presentato per la pubblicazione da Gian Carlo Rota (1932-1999).

> «d'una ricchezza interiore inesauribile. Ma non è detto che un personaggio per adempiere alla funzione di protagonista d'un opera debba necessariamente avere tanto spessore. […] La funzione del personaggio può paragonarsi a quella d'un *operatore*, nel senso che questo termine ha in matematica. Se la sua funzione è ben definita, egli può limitarsi a essere un nome, un profilo, un *geroglifico*, un *segno*».
>
> (Calvino, 1995a, p. 393, corsivo dell'autore)

Un altro esempio lo trova in Gulliver: «anche se ci è difficile definire Lemuel Gulliver come psicologia o come lineamenti, la sua funzione d'operatore è ben chiara»: «grande tra i nani e piccolo tra i giganti», funziona come personaggio anche tra i bambini, ma soprattutto mette in evidenza «l'opposizione tra il mondo della ragione logico-matematica e il mondo dei corpi, della materialità fisiologica» (Calvino, 1995a, p. 393). Le osservazioni di Calvino rendono meno sorprendente la dichiarazione sopra riportata dall'intervista del 1968 che «queste presenze […] sono proprio quelle che popolano il mondo intorno a noi, nella nostra vita di ogni giorno, buona o cattiva che possa apparirci questa situazione» (Calvino, 1995a, p. 234). La frase è molto significativa in relazione al linguaggio matematico: si denuncia di solito il carattere artificiale di questo e naturalmente la sua natura formale, che non lo renderebbe una lingua adatta per la comunicazione e l'espressione quotidiana, un linguaggio senza indicali, senza tempo né luogo. Ma se le presenze definite solo da un sistema di relazioni popolano il mondo intorno a noi, il linguaggio formale è perfettamente adeguato alla loro descrizione.

Che i personaggi siano segni permette di adottare la struttura del racconto nella forma assiomatica; ma le conseguenze pratiche della forma si vedono nella molteplicità delle interpretazioni. Lo spostamento dell'enfasi su tale conseguenza è teorizzato da Calvino solo più avanti, nell'occasione della stesura nel 1981 dell'introduzione a *Segni, cifre e lettere e altri saggi* di Queneau, *La filosofia di Raymond Queneau*: a questi Calvino attribuisce la convinzione che «la struttura è libertà, produce il testo e nello stesso tempo la possibilità di tutti i testi virtuali che possono sostituirlo. Questa è la novità che sta nell'idea della "molteplicità potenziale", implicita nella proposta di una letteratura che nasca dalle costrizioni che essa sceglie e s'impone» (Calvino, 1995a, p. 1429).[26]

Calvino non poteva, visti i loro rapporti, non conoscere *Les Fondements de la Littérature* del 1976,[27] dove Queneau, con la sola sostituzione sistematica delle parole "mots, phrases, paragraphes" a "points, droits, plans" nelle prime pagine delle *Grundlagen* di Hilbert, ottiene una base assiomatica di una teoria della scrittura. Il "testo con la possibilità di tutti i testi virtuali che possono sostituirlo" Queneau l'ha appreso da Hilbert.

Calvino adotta il principio della molteplicità potenziale nella sua sintesi finale rappresentata dalle *Lezioni americane*, del 1985. Nella *Lezione* "Molteplicità" intende mostrare come «nella nostra epoca la letteratura sia venuta facendosi carico di questa antica ambizione di rappresentare la molteplicità delle relazioni, in atto e potenziali» (Calvino, 1995a, p. 722). Nel portare «un po' d'ordine nelle proposte che sono andato accumulando come esempi di molteplicità», mette al primo posto «il testo unitario che si svolge come il discorso d'una singola voce e che si rivela come interpretabile su vari livelli», dove il primato va a *L'amour absolu* (1899) di Alfred Jarry, «un romanzo di cinquanta pagine che può essere letto come tre storie completamente diverse: 1) l'attesa di un condannato a morte nella sua cella la notte prima dell'esecuzione; 2) il monologo d'un uomo che soffre d'insonnia e che nel dormiveglia sogna di essere condannato a morte; 3) la storia di Cristo» (Calvino, 1995a, p. 727).

Come Bourbaki anche Calvino lega strettamente la sua versione del metodo assiomatico e delle dimostrazioni formali, cioè le "presenze definite solo da un sistema di relazioni, da una funzione" e la

26. Le costrizioni scelte e autoimpostesi sono la caratteristica della filosofia dell'Oulipo, secondo la quale l'ispirazione di un'opera letteraria deve liberarsi da antiche forme ed espressioni, romantiche e incontrollate, di cui gli autori non sono neanche sempre consapevoli. Anche la topologia o la teoria dei numeri, diceva Queneau, sono derivate, in parte, dalla cosiddetta "matematica divertente".

27. Una traduzione italiana è anche in Lolli (2021, pp. 46–51).

scansione delle fiabe adottata nei racconti deduttivi. Nella *Lezione* "Rapidità", Calvino riporta un'antica leggenda su Carlomagno per puntualizzare come nelle fiabe e racconti popolari si trascurino i dettagli; come invece s'insiste sulle ripetizioni, «per esempio quando la fiaba consiste in una serie di ostacoli da superare» (Calvino, 1995a, p. 660), e come le fiabe e i racconti popolari siano narrati con grande economia espressiva: «Le peripezie più straordinarie sono raccontate tenendo conto solo dell'essenziale». Se un re è malato, non c'è bisogno di dire di quale malattia. «Ma tutto ciò che è nominato ha una funzione necessaria nell'intreccio» (Calvino, 1995a, p. 661).
Nella storia gli avvenimenti si susseguono veloci, come in uno «scarno riassunto, dove tutto è lasciato all'immaginazione e la rapidità della successione dei fatti dà un senso d'ineluttabile». Altre versioni della leggenda, da quelle delle tradizioni medievali tedesche a quelle di Petrarca e di scrittori del Rinascimento, non si svolgono rispettando tali restrizioni narrative.
Sono le caratteristiche delle deduzioni formali: lo scarno riassunto, l'economia espressiva che accetta solo quello che è necessario per arrivare alla conclusione, «gli avvenimenti [che], indipendentemente dalla loro durata, diventano puntiformi, collegati da segmenti rettilinei, in un disegno a zigzag che corrisponde a un movimento senza soste» (Calvino, 1995a, pp. 659–660), la ripetizione delle regole e delle inferenze, quasi obbligata, visto che sono così poche quelle alle quali si è tenuti in un sistema di logica, l'immaginazione soggettiva che accompagna silenziosamente lo sviluppo formale, il senso dell'ineluttabile, magari percepito in modo riluttante, ma a cui non si sa cosa obiettare.[28]

7 Computer e letteratura

Dopo questo excursus sul parallelo con logica e matematica che in Calvino sarà riconoscibile anche nelle opere dell'ultimo periodo, come *Se una notte d'inverno un viaggiatore*, dobbiamo tornare a un tema importante sviluppato in *Cibernetica e fantasmi*.[29]
In questo scritto si trovano riferimenti impliciti ed espliciti al calcolatore, non come strumento scientifico ma come ausilio alla fantasia; lo possiamo considerare una riflessione sulla letteratura al tempo del computer, o almeno sul futuro della stessa, di fronte alla prevalenza, in tanti campi dell'espressione artistica, oltre che scientifica, di un'impostazione discreta, di un'attenzione alle costruzioni combinatorie in campo linguistico, e infine addirittura di una eventuale delega alle macchine della funzione della fantasia.[30]
Abbiamo citato finora dalla conferenza i passi nei quali Calvino descrive i grandi cambiamenti culturali, ma in particolare il sottotitolo recita «Appunti sulla narrativa come processo combinatorio»;[31] e su questo si concentra, ricordando Chomsky la cui scuola «esplora la struttura profonda del linguaggio» con modelli matematici trasformazionali; A. J. Greimas teorico della semantica strutturale che «analizza la narratività d'ogni discorso», riducibile a una relazione tra "attanti" che sembra voler sovrapporre ai discorsi la loro presentazione assiomatica; Kolmogorov che «impiega per l'analisi letteraria le ricerche cibernetiche»; l'Oulipo rappresentato dal «rudimentale modello di macchina per costruire sonetti uno diverso dall'altro» (Calvino, 1995a, pp. 211–212).[32]

28. Esempi di dimostrazioni formali sono proposti in Lolli (2011, cap. "Visibilità").
29. Già considerato in altre pubblicazioni (Lolli, 2011, 2021).
30. Anche Dino Buzzati (1906-1972), in *Il grande ritratto* del 1960, ambientato nel 1972, ha messo come personaggio principale un supercalcolatore, Numero Uno, ma solo con la trattazione del tema, senza considerazioni teoriche; il calcolatore di Buzzati parla, benché non sia stato fornito di sintetizzatori vocali, assume molteplici personalità o connotati, di uomo, donna, macchina, vuole un corpo.
31. Si veda la nota 14.
32. "Attanti" sono i protagonisti, soggetti o oggetti o destinatari delle azioni nei racconti. Il riferimento dell'Oulipo è a Queneau (1961). Ricordiamo che nello stesso 1967 Calvino aveva iniziato i contatti diretti con Queneau in occasione della traduzione di *Les fleurs bleues (I fiori blu)* e nel 1973 entrerà nel movimento su invito di questi. Nel 1967 aveva scritto solo due poesie oulipiane di prova nel 1962-1964; negli anni 1972-1983 eseguirà numerosi altri esercizi, poesie, racconti (tutti inclusi in Calvino, 1994, pp. 313–343).

«L'uomo sta incominciando a capire come si smonta e come si rimonta la più complicata e più imprevedibile di tutte le sue macchine: il linguaggio»; linguaggio «molto più ricco di parole e di concetti e di segni» del mondo dell'uomo primitivo, e più complessi gli usi (Calvino, 1995a, p. 211).
L'inizio della conferenza ci aveva trasportato però in un'immaginaria tribù primitiva dove un narratore è delegato ai racconti e ai miti, per ricordare che «[l]a narrativa orale primitiva, così come la fiaba popolare quale si è tramandata fin quasi ai nostri giorni si modella su strutture fisse, quasi potremmo dire su elementi prefabbricati, che permettono però un enorme numero di combinazioni» (Calvino, 1995a, p. 207). Vladimir Propp vede «tutte le fiabe come varianti di un'unica fiaba» e Claude Lévy-Strauss le considera «un sistema d'operazioni logiche tra termini permutabili, tali da poter essere studiate coi procedimenti matematici dell'analisi combinatoria» (Calvino, 1995a, p. 207).
La fantasia popolare non è dunque sconfinata «ma non bisogna per questo immaginarla come un serbatoio di una capacità determinata»; le operazioni narrative, come le operazioni aritmetiche, non possono essere molto diverse da un popolo all'altro, ma «quello che sulla base di questi procedimenti elementari viene costruito può presentare combinazioni, permutazioni e trasformazioni illimitate» (Calvino, 1995a, p. 207).
Nel presente, inoltre, con la scuola semiologica di Roland Barthes si estende l'analisi strutturale ai racconti moderni e le ricerche francesi s'accompagnano al lavoro creativo mettendo in evidenza il rapporto tra chi narra con la materia narrata e con il lettore. «Lo scrivere non consiste più nel raccontare ma nel dire che si racconta e quello che si dice viene a identificarsi con l'atto stesso del dire, la persona psicologica viene sostituita da una persona linguistica o addirittura grammaticale» (Calvino, 1995a, p. 208).
Analogamente la matematica non consiste nel dimostrare, ma nel dire che si dimostra, e quello che si dice viene a identificarsi con l'atto stesso del dire, la persona matematica viene sostituita da una meta-matematica, che è piuttosto linguistica o addirittura grammaticale.
Attraverso il riferimento a queste tendenze Calvino introduce il discorso più generale e già accennato della considerazione del mondo come discreto invece che continuo. In particolare

> «[i]l pensiero, che fino a ieri ci appariva come qualcosa di fluido […] oggi tendiamo a vederlo come una serie di stati discontinui, di combinazioni d'impulsi su un numero finito (enorme ma finito) di organi sensori e di controllo. I cervelli elettronici, se sono ancora lungi dal produrre tutte le funzioni del cervello umano, sono però già in grado di fornirci un modello teorico convincente per i processi più complessi della nostra memoria, delle nostre associazioni mentali, della nostra immaginazione, della nostra coscienza».[33]
>
> (Calvino, 1995a, p. 209)

Il pensiero che soprattutto interessa Calvino è quello delle teorie estetiche. Quelle a lui note

> «sostenevano che la poesia fosse una questione d'ispirazione, discesa da non so quali altezze o sgorgante da non so quali profondità, o intuizione pura o momento non meglio identificato della vita dello spirito, o voce dei tempi con la quale lo spirito del mondo decide di parlare attraverso il poeta, o un rispecchiamento delle strutture sociali che non si sa attraverso quale fenomeno ottico si riflette sulla pagina, o una presa diretta della psicologia del profondo che permette di scodellare le immagini dell'inconscio sia individuale sia collettivo, comunque qualcosa di intuitivo d'immediato d'autentico di globale che chissà come salta fuori, qualcosa equivalente omologo

33. Continua: «Shannon, Weiner [leggi: Wiener], von Neumann, Turing, hanno cambiato radicalmente l'immagine dei nostri processi mentali».

simbolico di qualcos'altro. Ma sempre restava in esse un vuoto che non si sapeva come colmare: come si arriva alla pagina scritta? Per quali vie l'anima e la storia o la società o l'inconscio si trasformano in una sfilza di righe nere su una pagina bianca? Su questo punto le più importanti teorie estetiche tacevano».

(Calvino, 1995a, p. 214)

E Calvino si sentiva a disagio:

> «la letteratura come la conoscevo io era un'ostinata serie di tentativi di far stare una parola dietro l'altra seguendo certe regole definite, o più spesso regole non definite né definibili ma estrapolabili da una serie di esempi o protocolli, o regole che ci siamo inventate per l'occasione cioè che abbiamo derivato da altre regole seguite da altri […]. L'io dell'autore nello scrivere si dissolve: la cosiddetta "personalità dello scrittore" è interna all'atto dello scrivere […]. Anche una macchina scrivente, in cui sia stata immessa un'istruzione confacente al caso, potrà elaborare sulla pagina una "personalità" di scrittore spiccata e inconfondibile, oppure potrà essere regolata in modo di evolvere o cambiare "personalità" a ogni opera che compone. Lo scrittore quale è stato finora, già è macchina scrivente, ossia è tale quando funziona bene: quello che la terminologia romantica chiamava genio o talento o ispirazione o intuizione non è altro che il trovar la strada empiricamente, a naso, tagliando per scorciatoie, là dove la macchina seguirebbe un cammino sistematico e coscienzioso, ancorché velocissimo e simultaneamente plurimo.
> […] In questo senso, anche affidata alla macchina, la letteratura continuerà […] a essere giudicata […] al contatto dell'occhio che legge; ciò che sparirà sarà la figura dell'autore, questo personaggio a cui si continuano ad attribuire funzioni che non gli competono, l'autore come espositore della propria anima alla mostra permanente delle anime, l'autore come utente di organi sensori e interpretativi più ricettivi della media, l'autore questo personaggio anacronistico, portatore di messaggi, direttore di coscienze, dicitore di conferenze alle società culturali. […]
> Scompaia dunque l'autore – questo *enfant gâté* (viziato) dell'inconsapevolezza – per lasciare il posto a un uomo più cosciente, che saprà che l'autore è una macchina e saprà come questa macchina funziona».[34]
>
> (Calvino, 1995a, pp. 214–216)

Tre anni dopo Calvino ridimensionerà un poco il suo entusiasmo, ma alcune riflessioni o scoperte di quel periodo continuano a tralucere nei suoi scritti anche se non tornerà in modo esplicito sul tema. Per ora, stabilito che si sa come smontare e rimontare la macchina del linguaggio,

> «affidato a un computer il compito di svolgere queste operazioni, avremo la macchina capace di sostituire il poeta e lo scrittore? Così come abbiamo già macchine che leggono, macchine che eseguono un'analisi linguistica dei testi letterari, macchine che traducono, macchine che riassumono, così avremo macchine capaci di ideare e comporre poesie e romanzi? […] [I]n questo momento non penso a una macchina capace solo di una produzione letteraria diciamo così di serie, già meccanica di per se stessa: penso a una macchina che metta in gioco sulla pagina tutti quegli elementi che siamo soliti considerare i più gelosi attributi dell'intimità psicologica, dell'esperienza vissuta, dell'imprevedibilità degli scatti di umore, i sussulti e gli strazi e le illuminazioni interiori».
>
> (Calvino, 1995a, pp. 212–213)

34. Si noti l'ironia autoreferenziale, Calvino era il "dicitore" della conferenza in corso presso una società culturale di Torino, i *Venerdì letterari*.

Calvino non sta qui rivalutando le romantiche ispirazioni o tormenti:

> «Che cosa sono questi se non altrettanti campi linguistici, di cui possiamo benissimo arrivare a stabilire lessico grammatica sintassi e proprietà permutative? La vera macchina letteraria sarà quella che sentirà essa stessa il bisogno di produrre disordine come reazione a una sua precedente produzione di ordine. […] [N]ulla ci vieta di prevedere una macchina letteraria che a un certo punto senta l'insoddisfazione del proprio tradizionalismo e si metta a proporre nuovi modi d'intendere la scrittura».
>
> (Calvino, 1995a, pp. 212–213)

8 Computer e fantasia

Calvino pensa in particolare a una macchina che sia in grado di riprodurre il fenomeno dell'immaginazione, della fantasia. Nella *Lezione* "Visibilità" del 1985 svolgerà ancora un'analisi di questa facoltà, proponendosi di «situare le visioni nella mente, senza farle passare attraverso i sensi» (Calvino, 1995a, p. 697).
I processi immaginativi possono partire dalla parola e arrivare all'immagine o viceversa;[35] ma confessa che a lui «nell'ideazione di un racconto la prima cosa che […] viene in mente è un'immagine» (Calvino, 1995a, p. 704). Tuttavia nelle *Cosmicomiche*

> «il punto di partenza è un enunciato tratto dal discorso scientifico: il gioco autonomo delle immagini visuali deve nascere da questo enunciato concettuale. Il mio intento era dimostrare come il discorso per immagini tipico del mito possa nascere da qualsiasi terreno»,
>
> (Calvino, 1995a, p. 705)

anche da una frase di un libro scientifico o filosofico che fa da stimolo alla fantasia figurale tanto nello spirito del testo quanto in una direzione autonoma. La conseguente elaborazione peraltro «vuole unificare la generazione spontanea delle immagini e l'intenzionalità del pensiero discorsivo»; anche se la mossa d'apertura è visiva, «essa si trova prima o poi catturata in una rete dove ragionamento ed espressione verbale impongono anche la loro logica» (Calvino, 1995a, p. 705).
Così in generale

> «[l]a mente del poeta e in qualche momento decisivo la mente dello scienziato funzionano secondo un procedimento di associazione d'immagini che è il sistema più veloce di collegare e scegliere tra le infinite forme del possibile e dell'impossibile. La fantasia è una specie di macchina elettronica che tiene conto di tutte le combinazioni possibili e sceglie quelle che rispondono a un fine, o che semplicemente sono le più interessanti, piacevoli, divertenti».
>
> (Calvino, 1995a, p. 707)

Definizione che si accorda con quella in cui Calvino si riconosce pienamente, «l'immaginazione come repertorio del potenziale, dell'ipotetico, di ciò che non è né stato né forse sarà ma che avrebbe potuto essere» (Calvino, 1995a, p. 706), il mondo o golfo, mai saturabile, di forme e d'immagini di Giordano Bruno.

35. Calvino analizza il procedimento di Ignazio di Loyola, col passaggio dalla parola all'immaginazione visiva, per risalire ai significati profondi del messaggio cristiano.

Nella conferenza del 1967 l'argomento della fantasia come macchina elettronica è introdotto da Calvino seguendo i suggerimenti di Ernst Kris (1900-1957) ed Ernst Gombrich (1909-2001), a proposito dello studio di Sigmund Freud (1856-1939) sui giochi di parole; per quel che riguarda le scelte compiute dalla macchina elettronica tra le combinazioni possibili, un criterio è particolarmente interessante per l'espressione della creatività: si parte dal particolare piacere che dà ogni gioco combinatorio; a un certo punto tra le tante combinazioni possibili di parole dal suono simile, una si carica di un valore speciale. Succede che

> «l'accostamento di concetti a cui si è pervenuti casualmente scatena inaspettatamente un'idea preconscia, cioè a metà seppellita e cancellata dalla nostra coscienza, o anche soltanto […] tenuta in disparte, ma tale da poter affiorare alla coscienza se a suggerirla non è una nostra intenzione, ma un processo oggettivo».
>
> (Calvino, 1995a, p. 220)

Per spiegare questo fenomeno Calvino introduce un nuovo concetto.

9 Il mito

Nella parte terza della conferenza, riprendendo la dichiarazione che la letteratura «è solo permutazione d'un insieme finito di elementi e funzioni», Calvino si chiede se all'opposto la tensione della letteratura non sia «rivolta continuamente a uscire da questo numero finito», a «dire qualcosa che non sa dire, qualcosa che non può dire, qualcosa che non sa, qualcosa che non si può sapere». «La battaglia della letteratura è […] uno sforzo per uscire fuori dal linguaggio; è dall'orlo estremo del dicibile che essa si protende; è il richiamo di ciò che è fuori dal vocabolario che muove la letteratura» (Calvino, 1995a, p. 217).
Calvino s'immagina d'essere presente, come osservatore, nel tempo in cui i racconti esprimevano la concezione e le regole della convivenza:

> «Il narratore della tribù mette insieme frasi, immagini: il figlio minore [protagonista di una storia] si perde nel bosco, vede una luce lontana, cammina cammina, la fiaba si snoda di frase in frase, dove tende? Al punto in cui qualcosa di non ancora detto, qualcosa di solo oscuramente presentito si rivela e ci azzanna e sbrana come il morso di una strega antropofaga. Nella foresta delle favole passa come un fremito di vento la vibrazione del mito».
>
> (Calvino, 1995a, pp. 217–218)

"Mito" è una parola che ha subìto una deriva e una degradazione dall'antichità ai nostri giorni, e nello stesso tempo una proliferazione di significati. In greco "mito" (μῦθος) significava parola, discorso, così come logos; non era tuttavia una forma diminuita di conoscenza, ma l'espressione di una conoscenza precedente, antica, costruita per rievocare le prime lotte per la sopravvivenza e l'adattamento alle condizioni fissate dalla natura, che richiedevano esseri dalla forza sovrumana, eroi e dèi.
Fino a Platone il mito era conoscenza che restava valida e interveniva quando il logos non poteva attingere tutta la verità. Con Aristotele venne declassato come inaffidabile – perché non sostenuto dalla scienza (ἐπιστήμη) –, come opinione, e chiamato "finzione poetica". In seguito, dal neoplatonismo in avanti, è venuto a indicare anche altri livelli di conoscenza, i misteri degli dèi, messaggi riservati a pochi. In Isaac Newton (1643-1727), con il suo interesse per l'alchimia, il mito era ancora compatibile con un sistema razionale del mondo, ma con la chimica di Lavoisier (1743-1794) il linguaggio

dei miti apparve inappropriato a descrivere le trasformazioni e le proprietà dei corpi. Con Auguste Comte (1798-1857) la storia del pensiero umano viene divisa e trasmessa in tre stadi, il mitologico, il metafisico (con l'emergere della ragione), e lo scientifico. La visione del mondo scientifico inscritta nei fenomeni naturali cede il posto alla ragione. I miti diventano racconti abitati da forze indipendenti dalle regole conosciute dagli esseri umani. Dall'Ottocento in poi il tema è stato discusso da sociologia, etnologia, antropologia, letteratura, psicanalisi sotto tutte le angolazioni possibili.
Il "mito" di Calvino ha il senso originario, quello di una storia che gli umani non hanno parole per raccontare: «Il mito è la parte nascosta d'ogni storia, la parte sotterranea, la zona non ancora esplorata perché ancora mancano le parole per arrivare fin là […]», ed è per questo che «il discorso per immagini [è] tipico del mito» (Calvino, 1995a, p. 218).
Per Calvino il mito «vive di silenzio oltre che di parola; un mito taciuto fa sentire la sua presenza […] nelle parole quotidiane; è un vuoto di linguaggio che aspira le parole nel suo vortice e dà alla fiaba una forma» (Calvino, 1995a, p. 218).
L'inconscio è il mare del non dicibile, di ciò che è rimosso per antiche proibizioni, e parla attraverso parole rubate. La letteratura moderna dà la parola a tutto ciò che nell'inconscio sociale o individuale è rimasto non detto. Non è il trionfo dell'irrazionale ma il rifiuto di credere che l'irrazionale esista. Calvino chiama "mito" il significato inconscio non ancora detto che emerge dalle storie.
Con questa indicazione, Calvino può spiegare come possa darsi che la fantasia, la macchina elettronica, eseguendo un gioco combinatorio, venga (o possa venire, nel suo auspicio) a

> «trovar[si] investita d'un significato inatteso, un significato non oggettivo di quel livello linguistico sul quale ci stavamo movendo, ma slittato da un altro piano, tale da mettere in gioco qualcosa che su un altro piano sta a cuore all'autore o alla società a cui egli appartiene».
>
> (Calvino, 1995a, p. 221)

Il motivo per cui può capitare, e non solo come evento casuale, che il significato affiori slittato su un altro piano, non è ulteriormente commentato ma è implicito in tutto il discorso: la ragione è che la mente è in grado di sdoppiarsi, e lavorare su più livelli. La mente per Calvino funziona sì come «macchina elettronica che tiene conto di tutte le combinazioni possibili», ma nello stesso tempo gestisce le espressioni «dell'intimità psicologica, dell'esperienza vissuta, dell'imprevedibilità degli scatti di umore, i sussulti e gli strazi e le illuminazioni» (Calvino, 1995a, p. 213), la mente analizza o modifica la costruzione dei linguaggi che esprimono fantasia ecc. Una macchina scrivente *programmata come una mente lavora*, per schematizzare, a un livello e a un metalivello.[36] Un processo oggettivo, ancorché opaco, si esprime in una conclusione formulabile nel linguaggio della mente. Il "valore speciale" colpisce uomo o macchina dotati d'una coscienza e di un inconscio quando è «qualcosa che […] sta a cuore all'autore o alla società a cui appartiene», e si manifesta perciò se «intorno alla macchina scrivente esistono i fantasmi nascosti dell'individuo e della società» (Calvino, 1995a, p. 221).[37] Ecco spiegati i fantasmi del titolo, i fantasmi della coscienza.
Di seguito, la parte quinta della conferenza è dedicata a discutere in che senso, al contrario di quello che generalmente si dice sulla fiaba che viene dopo il mito o è una sua corruzione, «la fabulazione precede la mitopoiesi: il valore mitico è qualcosa che si finisce per incontrare solo continuando ostinatamente a giocare con le funzioni narrative» (Calvino, 1995a, p. 222).

---

36. Diciamo "programmata come una mente" per riassumere le parole di Calvino citate *supra* alla fine del par. 5 a proposito di «una macchina scrivente, in cui sia stata immessa un'istruzione confacente al caso».
37. Si spiega così il titolo della conferenza. In verità piuttosto tormentato. Per la presentazione a Torino e in altre città italiane e all'estero, il titolo proposto è stato *Il racconto come operazione logica e come mito*, il più significativo ed esplicito per quanto riguarda il contenuto; nei fascicoli dell'Associazione Culturale è stato stampato come *Cibernetica e fantasmi*; in una versione ridotta sulla rivista *Nuova Corrente*, n. 46–47, nel 1968 è comparso come *Appunti sulla narrativa come processo combinatorio*. Nell'edizione delle opere complete sono stati fusi i due ultimi.

La fabulazione precede la mitopoiesi. Conferme (ed esempi) li troviamo nella storia della matematica, e in quella della scienza. Il termine "mito" è quanto mai appropriato per i concetti matematici a cui la ricerca «si protende dall'orlo estremo del dicibile», la zona ancora non esplorata perché ancora mancano le parole, se non nella forma di analogie, che Weil ha descritto come «quei torbidi e deliziosi riflessi dall'una all'altra [teoria o struttura], quegli screzi inesplicabili» (Weil & Weil, 2012/2018, p. 57).[38]
Le progressive estensioni dei sistemi numerici: naturali, relativi, razionali, complessi, quaternioni, infiniti, ideali ecc. appaiono frutto di una tensione che ora appare analoga a quella della letteratura indicata da Calvino, lo sforzo di protendersi fuori dal linguaggio disponibile. Anche Calvino sembra esserne consapevole, quando parla di Gerolamo Cardano alle prese con $\sqrt{-1}$, «che insegue con le parole qualcosa che sfugge alle parole» (Calvino, 1995a, p. 792).[39]
Nelle ricerche che porteranno alle geometrie non euclidee, il contributo storico di Girolamo Saccheri (1667-1733) è stato quello di aver accumulato tante dimostrazioni a partire dalla negazione del quinto postulato di Euclide, con l'obiettivo di dimostrarlo per assurdo, ma senza mai pervenire a una contraddizione; anch'egli era convinto che la fabulazione preceda la mitopoiesi, nella forma che le definizioni sono *filiae plurium demonstrationum*, cioè si sa di cosa si parla solo dopo aver ricavatone molte informazioni.
Dopo di lui anche Nicolai J. Lobačevsky (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860) accumulano i teoremi, compilano le loro dimostrazioni, cammina cammina, per i sentieri della foresta della geometria, dove tende il loro lavoro?[40] Al punto in cui passa "la vibrazione del mito", la parte sotterranea di ogni dimostrazione si potrebbe dire con Calvino, non ancora esplorata per mancanza di parole. Il mito taciuto è un vuoto di linguaggio. La parola che lo riempie in questo caso è "coerenza", o consistenza (*consistency*). Sarà Bolyai, non Saccheri, che alla fine avrà la consapevolezza e il coraggio di dire, per la geometria iperbolica: «ho creato un nuovo universo dal nulla» (Bonola, 1906/1955, p. 98).
Che la coerenza implichi l'esistenza di un mondo, questo è il mito fondatore della matematica contemporanea, esplicitato profeticamente da Hilbert, ma in privato perché, ammonisce Weil, «le leggi della matematica moderna impongono il divieto assoluto di menzionare per iscritto simili intuizioni che non sono suscettibili né di un preciso enunciato né, a maggior ragione, di dimostrazione» (Weil & Weil, 2012/2018, p. 57):[41] «Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, […] allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi» (Frege, 1976/2020, p. 51).[42]
Ma il vuoto di linguaggio, ci ricorda Calvino, è la traccia d'un tabù, d'una proibizione: le vie della letteratura «scavalcano le barriere delle interdizioni, […] portano a dire ciò che non si poteva dire, a un inventare che è sempre un re-inventare parole e storie che erano state rimosse» (Calvino, 1995a, p. 218).
E pure le vie della scienza scavalcano le barriere delle interdizioni: Copernico reinventa una storia di Aristarco che era stata rimossa, Abraham Robinson con gli infinitesimi reinventa la storia di Cavalieri che ha reinventato quella di Archimede.
"Coerenza" è una parola che non appartiene alla matematica, ma alla metamatematica, in particolare alla logica, che dimostra per i linguaggi del primo ordine che la coerenza sintattica di una teoria implica l'esistenza di un modello. Grazie alla codifica aritmetica dei linguaggi inventata da Gödel, la si può pronunciare anche nella matematica, ma non dimostrare per teorie contenenti l'aritmetica (secondo teorema d'incompletezza). Resta così un mito anche nel senso tradizionale d'irraggiungibile, d'irrealizzabile, e quindi sempre attivo, e una spinta alla crescita e all'estensione: infatti per quanto si estendano e si perfezionino sistemi formali per la matematica, per nessuno di essi chi percepisce con

38. Tratto dalla lettera del 26 marzo 1940 di André a Simon Weil.
39. In una commemorazione di Cardano del 1976, quarto centenario della morte. Calvino sta parlando del Cardano scrittore dell'autobiografia in un "latino sgangherato", senza dare esempi, ma noi sappiamo che una parola che gli sfugge è quella per nominare la radice quadrata di –1.
40. Lobačevsky e Bolyai sono stati i primi costruttori di una geometria non euclidea, quella iperbolica.
41. Si veda la nota 38.
42. Tratto dalla lettera di Hilbert a Frege del 29 dicembre 1899.

certezza la correttezza di assiomi e regole potrà affermare che il sistema contiene tutta la matematica. Come sostenuto dallo stesso Gödel (1951/2006)[43] è il mito dell'incompletabilità (*incompletability*) della matematica che alimenta la sua inesauribilità (*inexhaustibility*).

Nella storia della scienza si trovano altri esempi, correlati al termine "etere". La storia di questa parola ne interseca un'altra curiosa: "quintessenza".[44] Questo termine è usato di solito come un superlativo, l'essenza dell'essenza. I vocabolari danno come significato il grado massimo di una qualità.

Siccome tra gli alchimisti la quintessenza era un elisir ottenuto dalla quinta distillazione degli elementi, la parola è venuta a significare la caratteristica sostanziale di un composto. Se ne impossessa l'alchimia medievale per indicare o la forza vitale dei corpi che se isolata permette la trasmutazione dei metalli in oro, oppure la sostanza della pietra filosofale. Per estensione viene a significare anche la caratteristica essenziale di un dominio di conoscenze.

La parola "etere" invece viene dal greco αἰθήρ (cielo, regione sopra l'aria), con i suoi derivati αἶθος (fiamma, ardore), αἴθρα (cielo puro, sereno, aria) e altri. La usa Platone nel Fedone, LVII, dove ne accenna parlando dell'etere come di un quinto corpo (πέμπτον σῶμα) che viene aggiunto ai quattro elementi di Empedocle (V sec. a.C.): corpo che è una terra perfetta nel cielo dove sono gli astri, della forma di un dodecaedro – un solido regolare con dodici facce che sono pentagoni regolari – uno dei cinque poliedri regolari, detti platonici.[45]

Aristotele sviluppa l'argomento aggiungendo, come quinto, l'etere ai quattro elementi terra, acqua, aria, fuoco, a indicare la parte più alta, pura, dell'atmosfera terrestre, anche se non la chiama elemento (στοιχεῖον), ma primo corpo (πρώτον σῶμα) o prima sostanza (πρώτη ουσία): l'etere è l'essenza del mondo celeste, sostanza senza peso e trasparente.

L'idea della "quinta essenza" passa nei neoplatonici, nella filosofia islamica e nella scolastica, in tutte le tendenze contrapposte al meccanicismo che invece ammetteva l'esistenza del vuoto; è recuperata nel Rinascimento come realtà intermedia tra spirito e natura nei circoli neoplatonici.

La parola "etere", dal francese *éther*, incomincia a prevalere dall'inizio del sec. XIV. Ma a parte certi diversi significati scientifici, in chimica soprattutto, per composti organici come l'etere etilico, usato come solvente e in medicina come anestetico, "etere" torna ad Aristotele, diventando etere cosmico, sostanza ipotetica, estremamente rarefatta e imponderabile che riempie il vuoto, e che all'occorrenza diventa il *medium* di concetti in parte metafisici in parte, per certi periodi, scientifici (come succede con *flogisto*, nella teoria della combustione di Georg E. Stahl (1660-1734)):

– Descartes spiegava la gravità con vortici di etere.
– Lo stesso Newton, nonostante il suo *hypotheses non fingo*, parlava nei suoi scritti dell'etere come di una sorta di fluido statico che avrebbe permesso l'azione a distanza dei corpi celesti.
– Il flogisto era la sostanza che si perdeva mentre i materiali si trasformavano in calci.
– Fino alla fine dell'Ottocento l'etere è stato ritenuto il mezzo in cui si propaga la luce, essendo questa generata da vibrazioni elastiche, che escludevano il vuoto, come l'aria si comporta per il suono.
– L'etere luminifero per un po' è stato il sistema di riferimento preferito entro cui valevano le leggi dell'elettromagnetismo; gli esperimenti di Michelson e Morley lo hanno confutato nel 1887.

La quintessenza come etere cosmico è un esempio del ricorrente tentativo, nella storia della scienza, di dare un nome a un'azione ancora non scritta per mancanza di parole, o di concetti usati per spiegare fenomeni di cui non si vedono le cause nei movimenti della materia, per dare una legittimazione a spiegazioni del visibile per mezzo dell'invisibile. "Etere" è "una parola rubata", non il trionfo dell'inspiegabile ma il rifiuto di credere che il non spiegabile esista. O il mito? – nel senso inteso da Calvino.

43. Si veda anche Lolli (2019, cap. IX).
44. Il richiamo a questo termine, come il prossimo abbozzo dell'uso del mito calviniano per leggere la storia della scienza, è stato esposto da chi scrive nel corso *Le risorse dell'essenziale*, a Venezia, Fondazione Cini, 19-23 settembre 2022.
45. Nel *Timeo* gli altri quattro sono collegati agli elementi secondo la corrispondenza: tetraedro al fuoco, cubo alla terra, ottaedro all'aria, icosaedro all'acqua, dodecaedro al cielo.

Calvino è tornato sul mito nella storia della scienza in un articolo apparso su *Repubblica* del 1982,[46] *La luce negli occhi*. In questo articolo Calvino recensisce il libro *L'occhio e l'idea* di Ruggero Pierantoni (1981), che tratta la storia della visione da Pitagora e Euclide fino all'apparato di Camillo Golgi (1843-1926), attraverso Leon Battista Alberti, Leonardo e George Berkeley, seguendo per tutto il percorso la domanda se la visione si formi nell'occhio o nel cervello; il percorso si conclude quando il microscopio mostrerà che la retina e la corteccia visiva sono fatte allo stesso modo e permetterà di capire che «la retina è una porzione periferica della corteccia cerebrale. Insomma il cervello comincia nell'occhio. (Quest'ultima frase la dico io e speriamo che sia giusto)» (Calvino, 1995a, p. 530).
Nel riassunto di Calvino, il filo conduttore del libro è il disvelamento dei "miti" di cui la nostra conoscenza si nutre, «che impediscono di comprendere la realtà dei processi naturali anche quando già si dispone di tutti i dati necessari» (Calvino, 1995a, pp. 530–531).

> «Quest'approccio "mitologico" alla storia della scienza e della cultura mi pare il più giusto e necessario [...]. La conoscenza procede sempre attraverso modelli, analogie, immagini simboliche, che fino a un certo punto servono a comprendere, e poi sono messe da parte, per ricorrere ad altri modelli, altre immagini, altri miti. C'è sempre un momento in cui un mito che funziona veramente esplica la sua piena forza conoscitiva».
>
> (Calvino, 1995a, p. 531)

Ma lo straordinario è che, come abbiamo visto parlando di Copernico e Cavalieri, a distanza di secoli una concezione scartata come mitica si ripresenta come feconda a un nuovo livello delle conoscenze, assumendo un nuovo significato in un nuovo contesto.

> «Non sarebbe il caso di concludere che la mente umana – nella scienza come nella poesia, nella filosofia come nella politica e nel diritto – è solo a base di miti che funziona, e l'alternativa sta solo nell'adottare un codice mitico piuttosto che un altro? Una conoscenza fuori da qualsiasi codice non esiste: bisogna solo stare attenti a distinguere i miti che si degradano e diventano ostacoli alla conoscenza o peggio ancora pericoli per la convivenza umana».
>
> (Calvino, 1995a, p. 531)

Usando "miticamente" l'immagine della struttura biofisica della retina, la mente umana appare a Calvino come un tessuto di "mito-recettori" che si trasmettono l'un l'altro le loro eccitazioni e inibizioni, «a somiglianza dei fotoricettori che condizionano la nostra vista e fanno sì che guardando le stelle le vediamo raggiate mentre "in realtà" dovrebbero apparirci puntiformi» (Calvino, 1995a, p. 531).
E dopo aver letto questo commento chi scrive si è tanto più convinto che la sua lettura di *Cibernetica e fantasmi* del 1967 (Calvino, 1995a, pp. 205–225), sul mito, sia quella giusta.

10 La complessità

Abbiamo voluto dare una prova che anche in cultori di altre discipline, ben distanti, si può trovare un modo di pensare analogo a quello matematico, e quindi che questo non si esprime con codici esoterici e misteriosi. L'indagine su Calvino potrebbe continuare con altre scoperte delle sue competenze,[47]

46. Inserito in Calvino (1995a, pp. 525–531), *Collezione di sabbia* del 1984.
47. Si veda in particolare Bischi (2023).

introducendo argomenti come:

– il caos deterministico quando una leggera modifica dei dati iniziali induce una modifica sostanziale dell'evoluzione di un sistema;[48]
– la complessità, con le proprietà di autorganizzazione;[49]
– la visione olistica, che coglie le proprietà globali di un sistema che nascono dalle interazioni tra le parti che lo compongono e scompaiono se sono studiate separatamente.[50]

Altri racconti di *Palomar* (Calvino, 1983) sono descrizioni che si tramutano o ambiscono a tramutarsi in storie, storie interessanti nelle attese dello scrittore, ma comunque storie.
Calvino prende la matematica come disciplina in sé, e non arriva a sostenere che la matematica stessa sia una narrazione (Lolli, 2018); onesto, prende l'avvio da quello che conosce, la letteratura, non arrivando a esprimere giudizi sulla matematica stessa. Ma la direzione deve essere invertita.
Nella lezione "Esattezza" delle *Lezioni americane* (Calvino, 1995a) si parla di due tipi di conoscenze, una espressa da forme astratte, l'altra da descrizioni minute che aspirano a essere complete. Sfugge a Calvino la consapevolezza che una descrizione, attribuita per definizione alla letteratura, non è la copia di una realtà, per quanto possa essere precisa e minuziosa: la descrizione si svolge in un linguaggio, introduce inevitabilmente concetti astratti che impongono strutture esplicative sui dati visivi. Per esempio se Palomar vede due segmenti ortogonali che tagliano una roccia, non può certo vedere e inserire nella descrizione la definizione di ortogonalità. Ricorda il Rudolf Carnap (1891-1970) della costruzione logica del mondo (*Der logische Aufbau der Welt* del 1928), che voleva definire tutti i termini scientifici in termini basati sull'esperienza vissuta, e vi ha presto rinunciato.
Eppure proprio in uno dei suoi esercizi di descrizione, *Il prato infinito*, c'è un'incursione nella statistica, e un linguaggio insiemistico non formale ma corretto e sofisticato (insiemi d'insiemi, sottoinsiemi e intersezioni).
Comunque con la segnalazione degli argomenti matematici che s'incontrano nelle sue opere non vogliamo dire che si possa studiare matematica leggendo Calvino (o un altro autore) – per quanto, il capoverso «Il prato è un insieme d'erbe […]» di Calvino (1991, pp. 899–900), da sostituire al conto dei fili d'erba lo proporrei a ogni neofita dell'insiemistica – piuttosto che la familiarità con certi argomenti anche tecnici avanzati o moderni è accessibile a persone non necessariamente specializzate ma fornite di una cultura generale. Purché provino piacere almeno a giocare con i simboli algebrici, senza esserne disgustati.
A Calvino piaceva la matematica, ma quale? Nella penultima lettera a Chichita, nel 1963 (dopo non c'è più stato bisogno di lettere), Calvino si cimenta nell'unico tentativo che conosciamo di usare originalmente formule algebriche:

> «[…] insomma, io credo che noi due (a e b) se siamo insieme non valiamo solo la somma $a + b$, ma una quantità $AB > a + b$. Cioè che a in $a + b$ vale più di a isolato e b in $a + b$ vale più di b isolato. Mi dispiace di non sapere di più di matematica perché con delle formule algebriche mi spiegherei benissimo».[51]
>
> (Calvino, 2023, pp. 137–38)

48. In Calvino (1992, pp. 1051–1062), *La notte dei numeri*, un vecchio ragioniere racconta al ragazzo della pulizia come la base del successo mondiale della ditta dipenda da un errore iniziale di un mitico primo e altrimenti infallibile ragioniere continuando a moltiplicarsi attraverso le elaborazioni dei cervelli elettronici.
49. Nel racconto *L'invasione degli stormi* in Calvino (1992, pp. 925–929), che anticipa Parisi (2021), Palomar dalla sua terrazza sul panorama romano osserva e descrive le forme degli stormi composti da migliaia di uccelli nel periodo del transfer alla fine dell'autunno, rilevando le relazioni locali dei singoli uccelli coi loro vicini e le proprietà globali emergenti, di autorganizzazione, che caratterizzano lo stormi nella sua interezza; non è facile perché la forma dello stormo è variabile a seconda della direzione visiva e del lato osservato, che può apparire compatto a una visione frontale e con larghi intervalli a una laterale. Una catena di amici per telefono comunicano tra loro i rilievi da diverse posizioni.
50. Nella recensione di Prigogine e Stengers, in Calvino (1995b, pp. 2038–2044).
51. Tratto dalla lettera a Chichita del 9 novembre 1963. Più oltre: «[…] adesso [dopo separazione di Liberovici e Margot] vedo nella coppia un valore in sé $AB > a + b$, cioè sono sicuro che questo valore si può raggiungere». Poteva cominciare a scrivere: $(x > 0 \Rightarrow (a + x > a \wedge b + x > b)) \Rightarrow (A = a + x \wedge B = b + x \Rightarrow A \times B > a + b)$.

Si direbbero ricordi liceali, di un buon liceo, della cui frequentazione non sono rimaste le formule corrette e inutili, o peggio repellenti, ma la convinzione della possibilità di esprimersi col simbolismo in modo pregnante. L'algebra segna il passaggio dalla fisicità della matematica a quella spirituale.
Per proteggerla, bisogna che sia introdotta insieme ad altri argomenti (geometria piana, grafi, algebra degli insiemi) vedendone subito l'utilità e la semplificazione e la generalità. Così

> «lo spirito umano […] diviene consapevole della propria autonomia; esso trae da se stesso, e spesso senza riconoscibili stimoli esterni, nuovi e fecondi problemi, eseguendo soltanto nel modo più felice combinazioni logiche, generalizzazioni e particolarizzazioni, separazioni e unioni dei concetti».
>
> (Hilbert, 1901/1978, p. 148)[52]

Spetterà agli insegnanti guidare la crescita e le esplorazioni degli studenti. Da far tremare vene e polsi. Non si può fare terra bruciata e ripartire, anche se talvolta è utile dipingere uno scenario utopistico (immaginiamo per esempio un salto qualitativo di massa del livello dei docenti) dove si incomincia da zero. Di fatto se miglioramenti verranno adottati nella condizione scolastica dovranno comunque fare i conti con le resistenze passive. E la situazione odierna è più che disperata. Basta osservare i contenuti e le trame di alcune serie televisive dove compaiono come protagonisti gli adolescenti; sia *Provaci ancora Prof!* o *Un professore*, gli unici interessi e drammi di ragazze e ragazzi riguardano gli amori, il sesso, gli abbigliamenti. Non abbiamo la tentazione di esprimere suggerimenti. Ogni insegnante deve avere una personalità sua, e coltivarla e trasmetterla.
Tenendo conto che la crescita della matematica nell'ultimo secolo ha fatto passi da gigante, se non si riesce almeno ad accennare alle tendenze in corso, e a come sono connesse tra loro anche se talvolta irriconoscibili, si rischia di sanzionare un'incomunicabilità totale tra la tradizione e il presente, e tra il presente e il futuro.
Ma siccome siamo in tema Calvino, possiamo riportare un suo insegnamento espresso in uno scambio con Tullio Pericoli del 1980:

> «[…] dobbiamo vedere il piacere di entrare in un lavoro interpersonale, in qualche cosa che ci dia quasi il senso di un processo naturale cui hanno partecipato più generazioni e in cui si esca da quella lotta individuale della creatività che ha anche le sue soddisfazioni ma che è anche molto stressante. Il partecipare a una creazione collettiva, come qualche cosa cominciata prima di noi e che presumibilmente continuerà dopo di noi, ci dà l'impressione di una forza che passa attraverso di noi».
>
> (Calvino, 1995b, p. 1811)

Una condizione per cogliere il senso di un tale processo è quella della lettura dei testi originali, visto che la matematica è ancora in gran misura descrittiva.

> «[N]on si raccomanderà mai abbastanza la lettura diretta dei testi originali scansando il più possibile bibliografia critica, commenti, interpretazioni. La scuola e l'università dovrebbero servire a far capire che nessun libro che parla di un libro dice di più del libro in questione; invece fanno di tutto per fare credere il contrario».[53]
>
> (Calvino, 1995b, p. 1819)

52. Citato *supra* nel **par. 1**
53. Da *Perché leggere i classici* del 1981.

Testi originari da leggere ce ne sono; a caso: Poincaré, Hilbert, Grothendiek, Lautman, Dieudonné, André Weil, Riemann, Enriques, Connes, per tutti i gusti; dovranno prima conoscerli gli insegnanti per inserirli nei percorsi che propongono e sceglierli a seconda del percorso.

Ma esiste un settore dove gli insegnanti devono dedicarsi a una preparazione speciale, perché il quadro potrebbe cambiare rispetto a fine Novecento, quello delle dimostrazioni che per la loro lunghezza e complessità di argomenti di riferimento devono per forza essere svolte con un ITP (*Interactive Theorem Prover*). La preparazione informatica diventa una condizione per quella matematica.

Il primo uso di calcolatori nelle dimostrazioni si è avuto con le dimostrazioni di correttezza, dove l'ostacolo principale era la lunghezza come fonte di errori dovuti a stanchezza. Ora il fenomeno rischia di sfuggire di mano, o diventare più importante.

Gli ITP per produrre dimostrazioni verificano intanto la correttezza dei brani di dimostrazioni sottoposti, e per parte loro cercano nelle librerie enunciati collegati, ed eseguono altri brani della dimostrazione.

La differenza rispetto alle prime dimostrazioni automatiche ha due aspetti: da una parte lunghezza e ampiezza delle assunzioni diventano esorbitanti, e l'appello fatto a loro è basato soprattutto sulle analogie;[54] sicché regole di carattere globale devono essere utilizzate anche senza una precisa giustificazione; dall'altra certi passaggi puramente automatici devono essere ammessi, perché la ricerca non può che essere esclusiva di chi sa esplorare i *big data*. Siamo in piena IA.[55]

Ai risultati ottenuti si è obiettato che non si sa come seguire e verificare le scelte compiute, riconoscere l'intelligenza; si potrebbe dire, in linguaggio scolastico, che sono copiate da altri compiti ma Calvino a quanto pare era più disinvolto di molti successori, in quanto non sembra chiedere che le regole di scrittura siano giustificate da qualche principio superiore o più profondo, o di altra natura di quella linguistica:

> «la letteratura come la conoscevo io era un'ostinata serie di tentativi di far stare una parola dietro l'altra seguendo certe regole definite, o più spesso regole non definite né definibili ma estrapolabili da una serie di esempi o protocolli, o regole che ci siamo inventate per l'occasione cioè che abbiamo derivato da altre regole seguite da altri […]».[56]
>
> (Calvino, 1995a, p. 215)

Intanto si costruiscono enormi librerie, basi di dati di teoremi, libere e *open source*, a cui possono accedere i vari dimostratori costruiti e in corso di continuo perfezionamento: Coq, Isabelle/Hol, Mizar, Metamath, Agda, Lean e altri.

Quelli esistenti hanno conseguito alcuni successi sorprendenti nella formalizzazione di dimostrazioni matematiche: come il teorema di Hales-Ferguson della congettura di Kepler sull'incapsulamento delle arance (che l'ottimale sia quello delle cassette dei banchi del mercato). La congettura di Kepler è stata considerata dimostrata solo al 99% dagli esperti che hanno esaminato il lavoro di Hales sottoposto a pubblicazione.

Nelle utopie fantascientifiche la matematica è presente come strumento di regimentazione o ingabbiamento o spersonalizzazione; l'unica eccezione sembra essere quella di William Morris (1834-1896) in *News from Nowhere* del 1891, dove l'interesse per la matematica è visto come una bizzarria innocua in un paese felice e gentile del ventunesimo secolo, lavoro volontario e via le fabbriche inquinanti. La frequentazione della matematica si accompagna spesso alla scrittura di romanzi sul passato quando la gente era infelice: «*Mathematics and antiquarian novels stand on much the same footing*» (Morris, 1891/2003, p. 19).

54. Ricordiamo il giudizio negativo di Bourbaki sulle analogie riportato all'inizio del par. 5. Ma Bourbaki ha perso la battaglia, se intendeva combatterla. Le analogie sono state accettate anche dai suoi seguaci come André Weil.
55. Si veda nel numero di gennaio 2024 delle *Notices AMS* (Bayer et al., 2024).
56. Frase replicata *supra* all'inizio del par. 5.

Bibliografia

Bayer, J., Benzmüller, C., Buzzard, K., David, M., Lamport, L., Matiyasevich, Y., Paulson, L., Schleicher, D., Stock, B., & Zelmanov, E. (2024). Mathematical Proof Between Generations. *Notices of the American Mathematical Society*, *71*(1), 79–92. https://doi.org/10.1090/noti2860

Bischi, G. I. (2023). Italo Calvino, ipotenusa tra cateti ortogonali. *Matematica, Cultura e Società*. ser. 1, *10*(8), 123–139.

Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean Geometry.* Dover. (Titolo originale: *La geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo* pubblicato nel 1906).

Bourbaki, N. (1966). *Éléments de mathématique* (3e éd.). Hermann.

Calvino, I. (1983). *Palomar.* Einaudi.

Calvino, I. (1988). *Six Memos for the Next Millennium* (trad. di P. Creagh). Harvard University Press. (Titolo originale: *Lezioni americane. Sei proposte per il prossimo millennio* pubblicato nel 1985).

Calvino, I. (1991). *Romanzi e racconti.* (Vol. 1, M. Barenghi & B. Falcetto, Eds.). Mondadori.

Calvino, I. (1992). *Romanzi e racconti.* (Vol. 2, M. Barenghi & B. Falcetto, Eds.). Mondadori.

Calvino, I. (1994). *Romanzi e racconti.* (Vol. 3, M. Barenghi & B. Falcetto, Eds.). Mondadori.

Calvino, I. (1995a). *Saggi 1945-1985.* (Vol. 1, M. Barenghi, Ed.). Mondadori.

Calvino, I. (1995b). *Saggi 1945-1985.* (Vol. 2, M. Barenghi, Ed.). Mondadori.

Calvino, I. (2000). *Lettere 1940-1985.* (L. Baranelli, Ed.). Mondadori.

Calvino, I. (2023). *Lettere a Chichita 1962-1963.* (G. Calvino, Ed.). Mondadori.

Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.* Teubner.

Ceccato, S. (1968). *Cibernetica per tutti.* Feltrinelli.

Ceccato, S. (1972). *La mente vista da un cibernetico.* ERI.

Devlin, K. J., & Lorden, G. (2007). *The Numbers Behind Numb3rs: Solving Crimes with Mathematics.* Plume Books.

Frege, G. (2020). *Alle origini della nuova logica.* Bollati Boringhieri. (Titolo originale: *Wissenschaftlicher Briefwechsel* pubblicato nel 1976).

Gödel, K. (2006). *Opere, vol. 3: Saggi inediti e conferenze* (pp. 268–296). Bollati Boringhieri. (Titolo originale: *Collected Works, Vol. III: Unpublished essays and lectures* pubblicato nel 1951).

Hilbert, D. (1978). Problemi matematici. In M. Abrusci (Ed.), *Ricerche sui fondamenti della matematica* (pp. 145–162). Bibliopolis. (Titolo originale: Mathematische Probleme pubblicato nel 1901 in *Archiv der Mathematik und Physik*, *3*(1), 44–63, 213–237).

Lolli, G. (2011). Discorso sulla matematica. *Una rilettura delle* Lezioni americane *di Italo Calvino*. Bollati Boringhieri.

Lolli, G. (2018). *Matematica come narrazione*. il Mulino.

Lolli, G. (2019). *I teoremi di incompletezza.* il Mulino.

Lolli, G. (2021). *Il fascino discreto della matematica. Calvino, l'Oulipo e Bourbaki.* ETS.

Lolli, G. (2023a). Calvino e la matematica. *Matematica, Cultura e Societ*à. ser. 1, *10*(8), 109–125.

Lolli, G. (2023b). Molteplicità potenziale e creatività al tempo del computer: Un matematico del 2000 legge Calvino. *California Italian Studies*, *12*(1), 1–23. https://doi.org/10.5070/C312158127

Morris, W. (2003). *News from Nowhere*. Oxford University Press. (Originale pubblicato nel 1891).

Parisi, G. (2021). *In un volo di stormi. Le meraviglie dei sistemi complessi.* Rizzoli.

Pierantoni, R. (1981). *L'occhio e l'idea. Fisiologia e storia della visione*. Bollati Boringhieri.

Queneau, R. (1961). *Cent Mille Milliards de Poèmes.* Gallimard.

Queneau, R. (1962). Bourbaki et les Mathématiques de demain. *La Critique*, 176.

Queneau, R. (1972). Sur les suites s-addittives. *Journal of Combinatory Theory*, *12*, 31–71.

Queneau, R. (1976). Les Fondements de la Littérature/d'après David Hilbert. *La Bibliothèque oulipienne*, *1*(3). Seghers.

Queneau, R. (1981). *Segni, cifre e lettere e altri saggi.* Einaudi.

Weil, A., & Weil, S. (2018). *L'arte della matematica.* Adelphi. (Titolo originale: *Oeuvres complètes (Tome 7 Volume 1) – Correspondance familiale* pubblicato nel 2012).

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), 61 - 92, DOI: 10.33683/ddm.24.16.3

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Insegnare matematica come narrazione

Teaching Mathematics as Storytelling

Rina Zazkis e Peter Liljedahl
Faculty of Education, Simon Fraser University – Canada

zazkis@sfu.ca, liljedahl@sfu.ca

Sunto / In questo articolo viene presentata una selezione di tre capitoli del libro *Teaching Mathematics as Storytelling*, di Rina Zazkis e Peter Liljedahl (2009), nei quali si mette in evidenza che l'avvicinamento a concetti ardui della matematica con la mediazione delle storie consente un coinvolgimento attivo degli studenti nella costruzione di significati matematici e ne favorisce la comprensione profonda. Gli autori forniscono anche interessanti e molteplici esempi di come rimodulare storie già note, facendo sì che semplici problemi testuali presenti sui libri scolastici, diventino accattivanti spunti di narrazione e attività d'aula. Questo abstract, l'introduzione ai tre capitoli e la loro traduzione sono a cura di Angela Donatiello.

Ringraziamenti. Ringraziamo l'editore Brill per averci concesso di tradurre i capitoli 3, 7 e 8 del libro originale (https://brill.com/display/title/37619). Ringraziamo anche gli autori Rina Zazkis e Peter Liljedahl per il loro interessante lavoro e per averci sostenuto in questo progetto di traduzione di parte del loro libro.

Parole chiave: *storytelling*; matematica; insegnamento; *problem-solving*; coinvolgimento.

Abstract / In this paper we present a selection of three chapter from the book Teaching Mathematics as Storytelling, by Rina Zazkis and Peter Liljedahl (2009), in which they highlight that approaching difficult mathematical concepts with the mediation of stories allows for the active involvement of students in the construction of mathematical meanings and fosters deep understanding. The authors also provide interesting and multiple examples of how to rework familiar stories, turning simple textual problems found in school books into captivating storytelling prompts and classroom activities. This abstract, the introduction to the three chapters and their translation are edited by Angela Donatiello.

Acknowledgement. We would like to thank Brill Publisher for granting us to translate the chapters 3, 7 and 8 of the original book (https://brill.com/display/title/37619). We also thank the authors Rina Zazkis and Peter Liljedahl for their interesting work and for supporting us with this project of translating part of their book.

Keywords: storytelling; mathematics; teaching; problem-solving; engagement.

1 Introduzione

Il narrare storie rappresenta da sempre un atto di comunicazione umana che racchiude significati atavici legati alla sfera psichica ed emotiva. Esistono diverse forme di narrazione, da quella più teatralizzata a quella più orientata al coinvolgimento diretto dell'ascoltatore. Nei tre capitoli del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* di Rina Zazkis e Peter Liljedahl, che vengono proposti qui di seguito in traduzione, viene presentata un'idea di *storytelling* interattivo nei contesti educativi e, in particolare, durante le lezioni di matematica. Al fine di coinvolgere gli insegnanti nella sfida creativa che consente loro di promuovere l'avvicinamento a concetti ardui della matematica con la mediazione delle storie, gli autori presentano numerosi esempi di storie, espresse inizialmente in forma molto semplice e che vengono poi trasformate ed arricchite talvolta con l'introduzione di elementi narrativi coinvolgenti, altre volte con opportune variazioni della storia, per meglio esplicitare e rendere trasparente la problematica matematica sottostante.
In questa selezione di capitoli, si trovano suggerimenti su come introdurre le storie nelle ordinarie lezioni di matematica, veicolando tramite esse concetti come il senso del numero e la capacità di contare, la divisione per ripartizione e per contenenza, la divisione per zero, la divisione che ha come divisore una frazione e la manipolazione di interi negativi. Tali concetti, ritenuti complessi dagli studenti, creano spesso difficoltà ai docenti durante le tradizionali spiegazioni in classe, a causa di un ricorso eccessivo alle cosiddette "regole" o ad un uso acritico dei libri di testo, che propongono molti esercizi ripetitivi e pochissime attività di reale *problem-solving*. La proposta degli autori è quella di cambiare totalmente prospettiva, attivando il coinvolgimento degli studenti nell'ascolto e nella narrazione di storie in cui venga proposto un problema matematico aperto, fortemente coinvolgente e motivante che chiami in causa problematiche matematiche di difficoltà crescente, ma sempre inserite in un filone narrativo coerente.

2 *Storytelling*[1]

> «L'arte di raccontare una storia – quando il narratore ha trovato la storia che desidera – è stata descritta da molti, e io spero di non offendere nessuno dicendo che gli scrittori di tali libri falliscono per questa ragione – essi tentano l'impossibile».
>
> (Burrell, 1926/1971, p. 3)

Il modo di raccontare una storia assomiglia a quello di raccontare una barzelletta. Se vengono narrate in modo inefficace, infatti, si potrebbe perdere l'intenzione iniziale. Il testo che dovrebbe farci sorridere potrebbe anche farci alzare le spalle e chiederci come sia possibile che qualcuno abbia pensato che esso fosse divertente. Raccontare una storia è un'arte, un atto di improvvisazione.
Si ritiene che lo *storytelling* sia una delle più antiche forme di arte umana e anche la «prima forma conscia di comunicazione letteraria» (Shedlock, 1924, p. xiii). Burrell (1926/1971) si riferì allo *storytelling* come al «modo in cui la Natura insegna» (p. 2). Esso è «più vecchio della storia e non è confinato ad una civiltà, ad un continente o ad una razza» (Baker & Greene, 1987, p. 1). L'idea di universalità e di atemporalità dello *storytelling* è stata descritta da Burrell (1926/1971) come «un evento così consueto che nessuna latitudine e nessun secolo può esserne stato privo» (p. 5). Lo *storytelling* si è sviluppato

1. Questo capitolo è la traduzione del capitolo 3 del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009).

nelle prime civiltà in quanto soddisfaceva il bisogno degli uomini di comunicare con altri uomini, la necessità di intrattenere e di divertirsi e l'esigenza di spiegare il mondo fisico. Inoltre, il suo sviluppo è anche dovuto al fatto che lo *storytelling* soddisfaceva sia il bisogno estetico di espressione artistica sia il desiderio di tenere memoria di eventi e azioni degli antenati (Pellowski, 1977).
Baker e Greene (1987) riprendono l'idea di Lewis Carroll, che chiama le storie "doni d'amore", ed estendono questa metafora all'atto del narrare una storia, a cui essi si riferiscono come ad un "donare". Avendo intervistato centinaia di narratori, improvvisati e professionisti, invece, Haven (2000) propone la seguente definizione:

> «*STORYTELLING*: L'arte di usare il linguaggio, la voce e/o i movimenti fisici e i gesti per rivelare gli elementi e le immagini di una storia ad un pubblico specifico, dal vivo».
>
> (Haven, 2000, p. 215)

Haven ha inoltre notato che «lo *storytelling* è sia la più elementare modalità di comunicazione umana, sia una potente forma d'arte performativa» (p. 216). Fortunatamente, molti insegnanti sono padroni di quest'arte. Essi conoscono come interessare gli studenti ad una storia e come modificare la storia per soddisfare il pubblico. Tuttavia, davvero pochi portano questo talento in una lezione di matematica.[2]

2.1 Lo *storytelling* visto dalla parte dei narratori

Esistono narratori professionisti, che traggono dallo *storytelling* il loro sostentamento. Sebbene non ci siano dipartimenti di *storytelling* nei *college* e nelle università e neppure professori di *storytelling*, ci sono individui per i quali lo *storytelling* rappresenta la propria occupazione. Narrano storie sul palco, in parchi e librerie, nei caffè letterari e nelle sale da concerto, a raduni professionali e nei musei, nelle chiese e in luoghi di culto, in biblioteche e ospedali, a feste di compleanno e fiere di paese, nei festival e ad ogni evento speciale in cui le persone possano incontrarsi. Dedicati a loro e non solo, esistono eventi annuali di *storytelling* organizzati in biblioteche pubbliche e un'Associazione Nazionale per la Preservazione e la Perpetuazione dello *Storytelling* (NAPPS – *National Association for the Preservation and Perpetuation of Storytelling*).[3]
Alcuni narratori sono attori professionisti, altri invece sono amatori. Ci sono, tuttavia, differenze importanti fra la recitazione e lo *storytelling*, tra cui la principale è la relazione con il pubblico. Per un narratore il pubblico è vivo e non nascosto in una sala buia e, a differenza dell'attore sul palco che segue un copione studiato, il narratore di storie cambia il suo copione in base al riscontro che riceve dal pubblico.
Sono state scritte molte guide da e per i narratori professionisti (ad esempio Baker & Greene, 1987; Bauer, 1993; Burrell, 1926/1971; Shedlock, 1924) che includono informazioni rispetto a cosa dire, a come dirlo e a quali elementi prestare attenzione nella scelta di una buona storia per ogni specifica occasione. Queste guide offrono numerose risorse per delle buone storie, per attirare un pubblico di diverse fasce d'età anche per scopi differenti. Spiegano inoltre quali artefatti (burattini, decorazioni, allestimenti, maschere, pannelli, oggetti di artigianato, immagini ecc.) possono essere usati per accompagnare una storia, quando alzare la voce e quando rallentarla, quando fare una pausa, quali gesti fare o non fare e anche come respirare, come sistemare la scena e cosa indossare. Esse mettono in guardia i narratori dalle più comuni insidie, in cui un narratore può cadere, come l'uso di vocaboli sconosciuti al pubblico o, per contro, di una narrazione eccessivamente didascalica che abbasserebbe

2. Nota della traduttrice. Da qui in avanti è stato tradotto «*mathematics classroom*» con «*lezione di matematica*», in quanto nei contesti italiani non esistono propriamente delle classi di matematica, eccetto che in alcune scuole che attuano il modello DADA – Didattiche per Ambienti Di Apprendimento (www.scuoledada.it). Negli altri casi è comunque più diffusa l'idea di classe fissa e di ora di lezione variabile.
3. Nota della traduttrice. La *National Association for the Preservation and Perpetuation of Storytelling* (NAPPS), un'organizzazione non profit fondata nel 1975, ha cambiato nome nel 1994 in *National Storytelling Association* (NSA). Nel 1998, l'NSA si è divisa in due organizzazioni separate: la *National Storytelling Network* (NSN) (https://storynet.org/) e l'*International Storytelling Center* (ISC) (https://www.storytellingcenter.net/).

lo standard (Shedlock, 1924). Forniscono anche supporti professionali su come iniziare, come scegliere il luogo, o come migliorare la performance narrativa mediante indovinelli, canzoni, giochi o trucchi magici. I professionisti offrono, inoltre, consigli utili su cosa fare quando ci si annoia con una determinata storia o quando si è nervosi davanti al pubblico e anche suggerimenti su come gestire la disciplina e le interruzioni durante la narrazione.
Anche se per coloro che si dedicano solo occasionalmente alla narrazione è utile imparare i trucchi del mestiere dai narratori professionisti, in questo capitolo ci rivolgiamo ad un contesto ben specifico – lo *storytelling* in una lezione di matematica. In ogni caso, prima di passare al caso speciale della matematica, esaminiamo lo *storytelling* in classe, o in qualsivoglia contesto educativo in generale.

2.2 Lo *storytelling* nel contesto educativo

Per i narratori professionisti, la gioiosa esperienza di un pubblico nell'ascoltare buone storie, narrate bene, può essere una buona e sufficiente ragione per continuare a raccontare storie. Tra i molti benefici psicologici ed educativi dello *storytelling*, «la gioia drammatica che portiamo ai bimbi e a noi stessi» fu considerata da Baker e Greene (1987) come «la miglior ragione tra tutte» (p. 25).
Tuttavia, gli insegnanti non sono interessati solo alla storia in sé, al suo fascino drammatico e al divertimento per gli ascoltatori. Sono principalmente interessati a raccontare storie come mezzo per raggiungere un altro fine: accrescere l'interesse e far riflettere gli ascoltatori. In termini più generali, Baker e Green (1987) suggeriscono che lo *storytelling* abbia un effetto positivo sullo sviluppo sociale e cognitivo dei bambini evidenziando la rilevanza delle storie per gli educatori, i quali temono che l'enfasi della scuola sulle competenze cognitive possa andare a scapito dello sviluppo affettivo dei bambini. Gli autori esemplificano come lo *storytelling* «offra ai bambini l'opportunità di comprendere le motivazioni e gli schemi del comportamento umano» (p. 22) e li aiuti a superare i problemi psicologici.
Haven (2000) ha sintetizzato i 10 benefici dello *storytelling* come strumento educativo:

1. Lo *storytelling* è un elemento potente ed efficace nello sforzo di migliorare e sviluppare tutte le quattro abilità linguistiche di base (ascoltare, leggere, parlare e scrivere).
2. Le informazioni (sia i concetti che i fatti) vengono ricordate meglio e più a lungo quando sono presentate in una forma narrativa.
3. Lo *storytelling* è un potente ed efficace strumento di insegnamento interdisciplinare e trans-curricolare.
4. Lo *storytelling* motiva favorevolmente gli studenti ad apprendere. Le storie che vengono raccontate focalizzano l'attenzione e delineano l'apprendimento degli studenti incentivandoli a approfondire gli argomenti di cui esse trattano.
5. Lo *storytelling* costruisce in modo efficace la fiducia in sé stessi e l'autostima degli studenti.
6. Lo *storytelling* coinvolge e sviluppa in modo efficace le competenze di immaginazione e la creatività, meglio di qualsiasi altra singola attività di classe.
7. Lo *storytelling* coinvolge e diverte.
8. Lo *storytelling* crea empatia e senso di coesione.
9. Lo *storytelling* migliora le competenze analitiche e di *problem-solving*.
10. Lo *storytelling* crea legami preziosi con la comunità e il contesto culturale.

Non sorprende che il primo beneficio menzionato faccia la parte del leone in letteratura. Esaminando i libri identificati da una catalogazione tematica sullo *storytelling* all'interno di una biblioteca, abbiamo notato che circa i tre quarti di questi libri si occupano delle varie forme di espressione linguistica. Sembra esserci una naturale connessione tra la narrazione di storie e lo sviluppo dell'alfabetizzazione, l'estensione del vocabolario, l'introduzione di strutture del linguaggio e il miglioramento delle competenze linguistiche, sia orali che scritte. La forma narrativa è considerata il fondamento di come noi comprendiamo e concettualizziamo il linguaggio (Haven, 2000).
Il decimo beneficio, l'ultimo menzionato, è diventato estremamente popolare negli ultimi anni, perlo-

meno in Canada, grazie a una rafforzata enfasi educativa sul multiculturalismo e sulle Prime Nazioni.[4] Lo *storytelling* serve come mezzo per avvicinare i bambini alle diverse tradizioni e civiltà e per mantenere vivo il patrimonio culturale dei vari popoli.
La maggior parte degli scrittori è concorde sul fatto che lo *storytelling* possa supportare il curricolo scolastico; tuttavia, troviamo raramente menzionata la matematica tra i loro esempi specifici. Riteniamo però che ciò sia un peccato, cerchiamo così di colmare questa lacuna.

2.3 Lo *storytelling* in una lezione di matematica

Le storie non sono diffuse nelle lezioni di matematica: la maggior parte delle lezioni consiste in brevi spiegazioni da parte dell'insegnante, seguite da una serie di esempi che gli studenti poi imitano nel proprio lavoro. Anche quando vengono coinvolti il pensiero matematico avanzato o il *problem-solving*, sono raramente accompagnati da una storia. Sebbene molti scrittori parlino dello *storytelling* come di uno "strumento trans-curricolare", i loro esempi "intersecano" le forme di espressione linguistica con discipline come la storia o le scienze, ma non coinvolgono la matematica in modo adeguato.
Qual è, dunque, il beneficio di introdurre lo *storytelling* in una lezione di matematica? In aggiunta a tutti i benefici menzionati nel precedente paragrafo, specialmente come supporto alla memoria (2), alla motivazione (4), al coinvolgimento (7) e all'evoluzione delle competenze analitiche (9), le storie matematiche mirano a scopi aggiuntivi. Esse possono introdurre o spiegare concetti complessi in modo da renderli indimenticabili, coinvolgendo così gli studenti nelle attività di matematica; possono introdurre un elemento umano in una materia che è spesso percepita come arida e tecnica; possono apportare alla lezione di matematica una novità inaspettata e un cambiamento nella routine; possono rinnovare e sostenere l'atmosfera creativa ed offrire intrattenimento. Sebbene l'intrattenimento sia raramente menzionato come un obiettivo in un contesto educativo, il suo valore a sostegno di un ambiente di apprendimento produttivo non dovrebbe essere trascurato.
«Il segreto dello *story-telling* non può essere messo su carta» (Burrell, 1926/1971, p. 51), sta nel percepire il pubblico e coinvolgerlo, variando il copione dove necessario. Per questo motivo, qui di seguito ci cimentiamo in un tentativo arduo. È un tentativo di spiegare su carta ciò che noi crediamo essere il *narrare* una storia. Contiamo sull'immaginazione del lettore per dare "colore" e "sapore" al testo ed introdurre cambi di ritmo, pause, enfasi su parole specifiche o frasi, o momenti di silenzio.

2.4 Il contadino e il corvo: il racconto di una storia

Si consideri la seguente storia (Egan, 1986), spesso utilizzata per esemplificare il senso del numero e lo sviluppo dell'abilità umana del contare. Prima presentiamo una storia popolare e poi illustriamo in che modo possa essere narrata per raggiungere il suo pieno potenziale.

> «[Questa è] la storia del corvo che mangiava il grano del contadino. Il contadino aveva deciso di sparare al corvo che aveva fatto il nido nel suo fienile, ma quando il contadino giungeva al fienile, il corvo volava via e appena lasciava il fienile, il corvo tornava indietro. Pensando di ingannare il corvo, un giorno il contadino portò un amico con sé nel fienile. Quando il suo amico andò via, il contadino rimase all'interno del fienile, ma il corvo non si lasciò ingannare e rimase sul suo albero finché anche il contadino non uscì. Il giorno successivo il contadino portò due amici con sé al fienile e rimase indietro quando i due amici uscirono, ma il corvo ancora una volta attese che anche lui andasse via prima di tornare al suo nido. Il giorno dopo, il contadino portò con sé tre amici, con lo stesso risultato. Successivamente ne portò quattro, poi cinque. Quando i cinque amici andarono via, il contadino rimase indietro, quel giorno il corvo volò verso il suo nido e il contadino gli sparò».
>
> (Egan, 1986, p. 79)

Si consideri la seguente variazione della storia del corvo. La trama rimane la stessa, ciò che cambia è

4. Nota della traduttrice. Le Prime Nazioni, i Métis e gli Inuit sono i tre gruppi di popolazioni indigene del Canada.

il modo in cui la storia è presentata al pubblico. Lasciatecela *raccontare*.

> «C'era una volta, in una terra molto lontana da qui, un contadino. Lavorava duramente nei suoi campi per provvedere alla sua famiglia. Dopo il raccolto, depositava il suo grano in un piccolo fienile che aveva costruito accanto al suo campo. Qual era il suo nome? Diamogli un nome. [Rivolgendosi ad uno degli studenti] Come vorresti chiamare questo contadino?»
> «Travis».
> «Travis? Hai mai incontrato un contadino di nome Travis?»
> «Jake».
> «Quale nome vuoi dargli? OK, Jake. Così questa è la storia del contadino Jake e di un corvo. Perché un corvo? Vi dirò il perché. C'era un brutto corvo che aveva fatto il suo nido nel fienile, ma la cosa peggiore era che questo corvo mangiava il grano di Jake. Così Jake decise di sparare al corvo. Cosa vorresti fare se qualcuno stesse mangiando il grano che hai coltivato per sfamare la tua famiglia? Oh – Capisco. A voi non piace sparare. OK. Sono d'accordo con voi. Modifico la storia. Il contadino decise di sbarazzarsi del corvo in modo pacifico, catturandolo, ma ogni volta che il contadino si avvicinava a lui, il corvo volava via. Come posso catturare il corvo? – pensò Jake».

Qui ci fermiamo e lasciamo che gli studenti diano suggerimenti. In alcuni casi la risposta dell'insegnante potrebbe essere: «Infatti, Jake provò la strategia che suggerisci, ma non funzionò. Aveva bisogno di qualcosa di diverso». E poi continuiamo con la narrazione.

> «Jake pensa, pensa e ripensa… e all'improvviso, ebbe un'idea».

La parola sopra in corsivo suggerisce un'enfasi nel tono del narratore.

> «Decise di portare un amico con sé al fienile. Qual era il nome del suo amico?»
> «George».
> «Così un giorno il contadino Jake e il suo amico George andarono al fienile insieme. Dopo un po' George andò via e il contadino Jake rimase indietro ad aspettare il corvo, ma [pausa], il corvo non tornò. Il corvo non si era lasciato ingannare; non tornò fintanto che il contadino non lasciò il fienile. Jake era amareggiato e stanco. Aveva atteso per molte ore nel fienile e il corvo, che aveva capito il piano di Jake, non era tornato. Così Jake ancora pensa, pensa e ripensa e all'improvviso…»

Qui si fa una pausa, lasciando che gli studenti continuino. Se nel giro di pochi secondi non dovesse nascere una risposta spontanea, si potrebbe porre una domanda del tipo «Cosa accadde?».

> «Jake ebbe un'altra idea?»
> «Esattamente. E sapete qual era quest'idea? No? Decise di portare due amici con sé al fienile. Così Jake e George invitarono – chi?»
> «Joe?»
> «Invitarono Joe ad andare con loro. La mattina successiva il contadino Jake e i suoi amici George e Joe andarono insieme al fienile. [Ad uno studente] – Potresti continuare tu a raccontare la storia?»
> «George e Joe andarono via, Jake rimase e il corvo non tornò».
> «Per favore, raccontaci la storia, non sintetizzare i fatti».
> «Jake, George e Joe andarono insieme al fienile. Era una piacevole mattinata per godersi una rilassante passeggiata. Dopo un po' George e Joe andarono via e il contadino Jake rimase ad aspettare il ritorno del corvo, ma [pausa] il corvo non tornò. Il corvo non

> si era lasciato ingannare; rimase lontano dal fienile finché il contadino non andò via. Jake era amareggiato ed era anche molto stanco di aver atteso per ore nel fienile che il corvo tornasse. Pensa, pensa e ripensa e…»
> «Grande. Grazie. Chi vuole continuare la storia?»

A questo punto gli studenti possono raccontare una parte di storia a rotazione, incoraggiati ad aggiungere dettagli.

> [...]
> «Così il giorno successivo il contadino Jake e i suoi amici George e Joe, le loro mogli, Emily e Francheska, e Mary, la sorella di Emily, andarono al fienile. George e Joe, le loro mogli, Emily e Francheska, e Mary, la sorella di Emily, andarono via, mentre Jake rimase ad aspettare il corvo. Ma [pausa]».
> «Qui devo interrompervi e dirvi esattamente cosa accadde quel giorno. Se qualcuno di voi pensa che la nostra storia stia diventando ripetitiva e noiosa, presti attenzione adesso. Come sappiamo, il contadino Jake era lì e aspettava il corvo. Aspettava, aspettava e aspettava, fino a che… il corvo tornò. Finalmente Jake fu in grado di sbarazzarsi del corvo, in modo pacifico naturalmente. [Ad uno studente] Mi sembri sorpreso, ma è così che la nostra storia finisce. Cosa accadde al contadino? Visse per sempre felice e contento ed inviò cartoline di ringraziamento ai suoi amici George e Joe, alle loro mogli, Emily e Francheska, e a Mary, la sorella di Emily. O può essere che abbia dato una grande festa e li abbia invitati. Ditemi voi. Il corvo non lo disturbò più. E anche se lo avesse fatto, Jake avrebbe saputo come liberarsene. In modo pacifico, naturalmente. E vissero tutti felici e contenti. Questa è la nostra storia di oggi. A proposito, di cosa parla questa storia?»

2.5 Dopo la narrazione della storia

Una possibile domanda da porre agli studenti per incentivare la discussione dopo aver raccontato la storia potrebbe essere «Il corvo sapeva contare fino a 4, ma non fino a 5 o 6? E cosa significa saper contare? Qual è la natura del contare?».
Numerose specie animali, infatti, condividono con gli esseri umani il senso del numero, ma solo gli esseri umani hanno sviluppato l'abilità del contare, cioè del mettere in corrispondenza biunivoca le parole-numero con gli oggetti che si stanno contando, associando l'ultimo numero della sequenza alla totalità degli oggetti dell'insieme. Questa storia può aiutare i bambini, e non solo, a distinguere tra il senso del numero, che è innato, e il contare che – sebbene sia accessibile già ad una tenera età – è un prodotto dell'ingegno e delle conquiste dell'essere umano. Gli uomini primitivi non contavano, ma, per numeri piccoli, avevano l'abilità di distinguere le quantità di diversi gruppi di oggetti. Si trova riscontro di questo aspetto nello sviluppo del linguaggio. Ad esempio, in ebraico – la più antica lingua ancora viva – la parola "molti" (*harbe*) ha la stessa radice del termine "quattro" (*arba*). Tale somiglianza di parole fa intendere che un tempo queste quantità fossero espresse in modo simile.
La lezione può continuare con il tentare di trovare il limite da parte di una persona della percezione della quantità, cioè, quale numero di oggetti può essere riconosciuto senza un effettivo conteggio. L'insegnante può mostrare diverse quantità di oggetti per una frazione di secondo. Naturalmente non ci sarà il tempo di contarle, ma la maggior parte dei bambini riconoscerà facilmente il numero quando la quantità di oggetti è 4 o 5. Il riconoscimento di un insieme di oggetti più grande di 5 dipenderà, molto probabilmente, dalla loro sistemazione in uno schema ordinato. Ad esempio, la seguente Figura 1[5] presenta 9 e 10 oggetti. La facilità con cui il numero di oggetti viene riconosciuto, senza contare, dipende dallo schema con cui gli oggetti vengono presentati.

5. Nota della traduttrice. Le immagini presenti nel testo sono tratte dal testo originale. La notazione in grassetto delle figure e la loro didascalia seguono le linee redazionali della rivista e sono inserite dalla traduttrice.

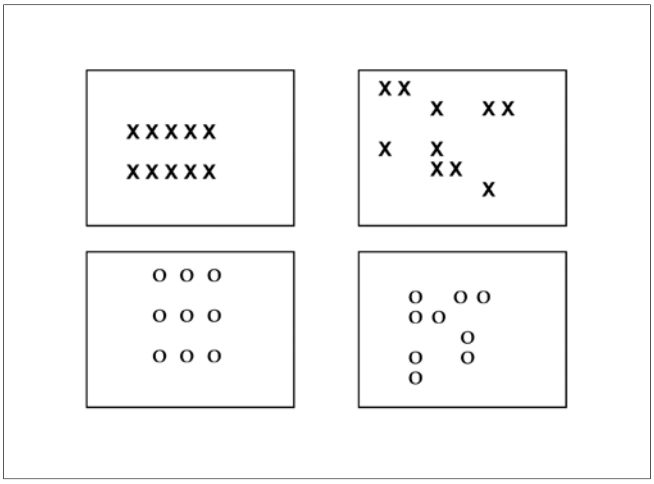


Figura 1. Possibili schemi in cui vengono sistemati 9 e 10 oggetti (nella prima colonna gli schemi ordinati).

Mentre gli studenti più giovani (classi I–II elementare) possono imparare ad apprezzare le meraviglie del contare, per gli studenti più grandi (classi IV–V elementare) l'attività può svilupparsi come raccolta dati sulla percezione della quantità, rappresentandoli su un diagramma a barre.

In accordo con Egan (1986) la storia del corvo presenta il senso del numero e il contare come "opposti binari astratti" – uno strumento cognitivo posseduto dai giovani studenti che contribuisce al loro coinvolgimento con il contenuto. Tuttavia, l'esistenza di "opposti binari astratti" o di qualche conflitto in una storia potrebbe non essere sufficiente a creare coinvolgimento. È il narratore che permette (o facilita) che ciò accada. Sebbene le sfumature nella narrazione, come alzare la voce, cambiare ritmo o fare pause, siano difficili da esemplificare per iscritto abbiamo cercato di farlo; ma tali sfumature possono essere apprese solo con l'esperienza.

Abbiamo anche esemplificato numerose idee per il coinvolgimento degli studenti nella narrazione della storia. Tale coinvolgimento spazia dal fornire semplici risposte, come lo scegliere un nome per un luogo o un personaggio e raccontare nuovamente parti ripetitive della storia, all'aggiungere variazioni e sfumature. Ciò che potrebbe essere visto come una temporanea deviazione dal percorso stabilito può, in realtà, aiutare a mantenere gli studenti concentrati, interessati e coinvolti.

A volte gli insegnanti che sperimentano le nostre storie nelle nostre classi ci chiedono consigli sul come raccontarle o ci chiedono di identificare quelle caratteristiche che "funzionano". Crediamo però che i consigli da parte degli esperti possano essere utili solo fino ad un certo punto, perché il modo migliore per imparare lo *storytelling* è semplicemente raccontare storie. Tuttavia, ci permetteremo di dare qualche piccolo consiglio.

Raccontate ogni storia a parole vostre: lo sforzo di memorizzare distoglie l'attenzione dall'esperienza. Se lo *storytelling* diviene parte integrante del vostro stile di insegnamento, trovate una modalità per proporre un "tempo delle storie": può essere un gesto o una postura che sceglierete per iniziare le vostre storie e che gli studenti impareranno a riconoscere. L'espressione «C'era una volta», riconosciuta come un'introduzione peculiare delle fiabe popolari, può servire da buon incipit per ogni storia, e può essere anche utilizzata con umorismo nel caso in cui un racconto non assomigli affatto ad una fiaba popolare. Modificate la storia in modo appropriato – percepite il pubblico e coinvolgetelo. Siate flessibili ad accogliere i suggerimenti degli studenti. Se la storia presenta uno schema ripetitivo, potreste invitare uno degli studenti a raccontarne una parte. Cercate di garantire una transizione graduale tra la storia e la discussione o l'attività successiva. Raccogliete storie diverse, adattandole ai vostri scopi, in modo che sembrino proprio vostre. E, naturalmente, non dimenticate la matematica; dopo tutto, mentre le storie hanno molti scopi differenti, sociali e psicologici, il nostro scopo principale è quello di migliorare l'apprendimento della matematica.

Arthur Burrell (1926/1971), la cui citazione ha dato il via a questo capitolo, fece la seguente osservazione circa le linee guida sullo *storytelling* nel suo *Guide to story telling*: «Quando abbiamo trascritto le nostre poche regole [...] tutto ciò che ha un valore autentico è stato omesso» (p. 3). Invitiamo, pertanto, il lettore a trovare il "valore autentico" (nascosto) tra le righe.

3 Storie che spiegano[6]

La matematica è spesso percepita da chi apprende come una collezione di fatti e abilità; fatti e abilità che sono talvolta visti come controintuitivi. Quando ciò accade, una reazione comune è cercare di rifugiarsi in una memorizzazione di regole senza senso. Gli insegnanti esperti possono facilmente individuare queste zone, in cui l'incontro con la matematica è maggiormente disorientante e le regole sono più diffuse. Anziché recitare regole, tuttavia, suggeriamo di spiegare tali regole mediante le storie. Ciò ci introduce a nuovi tipi di storie – storie che spiegano. La divisione per zero, la divisione per una frazione e la manipolazione di interi negativi sono solo alcuni esempi dei concetti che gli studenti trovano difficili da comprendere e gli insegnanti trovano ancor più ardui da spiegare. Cercheremo di spiegare questi concetti mediante una storia. Identificheremo poi un tema ricorrente nelle nostre storie, il tema della variazione numerica e ci occuperemo di ulteriori situazioni in cui la variazione delle storie possa favorire l'apprendimento.

3.1 Storie che spiegano un concetto

3.1.1 Divisione per una frazione e il sarto confuso

Dal punto di vista algoritmico, la divisione per una frazione non è una questione problematica – *non si tratta di ragionare, perché basta invertire e moltiplicare*. Concettualmente, invece, la divisione per una frazione è molto problematica, questo fa sì che gli allievi per risolverla memorizzino la regola rafforzando la percezione che la matematica non sia altro che un insieme di regole. La meccanica della regola è meglio spiegata come una "scorciatoia" per un processo che coinvolge rappresentazioni diverse, rapporto tra frazioni e la moltiplicazione del numeratore e del denominatore per l'inverso del denominatore. Ad esempio, si consideri la seguente Figura 2.[7]

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}}{\frac{5}{6} \times \frac{6}{5}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5}$$

Figura 2. Esempio di applicazione della procedura utilizzata per semplificare un rapporto tra frazioni.

Persino quando le tecniche della "scorciatoia" risultano chiare, la divisione per una frazione resta ancora un mistero. Da un lato, essa si scontra con la percezione comune, consolidata dall'esposizione a divisioni di numeri interi, per cui "la divisione diminuisce sempre". Numerose ricerche hanno descritto

6. Questo capitolo è la traduzione del capitolo 7 del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009), dal titolo originale *Stories that explain*.
7. Nota della traduttrice. Si è scelto di non riscrivere le espressioni algebriche, bensì di riportarle come immagini riprese dal testo originale, al fine di non tradire la rappresentazione data dagli autori. Tutte le immagini raffiguranti calcoli ed espressioni sono riprese direttamente dal testo originale.

la forza di tale convinzione e il conflitto cognitivo che viene attivato dall'esposizione al fatto che in alcuni casi la divisione non rende il dividendo più piccolo. Dall'altra parte, molte persone hanno difficoltà ad immaginare una situazione in cui sia richiesta la divisione per una frazione. Ball (1990) chiese ad insegnanti di scuola elementare di creare un problema che potesse essere modellizzato e risolto dal seguente calcolo (**Figura 3**).

$$2\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$$

Figura 3. Esempio di calcolo proposto da Ball.

Solo pochissimi partecipanti al suo studio ebbero successo nel creare un problema appropriato e, per la nostra esperienza, il compito risulta essere problematico anche per persone con una significativa formazione matematica. La maggioranza delle persone, quando gli si chiede di scrivere un problema che può essere modellizzato con la divisione per una frazione, scrive storie che coinvolgono la moltiplicazione per una frazione.
Per capire come mai un compito apparentemente semplice porti a soluzioni errate, dobbiamo distogliere la nostra attenzione dalla narrazione e considerare due diverse situazioni che riguardano la divisione. Prima ancora di ciò, invitiamo il lettore a scrivere un problema-storia che possa essere risolto con la seguente divisione: 40 : 8. Scrivete qualcosa di semplice, la prima cosa che vi viene in mente. Torneremo su questo compito a breve.
Ora introduciamo due tipi di divisioni: per contenenza[8] e per ripartizione.[9] Immaginiamo 5 ceste con 4 mele ciascuna. Quante mele ci saranno in ogni cesta? Il totale di 20 mele viene trovato mediante una moltiplicazione, 4 × 5. Tuttavia, se il totale è noto, possono essere creati due diversi problemi che possono essere modellizzati con una divisione:

1. 20 mele vengono sistemate in 5 ceste. Quante mele ci saranno in ogni cesta, (assumendo che tutte le ceste abbiano lo stesso numero di mele)?
2. 20 mele vengono sistemate in ceste, in modo che ci siano 4 mele in ogni cesta. Quante ceste sono necessarie?

Il Problema 1 è un esempio di divisione *per ripartizione*. La quantità totale (le 20 mele) è suddivisa in parti uguali (le ceste). Il numero delle parti è noto (5) e la domanda richiede la quantità (di mele) in *ogni* parte. Questo tipo di modello è anche definito come *sharing model of division* (letteralmente modello di divisione per condivisione).
Il Problema 2 è un esempio di divisione *per contenenza*. Anche in questo caso, la quantità totale (le 20 mele) è suddivisa in parti (le ceste). Tuttavia, il numero di parti è sconosciuto. Ciò che è nota è la quantità (di mele) in *ogni* parte. Questo tipo di modello è anche definito come *measurement model of division* (modello di divisione "per misurazione") – in alcuni contesti può anche essere definito come *scooping model* (modello "del misurino").[10]
Siamo ora pronti a confrontarci con divisioni che hanno come divisore una frazione. Il problema sta nel fatto che, per molte persone, il modello per ripartizione risulta essere quello più intuitivo. Quando si considerano delle divisioni, le situazioni che vengono in mente alla maggior parte delle persone

8. Nota della traduttrice. Il modello di divisione *per contenenza* nei Paesi anglofoni viene chiamato *quotitive model of division*.
9. Nota della traduttrice. Il modello di divisione *per ripartizione* nei Paesi anglofoni viene chiamato *partitive model of division*.
10. Nota della traduttrice. Le denominazioni utilizzate sono quelle diffuse nei Paesi anglofoni.

sono situazioni per ripartizione. Prima abbiamo invitato il lettore a scrivere un problema sulla divisione, il primo che gli venisse in mente, modellizzabile con l'operazione 40 : 8. Nella nostra esperienza, la maggior parte delle persone pensa ad un modello per ripartizione. I problemi più comuni che vengono formulati sono, cioè, quelli in cui 40 persone sono sedute intorno ad 8 tavoli o 40 caramelle sono condivise tra 8 amici. Da qui sorgono le difficoltà nel trattare una divisione che ha come divisore una frazione – essa può essere modellizzata solo mediante un modello per contenenza. Pertanto, per introdurla, iniziamo con un noto problema di divisione con numeri interi per poi, gradualmente, variare la situazione. Raccontiamo una storia:

> Un sarto che possedeva 40 iarde[11] di tessuto ricevette un ordine per costumi di carnevale in maschera. Il sarto stabilì che, per ogni costume, erano necessarie 5 iarde. Quanti costumi avrebbe potuto realizzare?

L'ovvia risposta (8) si ottiene dividendo la quantità totale (40) per la quantità necessaria per ogni costume (5). Questo è un esempio di divisione per contenenza. Ora possiamo variare la storia.

> Il sarto si era poi reso conto che doveva realizzare dei costumi più piccoli e che per ogni costume erano dunque necessarie solo 4 iarde. Con la stessa stoffa, quanti costumi avrebbe potuto realizzare?
>
> Mentre tirava fuori le sue forbici per iniziare a tagliare il tessuto, ricevette una telefonata – l'ordine era cambiato. Invece di costumi, doveva realizzare abiti ed ogni abito richiedeva 2 iarde di tessuto.
>
> Poi l'ordine cambiò nuovamente, non era più per vestiti, ma per gonne e ogni gonna richiedeva una iarda di tessuto…

Iniziando con la nota situazione dei numeri interi, abbiamo stabilito che il numero di capi (costumi, abiti, gonne ecc.) che si possono ricavare dalla stoffa si trova dividendo la quantità totale di tessuto per la quantità necessaria per ogni oggetto. La sequenza di divisioni che modellizzano i problemi può essere annotata come in **Figura 4**.

$$
\begin{aligned}
40 \div 5 &= 8 \\
40 \div 4 &= 10 \\
40 \div 2 &= 20 \\
40 \div 1 &= 40
\end{aligned}
$$

Figura 4. Sequenza di divisioni che modellizzano i problemi proposti.

Ora siamo pronti a passare alle frazioni.

> Se l'ordine non fosse per gonne, ma per grembiuli e se per ogni grembiule fosse necessaria 1/2 di iarda di tessuto, quanti grembiuli potrebbero essere realizzati?

11. Nota della traduttrice. Unità di misura di lunghezza, utilizzata in Paesi di cultura anglosassone. 1 iarda corrisponde a circa 91 centimetri.

Questa situazione non è diversa da quelle precedenti e la divisione per una frazione, 40 : 1/2 è stata agevolmente introdotta usando una storia. A questo punto si possono formulare nuovi quesiti variando la quantità di tessuto necessaria per ogni capo. Suggeriamo di affidare questo compito agli studenti, lasciando che siano loro a scegliere che cosa far realizzare al sarto – delle cravatte, delle sciarpe, dei fazzoletti – e quale frazione di iarda si richiede per ognuno di questi capi. Per ogni ordine suggerito si modellizzerà e risolverà il problema con la divisione corrispondente: 40 : 1/2, 40 : 1/3, 40 : 2/3, 40 : 2/4 ecc. Crediamo che sia importante lasciare il tempo agli studenti di scoprire da soli le risposte a questi quesiti, prima di introdurre la tecnica dell'"inverti e moltiplica". Mentre la divisione per unità frazionarie presenta un ovvio collegamento con la moltiplicazione, le altre frazioni dovrebbero essere introdotte nella storia gradualmente, magari non nello stesso giorno. Oltre a un'introduzione significativa ad un concetto problematico come la divisione con divisore una frazione, la storia ha raggiunto un altro importante obiettivo: ha aiutato a confrontarsi con l'aspettativa che "la divisione diminuisca sempre", immergendo gli studenti in una situazione in cui il risultato della divisione è chiaramente più grande del dividendo.

3.1.2 Divisione per zero e il re dei diamanti

La divisione per zero è nota per essere un'altra questione problematica per chi apprende, siano essi giovani o anziani. Fu anche la causa della grande minaccia Y2K,[12] ma essendo sopravvissuti alcuni anni nel nuovo millennio tendiamo a dimenticarcene.

La divisione di un numero *per zero* è spesso confusa con la divisione *di zero* per un altro numero, creando l'errata convinzione che la divisione per zero dia come risultato zero. Matematicamente parlando, la divisione per zero è indefinita. Spesso quest'idea è interpretata dagli studenti in modo inappropriato, alcuni affermando che la divisione per zero sia un errore, altri che dia come risultato infinito, per altri che sia impossibile o altri ancora che "non sia consentita". Ognuna di queste interpretazioni erronee è a suo modo problematica. L'idea che sia un "errore" nasce dall'esperienza, dal tentare di calcolare la divisione per zero mediante una calcolatrice: la maggior parte delle calcolatrici infatti restituisce qualche messaggio di errore. Alcune calcolatrici forniranno addirittura come risultato "infinito", dovuto a un uso improprio dell'idea di limite da parte di un programmatore.[13] Il riferimento al fatto che sia "impossibile" genera l'impressione che la divisione per zero possa diventare possibile in futuro. Dopo tutto, sottrarre 5 da 2 era "impossibile" prima di introdurre i numeri negativi e la divisione di 5 per 2 era "impossibile" prima di introdurre le frazioni. Ciò nonostante, il riferimento più problematico è l'idea che la divisione per zero "non sia consentita". Chi non lo permette? A quanto ammonta la sanzione da pagare? Ci sono molte cose "non consentite" che sono anche possibili, come parcheggiare in una zona con divieto di parcheggio o fumare in una zona non fumatori. "Non consentito" è un'espressione particolarmente problematica con gli allievi, dal momento che le insegnanti non consentono una innumerevole quantità di cose, come parlare ad un amico, masticare una *chewing gum*, correre nell'atrio, consegnare i compiti assegnati in ritardo ecc. La divisione per zero è una di queste regole inventate dalle insegnanti e supportate dall'amministrazione scolastica? È ancora possibile fare qualcosa di non consentito se non si viene scoperti?

Una storia può chiarire una questione come questa, così difficile da risolvere.

> Dopo la morte di un re vengono prese in considerazione le sue ultime volontà testamentarie. Il testamento stabilisce che i suoi 12 diamanti siano divisi equamente tra la sua progenie vivente. Supponiamo che ci siano 6 figli (una variante alternativa altrettanto valida alla situazione del re deceduto e dei suoi eredi potrebbe essere rappresentata da una situazione in cui una nonna ha a disposizione 12 biscotti e 6 nipoti che vanno a farle visita).

12. Nota della traduttrice. Nota anche come *Millennium Bug*.

13. Nota degli autori (Zazkis & Liljedahl, 2009, p. 54). Il risultato della divisione per zero non è infinito. Tuttavia, il limite di una successione a/x, per reali a positivi e con x tendente a zero da destra, è infinito.

Non è necessario convincersi più di tanto per capire che ogni erede riceverà 2 diamanti e che il 2 si ottiene dalla divisione 12 : 6. Ma prima di variare la storia, concentriamoci su questi 2 diamanti. La risposta «2 diamanti» a quale domanda corrisponde? La domanda che si sta cercando è: «Quanti diamanti riceverà ogni erede?». Stabilito questo, possiamo variare la nostra storia.
Supponiamo che ci siano solo 4 figli. Perché 4 e non 6? La risposta sta alla creatività e all'immaginazione del narratore. Potrebbe essere accaduto che 2 dei figli siano morti travolti da una valanga. Oppure, forse, il fratello più grande, il primogenito, era estremamente insoddisfatto all'idea di una divisione equa dell'eredità poiché credeva che, in qualità di primogenito, avrebbe dovuto ottenere una parte importante del tesoro di suo padre, se non addirittura tutto il patrimonio. Così trovò il modo di versare del veleno nelle bevande dei fratelli e riuscì ad ucciderne due. Qualunque sia la strada scelta, i fatti raccontati riducono il numero di eredi da 6 a 4. Quanti diamanti riceverà ora ogni figlio? Ancora una volta, la risposta 3 verrà dal dividere il numero di diamanti (12) per il numero di figli (4). Si può poi continuare la storia.
Con l'intento di coinvolgere gli ascoltatori nella storia, chiediamo agli studenti di suggerire cosa accade ad un altro figlio. Un incidente d'auto? Un infarto? Un rapimento alieno? Era così triste per la morte del re che morì di dolore? Spesso i suggerimenti degli studenti sono connessi con gli eventi di attualità, come uragani, attacchi terroristici o accoltellamenti. Non è necessario mettersi d'accordo su questa serie di sfortunati eventi, ma è essenziale e facilmente raggiungibile essere d'accordo sul fatto che, essendoci 3 figli in vita, ognuno di loro riceverà 4 diamanti in eredità. Ribadiamo che l'operazione 12 : 3 viene effettuata per rispondere alla domanda «Quanti diamanti riceverà ciascun erede?». In modo simile, se ci fossero solo 2 eredi, ognuno di loro riceverebbe 6 diamanti e se il re avesse un solo figlio in vita, tale figlio riceverebbe tutti i 12 diamanti in eredità, poiché 12 : 1 = 12.
Finora non è stato descritto nulla di insolito dal punto di vista matematico, ma ora la scena è pronta. È il momento della tragica conclusione della nostra storia. L'ultimo figlio rimasto del re è morto in un incidente aereo mentre si recava al funerale del padre. Ora, non ci sono più eredi, ovvero ci sono zero eredi. A questo punto il testamento non è chiaro, così come la matematica. Ci sono ancora 12 diamanti, ma non possiamo più rispondere alla domanda «Quanti diamanti riceverà ogni erede?». Come non possiamo rispondere alla domanda «Quanti biscotti riceverà ogni nipote?» se nessun nipote si recherà a far visita alla nonna. I diamanti andranno alla corona, la nonna mangerà i biscotti da sola o li condividerà con un vicino di casa; e la nostra domanda resterà senza risposta e la divisione per zero *indefinita*.
Siamo convinti che richiamare alla memoria questa storia, o un'altra simile, chiarisca l'insidiosa questione della divisione per zero e possa anche ridurre la confusione tra la divisione per zero e la divisione tra zero e un altro numero. Naturalmente, una storia non è l'unico modo per spiegare questo concetto. Qui di seguito presentiamo una spiegazione aggiuntiva, costruita sulla percezione di schemi e relazioni. Qual è la spiegazione migliore? Non solo la bellezza è negli occhi di chi guarda, ma lo sono anche l'utilità e il potere esplicativo percepito. Raccomandiamo pertanto la strategia dell'artiglieria russa: sparare molte volte, sparare in molti posti e sperare che alla fine, da qualche parte e in qualche momento, si riesca a colpire un bersaglio.
Come al solito, iniziamo con qualcosa di familiare per poi procedere gradualmente verso l'obiettivo. Iniziamo dunque con il mettere in evidenza una relazione familiare tra la moltiplicazione e la divisione (Figura 5).
Riempiamo gli spazi vuoti.

$12 \div 3 = \_\_\_$	$\rightarrow$	$\underline{4} \times 3 = 12$
$10 \div 5 = \_\_\_$	$\rightarrow$	$\underline{2} \times 5 = 10$
$24 \div 8 = \_\_\_$	$\rightarrow$	$\underline{3} \times 8 = 24$

Figura 5. Esempi di *cloze* (completamento) sulla relazione tra la divisione e la moltiplicazione.

Come prima cosa, cerchiamo un numero che moltiplicato per 3 dia come risultato 12, ossia ci chiediamo quale numero moltiplicato per 3 è uguale a 12? La risposta è 4 cioè il risultato di 12 : 3.
Questo risultato deriva dalla comprensione della relazione tra moltiplicazione e divisione. Con gli studenti, è opportuno affrontare una serie di esempi analoghi prima di tentare di riempire il vuoto per l'uguaglianza in **Figura 6**.

$$18 \div 0 = \_\_\_ \quad \rightarrow \quad \underline{?} \times 0 = 18$$

Figura 6. Esempio di richiesta di completamento in una potenziale divisione per zero.

Seguendo lo schema degli esempi precedenti, chiederemo: quale numero moltiplicato per 0 dà 18? Questo numero sarebbe il quoziente della divisione di 18 per zero, ma tale numero non esiste. Non c'è nessuna possibilità di definire la divisione per zero in modo che si mantenga la coerenza con l'operazione inversa, la moltiplicazione. Ancora una volta la lasciamo, pertanto, *indefinita*.
Nello spirito dell'artiglieria russa a cui ci si riferiva prima, che potrebbe fare una storia a sé stante, presentiamo ancora un'altra spiegazione, quella che connette la divisione con la sottrazione ripetuta. È pratica comune introdurre la moltiplicazione come addizione ripetuta, tuttavia, la divisione è usualmente introdotta e pensata come l'operazione inversa della moltiplicazione. In alternativa però, possiamo pensare alla divisione come ad una sottrazione ripetuta. Consideriamo ad esempio 28 : 7 = 4. In termini di divisione per ripartizione (discussa in precedenza), possiamo pensare a 28 elementi disposti in 7 insiemi uguali, oppure, in termini di divisione per contenenza, possiamo pensare di formare insiemi di 7 elementi e chiederci quanti insiemi ci saranno in tutto. Un possibile approccio per la modellizzazione di tale situazione è quello di sottrarre ripetutamente insiemi di 7 elementi dai 28 elementi iniziali, ovvero di "misurare" 28 elementi con l'unità di misura costituita da un gruppo di 7 elementi. Per calcolare 28 : 7, chiederemo quindi «Quanti gruppi di sette elementi possono essere tolti dai 28 elementi iniziali, finché non ci sia più nulla da rimuovere?». Numericamente ciò corrisponde a svolgere le operazioni 28 – 7 – 7 – 7 – 7 = 0. Si possono togliere dunque quattro gruppi di sette elementi.
Replicando con altri esempi numerici, trattiamo 15 : 3. Possiamo interpretare questa divisione come «Quanti gruppi di 3 elementi possono essere sottratti da 15 elementi fino ad arrivare a zero?». Abbiamo bisogno di 5 gruppi di tre elementi, ossia 15 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3 = 0.
Facciamo molta attenzione alla terminologia. Una tendenza comune è quella di chiedere «Quante volte puoi sottrarre il 3 da 15?». Una risposta burlona potrebbe essere: «Puoi sottrarlo tutte le volte che desideri, se lo fai correttamente ottieni 12 ogni volta».
A parte gli scherzi, a cui nel libro è dedicato un capitolo apposito,[14] portiamo il discorso verso il caso della divisione per zero. Al fine di trovare una risposta a 15 : 0, chiediamo «Quanti zeri è necessario sottrarre da 15 (o da qualsiasi altro numero) per arrivare a zero?».

$$15 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 \ldots ???$$

Anche a questa domanda «Quanti…?» non esiste risposta, il che lascia la divisione per zero come *indefinita*.

14. Nota della traduttrice. Il capitolo a cui fanno riferimento gli autori è il Capitolo 9, *Stories that tell a joke* (Zazkis & Liljedahl, 2009).

3.1.3 Moltiplicazione di numeri negativi e cambiamento di temperatura

La moltiplicazione di numeri negativi è un altro mistero che i docenti spesso trovano difficile da spiegare. Per questo motivo, la frase «Un numero negativo per un numero negativo è uguale ad un numero positivo» è talvolta introdotta come una "regola da seguire". Ovviamente, applicare questa regola non è un principio così sbagliato da seguire. Spesso la sua applicazione conduce a soluzioni corrette e a tutti gli elogi che ne derivano. La nostra missione, tuttavia, come già chiarito, non è quella di recitare regole, bensì di spiegarne la logica sottesa. Mentre l'addizione di numeri interi è ben modellizzata utilizzando una linea dei numeri, la modellizzazione della moltiplicazione risulta essere una sfida più ardua.
Una spiegazione comune per la moltiplicazione di interi si basa su sequenze. Si consideri, ad esempio, la sequenza di moltiplicazioni per 3 (Figura 7).

$$\begin{aligned}
4 \times 3 &= 12\\
3 \times 3 &= 9\\
2 \times 3 &= 6\\
1 \times 3 &= 3\\
0 \times 3 &= 0\\
-1 \times 3 &= ___\\
-2 \times 3 &= ___
\end{aligned}$$

Figura 7. Sequenza di moltiplicazioni per il numero 3 con attività di *cloze*.

Ancor prima di essere esposti ad operazioni con numeri negativi, crediamo che gli studenti possano individuare ricorrenze e invarianti dall'esplorazione della tabella di moltiplicazione, osservando nella sequenza che la colonna di sinistra decresce di 1, la colonna di mezzo è costante mentre la colonna di destra diminuisce di 3. Seguendo la sequenza osservata, i successivi risultati nella colonna di destra saranno –3 e –6. Ciò potrebbe essere sufficiente per stabilire la regola generale che «un numero negativo per un numero positivo è uguale a un numero negativo». Dopo di che, una simile strategia si potrebbe applicare per «un numero negativo moltiplicato per un numero negativo» (Figura 8).

$$\begin{aligned}
4 \times (-3) &= -12\\
3 \times (-3) &= -9\\
2 \times (-3) &= -6\\
1 \times (-3) &= -3\\
0 \times (-3) &= 0\\
-1 \times (-3) &= ___\\
-2 \times (-3) &= ___
\end{aligned}$$

Figura 8. Sequenza di moltiplicazioni per il numero –3 con attività di *cloze*.

Mentre i numeri nella colonna di sinistra decrescono di 1 e la colonna di mezzo è costante, i numeri nella colonna di destra aumentano di 3. Conservando la sequenza, i successivi inserimenti nella colonna di destra saranno 3 e 6 e così via, esemplificando e convincendo che – per quanto inusuale possa apparire all'inizio – il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo.
Queste sequenze potrebbero essere sufficienti per convincere della regola instillando e rinforzando la sensazione di regolarità e stabilità, ma sono poco efficaci per *spiegare* la situazione. Questo è il motivo per cui torniamo ad avere bisogno di una storia, una storia che spiega.
Come al solito, iniziamo con una situazione familiare.

> Consideriamo una reazione chimica, in cui la temperatura risulti crescere di 2 gradi all'ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Quale sarà la sua temperatura tra 5 ore?

Tale situazione potrebbe essere modellizzata dalla moltiplicazione 2 × 5 = 10, dove la risposta «10 gradi» rappresenta la temperatura che viene raggiunta dopo 5 ore. In questo caso entrambi i fattori sono positivi: la temperatura è aumentata e il suo incremento orario è stato di 2 gradi (quindi un fattore positivo). La linea del tempo si sposta nel futuro e il momento "tra 5 ore" è rappresentato dal valore 5 (quindi un fattore positivo). Nel variare la storia, uno di questi fattori potrebbe diventare negativo [dandoci l'opportunità di esemplificare i casi esposti in precedenza]. Varieremo prima ognuno dei fattori separatamente e poi considereremo entrambe le variazioni contemporaneamente.

> – *Variante 1*:
> Si consideri una reazione chimica in cui la temperatura *diminuisca* di 2 gradi ogni ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Quale sarà la sua temperatura tra 5 ore?

Risulta naturale rappresentare il decremento orario di temperatura con (–2). In tal caso la situazione è modellizzata da (–2) × 5 = (–10).

> – *Variante 2*:
> Si consideri una reazione chimica in cui la temperatura *aumenti* di 2 gradi ogni ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Qual era la sua temperatura 5 ore fa?

In questo caso ci muoviamo in direzione negativa sulla linea del tempo. Dal momento che il simbolo 5 rappresenta il momento che si verificherà "tra 5 ore", ha senso indicare con il simbolo (–5) il momento relativo a "5 ore fa". Pertanto la situazione può essere modellizzata dall'operazione 2 × (–5) = (–10).

> – *Variante 3*:
> Si consideri una reazione chimica in cui la temperatura *diminuisca* di 2 gradi ogni ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Qual era la sua temperatura 5 ore fa?

Chiaramente 5 ore fa la temperatura della reazione chimica era di 10 gradi, poiché da tale valore si è giunti a zero con 5 diminuzioni di 2 gradi ciascuno. In coerenza con le rappresentazioni stabilite in precedenza, la situazione attuale è rappresentata da (–2) × (–5). Considerando insieme queste due affermazioni otteniamo l'operazione (–2) × (–5) = 10. Il ragionamento per la modellizzazione della variante 3 è ovviamente coerente con la "regola" e, se sviluppato correttamente, permette di conquistare più che una semplice risposta corretta.

3.1.4 Variazione numerica
I tre esempi appena esplorati hanno numerose cose in comune. Innanzitutto, trattano temi che sono noti per essere problematici per gli studenti, poi, come previsto, tentano di spiegare la difficoltà con

una storia. C'è, però, una caratteristica simile all'interno delle stesse storie che sono state narrate: quello che qui noi chiamiamo storia non è una sequenza strutturata di eventi con un inizio, una parte centrale e una fine; si tratta, invece, della descrizione di una situazione in continua evoluzione, o in alternativa, di una storia che viene modificata. Si inizia con uno scenario semplice e non problematico per poi cambiare i valori numerici in gioco, iterando tale cambiamento diverse volte. Le variazioni numeriche graduali con numeri interi entro il 10 aiutano a stabilire un modello matematico generale, un'operazione o uno schema. Una volta riconosciuta la struttura generale, essa rimane invariata mentre si introducono i numeri "problematici" – frazioni, zero, numeri negativi. Tuttavia, poiché la variazione numerica risulta graduale, i numeri "problematici" si adattano naturalmente al modello creato potendo determinare così la relazione desiderata.
Cambiare le storie variandone i valori numerici può aiutare non solo con concetti critici, ma anche nel risolvere una molteplicità di problemi. Nel prossimo paragrafo mostreremo come la variazione numerica – cioè il cambiare i numeri nel compito, lasciando la struttura invariata – rappresenti una strategia utile nel percorso verso la soluzione.

3.2 Cambiare le storie per chiarire la confusione

Per esemplificare la variazione numerica come mezzo per raggiungere un modello generale, consideriamo due enigmi classici e due problemi piuttosto convenzionali, ma insidiosi.

3.2.1 Galline, uova e grano

Considerate il seguente noto indovinello:

> Se una gallina e mezzo depone un uovo e mezzo in un giorno e mezzo, quanti giorni impiega una gallina a deporre un uovo?

Molti studenti rispondono o «un giorno» per inerzia oppure affermano che il problema è assurdo. Solo pochissimi studenti reprimono queste tendenze e cercano di ragionare sulle informazioni disponibili. Questo cosa ha a che fare con il problema dell'uovo e della gallina? Siamo convinti che alla fine di questa sezione il collegamento risulterà chiaro, tuttavia, vorremmo considerare prima un problema più "realistico".

> Una libbra di grano costa 1,68 dollari. Quanto grano si può comprare con 0,50 dollari?

È vero, questa non è una storia. Si potrebbe anche dire che è un problema standard da libro di testo, tuttavia, possiamo facilmente trasformarlo in una storia. Potrebbero esserci un drago e un principe e il grano potrebbe essere un filtro d'amore. Oppure, ci potrebbe essere un povero ragazzo che ha bisogno di una tazza di questo grano "speciale" per curare la nonna da una terribile malattia. Così trova un contadino che coltiva questo grano ed è pronto a venderlo al nostro eroe per 1,68 dollari per libbra. Il ragazzo, il nostro eroe, ha però in tasca solo una moneta da 0,50 dollari. Come mostreremo nel prossimo capitolo, qualsiasi problema standard del libro di testo può essere presentato come una storia, ma ora passiamo alla matematica che il problema richiama.
Abbiamo presentato questo problema a diversi gruppi di persone, da studenti delle scuole medie a futuri insegnanti di scuola elementare, e un numero significativo di loro ha commesso degli errori nell'impostazione della divisione, cioè ha proposto di dividere 1,68 per 0,50 anziché 0,50 per 1,68. Qual è il modo migliore per aiutarli? Naturalmente, sottolineare il loro errore non è utile, al di là del problema in questione.
La struttura moltiplicativa generale che lo studente deve riconoscere per risolvere questo problema è la seguente: *Una libbra di grano costa X. Quanto grano si può comprare con Y?* Questo è un esempio di una forma più generale di divisione per contenenza, cioè una struttura di divisione che determina

quante volte X può essere contenuto in Y, o come Y può essere misurato da X. Come abbiamo visto sopra parlando della divisione con divisore una frazione, questa struttura risulta problematica.
Una volta riconosciuta la struttura, la soluzione è data da $Y : X$. La domanda da porsi, tuttavia, è cosa possa guidare gli studenti a vedere la struttura generale in questo caso particolare (Mason & Pimm, 1984). Quello che abbiamo trovato utile nei paragrafi precedenti è variare i numeri.

> Una libbra di grano costa 2 dollari. Quanto grano si può comprare con 6 dollari?

> Una libbra di grano costa 2 dollari. Quanto grano si può comprare con 20 dollari?

I numeri di questi esempi sono facilmente manipolabili e danno come risultato un numero intero. Gli studenti hanno raramente problemi con questo tipo di domande quindi utilizzarle come punto di partenza risulta essere vantaggioso. Una volta stabilita la struttura generale è possibile passare a numeri "più problematici", che coinvolgano frazioni.

> Una libbra di grano costa 2 dollari. Quanto grano si può comprare con 0,50 dollari?

Per poi tornare gradualmente al problema iniziale. La nonna sopravviverà?
Questa strategia può essere vista come una modifica alle "griglie di variazione strutturate" (Mason, 2001, 2007) in quanto si tratta di una variazione numerica graduale allo scopo di far riconoscere la struttura matematica che sottende il problema. Per quale motivo, dunque, la struttura matematica viene riconosciuta più facilmente quando i numeri sono "compatibili"[15] rispetto a quando non lo sono? L'origine dell'ostacolo, secondo noi, risiede nella gamma di cambiamenti ammissibili che viene percepita dagli studenti, ossia nei numeri del problema iniziale che sono "troppo lontani" per gli studenti dal loro spazio degli esempi relativo ai problemi che sono associati, implicitamente, con la divisione per contenenza. La variazione numerica aiuta a riconoscere le somiglianze tra i problemi proposti e ad estendere la struttura generale ad altri casi, un passo necessario per la loro soluzione.
Ora torniamo alle famigerate galline e uova.

> Se 6 galline depongono 6 uova in un giorno, quanto tempo impiega una gallina a deporre un uovo?

Questa formulazione può suggerire di mantenere "una gallina" come invariante e chiedere ulteriormente:

> Se 6 galline depongono 6 uova in un giorno e mezzo, quanto tempo impiega una gallina a deporre un uovo?

Oppure:

> Se 6 galline depongono 6 uova in 6 giorni, quanto tempo impiega una gallina a deporre un uovo?

Questa apparente analogia con il problema iniziale suggerisce un percorso verso la soluzione. Tuttavia, secondo la nostra esperienza, il problema può rappresentare una sfida per molti studenti.

15. Nota della traduttrice. Gli autori chiamano tali numeri «*compatible*», nel senso di familiari e facilmente manipolabili dagli studenti.

3.2.2 Le "grandi" percentuali

Spesso sorridiamo quando qualcuno afferma di mettere il 120% delle proprie energie in un progetto o di essere sicuro al 200% di qualcosa. Queste affermazioni testimoniano la tendenza ad enfatizzare eccessivamente uno sforzo o una certezza, piuttosto che fornire una misura accurata. Siccome consideriamo che un intero sia pari al 100%, cosa indica una percentuale superiore al 100%? Abbiamo scoperto che quando in un problema matematico compare una percentuale elevata spesso gli studenti vengono portati a non riconoscerne la struttura generale. Si consideri, ad esempio, il seguente problema:

> Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 400%, qual è il nuovo prezzo?

In una classe di futuri insegnanti di scuola elementare, circa la metà degli studenti ha affermato che il nuovo prezzo è di 40 dollari, spiegando che il 400% significava "quadruplicare" il prezzo iniziale. Ancora una volta, abbiamo trovato utile la variazione numerica per riconoscere la strategia generale per la risoluzione del problema:

> Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 20%, qual è il nuovo prezzo?
>
> Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 35%, qual è il nuovo prezzo?
>
> Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 100%, qual è il prezzo ora?

Anche in questo caso riteniamo che il problema principale stia nella percezione del range di cambiamento ammissibile. Mentre il 20%, il 35% o addirittura il 100% rientrano in ciò che ci si aspetta – sia nel contesto del mondo reale che nel contesto di una lezione di matematica – l'aumento del 400% sembra andare oltre ogni ragionevole cambiamento ammissibile. Questi numeri, o numeri simili, possono essere utilizzati progressivamente in una storia riguardante una scandalosa inflazione o prezzi gonfiati. Forse la storia potrebbe riguardare una gita di classe in un discutibile parco divertimenti i cui proprietari aumentano il prezzo dell'acqua in bottiglia man mano che la giornata diventa più calda e la gita è programmata proprio nel giorno più caldo dell'anno. O forse stiamo parlando di una super bevanda che aumenta la forza e la resistenza di chi la beve. Indipendentemente dalla storia, l'uso progressivo di questi numeri può aiutare gli studenti a creare un ponte tra la loro comprensione delle percentuali in situazioni standard e la comprensione di situazioni come quella appena descritta, con un aumento del 400%. Passiamo ora a un altro indovinello popolare e cerchiamo di spiegarlo con una variazione numerica.

3.2.3 Il dollaro mancante

L'indovinello del dollaro mancante o paradosso del dollaro mancante è un famoso rompicapo che appare in molte raccolte pubblicate di problemi matematici.

> La storia inizia con tre uomini che si registrano in un hotel. Viene comunicato loro che il costo della camera è di 30 dollari, così ognuno contribuisce con 10 dollari e sale al piano superiore. Più tardi il direttore si rende conto di aver addebitato un costo eccessivo agli uomini e che il costo reale avrebbe dovuto essere di soli 25 dollari. Il direttore manda subito il fattorino al piano di sopra a restituire i 5 dollari di differenza

> agli uomini. Il fattorino, tuttavia, decide di imbrogliare gli uomini: intasca 2 dollari per sé e restituisce solamente 1 dollaro a ciascuno degli uomini. Di conseguenza, ogni uomo ha pagato 9 dollari per stare nella stanza (3 × \$9 = \$27) e il fattorino ha intascato 2 dollari (\$27 + \$2 = \$29). Inizialmente però gli uomini avevano pagato 30 dollari, quindi la domanda è: *dov'è il dollaro mancante*?

In un'altra versione di questa storia cambiano la scena e i giocatori, ma si mantengono i numeri costanti.

> Tre signore vanno a mangiare in un ristorante. Ricevono un conto di 30 dollari. Ognuna mette sul tavolo 10 dollari, che il cameriere raccoglie e porta in cassa. Il cassiere informa il cameriere che il conto avrebbe dovuto essere di soli 25 dollari e gliene restituisce 5 in monete da 1 dollaro ciascuna. Mentre torna al tavolo, il cameriere si rende conto che non può dividere le monete equamente tra le signore e, poiché esse non conoscevano il totale del conto reale, decide di mettere 2 dollari in tasca e di restituire a ciascuna delle signore 1 dollaro. Ora, siccome ad ogni signora è stato restituito un dollaro, ognuna ha pagato 9 dollari. Tre volte 9 dollari corrisponde a 27 dollari. Il cameriere ha 2 dollari in tasca e 2 dollari più 27 dollari corrispondono a 29 dollari. Le signore hanno originariamente consegnato 30 dollari. *Dov'è il dollaro mancante*?

Sebbene l'ambientazione e i personaggi siano cambiati, non sono cambiati i numeri e i numeri sono problematici nella loro compatibilità. Vale a dire che il calcolo errato (con risultato 29 dollari) ci porta molto vicino al valore iniziale dato (30 dollari) ed è qui che si trova il problema e si percepisce il paradosso. Una serie di esperti in diversi siti web e forum hanno cercato di spiegare dove sta l'errore di calcolo. Anche noi vorremmo farlo, tuttavia, a differenza di altre spiegazioni, che si attengono alla storia, modificheremo la storia variando i dati numerici. Il paradosso nelle situazioni sopra citate si crea quando si aggiungono i 2 dollari intascati dal cameriere o dal fattorino ai 27 dollari pagati dalle signore o dagli uomini. L'aggiunta di questi due importi non dà informazioni su eventi sviluppatisi nella storia; se si sottraessero 2 dollari dai 27 dollari pagati dalle signore, invece, si capirebbe quanto il cassiere o l'addetto alla reception dell'hotel abbiano effettivamente ricevuto come pagamento.
È chiaro che la spiegazione di cui sopra, o altre simili, non "funzionano". Le persone rimangono ancora perplesse rispetto alla differenza tra i 29 dollari citati nella storia e i 30 dollari iniziali per cui si desidera capire come siano stati suddivisi e quindi si continua a cercare il dollaro mancante. Questo è il motivo per cui questo rompicapo è sopravvissuto per così tante generazioni e, sospettiamo, continuerà ad intrigare le menti curiose per molte generazioni a venire. Per coloro che si sforzano di capire, tuttavia, offriamo una storia diversa che è in realtà la stessa storia, ma con numeri differenti.

> Il costo effettivo della camera è di soli 20 dollari e il fattorino viene mandato a restituire 10 dollari agli uomini. Per semplicità di divisione, il fattorino intasca 1 dollaro e restituisce 3 dollari a ciascuno degli uomini. Gli uomini hanno pagato 7 dollari a testa, per un totale di 21 dollari, e il fattorino ha 1 dollaro.

Aggiungendo il dollaro intascato dal fattorino al pagamento effettivo si ottengono 22 dollari; sarebbe sensato suggerire che manchino 8 dollari dall'incasso iniziale di 30 dollari? E se ciò non convince abbastanza, cambiamo i numeri nella storia ancora una volta.

> Gli uomini ricevono un coupon «Soggiorna da noi ad 1/3 del prezzo» e il fattorino viene mandato a restituire loro 20 dollari. A questo punto, conoscendo il desiderio del fattorino di poter effettuare una divisione equa e che dia come risultato un numero intero, si intasca 2 dollari e restituisce 18 dollari agli uomini, 6 dollari a testa.

In questa situazione gli uomini hanno pagato 4 dollari a testa, per un totale di 12 dollari e il fattorino ha in tasca 2 dollari. Aggiungendo i 2 dollari intascati al pagamento effettivo si ottengono 14 dollari. Avrebbe senso suggerire, a partire da un incasso iniziale di 30 dollari, che ne manchino 16?
Abbiamo notato che variare i numeri, siano essi grandi o piccoli, aiuta a dare senso alla situazione; la variazione numerica nella storia potrebbe essere infatti più convincente di qualsiasi tentativo di spiegare quella originale. L'assurdità del dollaro mancante nella versione originale viene a galla quando si evidenzia che la struttura generale costituita dall'aggiungere l'importo pagato a quello intascato e ricercare il "denaro mancante" non ha senso, di conseguenza nemmeno l'esempio specifico del "dollaro mancante" ha senso.

3.2.4 Mescere vino ed acqua, una variazione discreta

Un altro famoso problema matematico, spesso presentato come enigma, offre uno scenario con due bicchieri identici, uno riempito d'acqua e l'altro riempito con una stessa quantità di vino. Per nessuna ragione specifica, ma solo per creare il problema, un cucchiaio di vino viene versato nel bicchiere d'acqua e un cucchiaio preso dall'acqua mesciuta con il vino viene versato nel bicchiere di vino. La domanda, quindi, è: c'è più vino nell'acqua o più acqua nel vino? Naturalmente coloro che non amano guastare il vino con l'acqua o coloro che preferiscono star lontano dagli alcolici possono presentare il problema con liquidi diversi; Ad esempio, una variazione tipica considera due barattoli di vernice: rossa e blu. Suggeriamo al lettore che non ha familiarità con il problema di mettere da parte questo articolo e provare a risolverlo.
La soluzione – secondo cui la quantità di acqua nel vino è uguale alla quantità di vino nell'acqua – è una sorpresa per molti e la manipolazione algebrica che suggerisce chiaramente la risposta appare controintuitiva. Suggeriamo una variazione – non per dimostrare il risultato, crediamo che l'algebra assolva bene questo compito – ma per "attingere all'intuizione".
Supponiamo che, anziché avere un problema di bicchieri d'acqua e di vino o due barattoli di vernice, raccontassimo una storia riguardante due autobus, uno rosso e l'altro blu.

> Sull'autobus rosso ci sono 10 ragazze e su quello blu ci sono 10 ragazzi, entrambi stanno andando ad un certo evento, scelto per una specifica ragione, che dipende dall'immaginazione del narratore. Entrambi gli autobus si fermano per una sosta e 3 ragazze vanno a far visita ai ragazzi nel loro autobus blu. Poco dopo, per un'improvvisa richiesta, gli autobus devono ripartire (lasciamo che sia l'immaginazione del narratore a creare sia la necessità della visita delle ragazze, sia la situazione di emergenza che richiede la partenza improvvisa degli autobus). Partendo in fretta e furia – e solo perché ogni autobus può trasportare al massimo 10 passeggeri – 3 giovani dell'autobus blu corrono a prendere posto sull'autobus rosso. Ci saranno più ragazzi sull'autobus rosso o più ragazze sull'autobus blu?

Sembra che la risposta dipenda, naturalmente, da chi sono i 3 giovani che sono corsi dall'autobus blu a quello rosso. Se tutte e 3 fossero ragazze, torneremmo alla situazione iniziale, nessuna ragazza sull'autobus blu e nessun ragazzo sull'autobus rosso. Se tutti e 3 fossero ragazzi, avremmo 3 ragazzi sull'autobus rosso e 3 ragazze sull'autobus blu. Se fossero 2 ragazze e 1 ragazzo a lasciare l'autobus blu, avremmo come risultato 1 ragazzo sull'autobus rosso e 1 ragazza sull'autobus blu. Analogamente, se fossero 2 ragazzi e 1 ragazza ad andare verso l'autobus rosso, avremmo 2 ragazzi sull'autobus rosso e 2 ragazze sull'autobus blu. Qualunque sia la combinazione, la risposta non cambia: il numero di ragazzi sull'autobus rosso è lo stesso del numero di ragazze sull'autobus blu. Gli scettici – così come gli studenti – sono invitati a verificare altre possibilità: Se il numero di ragazzi su ogni autobus fosse di 20 o 50 invece che di 10? E se il numero di "visitatori iniziali" fosse 2, o 5 o 10, anziché 3?
Mescere vino e acqua potrebbe sembrare diverso dal mescolare ragazzi e ragazze, tuttavia, speriamo

che l'analogo e semplice esempio numerico nel discreto di questa storia sia utile per dare un senso alla situazione originale nel continuo.

3.2.5 Cambiamo contesto – Cambio di un dollaro al supermercato

Negli esempi precedenti abbiamo discusso la variazione numerica, cioè la modifica dei dati numerici all'interno della storia. In questo paragrafo ci concentreremo sulla variazione del contesto. Proponiamo come esempio una storia vera. Molte storie le raccontiamo come se fossero accadute ad uno di noi, ma questa è realmente accaduta ad uno di noi, per questo motivo la storia è raccontata in prima persona.

> «Un giorno entrai in un grande supermercato del centro per fare la spesa. Non sono solita fare la spesa lì, ma era sulla mia strada e mi servivano solo poche cose. Quando arrivai alla cassa, notai un cartello che diceva: "Cambio dollari statunitensi: 27%". Riflettei un attimo: cosa significava? Ero in vena di educare il mondo e di instillare la conoscenza dei numeri in tutti i cittadini e così cercai di spiegare alla cassiera che il cartello non aveva molto senso e che il modo corretto sarebbe stato quello di scrivere 1 USD = 1,27 CAD.[16] La cassiera mi guardò con uno sguardo del tipo "ma sei stupida, o cosa?". Sostenne che tutti, tranne me, avevano capito esattamente il significato del cartello, che lei aveva fatto parecchi cambi quel giorno e nei giorni precedenti e nessuno si era mai confuso o lamentato. Nessuno tranne me, ovviamente. Ma non mi arresi.
> Andai a parlare con il direttore, un simpatico uomo di mezza età dall'accento francese. Spiegai, al meglio delle mie possibilità, che il cartello poteva essere interpretato in diversi modi e proposi un modo corretto di indicare il tasso di cambio. Il direttore mi chiese subito se fossi una matematica e sembrò capire il mio punto di vista. Mi ringraziò persino per averlo notato e per la mia preoccupazione, e mi promise di cambiare il cartello. Uscii dal supermercato di buon umore, sentendomi rispettata e credendo di aver reso il mondo un posto migliore, o almeno un posto più "competente nei numeri". Qualche giorno dopo tornai allo stesso supermercato. L'insegna era effettivamente cambiata. Ora c'era scritto: "Cambio dollari statunitensi: 28%"».

Questa storia è stata condivisa con alcuni dei nostri studenti, futuri insegnanti. Non sembravano impressionati. Dopo tutto, tutti sanno come convertire il denaro, sostenevano, soprattutto come convertire un dollaro statunitense in un dollaro canadese. Così, per chiarire la questione, abbiamo raccontato un'altra storia. Supponiamo, è stato detto agli studenti, che siate stati scelti per andare su Marte nell'ambito del vostro programma di formazione insegnanti. I programmi di scambio per studenti stanno diventando piuttosto popolari, così mentre altri gruppi potrebbero andare in Messico o in Inghilterra, la vostra destinazione è Marte. Per prepararvi al viaggio, volete cambiare i dollari canadesi in dollari marziani. Vi viene detto: «Cambio dollari marziani: 37%». Quale importo, in dollari marziani otterreste per 100 dollari canadesi?
Abbiamo accolto diverse risposte. Alcuni sostenevano che avrebbero ottenuto 37 dollari (considerando il 37% di 100 dollari), altri hanno suggerito che avrebbero ottenuto 137 dollari (aggiungendo il 37% all'importo consegnato) altri ancora 63 dollari (sottraendo il 37% all'importo consegnato). Cambiare il contesto, presentando un caso in cui le conoscenze pregresse non entrino in gioco a dare un senso alla situazione, ha contribuito a rendere l'idea e a sostenere l'obiezione che l'informazione del cartello alla cassa non fosse ben definita.

16. Nota della traduttrice. Con le sigle USD e CAD si intendono rispettivamente il dollaro statunitense e il dollaro canadese.

A differenza delle storie discusse in precedenza, la variante qui presentata è servita a creare confusione, piuttosto che a chiarirla. Tuttavia, la confusione ha reso chiaro che le informazioni sul cartello non erano state presentate correttamente e, si spera, abbia fatto aumentare la consapevolezza sulle possibili interpretazioni errate dell'affermazione e dunque sulla necessità di chiarezza delle informazioni.

3.3 Alcune riflessioni didattiche conclusive

Abbiamo presentato qui storie o situazioni problematiche che affrontano diverse idee matematiche note per essere difficili da spiegare per gli insegnanti e difficili da comprendere da parte degli studenti. La caratteristica comune a tutte queste storie, dal punto di vista della prospettiva della narrazione, è la nozione di ripetizione o di ripetizione con variazione. Non è al primo tentativo che Riccioli d'Oro trova la sedia più comoda o la zuppa perfetta. Non è al primo tentativo che il Principe trova una ragazza che possa indossare la scarpa persa da Cenerentola. Nella storia una ricerca, una ripetizione con variazioni, è ciò che porta al successo finale, lo stesso vale, a volte, quando si tratta di comprendere la matematica.
La caratteristica comune di questi racconti, dal punto di vista della matematica, è che si riferiscono ad una situazione molto semplice e familiare per poi esplorarne gradualmente le variazioni, fino a raggiungere una situazione altrimenti problematica. Piuttosto che strani fatti da memorizzare e strane regole da osservare, questa esposizione graduale a tali situazioni, variando alcuni elementi di una storia, presenta le regole e i fatti matematici come estensioni logiche o derivazioni di conoscenze pregresse. La variazione numerica è riconosciuta nell'insegnamento come una strategia efficace. Abbiamo mostrato come si possa iniziare con numeri piccoli o "compatibili" per poi, una volta stabilita la struttura, passare a numeri più grandi o inusuali per gli studenti. Abbiamo anche considerato i vantaggi della variazione numerica nella "direzione opposta", cioè partendo da una situazione confusa e variando poi i numeri per rivelare la struttura generale sottostante. Questo approccio è analogo all'euristica del "considerare un problema analogo ma più semplice" suggerita da Polya (1945/1988). Nello stesso modo in cui variazioni analoghe ma più semplici di un dato problema aiutano a raggiungere una soluzione, variazioni analoghe ma più semplici di uno scenario in una storia aiutano a comprendere concetti difficili o risultati controintuitivi. Abbiamo anche mostrato come cambiare il contesto di una storia – con un problema analogo, ma non necessariamente più semplice – possa aiutare a dirigere l'attenzione degli studenti verso la matematica.

4 Storie che pongono una domanda[17]

I libri di testo di matematica sono spesso composti da molti cosiddetti "esercizi" e "problemi". In questo contesto, quelli che vengono definiti esercizi sono stringhe di calcoli, usati per esercitarsi, praticare e rinforzare metodi o algoritmi appresi in precedenza. Ciò che viene chiamato problema non è in realtà molto diverso nello scopo, ma piuttosto nella forma. I problemi hanno un testo invece che solo simboli e la loro risoluzione solitamente coinvolge uno sforzo coordinato per decodificare le parole in un enunciato numerico, seguito dall'applicazione dell'algoritmo corretto per arrivare alla soluzione finale. Per esempio, mentre $3 + 5$ è visto come un esercizio, la sua codifica in problema corrisponderebbe ad un testo in cui ad esempio due personaggi, Jack e Jill, combinano alcune biglie. Nei libri di testo, tali problemi solitamente compaiono verso la fine di un capitolo o di una sezione e si basano sugli algoritmi appresi nelle pagine precedenti.

17. Questo capitolo è la traduzione del capitolo 8 del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009), dal titolo originale *Stories that ask a question*.

Quelli che vengono spesso chiamati "problemi" nella matematica scolastica sono molto diversi dall'idea di "*problem-solving*" come introduzione all'attività matematica. La nozione standard di *problema matematico*, così come viene utilizzata nella letteratura in didattica della matematica, si riferisce ad un compito per il quale nessun algoritmo o approccio standard è immediatamente evidente per la sua risoluzione. Ciò che può essere definito problema dipende, pertanto, dalla conoscenza e dall'esperienza pregressa di chi apprende.
A differenza dei problemi matematici "reali", i problemi scolastici sono spessi definiti problemi a parole o problemi-storia. In realtà, si tratta di scheletri di storie che sono state spogliate dei loro dettagli coinvolgenti. Discutiamo ora qui di come la storia possa essere reintrodotta all'interno di alcuni problemi a parole tradizionali.

4.1 Vestirsi

La seguente storia può essere utilizzata non solo per introdurre un'idea matematica, ma anche per estenderla. Presentiamo prima un problema a parole per poi mostrare come il problema possa essere trasformato in una storia, rendendo l'attività matematica più coinvolgente.

> *Problema (formulazione convenzionale)*:
> Se l'insieme A ha 3 elementi e l'insieme B ha 4 elementi, quanti elementi ci sono nel prodotto cartesiano A × B?

Con una terminologia un po' meno "pomposa", lo stesso problema può essere riscritto come segue:

> L'insieme A ha 3 elementi e l'insieme B ha 4 elementi. Il tuo compito è creare un insieme C, i cui elementi sono tutte le possibili coppie ordinate, dove il primo elemento della coppia proviene dall'insieme A e il secondo elemento della coppia proviene dall'insieme B. Quante coppie ci sono in C?

Questo problema può essere presentato anche come una storia; una semplice variante di questa formulazione si trova in molti libri di testo per le scuole elementari.

> *Problema come una storia*:
> Kathy ha 3 gonne e 4 camicie. Quanti possibili *outfit* può creare (assumendo che ogni gonna possa essere abbinata con tutte le camicie e che un *outfit* sia formato da una gonna e una camicia)?

Ma *narrare* una storia richiede ulteriori elaborazioni. Nel par. 1 abbiamo illustrato diversi elementi per elaborare una narrazione efficace e coinvolgere gli studenti nella narrazione. Ciò che segue è un ulteriore esempio per poter coinvolgere gli studenti in un problema, narrando una storia e usando alcune sfumature umoristiche. Senza perdere in generalità, abbiamo scelto di presentare questo racconto di una storia con una voce femminile.

> «Oggi sono arrivata a lezione con qualche minuto di ritardo. L'avete notato? No? Vorrei condividere con voi il motivo del mio ritardo. La sveglia ha suonato alla solita ora, ho fatto colazione alla solita ora e ho iniziato a vestirmi alla solita ora, ma quando ho aperto l'armadio mi sono trovata di fronte a un dilemma. C'erano 3 gonne e 4 camicette appese e non riuscivo a decidermi. C'era una gonna nera, una gonna blu e una gonna verde. E le 4 camicette erano una bianca, una rosa, una rossa e una gialla. Forse dovrei scegliere una gonna nera con una camicetta bianca? O forse una gonna verde con una camicetta rosa? Che cosa mi suggeriresti? [Fate una pausa

> nella narrazione] Vedete, non riuscite a decidere. Anch'io non riuscivo a decidere. Per questo ho fatto tardi a lezione. Sapete quanti *outfit* diversi ho dovuto prendere in considerazione?»

Qui, naturalmente, fate una pausa per dare agli studenti il tempo di riflettere sulla domanda così come l'opportunità di trovare una risposta. Per gli studenti molto giovani, l'attività può coinvolgere il colore effettivo dell'*outfit*, per quelli più grandi la strategia usuale è quella di introdurre alcuni simboli per codificare ed elencare le diverse possibilità. In base all'età e alla preparazione matematica degli studenti, la codifica simbolica può indicare i colori specifici, ad esempio usando SB, SN e SG per indicare rispettivamente le gonne nere, blu e verdi,[18] oppure può indicare il numero del capo di abbigliamento, anziché il colore specifico, ad esempio usando S1, S2, S3 per distinguere le 3 gonne e B1, B2, B3 e B4 per distinguere le quattro camicette.[19] Un elenco sistematico di tutti i casi riporterà le seguenti combinazioni (Figura 9).

S1-B1	S2-B1	S3-B1
S1-B2	S2-B2	S3-B2
S1-B3	S2-B3	S3-B3
S1-B4	S2-B4	S3-B4

Figura 9. Combinazioni possibili degli *outfit* con gonne e camicette.

Per molti tale elenco sistematico ed esaustivo potrebbe essere sufficiente. C'è, tuttavia, l'opportunità di estendere la storia allo scopo di introdurre un'importante idea matematica.

> «Lasciatemi ora dire che la giacca è parte del mio *outfit* e che ho 2 giacche. Quanti *outfit* diversi dovrò ora considerare?
> E naturalmente non entrerò in classe senza le scarpe. Supponiamo che io abbia 12 paia di scarpe e che ogni *outfit* sia formato da una gonna, una camicetta, una giacca e un paio di scarpe. Quanti *outfit* dovrei considerare in questo caso?»

Si noti la scelta dei numeri. La storia originale e la sua prima estensione possono essere semplicemente risolte creando degli elenchi, una strategia che talvolta viene chiamata "conteggio completo" – o uno "studio sistematico di tutti i casi possibili". Non è difficile neanche estendere l'iniziale elenco di 12 *outfit* all'elenco di 24, includendo le giacche tra i capi d'abbigliamento presi in considerazione. Tuttavia, la scelta di un numero più ampio nella fase successiva invita alla generalizzazione.

Continuando con l'evoluzione della storia, gli studenti sono invitati a considerare l'aggiunta di un cappello all'*outfit*, sapendo che ci sono 37 possibili cappelli. L'improbabilità di questo numero così grande suscita diversi sorrisi. Uno scherzo? Naturalmente! Uno scherzo però con uno scopo, in quanto l'evidente esagerazione di questo numero fa capire agli studenti che il docente si aspetta da loro che trovino un modo generale di affrontare questo tipo di problema. Invitiamo quindi gli studenti ad estendere ulteriormente la storia, aggiungendo più articoli all'*outfit* – calzini, sciarpe, guanti, gioielli,

18. Nota della traduttrice. Nel testo originale i termini «*black, navy, and green skirts*» (gonne nere, blu e verdi) danno origine alle sigle SB (*black skirt*), SN (*navy skirt*) e SG (*green skirt*).
19. Nota della traduttrice. Nel testo originale i termini «*skirts*» e «*blouses*» (gonne e camicette) danno origine alle sigle S e B.

occhiali ecc. Successivamente proponiamo un'altra variante, vincolando la storia:

> «Supponiamo che abbia anche dei pantaloni, 5 paia. Ma non indosserei pantaloni e gonna insieme! Come cambierebbe il numero di *outfit*?»

Sulla base di questa esperienza, gli studenti concludono che una soluzione si può ottenere moltiplicando i numeri che indicano quanti capi di ogni tipologia sono a disposizione per comporre l'*outfit*. Usando il linguaggio matematico, la soluzione è data dal prodotto del numero di elementi in ogni insieme. Formalizzando ulteriormente, può essere dedotta una strategia generale: ogni qual volta sia necessario fare scelte successive, il numero totale di possibilità è il prodotto dei numeri che indicano il numero di scelte in ogni passo.
La narrazione dell'insegnante può continuare nel modo seguente:

> «Questa proprietà è così importante in matematica che le è stato dato un nome. Essa è chiamata il principio fondamentale del calcolo combinatorio. Sì, *Il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio* [le lettere maiuscole e il carattere corsivo qui indicano il tono crescente della voce]. Ma se doveste dimenticare questo nome, potrete semplicemente chiamarlo "il dilemma mattutino della mia insegnante"».

Vorremmo richiamare l'attenzione del lettore, ancora una volta, sul concetto di *telling*. Nel nostro caso non è semplicemente una narrazione artistica, ma una narrazione interattiva. L'insegnante fornisce la struttura, ma gli studenti diventano partecipanti nella narrazione decidendo come estendere la storia scegliendo man mano ulteriori capi da aggiungere all'*outfit*. Si passa dunque da una situazione piuttosto semplice, che può essere esplorata da studenti molto giovani, ad un teorema generalizzato, di grande utilità in molti problemi matematici.

4.2 ... per una festa

Dopo aver considerato tutti i possibili *outfit* e avendo scelto auspicabilmente quello appropriato per una festa, consideriamo una storia di incontri alla suddetta festa, solitamente noto come "il problema delle strette di mano".

> La notte scorsa siamo stati ad una festa molto piacevole! Il DJ ha suonato 107 diverse canzoni. Il bar aveva 7 scelte di cocktails. Per cena c'erano 4 differenti antipasti che includevano paté di fegato e insalata di coda d'aragosta.

Avremmo potuto continuare questa descrizione e chiedere il numero di possibili combinazioni durante la cena, costituite da un cocktail, un antipasto e una canzone. Il focus che abbiamo scelto questa volta è invece sull'accoglienza e la presentazione degli ospiti.

> All'arrivo degli ospiti, ogni persona ha stretto la mano a tutti gli altri invitati…

Quante strette di mano ci sono state? – questa è la domanda usuale. La risposta, naturalmente, dipenderà dal numero di persone che sono giunte alla festa. In una classe tradizionale orientata all'obiettivo, questa domanda può essere preceduta soltanto dalla frase: «C'erano (qualsiasi numero si desideri) persone e ognuno ha stretto la mano con tutti gli altri». Nel nostro caso, tuttavia, la domanda sarà preceduta da una storia che riguarda la festa.
Cosa si guadagna a trasformare questo problema piuttosto standard in una storia? Per alcuni studenti potrebbe essere uno strumento per catturarne l'attenzione, una storia per ricordare e associare problemi che coinvolgono le combinazioni. Da un punto di vista didattico è un'opportunità per interpretare il problema in diversi modi, iniziando ad esempio presentando il padrone di casa e poi

continuando con gli ospiti che arrivano uno ad uno, registrando man mano i risultati delle diverse strette, oppure, alternativamente, considerando che gli ospiti siano tutti presenti e facendoli sistemare in cerchio per poi esplorare le possibilità più efficienti per contare le loro strette di mano.
Una tale narrazione conduce ad un altro importante elemento dello *storytelling* che è emerso nelle due storie presentate in questo capitolo: la personalizzazione. In entrambe – la storia della scelta degli *outfit* e la storia della festa e delle strette di mano – l'insegnante narra un racconto che riguarda sé stessa/stesso, anziché Cappuccetto Rosso, Gauss o Quint. Di conseguenza, quando la storia inizia, gli studenti non hanno idea che quello che stanno per ascoltare sia una deliberata e pianificata parte della lezione.

4.3 Studenti come attori del problema: re Salomone e la regina di Saba

Abbiamo già menzionato i possibili modi per coinvolgere gli studenti in una storia, come narrare o continuare a narrare parti ripetitive, scegliere nomi per i personaggi o determinare le loro azioni successive. Abbiamo anche menzionato l'importanza di far sì che gli studenti si relazionino con il protagonista nella storia, dove il miglior personaggio con cui identificarsi è quello che assomiglia agli studenti stessi; si potrebbe spiegare così il successo di Harry Potter. Abbiamo anche solo accennato ad un possibile beneficio nel rendere il narratore un attore della storia, attraverso la narrazione di un racconto che riguardi sé stessa/stesso. Un'altra possibile strategia per aumentare il coinvolgimento degli studenti è rendere gli studenti stessi eroi o attori.
Richiamiamo l'esempio del pastore Amzula che non sapeva contare.[20] Come avrebbe potuto essere sicuro che tutte le pecore che uscivano dal recinto la mattina sarebbero ritornate la sera? Giriamo questa domanda agli studenti, ma in aggiunta alla domanda stessa, introduciamo un gioco di ruoli. Piuttosto che dire «come potrebbe il pastore essere sicuro del numero di pecore?» diremmo «fingi di essere il pastore, cosa faresti?». Successivamente gli studenti presenterebbero le loro idee riferendosi a ciò che *essi vorrebbero fare* piuttosto che a ciò che *potrebbe essere fatto* in generale. Nella nostra esperienza, questa piccola modifica nella formulazione della domanda rende gli studenti non solo più coinvolti nel compito, ma anche più responsabili nel riportare i propri suggerimenti. Esso dà a loro la responsabilità del problema e anche la responsabilità della soluzione, facendo sì che facciano *proprio* il problema da risolvere. Piuttosto che risolvere il problema di Amzula, del principe o di Edipo, è il loro problema che devono affrontare e risolvere. Presentiamo qui il primo di tre esempi di questo tipo in cui vengono coinvolti gli studenti.
Re Salomone è noto per essere il più saggio tra gli uomini. Una storia biblica molto conosciuta narra di come risolse un'aspra disputa tra due meretrici, ognuna delle quali reclamava di essere la madre di un neonato. Re Salomone suggerì di tagliare il bambino a metà: una donna fu d'accordo mentre l'altra offrì di darle il bambino pur di salvargli la vita. Un'offerta così generosa poteva provenire solo dalla sua vera madre alla quale fu infatti affidato il bambino.
Una storia molto meno nota riguarda re Salomone e la regina di Saba, che Salomone voleva disperatamente sposare, nonostante avesse avuto un notevole successo con molte altre donne.

> Alla proposta di matrimonio di Salomone, la regina di Saba chiese ai servi di portare due coppe identiche, una riempita con 10 talenti d'argento e l'altra con 10 talenti d'oro. Suggerì che Salomone fosse bendato e che poi scegliesse solo una coppa e un talento da quella coppa. «Se sceglierai il talento d'oro, ti sposerò» – disse la regina di Saba a Salomone.
> Il re considerò per un attimo le sue possibilità e poi chiese se gli fosse permesso di riorganizzare i talenti nelle due coppe prima di fare la sua scelta da bendato. La regina di Saba fu sorpresa dalla richiesta. Con 10 talenti d'oro in una coppa e 10 talenti

20. Nota della traduttrice. Gli autori raccontano la storia di Amzula nel Capitolo 1, *A story* (Zazkis & Liljedahl, 2009).

> d'argento nell'altra, sapeva che la possibilità di estrarre il talento d'oro era di 1/2. Supponiamo, pensò, che i talenti vengano mischiati e che ogni ciotola contenga 5 talenti d'oro e 5 d'argento; non riusciva a capire come questo avrebbe potuto cambiare la situazione. Avrebbe dovuto accogliere la richiesta di re Salomone?

Qui ci fermiamo per rivolgerci agli studenti: «Supponiamo che tu sia la regina di Saba. Accoglieresti la richiesta di Salomone? Perché sì o perché no?», «Supponiamo che tu sia re Salomone. Perché vorresti riorganizzare i talenti? Potrebbe esserci qualche differenza?».
La richiesta di Salomone appare inusuale, perché generalmente l'ipotesi iniziale che le persone fanno valutando il problema è che riorganizzando i talenti si otterrebbe comunque una quantità uguale in ogni coppa. Questo, infatti, non cambierebbe le probabilità di scegliere il talento d'oro. Il colpo di scena, tuttavia, sta nel fatto che quando i numeri di talenti nelle coppe sono diversi, le probabilità cambiano in modo significativo. Lo scenario migliore – che è infatti quello che potrebbe aver proposto il re – consiste nel lasciare un unico e solo talento d'oro in una coppa e mettere i rimanenti 9 talenti d'oro e 10 talenti d'argento nell'altra. Il calcolo esatto – e l'esplorazione di diverse riorganizzazioni dei talenti – può servire come introduzione alla probabilità condizionata nei gradi scolari più alti. Tuttavia, anche per gli studenti di scuola elementare è facile constatare che, con questa proposta di riorganizzazione, se Salomone scegliesse la coppa con l'unico talento d'oro, allora avrebbe la certezza al 100% di scegliere quello d'oro, mentre se la sua scelta iniziale fosse sulla coppa mista, la probabilità di estrarre il talento d'oro sarebbe di 9/19, che è un po' più del 47% e molto prossima a 1/2. Pertanto, la probabilità totale è molto vicina a 3/4. In tal modo, dalla riorganizzazione dei talenti, la probabilità di sposare la regina di Saba è stata significativamente migliorata. Inoltre, il mettersi "nei panni" del re e della regina, permette agli studenti di trovare diverse modalità per incrementare (o far decrescere) le possibilità di matrimonio.
Grazie all'aiuto del talento d'oro – la storia narra, infine, che Salomone sposò la regina di Saba e che essi ebbero un figlio che divenne il primo re di Etiopia.

4.4 Studenti come attori del problema: il testamento del beduino

Questa famosa storia viene raccontata in diverse varianti. Tenteremo con una di queste.

> C'era una volta un vecchio beduino che aveva tre figli…

Potrebbe essere il momento per un intervento interdisciplinare: Chi erano i beduini? (delle tribù nomadi arabe). Dove vivevano? (in Medio Oriente e Nord Africa). Come viaggiavano? (con i cammelli). Una volta stabilita la modalità usuale di trasporto, la storia potrebbe continuare.

> Non c'è bisogno di dire che i cammelli sono molto importanti per i beduini. Servono non solo per gli spostamenti e il trasferimento di merci da un luogo all'altro, ma le loro pelli sono perfette come cappotti e tappeti per le tende. Inoltre, il fatto che il cammello sia in grado di immagazzinare cibo e liquidi sufficienti per diverse settimane, lo rende un animale ideale per gli spostamenti nel deserto. La nostra storia, però, non riguarda solo i cammelli, ma anche un beduino molto anziano e i suoi tre figli.
> Come spesso accade alle persone molto anziane, il vecchio beduino morì e, come spesso accade non solo tra i beduini, il vecchio beduino lasciò il suo tesoro ai figli, con istruzioni esplicite su come il tesoro dovesse essere diviso. Qual era il suo tesoro principale? I cammelli, naturalmente. Così il vecchio beduino volle che il figlio maggiore ricevesse 1/2 dei cammelli, il figlio intermedio 1/3 dei cammelli e il figlio minore 1/9 dei cammelli. 17 cammelli erano stati lasciati in eredità ai figli.
> I figli avevano dunque un problema molto difficile da risolvere. Non potevano tagliare

> i cammelli. Non potevano vendere i cammelli e dividere il denaro – questo sarebbe stato impensabile nella loro tribù e considerato irrispettoso dei desideri del padre. Pensa, pensa e ripensa… non riuscirono a trovare una soluzione. Decisero quindi di rivolgersi all'anziano saggio della tribù e di chiedere consiglio. Lo cercarono dappertutto e alla fine lo trovarono che riposava sotto un albero con il suo cammello. Il problema non ha soluzione, dissero i figli, per cui chiediamo consiglio su come procedere.

Questo è il momento per rivolgere la storia verso gli studenti. Proponiamo agli studenti: «Immaginate di essere il vecchio saggio della tribù. Cosa suggerireste ai figli?». Gli studenti sviluppano delle loro proposte per poi presentarle alla classe. È possibile accettarle tutte o lasciare che gli studenti scelgano la migliore. Potrebbe accadere che alcuni studenti sviluppino la stessa soluzione suggerita dal vecchio saggio.

> Non c'è bisogno di litigare, suggerì. Prendete il mio cammello e aggiungetelo alla vostra mandria. Questa proposta fu ritenuta eccessivamente generosa e i figli inizialmente non compresero l'inaspettata gentilezza. Ma il saggio anziano continuò: il fratello più grande dovrebbe prendere 9 cammelli, che è 1/2 di 18, il figlio intermedio 6 cammelli, cioè 1/3 di 18, e il più giovane 2 cammelli, che è 1/9 di 18. E in questo modo riavrò il mio caro cammello e lo lascerò riposare sotto l'albero, perché è molto stanco dopo il nostro ultimo viaggio.

Il problema è risolto, ma la storia non finisce qui. Chiederemo agli studenti di considerare se il modo di dividere i cammelli suggerito dal vecchio saggio e accettato dai figli sia in effetti concorde con il testamento. Dopo tutto, 9 su 17 non è la metà e 6 su 17 non rappresenta un terzo. La conclusione auspicabile in questa discussione è che il testamento fosse "illegale", in quanto la somma delle parti non coincide con il totale. Per esempio, non si può fare testamento con 1/2 del patrimonio a un figlio e 3/4 all'altro, perché il totale risulta superiore all'intero patrimonio. In ogni caso, la soluzione proposta dal vecchio saggio, pur non essendo in accordo con il testamento, era la più vicina approssimazione, date le circostanze.

Una storia simile è descritta nel libro *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan (1972/2001). In quel caso, due viaggiatori stanno viaggiando sullo stesso cammello quando incontrano 3 fratelli che affrontano un dilemma simile a quello dei figli del vecchio beduino. Nel loro caso, però, ci sono 35 cammelli da dividere in 1/2, 1/3 e 1/9. Uno dei viaggiatori suggerisce di risolvere il problema aggiungendo il loro proprio cammello alla quantità da dividere. L'altro viaggiatore è scioccato, pensando che così facendo non sarebbero più stati in grado di continuare il viaggio senza il cammello. Tuttavia, non appena i numeri si rivelano, il figlio più vecchio riceve 18 cammelli, che è 1/2 di 36, il figlio intermedio riceve 12 cammelli, che è 1/3 di 36 e il più giovane riceve 4 cammelli, che è 1/9 di 36, per un totale di 34 cammelli. Sorprendentemente o no, i viaggiatori non solo ricevono indietro il loro proprio cammello, ma anche un altro cammello della mandria, come regalo per la loro saggia soluzione. Così possono continuare il loro viaggio insieme, cavalcando ognuno un cammello diverso.

Per sviluppare ulteriormente la comprensione delle idee matematiche in queste storie, si può chiedere agli studenti di scrivere le loro personali "storie di cammelli". Il compito è di variare i numeri, in modo tale che una storia simile con una soluzione simile possa avere senso. Una volta presentate diverse varianti, è possibile sviluppare una generalizzazione: quali dovrebbero essere le frazioni presenti nella storia per ottenere una "buona" storia di cammelli? Attivata l'immaginazione, gli studenti varieranno non solo i numeri, ma anche lo scenario. Dopo tutto l'attività matematica è con le frazioni, non con i cammelli.

4.5 Tre orsi in una storia differente

Chiunque avrà ascoltato la storia dei tre orsi dove c'erano papà-orso, mamma-orsa e piccolo-orso. Questa, però, è una storia diversa, non c'è nessuna Riccioli d'Oro e nessuna zuppa, ma ci sono mele e fate. Ecco come inizia:

> C'erano una volta tre orsi, ma voi questo lo sapete già. Dovrebbero esserci sempre tre orsi in una storia di tre orsi, ma questi non erano papà-orso, mamma-orsa e piccolo-orso. Erano tre fratelli orsi, forse tre gemelli, forse tre fratelli, forse due sorelle ed un fratello. Decidete voi, potete anche dargli dei nomi, ma fino a quando non avrete scelto altri nomi, chiamiamoli Minnie, Mickey e Molly.
> In una giornata di sole gli orsi andarono a fare una passeggiata nella foresta, dove giocarono, raccolsero bacche e si divertirono. I giochi erano così piacevoli che persero la cognizione del tempo e si sorpresero molto quando improvvisamente giunse la notte. Era così buio che non riuscirono a ritrovare la strada di casa, Vagarono finché non divennero molto stanchi ed affamati. Si sedettero allora sotto un albero per riposarsi un po' e… caddero in un sonno profondo. In quel momento, una fata gentile passò di lì. Vide i tre orsi e pensò che sembravano affamati; così, lasciò loro una cesta di mele e continuò a fare le sue buone azioni nella foresta. Nel bel mezzo della notte Minnie, la più grande tra gli orsi, si alzò, vide una cesta di gustose mele rosse e pensò: «Che delizia meravigliosa, queste mele sembrano così buone ed io sono così affamata che voglio mangiarle tutte!». Ma poi si ricordò che non era sola e che anche i suoi fratelli probabilmente erano affamati. Si ricordò anche che mamma-orsa aveva insegnato ai suoi piccoli la condivisione, così Minnie mangiò solo un terzo delle mele e immediatamente si addormentò.
> Trascorse un'altra ora e Mickey si svegliò. Vide una cesta di gustose mele rosse e pensò: «Che delizia meravigliosa, queste mele sembrano così buone ed io sono così affamato che voglio mangiarle tutte!». Ma poi si ricordò che non era solo e che anche i suoi fratelli probabilmente erano affamati. Si ricordò anche che mamma-orsa aveva insegnato ai suoi piccoli la condivisione, così Mickey mangiò solo un terzo delle mele e immediatamente si addormentò.
> Trascorse un'altra ora e…

Qui è opportuno lasciare che gli studenti continuino la storia. Lo schema è chiaro: ogni orso, a turno, mangia un terzo di ciò che c'è nella cesta. Dopo che anche Molly, avendo mangiato le sue mele, si addormenta con successo, possiamo continuare la storia.

> Lentamente, la foresta si risvegliò in una mattina di sole. Gli uccelli cantavano e il loro amorevole canto svegliò i tre orsi addormentati. Gli orsi videro una cesta sotto l'albero. Cosa c'era dentro?

A questo punto consideriamo i suggerimenti degli studenti. Inevitabilmente, alcuni studenti proporranno che la cesta sia vuota, sostenendo che ogni orso ha mangiato un terzo delle mele totali. Tuttavia, altri studenti potrebbero obiettare a questa opinione, affermando che ognuno aveva mangiato solo un terzo di ciò che c'era nella cesta al momento del proprio risveglio. Dunque, se Molly, al risveglio, aveva mangiato un terzo di ciò che c'era nella cesta, i due terzi di questa quantità avrebbero dovuto essere ancora nella cesta. Solo nel momento in cui tutti gli studenti sono d'accordo rispetto a questo aspetto, è tempo di porre una domanda. Se quando gli orsi si risvegliarono al mattino erano rimaste 8 mele nella cesta, quante mele aveva lasciato loro la fata?
Questo problema può essere presentato sia a studenti di scuola elementare sia ad insegnanti in

formazione. Nella nostra esperienza, gli insegnanti che cercano di utilizzare l'algebra per trovare la soluzione di solito falliscono nella risoluzione. L'utilizzo di una strategia di lavoro a ritroso o disegnare diagrammi porta alla soluzione più velocemente e in modo più convincente. Di mattina c'erano 8 mele. 8 mele rappresentano i 2/3 di ciò che vide Molly quando si svegliò, allora c'erano 12 mele nella cesta in quel momento. 12 mele sono i 2/3 di ciò che vide Mickey quando si svegliò, per cui c'erano 18 mele nella cesta in quel momento. Infine, 18 mele sono i 2/3 di ciò che vide Minnie e di ciò che la fata donò ai tre orsi. All'inizio, dunque, c'erano 27 mele nella cesta.
La soluzione in sé non è tuttavia il nostro interesse principale. Ciò che è più importante per noi è quello che questa storia introduce in una maniera giocosa e potente, ossia l'idea che una frazione sia relazionata alla quantità iniziale presa come intero e che questo intero possa cambiare.
La mancanza di attenzione verso l'intero conduce a misconcezioni presenti nelle storie che coinvolgono l'aumento o la diminuzione di una quantità mediante la stessa frazione. Per esempio, il prezzo può aumentare del 10% e poi diminuire del 10%. L'iscrizione ad un determinato club può aumentare di 1/5 in un anno e diminuire di 1/5 l'anno successivo. Ciò che ci si aspetta intuitivamente in questi casi è che queste variazioni si annullino a vicenda e che si arrivi all'importo iniziale. Ma questo non è ovviamente possibile, poiché l'aumento e la diminuzione relativi si riferiscono ad importi diversi, ossia la frazione o la percentuale è considerata rispetto a un intero diverso. Questa misconcezione è ben documentata nella letteratura di ricerca, la nostra speranza, forse ingenua, è che la storia degli orsi e delle mele possa richiamare l'attenzione esplicita degli studenti sulla considerazione dell'intero di riferimento ogni volta che la soluzione di un problema dipenda da una tale considerazione.

Traduzione di

Angela Donatiello, Università degli Studi di Salerno
adonatiello@unisa.it

Bibliografia

Baker, A., & Greene, E. (1987). *Storytelling: Art and technique.* R.R. Bowker Company.

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 132–144. https://doi.org/10.2307/749140

Bauer, C. F. (1993). *New handbook for storytellers.* American Library Association.

Burrell, A. (1971). *A guide to story telling.* Grypton Books. (Originale pubblicato nel 1926).

Egan, K. (1986). *Teaching as story telling: An alternative approach to teaching and curriculum in the elementary school.* University of Chicago Press.

Haven, K. (2000). *Super simple storytelling: A can-do guide for every classroom, every day.* Teacher Ideas Press.

Mason, J. (2001). Tunja Sequences as example of employing students; power to generalize. *Mathematics Teacher*, *94*(3), 164–169. https://doi.org/10.5951/MT.94.3.0164

Mason, J. (2007). *Structured variation grids.* http://www.pmtheta.com/structured-variation-grids.html

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 277–289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Pellowski, A. (1977). *The world of storytelling*. R.R. Bowker Company.

Polya, G. (1988). *How to solve it.* Princeton University Press. (Originale pubblicato nel 1945).

Shedlock, M. (1924). *The art of the story-teller.* D. Appleton and Company.

Tahan, M. (2001). *L'uomo che sapeva contare.* Salani Editore. (Titolo originale: *The man who counted* pubblicato nel 1972).

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling.* Brill.

Esperienze didattiche

DdM

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), 94 - 115, DOI: 10.33683/ddm.24.16.4 OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Due esperienze didattiche di early-algebra con il DIST-M: dalla costruzione del problema all'implementazione in aula

Two early-algebra teaching experiences with DIST-M: from problem construction to classroom implementation

Maria Aceto•, Maria Lodina De Santis°, Angela Donatiello••, Giuseppina Lemmi°°, Simona Manzoni•••, Concetta Rosaria Montervino°°°, Luca Picariello••, Valeria Scaramuzzino•••• e Giovanna Vadalà°°°°
•IC "Rita Levi Montalcini" di Lucignano (AR) – Italia
°IC "Gabriele Rossetti" di Vasto (CH) – Italia
••Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno – Italia
°°IC Perugia 6 – "Mario Grecchi" di Castel del Piano (PG) – Italia
•••IC "Giovanni XXIII" di Almenno San Salvatore (BG) – Italia
°°°IC "Alfieri – Garibaldi" di Foggia – Italia
••••IC "Curinga" di Curinga (CZ) – Italia
°°°°IC "B. Telesio" di Reggio Calabria – Italia

✉ m.aceto@iclucignano.edu.it, marialodina.desantis@icrossettivasto.edu.it, adonatiello@unisa.it, giuseppinalemmi@yahoo.it, simona.manzoni@icalmennosansalvatore.edu.it, crmontervino@gmail.com, lpicariello@unisa.it, valeria.scaramuzzino63@gmail.com, prof.gio.mat@gmail.com

Sunto / La possibilità di approcciare al discorso algebrico mediante attività che mettano in luce diverse rappresentazioni permette agli studenti lo sviluppo del pensiero relazionale. Le esperienze presentate sono relative alla progettazione di attività a carattere fortemente immersivo che hanno coinvolto studenti di scuole secondarie di primo grado nello sviluppo della competenza argomentativa e del formalismo simbolico in ambito di teoria dei numeri. L'approccio narrativo e immersivo è stato possibile grazie all'uso del dispositivo didattico del DIST-M, mentre l'utilizzo di sistemi semiotici visuali ha favorito la formazione di un concetto in una prospettiva vygotskijana.

Parole chiave: argomentazione; pensiero relazionale; problemi-storia; rappresentazioni semiotiche; *early algebra*.

Abstract / The possibility of approaching algebraic discourse through activities that highlight different representations enables students to develop relational thinking. The experiences presented relate to the design of highly immersive activities that involved secondary school students (grades 6 and 8) in the development of argumentative competence and symbolic formalism in the field of number theory. The narrative and immersive approach was made possible through the use of the DIST-M methodology, while the use of Visual Semiotic Systems facilitated concept formation in a Vygotskian perspective.

Keywords: argumentation; relational thinking; story-problem; semiotic representations; early algebra.

1 Introduzione

I lavori che vengono qui presentati nascono nell'ambito dei percorsi formativi sulla didattica digitale, voluti dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) e dalla Fondazione "I Lincei per la Scuola", in cui docenti di scuola secondaria di primo grado,[1] accompagnati da tutor-ricercatori, hanno co-progettato alcuni percorsi narrativi per lo sviluppo della competenza argomentativa e del formalismo simbolico in ambito di teoria dei numeri. In questo lavoro si presentano due percorsi attivati nella scuola secondaria di primo grado, al fine di avviare e sviluppare negli studenti coinvolti la competenza argomentativa.[2] Nel contesto della scuola italiana, lo sviluppo delle capacità argomentative e del *problem solving* risultano infatti essere obiettivi da perseguire fin dal primo ciclo d'istruzione;[3] infatti, nelle Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012) si legge che

> «caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana. [...] Stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

Per favorire tale processo, si è scelto di operare con problemi-storia, ossia problemi scritti in forma verbale nei quali la domanda è calata in una situazione narrativa familiare al lettore ed autentica, ossia che supera il rischio della cosiddetta *frattura narrativa*, individuata da Zan (2012a) come uno degli ostacoli che impediscono la comprensione del testo di un problema. Lo stesso Radford (2022) chiarisce che i problemi-storia, a differenza delle altre tipologie di problemi che vengono spesso proposti in ambito scolare, includono un contesto esperienziale e narrativo in cui gli agenti partecipano in modo attivo.

Nelle attività illustrate nel presente lavoro, l'approccio narrativo e immersivo è stato possibile grazie all'uso del dispositivo didattico del DIST-M (Albano et al., 2022), il cui quadro teorico si basa sulla teoria dell'*expansive learning* e che considera colui che apprende come un agente coinvolto nella costruzione e implementazione di un oggetto e di un concetto sostanzialmente nuovo, più ampio e complesso (Engeström & Sannino, 2010). L'approccio espansivo, sviluppato sul paradigma vygoskijano e basato sulla teoria dell'attività di Leont'ev, descrive dunque l'apprendimento che emerge all'interno di gruppi che vogliono introdurre cambiamenti nel loro sistema d'attività, immaginando scenari collocabili nella zona di sviluppo prossimale del gruppo (Engeström, 2015).

In linea con le Indicazioni Nazionali, il lavoro di sperimentazione avviato con i gruppi classe ha coinvolto gli studenti in processi esplorativi in ambito di teoria elementare dei numeri, in contesto cooperativo, mediante l'utilizzo di diversi sistemi semiotici. Anche se su piani differenti, gli studenti si confrontano continuamente con la necessità di utilizzare rappresentazioni semiotiche diverse, di elaborarle e di effettuare conversioni da un sistema semiotico ad un altro. Nell'ottica di Duval (2006), il processo di conversione dei sistemi semiotici svolge un ruolo fondamentale da un punto di vista cognitivo, in quanto favorisce la comprensione profonda dei concetti. Nel primo ciclo d'istruzione, anziché ricorre-

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. La documentazione e i materiali utili per replicare l'attività saranno disponibili sul sito web de "I Lincei per la Scuola" https://www.linceiscuola.it/.
3. Il primo ciclo d'istruzione in Italia dura otto anni e corrisponde a tutti gli anni di scuola elementare e ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

re a sistemi semiotici formali e astratti, si preferisce favorire piuttosto l'uso di sistemi semiotici visuali, in particolare concreti ed iconici, che permettono, secondo Radford (2022), di rendere in modalità *embodied* l'idea metaforica di "cosa" utilizzata nel XIV secolo dai maestri d'abaco italiani, per la rappresentazione del concetto di incognita e variabile. Nell'ambito della scuola secondaria di primo grado i sistemi semiotici visuali avrebbero dunque il compito di favorire lo sviluppo di congetture e l'avvio verso forme di generalizzazione più astratta, come richiesto dalle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012). Si legge infatti che:

> «Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni…) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

2 Inquadramento teorico

2.1 Le storie nella didattica

A partire da queste premesse nasce l'idea di progettare delle attività a carattere fortemente immersivo, che coinvolgano gli studenti di scuole secondarie di primo grado nello sviluppo della competenza argomentativa e del formalismo simbolico in ambito di teoria dei numeri.

In letteratura, il concetto di competenza argomentativa (Niss & Højgaard, 2011, 2019) si riferisce all'approccio pedagogico che promuove la costruzione attiva della comprensione matematica attraverso l'interazione e la discussione tra gli studenti. In questo contesto, un approccio didattico orientato all'argomentazione non si limita alla semplice enunciazione di soluzioni corrette, ma sottolinea l'importanza di spiegare, giustificare e confrontare i propri ragionamenti matematici. Gli studenti sono incoraggiati a esporre le proprie idee, a confrontarle con quelle dei loro compagni e a sviluppare una comprensione più approfondita dei concetti matematici attraverso la discussione e la riflessione critica. L'obiettivo è promuovere una comprensione più completa e duratura della matematica, piuttosto che un semplice apprendimento meccanico di procedure. Nella pratica didattica, si verifica troppo spesso che i processi di comprensione degli studenti rimangano celati dietro al compromesso della ricerca di risposte corrette da parte del docente. Alcune teorie del successo, ad esempio quelle basate sull'incontrollabilità (Di Martino, 2017) non favoriscono, infatti, lo sviluppo dei processi argomentativi. Anche l'aritmetica è spesso esplorata dagli studenti fin dai primi anni di scuola con modalità prettamente procedurali, orientate al prodotto, contribuendo così a creare un'abitudine all'apprendimento riproduttivo che sviluppano negli studenti una visione della matematica come disciplina in cui non sia richiesto prendere decisioni strategiche (Di Martino, 2017). L'uso di problemi non autentici, poi, di cui sono spesso ricchi i libri di testo, non favorisce la costruzione profonda dei significati matematici, ma lascia immaginare i problemi come questioni in cui esista una sola strada risolutiva. I problemi scritti in forma di testo sintetico, molto utilizzati nella pratica didattica, inducono di frequente nello studente una lettura selettiva degli elementi del problema al fine di individuare direttamente i dati numerici da manipolare per arrivare alla risposta (Zan, 2011, 2012a). Essi, infatti, seguono «scorciatoie cognitive [...] a causa della loro struttura stereotipata» (Zan, 2012a, p. 110). Con l'obiettivo di evitare un approccio puramente procedurale al *problem solving* e per stimolare la costruzione attiva di un nuovo

concetto matematico, in letteratura si trova il riferimento ai cosiddetti *problemi-storia* (Radford, 2022; Zan, 2011, 2012a, 2012b), considerati come una sottocategoria dei problemi scritti in forma testuale e nei quali la domanda è calata in una situazione familiare al lettore che spesso prende il nome di contesto (Zan, 2011). È necessario che tale contesto sia fortemente esperienziale e con una narrazione che coinvolga direttamente gli studenti come agenti attivi dell'intero processo.
Zan (2011) individua in Bruner (1986, 1991) le caratteristiche che una storia deve avere affinché, in un problema, gli elementi della storia (personaggi, luoghi, oggetti) non risultino irrilevanti per la risoluzione del problema stesso e la domanda nasca in maniera naturale dalla storia. In particolare, tra gli altri emerge che in una storia non devono mancare un personaggio, un obiettivo che il personaggio vuole portare a termine, un'azione da compiere per raggiungere l'obiettivo, uno strumento utile a compiere quell'azione e una situazione specifica nella quale l'azione prende luogo (*normatività*). Questi elementi devono essere calati in una dimensione temporale (*sequenzialità*) e interconnessi intorno ad un ostacolo che renda complesso ai personaggi il raggiungimento dell'obiettivo.
Rispettare queste proprietà quando si costruisce un problema-storia assicura che il contesto narrativo sia ben strutturato e previene l'emergere di *fratture narrative*, ossia di quegli ostacoli che impediscono l'utilizzo del processo narrativo (Zan, 2012a) nella fase di comprensione di un problema. Più precisamente, in un problema le fratture narrative nascono quando la domanda non fa riferimento alla storia: questo fa sì che il legame tra gli elementi della narrazione si rompa rendendo inutile, per il lettore, comprenderli. Nella maggior parte dei casi, infatti, le fratture narrative nascono proprio tra domanda e contesto; pertanto, «maggiore è il collegamento fra la domanda e la storia narrata nel contesto, più la comprensione della storia favorirà la comprensione della domanda e in definitiva del problema» (Zan, 2012b, p. 438). In quest'ottica, Zan ha sviluppato il modello Contesto e Domanda (C&D) (Zan, 2012a, 2012b) per la costruzione di problemi-storia che tengano conto di quanto discusso sopra, visualizzabile in **Figura 1.** Tramite tale modello è possibile formulare un problema il cui testo rispetti tutte le proprietà di una *buona storia* e in cui, al contempo, la domanda nasca in maniera naturale dal problema.

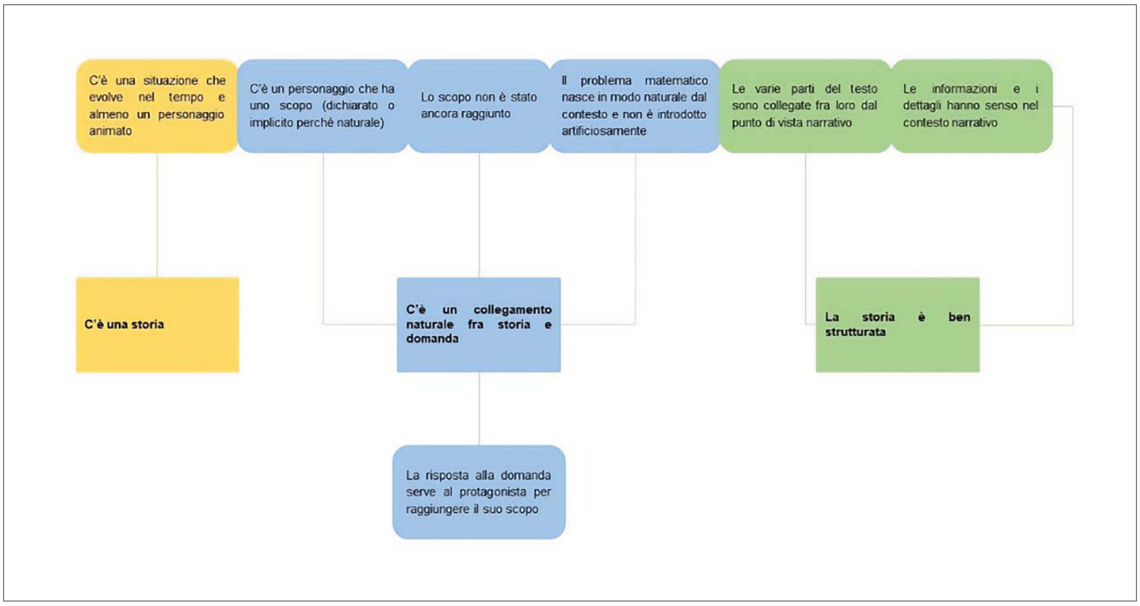


Figura 1. Il modello Contesto e Domanda (C&D) (Zan, 2012b, p. 454).

Ciò che emerge, in particolare osservando il secondo blocco, è che affinché la domanda nasca in maniera naturale dal contesto, la risposta deve essere necessaria al raggiungimento dello scopo del protagonista.

2.2 Early algebra

All'interno di questo lavoro, gli scopi matematici a cui tendono tutti i protagonisti delle storie riguardano la scoperta di semplici proprietà di teoria dei numeri, lo sviluppo di un approccio relazionale al simbolo di uguaglianza, la costruzione del concetto di consecutivo, l'approccio alle equazioni, la genesi del processo dimostrativo per induzione e un primo approccio al concetto di sommatoria.
La possibilità di approcciare al discorso algebrico mediante attività che mettano in luce diverse rappresentazioni e il carattere relazionale delle proprietà dei numeri, permette agli studenti lo sviluppo di quel *pensiero relazionale* che Navarra (2019) pone a fondamento del pensiero pre-algebrico. In ottica relazionale l'attenzione è, infatti, puntata non tanto sugli enti in gioco, quanto più sul tipo di relazione esistente tra essi e sul riconoscimento di analogie e generalizzazioni nelle strutture aritmetiche e algebriche in esame: l'esempio emblematico lo si ritrova nel significato dell'uguale non più visto in ottica procedurale con il focus sul risultato, bensì in ottica relazionale, che favorisce la costruzione di significato matematico mettendo in luce il processo. A differenza del pensiero procedurale, orientato al numero, il pensiero relazionale è orientato alla struttura e si focalizza sulle quantità in quanto tali, non sul particolare valore che esse assumono. Pensare in modo relazionale significa dunque pensare in termini di relazioni di uguaglianza con l'uso di rappresentazioni non simboliche, ad esempio sotto forma di scatole e biglie. Spesso infatti gli studenti incontrano maggiore difficoltà nel passare dalla rappresentazione puramente verbale a quella strettamente simbolico-astratta. In tal caso il passaggio per un modello grafico di tipo analogico, che evidenzi anche il graduale salto dal discreto al continuo, svolge un ruolo di modellizzazione intermedia nella costruzione di un nuovo concetto matematico (Lemmo & Maffia, 2021). In quest'ottica, l'utilizzo di un Sistema Semiotico Concreto (CSS) e di un Sistema Semiotico Iconico (ISS) in un contesto narrativo di un problema-storia, favorisce la formazione di un concetto in una prospettiva storico-culturale di stampo vygotskijano (Radford, 2022). Ricordiamo che la genesi di un concetto da un punto di vista vygotskijano è strettamente interconnessa al concetto di attività che, nella teoria dell'oggettivazione di Radford, è intesa come sistema dinamico in evoluzione dialettica. Per Radford, infatti, l'attività è il sistema che insegnante e studenti producono insieme nel confrontarsi con un problema matematico comune e include le relazioni etiche, i processi discorsivi e intellettuali e i flussi emozionali generati nell'attività collettiva e unificata di insegnamento-apprendimento (Radford, 2022). In questo ambito rientrano sia i problemi di rappresentazione e trattamento con i mucchi (Castellini, 2016; Lemmo & Maffia, 2021), sia l'approccio al principio di induzione sviluppato in ambiente ArAl (Cusi & Malara, 2008; Telloni & Malara, 2021).
Una delle questioni principali riguarda la distinzione del significato procedurale dal significato relazionale del simbolo di *uguale*. Numerosi studi mostrano che studenti di scuola primaria[4] e di scuola secondaria di primo grado vedono il segno di uguale solo in modo operazionale, come stimolo ad una risposta o come espressione di un'azione, privandolo del forte senso relazionale che lo caratterizza, ossia come espressione di un'equivalenza (Giberti & Maffia, 2021; Radford, 2022).
Radford (2022) riporta numerosi studi in cui si evince che le difficoltà incontrate dagli studenti di secondaria di primo grado in relazione al simbolo di uguale sono dovute alla scrittura numerico simbolica che racchiude un alto livello di astrazione e induce dunque ad un uso prettamente computazionale del simbolo di uguale. Inoltre, l'utilizzo di un unico termine per indicare l'uguale crea misconcezioni. Interessante, in questo senso, ricordare che in epoca medioevale i matematici arabi erano soliti utilizzare due termini diversi per indicare l'uguale: "mithl" ossia "simile, dello stesso tipo" e "adala", ossia "ben bilanciato". L'uso di termini distinti permetteva una distinzione concettuale tra i diversi aspetti del concetto di uguaglianza, favorendo la comprensione del significato relazionale di uguaglianza tra le due parti di un'equazione, contro una visione propriamente computazionale che vede l'uguale solo come operatore (Radford, 2022).
Un'altra difficoltà emergente in studenti di secondaria di primo grado è il concetto di *consecutivo*.

4. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

Come suggerisce Navarra (2019), tale difficoltà risiede nell'abitudine a concepire la somma tra numeri solo come operatore che deve necessariamente produrre un risultato, senza la consapevolezza del concetto di scrittura matematica *non canonica* come rappresentazione del numero stesso. L'utilizzo di sistemi semiotici visuali (CSS e ISS) in classi di secondaria di primo grado può favorire il graduale passaggio verso la costruzione della scrittura relazionale di numero consecutivo, fondamentale anche per l'introduzione dei primi problemi con le equazioni.
L'approccio alle equazioni di I grado avviene solitamente nella scuola secondaria di primo grado mediante i cosiddetti problemi con i segmenti che però nascondono l'insidia del continuo e non favoriscono necessariamente la comprensione relazionale del concetto di incognita. Il *mucchio* può invece essere percepito dagli studenti come un contenitore "opaco" di un numero incognito di elementi discreti, utile a gestire relazioni tra numeri naturali. Il passaggio al continuo potrebbe poi avvenire in un secondo momento mediante la sostituzione dei mucchi con liquidi o sabbia (Castellini, 2016; Lemmo & Maffia, 2021). La rappresentazione che fa uso di contenitori opachi per le incognite e di palline per le quantità numeriche note richiama un'idea di rappresentazione che supporta lo sviluppo del pensiero relazionale mediante il soddisfacimento di alcuni requisiti (Lenz, 2022; Polotskaia & Savard, 2021):

- la rappresentazione può presentare sia le quantità note sia quelle incognite;
- la rappresentazione mostra il ruolo di ciascun elemento all'interno della relazione;
- la rappresentazione supporta l'analisi visiva e la scoperta di nuove informazioni.

Inoltre, gli studi sulle difficoltà incontrate dagli studenti nell'approccio al principio di induzione hanno portato all'introduzione di nuove pratiche didattiche che tengano conto delle possibili misconcezioni che possono nascere in quest'ambito. In quest'ottica si è scelto di costruire un problema-storia che tenga conto di questi risultati e che, in particolare, si focalizzi sul problema didattico di far comprendere agli studenti il passo di induzione, considerato uno degli aspetti più delicati del principio di induzione (Cusi & Malara, 2008). Muovendosi in questa direzione, il principio di induzione è stato introdotto agli studenti seguendo quanto suggerito da Cusi e Malara (2008) e Telloni e Malara (2021) attraverso *micro-dimostrazioni* (Cusi & Malara, 2008) delle singole implicazioni $P(k) \rightarrow P(k+1)$ per determinati valori di k. Per farlo, è stato chiesto agli studenti di dimostrare ricorsivamente la proposizione $P(k+1)$ a partire dalla proposizione $P(k)$ al fine di permettere loro di individuare una *struttura di transizione* (Avital & Libeskind, 1978), ossia un insieme di inferenze che si ripetono, ripresentandosi ad ogni passaggio.
All'interno del processo risolutivo viene anche introdotto l'utilizzo del simbolismo matematico. Gli studi sul linguaggio e sul formalismo matematico in diversi contesti scolastici hanno evidenziato che tra gli aspetti fondamentali per lo sviluppo e l'acquisizione di simboli vi sono la creazione condivisa e la negoziazione di significato all'interno della comunità (Coppola et al., 2014). In quest'ottica, attraverso i problemi-storia, si è cercato di mettere gli studenti in una situazione tale da rendere necessaria l'introduzione di un simbolo che possa aiutare a condensare la somma di un determinato numero di addendi per avviarli ad un primo approccio al concetto di sommatoria.

3 Metodologia

Come modello metodologico, il lavoro si è concentrato sul dispositivo didattico del *Digital Interactive Storytelling in Mathematics* (DIST-M)[5] il cui quadro teorico si basa sulla teoria dell'*expansive learning*

5. Progetto PRIN – Bando 2015 – Prot. 20155NPRA5 accessibile al link https://sites.google.com/unisa.it/dist-m/il-progetto/pubblicazioni.

(Engeström & Sannino, 2010). I soggetti che apprendono sono coinvolti nella costruzione cooperativa di un oggetto e di un concetto sostanzialmente nuovo e l'apprendimento che emerge all'interno dei gruppi è collocabile nella zona di sviluppo prossimale del gruppo stesso (Engeström, 2015).
Nel DIST-M gli studenti sono condotti all'interno di un problema-storia a fumetti suddivisa in episodi, mediante l'impersonificazione delle funzioni cognitive agenti nella mente di un matematico (Boss, Promoter, Peste, Blogger) e l'interazione su piattaforma dedicata con account legati ai singoli personaggi.
I ruoli cognitivi sono definiti come segue (Albano et al., 2021):

- *Promoter* è colui o colei che si fa carico dell'esplorazione necessaria per procedere nel percorso risolutivo e che in caso di blocco cerca aiuto tra le risorse o chiedendo consigli a un esperto;
- *Boss* è colui o colei incaricato di seguire l'organizzazione del percorso risolutivo scegliendo quali strategie adottare per il raggiungimento dell'obiettivo. Ha inoltre una funzione affettiva nel tenere sotto controllo il coinvolgimento di tutto il gruppo durante tutte le fasi del percorso, anche in caso di scoramento;
- *Blogger* è colui o colei incaricato della riorganizzazione del processo risolutivo e dei risultati ottenuti al fine di comunicarli e condividerli con la comunità matematica;
- *Peste* rappresenta il pensiero critico e è colui o colei responsabile della validazione del processo risolutivo mettendo in dubbio le congetture avanzate dal gruppo e richiedendo il controllo della validità dei risultati ottenuti;
- *Guru* è colui o colei che rappresenta l'esperto a cui rivolgersi in caso di difficoltà durante la risoluzione del problema e è capace di fornire le conoscenze e le risorse esterne necessarie per superare l'*impasse*.

Gli studenti, divisi in gruppi, interpretano i ruoli su due diversi livelli, Attori e Osservatori, che si interscambiano nel passaggio da un episodio del DIST-M ad un altro. In ogni episodio c'è un solo Gruppo Attori che è impegnato nella risoluzione del *task*, mentre gli altri gruppi osservano in modo critico il ruolo che è stato assegnato a ciascuno studente.
In ottica vygotskiana l'attività di costruzione dei concetti è stata resa possibile dal lavoro in piccoli gruppi e dalla creazione di uno spazio sociale di interazione e comunicazione, in cui l'interazione tra pari e con il docente non è vista in termini di negoziazione di un significato condiviso, quanto piuttosto nella cooperazione reale di tutti i soggetti in gioco per la produzione collettiva di idee (Radford, 2022). Gli strumenti di dialogo predisposti in piattaforma prevedono l'interazione degli studenti su chat dedicate, in particolare una per il gruppo di Attori, una per i gruppi di Osservatori e una tra Guru e Promoter.
La piattaforma utilizzata per l'implementazione, costruita in ambiente Moodle, ha richiesto un forte lavoro di guida e supporto da parte dei tutor-ricercatori, in quanto strumento digitale nuovo per le docenti coinvolte. Ogni episodio è stato implementato come risorsa Libro di Moodle contenente i fumetti costruiti tramite software esterni e suddivisi in sottocapitoli. Alla fine di ognuno di essi è richiesta un'azione concreta immersiva degli studenti da svolgersi con l'uso di applicazioni accessibili attraverso pulsanti interattivi. Le interazioni degli studenti sono state previste solo all'interno della piattaforma, in particolare nelle chat Gruppo Attori, Gruppo Osservatori e nella chat dedicata all'interazione Promoter e Guru. Agli studenti era richiesto di non parlare a voce con i compagni e la consegna delle password di accesso alla piattaforma è avvenuta in modalità secretata e con cambi password previsti nelle sessioni successive, in modo tale da non permettere agli studenti di tenere traccia degli accessi o di riconoscere i compagni nei ruoli giocati.
La sperimentazione si è svolta in 8 classi di scuola secondaria di primo grado, 4 di classe prima e 4 di classe terza di 7 diverse regioni italiane del Sud, Centro e Nord Italia, mediante la costruzione e l'implementazione di due diversi problemi-storia.
Dopo una prima fase di co-progettazione e co-costruzione dei problemi matematici e dei proble-

mi-storia, dello sviluppo degli *storyboard* e della realizzazione digitale dei fumetti, avvenuta in cooperazione tra le docenti coinvolte e i tutor-ricercatori, è seguita la fase di sperimentazione vera e propria in classe. Essa ha preso l'avvio al termine dell'anno scolastico 2022/23 e si è conclusa durante il primo periodo dell'anno scolastico 2023/24. Le attività si sono svolte durante l'orario curricolare nei laboratori di informatica delle singole scuole o, in caso di *notebook* portatili disponibili al di fuori del laboratorio, direttamente nelle classi.

3.1 Scelta del problema

Nella scuola secondaria di primo grado si osserva talvolta che per i ragazzi le difficoltà maggiori nascono dal risolvere alcune tipologie di problemi nei quali gli elementi essenziali non sono i numeri ma le *relazioni tra i numeri*. In questo filone si collocano, infatti, tutti gli studi sull'*early algebra* (Kieran, 2018; Lenz, 2022; Navarra, 2019).

> «In una situazione problematica, un dato assoluto è generalmente ben identificato dagli studenti (Pierino possiede tot mele; il perimetro del triangolo è pari a…; …) mentre invece il dato relazionale (il doppio; la metà; il successivo; …) sfugge spesso alla loro attenzione».
>
> (Lemmo & Maffia, 2021, p. 54)

Partendo da queste considerazioni, si è deciso di porre l'attenzione sulla necessità di individuare due problemi matematici in grado di consentire una costruzione collettiva di significati, di riflettere sui diversi modi di rappresentare un numero, di fornire strumenti utili per saper spiegare a sé stessi e agli altri il concetto costruito e la strategia adottata, tramite un uso sapiente delle trasformazioni semiotiche (Fandiño Pinilla, 2015).
La scelta del problema è stata preceduta da un'analisi a priori per cercare di individuare le problematiche più rilevanti legate ad un apprendimento spesso orientato verso l'operatività piuttosto che improntato alla costruzione dei concetti. Di norma, per gli studenti risulta difficile fornire spiegazioni, giustificazioni o anche solo motivare le proprie scelte. Inoltre, essi si confrontano raramente con situazioni sfidanti, in cui venga richiesto loro di congetturare, formalizzare e dimostrare. L'utilizzo dei registri semiotici è solitamente limitato al formalismo classico senza essere spesso accompagnato dalla costruzione di significato. A tal fine, per entrambi gli anni di scuola secondaria di primo grado si è pensato di proporre agli studenti un risultato elementare di teoria dei numeri che favorisse lo sviluppo della competenza argomentativa. In particolare, per le classi prime di scuola secondaria di primo grado è stata scelta la proprietà per la quale *la somma di tre numeri naturali consecutivi è un multiplo di tre*, mentre per le classi terze di scuola secondaria di primo grado si è scelto di lavorare con la proprietà per cui *la somma dei primi n numeri dispari equivale a* n^2. Le due proprietà sono state proposte agli studenti per favorire inoltre un primo approccio alla rappresentazione algebrica dei numeri e al trattamento algebrico. In entrambi i casi si è agevolato il passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio matematico e viceversa, attraverso l'utilizzo di sistemi semiotici visuali (CSS e ISS) (Radford, 2022). Dall'analisi a priori è emerso inoltre che tra le problematiche di interesse vi è la costruzione del concetto di multiplo, connesso con quello di divisibilità, ancora non completamente consolidato negli studenti di scuola secondaria di primo grado, così come quello di incognita, la cui costruzione è stata facilitata attraverso l'uso di un modello didattico basato sul concetto di mucchio discreto di elementi (Castellini, 2016; Lemmo & Maffia, 2021), nel nostro caso secchielli e castagne. Per quanto riguarda le classi terze, la necessità di far produrre una dimostrazione ha fornito l'occasione per introdurre il principio di induzione mediante l'*early algebra*, tramite l'utilizzo dei processi di *pre-induzione* o *induzione naïf* (Cusi & Malara, 2008; Telloni & Malara, 2021).

3.2 Costruzione dello *storyboard* e dei fumetti

Nell'ottica del modello C&D, il problema matematico è diventato narrazione. Si è infatti costruita una storia che potesse consentire agli studenti di immedesimarsi facilmente nei diversi personaggi. A tal fine, nella creazione dello *storyboard* si è cercato di costruire un problema il più possibile vicino alle dinamiche relazionali degli studenti, immaginando i personaggi come un gruppo di amici, avvicinandosi al loro modo di essere e di interagire tra pari e cercando di vedere con i loro occhi. I problemi-storia costruiti hanno le caratteristiche di quello che Di Martino (2017) definisce un "bel problema", ossia un problema sfidante, per il quale non si conoscano a priori le conoscenze che verranno utilizzate per la risoluzione, nel quale sia possibile effettuare delle attività di tipo esplorativo e in cui le strategie possibili per la risoluzione siano molteplici.

Per la costruzione dei fumetti, avvenuta in modalità collaborativa tra docenti e tutor-ricercatori, è stata scelta la piattaforma *Pixton* per le classi prime e la piattaforma *StoryboardThat* per le classi terze. Sono state curate attentamente le ambientazioni, le espressioni facciali, l'abbigliamento e i dettagli visivi, al fine di rendere sempre più immersiva l'esperienza nella trama della storia. Si è lavorato per rendere il linguaggio visivo del fumetto accessibile e stimolante. La sua universalità ha permesso di veicolare il racconto matematico attraverso più canali comunicativi (grafico, linguistico ed emotivo). I dialoghi sono stati realizzati dalle insegnanti delle classi coinvolte e dunque i termini utilizzati sono quelli a cui le classi erano già abituate. A volte possono sembrare linguisticamente complessi, ma sono contestualizzati all'interno delle varie classi.

3.3 *Storyboard* classi prime

Per le classi prime si è pensato di ambientare la storia in un campo scout nel quale si trovano 5 personaggi ben definiti per caratteristiche e ruoli. Il gruppo scout, infatti, è formato da Gabriele, Andrea, Alice e Anna. Gabriele è il Reporter (con funzione di Blogger), amante della natura, molto riflessivo, ama scrivere e raccontare tutto ciò che gli accade. Andrea è la Pulce (con funzione di Peste), scettico e curioso, non si accontenta mai delle spiegazioni che gli vengono date, dubita di tutto e tutti e per questo pone continuamente domande. Alice è la Sherlock (con funzione di Promoter), è appassionata di serie crime e mistery, ogni volta che incontra un mistero da risolvere non si ferma e cerca sempre nuove strade. Essendo il capo-pattuglia, si confronta spesso con Camilla, il capo-scout. Anna è l'Hermione (con funzione di Boss), una ragazza con un carattere molto deciso; è la più organizzata del gruppo, prende in mano ogni situazione e guida i compagni verso l'obiettivo. La trama si sviluppa attraverso enigmi matematici, coinvolgendo il gruppo in un'avventura di collaborazione sotto la guida di Camilla, la docente – Guru, che, oltre ad interagire in chat con il Promoter, fornisce al gruppo *app* e strumenti digitali che favoriscano l'attivazione di tutti i processi cognitivi in gioco. Il gruppo deve affrontare una prova di orienteering e per far ciò deve recuperare le bussole all'interno di un vecchio baule chiuso con un lucchetto a combinazione numerica. I ragazzi notano sul baule alcuni numeri intagliati (Figura 2) e propongono di usarli per trovare la combinazione che alla fine consentirà di aprire il baule e prendere le bussole. Per fare ciò gli scout dovranno ragionare tra loro in modo da rispondere ai quesiti che vengono proposti attraverso i diversi episodi del fumetto. Il primo episodio permette ai ragazzi di esplorare una serie di tre numeri consecutivi per scoprire se tra essi esistano relazioni.

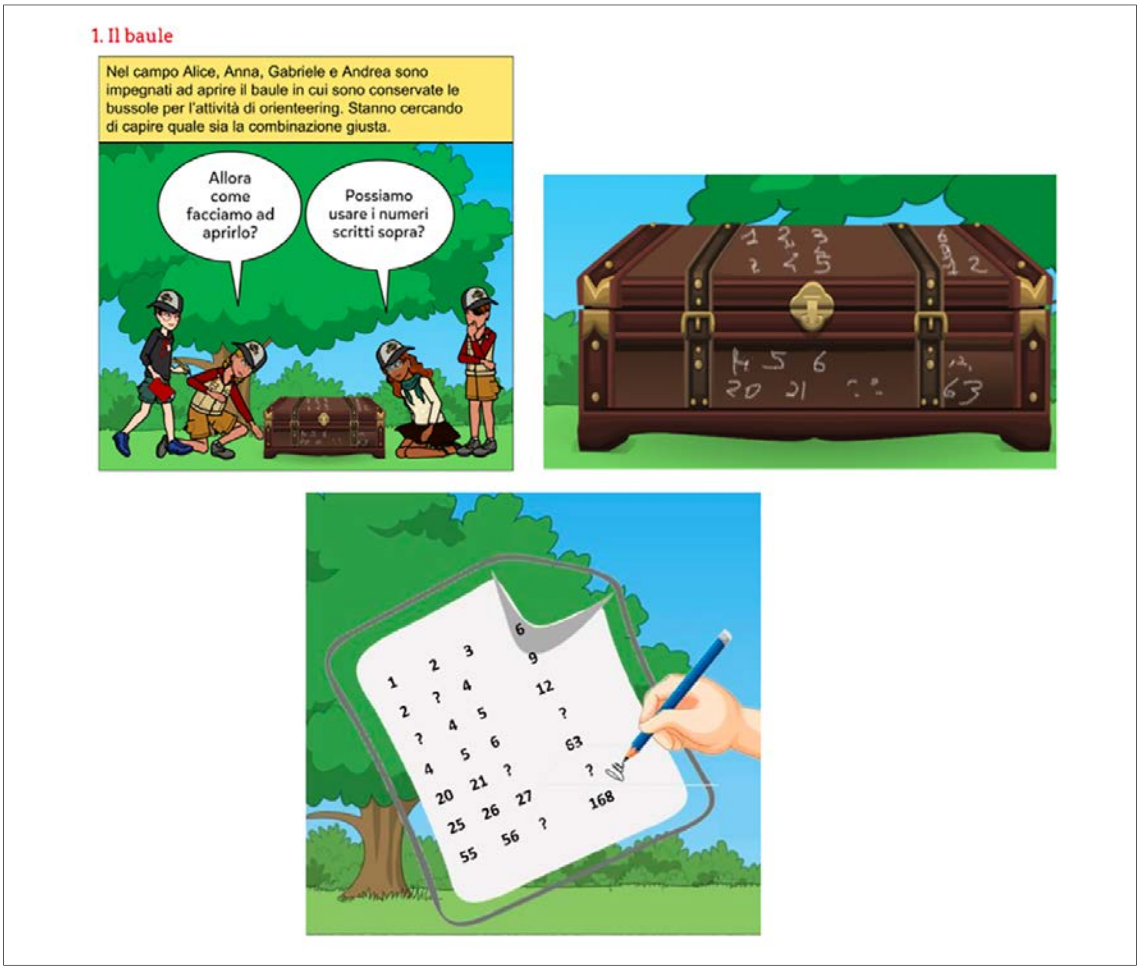


Figura 2. Fase di esplorazione su una sequenza ignota di numeri.

Il secondo episodio è stato strutturato in modo da aiutare i ragazzi ad esprimere a parole una congettura già in parte sviluppata al termine della fase esplorativa del primo episodio, ossia che la somma di tre numeri consecutivi qualsiasi è sempre un multiplo di tre. Il fumetto in questo caso è stato progettato al fine di far emergere la generalità dell'enunciato, ossia che la proprietà vale qualunque sia la sequenza di numeri naturali consecutivi scelti a prescindere dal valore del primo numero della sequenza (Figura 3).

Figura 3. Striscia di fumetti che veicola la generalità della sequenza scelta.

Per far sì che l'attenzione venisse rivolta alla generazione di un enunciato espresso "a parole" è stata anche predisposta un'*app* che facilitasse tale processo, mediante un puzzle di parole (Figura 4).

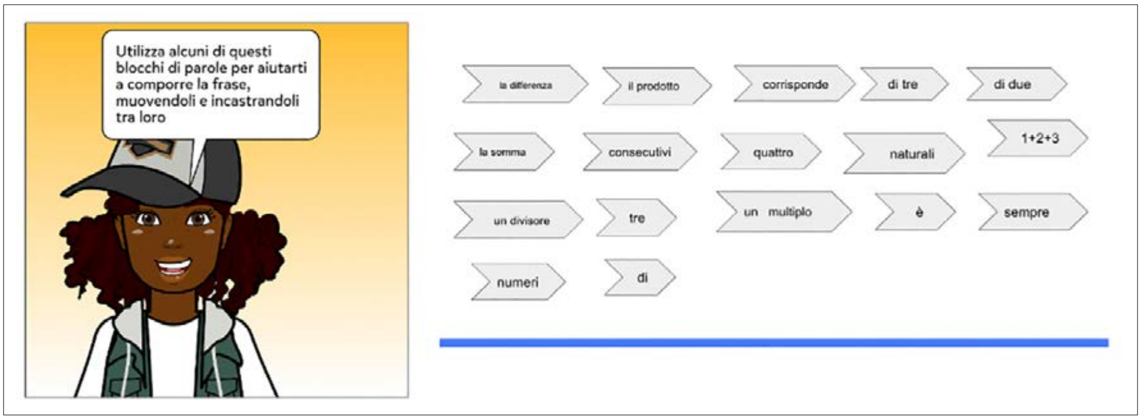


Figura 4. Puzzle di parole proposto come *app* per la scrittura dell'enunciato.

Nell'episodio successivo si deve giungere a formalizzare e dimostrare la congettura proposta; per consentire ciò, si sono forniti agli studenti sistemi semiotici visuali, concreti ed iconici (CSS e ISS), al fine di aiutare gli studenti a rappresentare simbolicamente tre numeri consecutivi e il multiplo di tre che ne rappresenta la somma (Figura 5), mentre le castagne rappresentano numeri naturali, pertanto quantità discrete numerabili, nel secchiello gli studenti ritrovano il senso di "mucchio" come contenitore che permette di "misurare" una quantità totale in termini di un'altra quantità incognita (Lemmo & Maffia, 2021).

Figura 5. Secchielli come mucchio e castagne come interi positivi. Fumetti ispirati alla Fig.5 del lavoro di Castellini (2016), richiamato in Figura 1 e Figura 2 del lavoro di Lemmo e Maffia (2021).

Infine, nell'ultimo episodio è stata progettata una sequenza di fumetti che potesse permettere agli studenti un primo confronto con il concetto di equazione. L'enfasi è stata infatti posta sul simbolo di uguale, qui raffigurato da due legnetti, quale elemento chiave del pensiero relazionale pre-algebrico

(Navarra, 2019) e sul concetto di incognita-mucchio (cfr. par 2.2), qui raffigurato nuovamente da un secchiello (Figura 6).

Figura 6. Trattamento algebrico in sistemi semiotici visuali. Fumetti ispirati alla Fig.5 del lavoro di Castellini (2016), richiamato in Figura 1 e Figura 2 del lavoro di Lemmo e Maffia (2021).

Gli studenti sono dunque chiamati a risolvere una semplice equazione, esperendo per la prima volta un trattamento algebrico in sistemi semiotici visuali con il metodo dei mucchi come mostrato nelle Figure 6 e 7.

Figura 7. Sistemi semiotici visuali, concreti ed iconici, per risolvere equazioni algebriche con i mucchi.

3.4 *Storyboard* classi terze

Per le classi terze si è pensato ad una situazione che fosse non solo vicina agli studenti ma in cui, inoltre, i personaggi potessero sentirsi coinvolti. In tal modo, è venuto naturale ambientare la storia durante una vacanza su un'isola organizzata da un gruppo di amici. Il gruppo di protagonisti, quindi, è formato da Mattia (con funzione di Peste), un ragazzino riflessivo che fa spesso domande a trabocchetto mettendo in discussione le affermazioni degli altri; Margherita (con funzione di Boss) tenace e decisa, amichevole con tutti e che coordina e organizza il lavoro; Claudia (con funzione di Blogger) che sogna di diventare una grande giornalista, ama schematizzare quanto si discute e prendere appunti; Alessandro (con funzione Promoter) il più piccolo del gruppo, ma sempre intraprendente, curioso e pronto a coinvolgere i suoi amici in nuove sfide. La figura del Guru viene interpretata da Anna, la sorella di Alessandro, presenza abituale nel gruppo dei ragazzi. In questo senso, il canale comunicativo preferenziale con il Promoter che contraddistingue il ruolo del Guru è stato giustificato con la relazione di parentela che lega i due personaggi. Durante una passeggiata pomeridiana i ragazzi trovano uno strano messaggio nascosto in una bottiglia che il mare aveva trasportato sulla spiaggia da un'isola lontana. Attraverso l'utilizzo dei numeri figurati, i protagonisti, decifrando il messaggio contenuto nella bottiglia, scoprono che questo indica una serie di somme di numeri dispari il cui risultato è rappresentato sotto forma di quadrati (**Figura 8**).

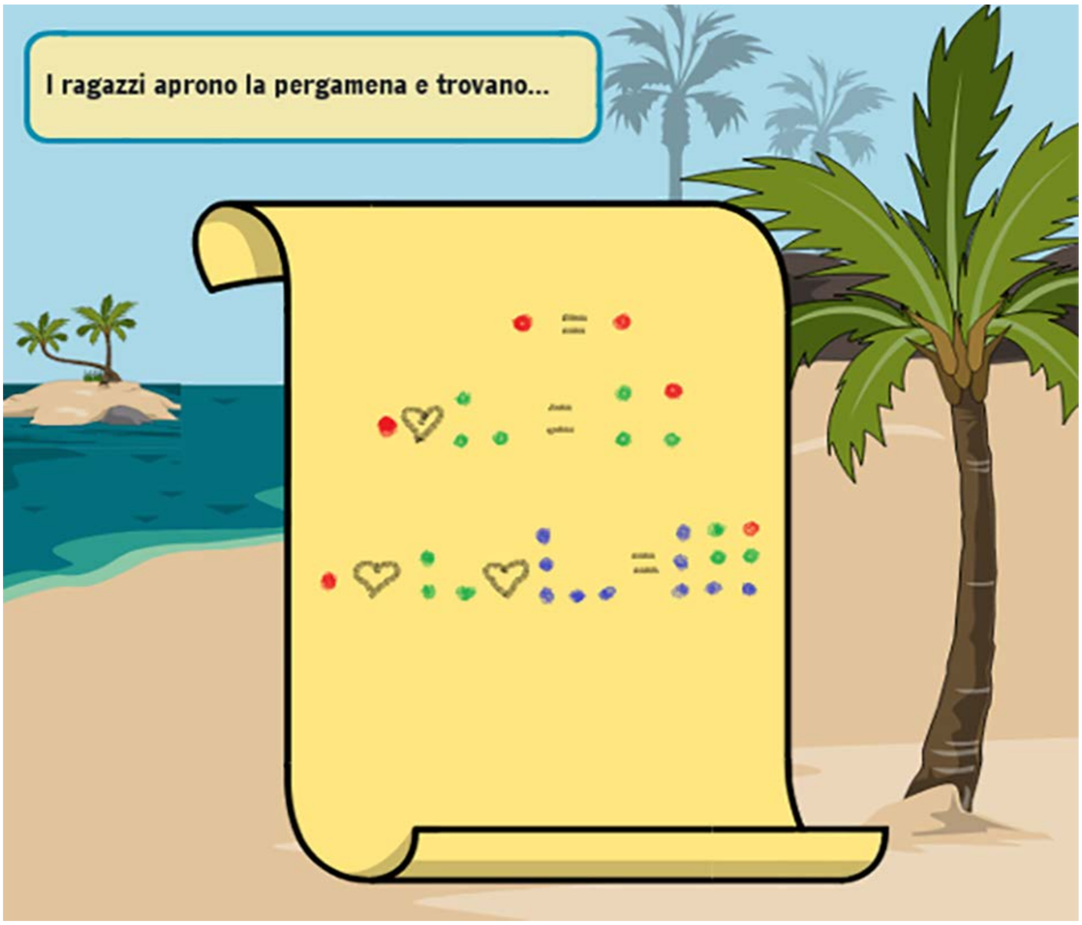


Figura 8. Messaggio cifrato con l'utilizzo dei numeri figurati come sistema semiotico iconico.

Negli episodi successivi, utilizzando una *Jamboard*, i ragazzi sono portati a congetturare la relazione che lega le somme di numeri dispari e il quadrato del numero di addendi nel caso generale e a dimostrarne l'enunciato attraverso una prima introduzione alla dimostrazione per induzione.

Sotto la guida del Guru, durante questa fase i ragazzi svolgono i passi P(k)→P(k + 1) per determinati valori di k cercando di dimostrare, dopo aver verificato la base di induzione, che P(k + 1) segue da

P(*k*), come nell'esempio rappresentato in **Figura 9**. In riferimento all'esempio in figura, agli studenti è stato chiesto di svolgere singolarmente i passi di induzione dal passo P(1) al passo P(6), tentando di dimostrare la proposizione a partire dal risultato ottenuto nel passo precedente. Dopo aver svolto il passo P(6) viene chiesto loro di dimostrare il passo P(11).

Figura 9. Alcuni passi della dimostrazione per induzione e la generalizzazione finale.

Lo scopo è quello di permettere loro di individuare, nello svolgimento dei passi di induzione, una struttura comune ad ogni passo, in linea con gli studi svolti sul principio di induzione (Avital & Libeskind, 1978; Cusi & Malara, 2008; Telloni & Malara, 2021).
Con l'intento di far emergere il simbolo matematico da un bisogno sociale e far sì che questo rappresenti un preciso e concordato aspetto matematico, nell'ultimo episodio i ragazzi, intuendo che il loro interlocutore non utilizza il loro stesso linguaggio, si trovano a dover rappresentare la proprietà nel caso di dodici addendi e comunicarla al mittente del messaggio trovato sulla spiaggia. In questo modo si intende introdurre gli studenti ad un primo approccio al concetto di sommatoria attraverso un processo di negoziazione, costruzione e condivisione (Coppola et al., 2014) tra i membri del gruppo (**Figura 10**).

Figura 10. La scelta dei simboli per rappresentare la proprietà.

4 Prime osservazioni dalle sperimentazioni in aula

Durante l'implementazione in aula è stata esperita la scoperta come attività collettiva, in cui gli studenti hanno cooperato per la ricerca di una risposta condivisa. L'obiettivo di individuazione di una strategia risolutiva, soprattutto nel primo episodio a carattere fortemente esplorativo, ha consentito agli studenti di mettersi in gioco in modo attivo. Ciò nonostante, è da rilevare come, per alcuni studenti, i tempi di concentrazione siano risultati più lunghi rispetto ai tempi medi di attenzione in classe. Lo strumento digitale ha in parte nascosto alcune difficoltà, in quanto gli studenti più interattivi non hanno riconosciuto in chat la presenza di compagni con fragilità a differenza di quel che avviene solitamente nelle usuali attività d'aula.
Si è inoltre riscontrata, in un primo momento, la difficoltà da parte degli studenti a riconoscere la differenza tra i ruoli di Attori e quelli di Osservatori e anche quella di mantenere uno specifico ruolo

all'interno dello stesso episodio. Alcuni studenti dei gruppi Osservatori, infatti, tendevano ad utilizzare gli strumenti dedicati all'esplorazione del gruppo Attori, interferendo in parte con lo svolgimento del problema.
Gli studenti talvolta si sono confrontati verbalmente con i compagni più vicini, non riuscendo a mantenere sempre l'interazione tutta sul piano digitale. La chat, infatti, è stata in alcuni casi utilizzata maggiormente nella fase finale dell'episodio, ossia nel momento di ricerca di un accordo nel gruppo prima dell'invio della risposta al Guru.
La difficoltà a lavorare solo su piattaforma digitale si è resa evidente anche nella scelta, da parte di alcuni studenti, di utilizzare inizialmente un foglio di carta a supporto del ragionamento esplorativo, anziché gli strumenti offerti dalla piattaforma digitale Moodle (**Figura 11**).

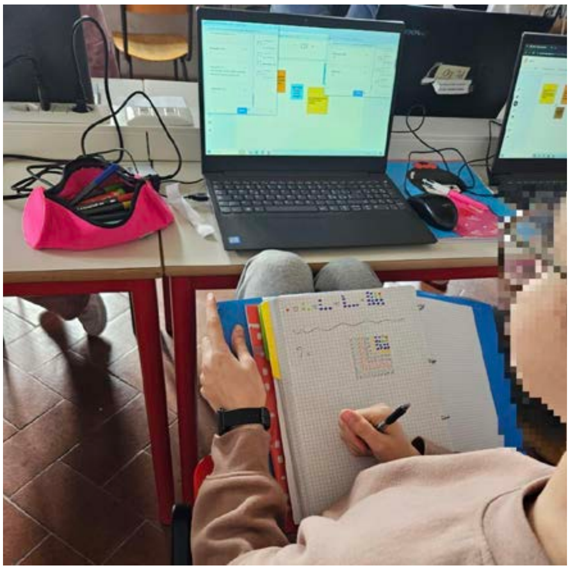


Figura 11. Fase esplorativa esperita su supporto cartaceo, anziché digitale.

Al contrario un elemento di stimolo negli studenti è stato l'utilizzo delle *app* esterne, soprattutto per la manipolazione delle rappresentazioni iconiche. Ciò ha permesso loro di visualizzare le congetture ed i tentativi di risoluzione, sperimentando anche forme nuove di comunicazione del ragionamento matematico (**Figura 12**).

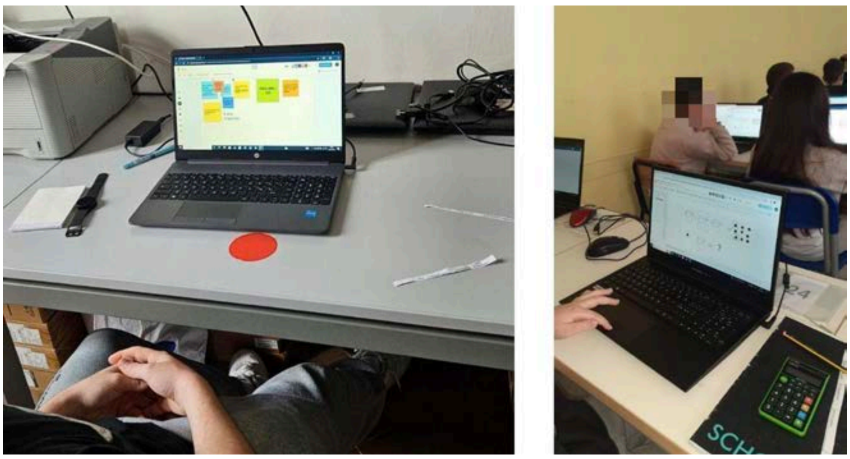


Figura 12. Uso delle *app* esterne come strumento di interazione e comunicazione sostitutivo della chat.

Inizialmente gli studenti si sono approcciati al problema con esempi numerici.
Si riporta a tal proposito un estratto di una chat Gruppo Attori delle classi prime in cui viene valutata la somma di tre numeri consecutivi, partendo da un numero casuale:

> Alice: «25+26+27=78 è un multiplo di 3».[6]

E ancora un estratto di una chat Gruppo Attori di classe terza, in cui lo scopo viene raggiunto sviluppando l'intero calcolo:

> Mattia2:[7] «la soluzione è che partendo da 1, si aggiungono 11 numeri dispari ognuno più grandi di 2 del precedente quindi è: +3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+2 3=144 che è il quadrato di 12».

In quest'ultimo estratto si nota tuttavia un primo tentativo autonomo di formalizzazione del concetto di numero dispari, quando lo studente dice «ognuno più grandi di 2 del precedente».
Nonostante il modello del DIST-M preveda un'interazione privilegiata tra Promoter e Guru, in alcuni casi si è osservata la necessità di un intervento dell'insegnante anche nella chat del gruppo Attori fin dalla prima fase esplorativa.
Durante la sperimentazione del secondo episodio delle classi prime si è notato che alcuni studenti tendevano a tralasciare o a modificare la parola *consecutivo* nel puzzle di parole presentato in Figura 4, non attribuendole significato (Figura 13) ed evidenziando una difficoltà nel riuscire a posizionarla correttamente all'interno dell'enunciato della loro congettura.

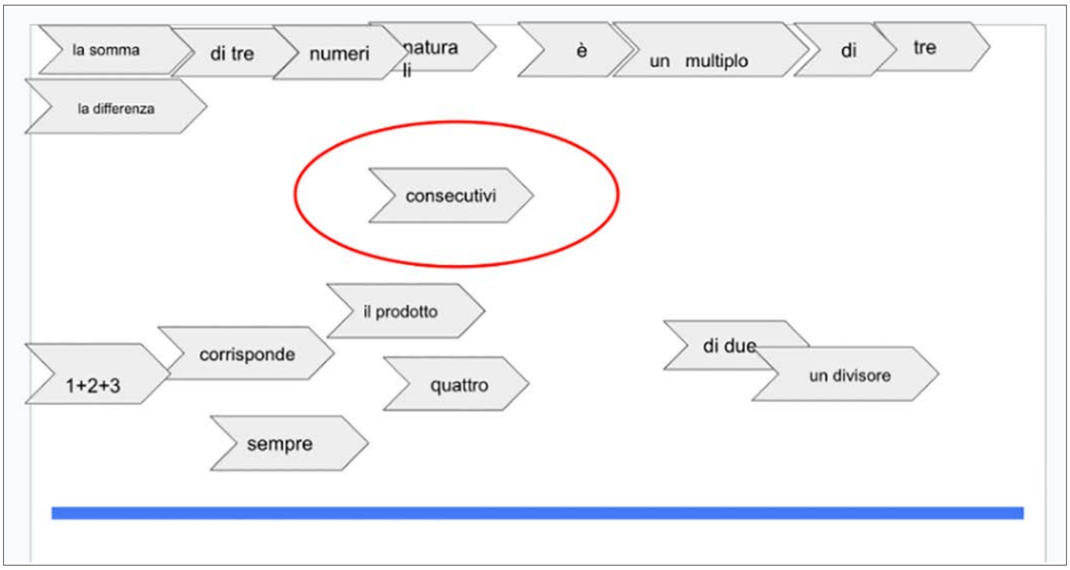


Figura 13. Puzzle di parole in cui viene evidenziata la parola "consecutivi" tralasciata dagli studenti.

Altri gruppi di studenti invece hanno sommato tre numeri in successione crescente scelti in modo casuale, non necessariamente consecutivi, cercando di garantire solo che la somma restituisse un

6. I dialoghi sono le trascrizioni fedeli delle chat online nelle quali è avvenuta l'interazione discorsiva all'interno dei gruppi. Sono stati dunque riportati le parole, i simboli, le maiuscole e le minuscole utilizzati dagli studenti.
7. Nelle diverse classi coinvolte spesso il numero di studenti non ha sempre consentito la formazione di gruppi da 4 (Promoter, Peste, Blogger, Boss). Sono stati dunque formati a volte gruppi da 5, doppiando il personaggio di Peste che compare, talvolta, con il suffisso 2 accanto al nome.

multiplo di tre. Tale comportamento è osservabile anche da un estratto di una chat Gruppo Attori delle classi prime, di cui si riporta qui la trascrizione:

> Gabriele: «possiamo scrivere che tutti i numeri sono in successione, crescente, l'ultima fila di numeri se sommati tra loro sono dei multipli di 3».

Da queste osservazioni è emersa l'ipotesi che alcuni concetti, quale quello di consecutivo di un numero, che sembrava essere stato chiaramente esplicitato nel fumetto, in realtà per gli studenti è risultato poco chiaro. Per tale motivo, prima di procedere con la somministrazione di ulteriori episodi, è stata modificata la narrazione, introducendo vignette nelle quali tali concetti venivano chiariti attraverso i dialoghi dei personaggi.
Il lavoro di *design* e la costruzione dello *storyboard* è stato infatti un processo in continuo divenire che ci ha indotto a continue rimodulazioni, resesi necessarie dalle prime osservazioni fatte in aula durante la sperimentazione. La rimodulazione che ha riguardato la riscrittura e redazione dei fumetti inerenti il concetto di consecutivo è riportata in Figura 14.

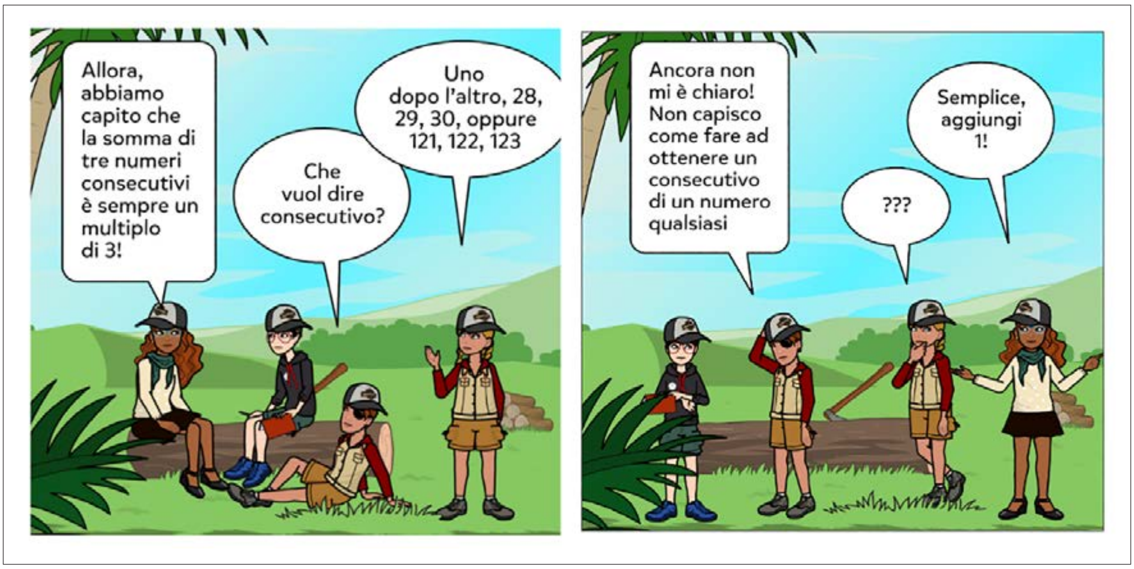


Figura 14. Fumetti rimodulati per veicolare il concetto in costruzione di consecutivo di un numero attraverso la narrazione.

Anche il confronto con il concetto di incognita-mucchio per studenti di classe prima è apparso talvolta problematico, soprattutto in fase iniziale. Si legge in alcune chat:

> Gabriele: «come fare ad indicare una quantità che non conosco».

Ed ancora:

> Andrea2: «ragazzi, come facciamo a sapere i numeri consecutivi se non sappiamo il primo numero?»

L'approccio relazionale con l'uso di sistemi semiotici visuali CSS e ISS (Radford, 2022) quali i secchielli e le castagne, che giocano il ruolo delle scatoline e delle biglie per Lenz (2022) o dei mucchi per Castellini (2016) e Lemmo e Maffia (2021), emerge poi in alcuni estratti di interazione tra pari nel Gruppo Attori di classe prima, permettendo così la costruzione collettiva di significato.

Gabriele: «in ogni secchiello secondo me c'è lo stesso numero di castagne».
[...]
Gabriele: «quando Anna ha detto che i secchielli sono incogniti io ho pensato subito alla lettera X».
Alice: «secondo me in ogni secchiello ci sono 2 castagne perché se sottraiamo dal totale[8] le castagne fuori dai secchielli cioè 3 esce 6 e poi 6 diviso 3 che sono i secchielli esce 2».
[...]
Anna: «in base a quello che ha detto Alice, e all'app dobbiamo sommare le castagne sia dentro sia fuori».
[...]
Gabriele: «esatto! 2 + 3 + 4 = 9».
Andrea: «questo mi ricorda qualcosa».
Gabriele: «ahhhhh vi ricordate gli episodi precedenti??»
Gabriele: «che la somma di tre numeri consecutivi fanno un multiplo di 3».

Alla luce degli studi di *early algebra* sul principio di induzione (Avital & Libeskind, 1978; Cusi & Malara, 2008; Telloni & Malara, 2021), nel seguente estratto di chat delle classi terze, scelto come paradigmatico, è possibile individuare un principio di struttura di transizione:

Margherita: «regaaa ho capito! usando il risultato del quadrato precedente e sommandoci il numero dispari corrispondente al quadrato che si vuole trovare (per esempio voglio trovare 12x12 prendo il dodicesimo numero dispari) ottieni il risultato».

5 Bilancio dell'esperienza

L'attività ha in particolare messo in luce alcune difficoltà preventivate nell'analisi a priori e la strutturazione del percorso ci ha offerto un'occasione per riflettere sui possibili ostacoli che gli studenti avrebbero potuto incontrare durante la risoluzione del problema. Nell'ottica espansiva (cfr. par. 1), alla luce delle osservazioni fatte in aula durante l'implementazione dei primi episodi, è emersa anche l'esigenza di una rimodulazione in itinere, modificando in alcuni casi sia lo *storyboard* che i fumetti.
Le *app* esterne, per quanto utili per l'esplorazione del problema mediante sistemi semiotici visuali, hanno però spostato l'interazione degli studenti dalle chat predisposte in ambiente Moodle a strumenti esterni ad esso. Questi ultimi, pensati inizialmente solo come *scaffolding* del processo esplorativo, sono diventati il mezzo di comunicazione principale in cui il processo è ricostruibile storicamente, ma il riferimento allo specifico personaggio che ha agito, si è perso nell'anonimato dell'utente. Tale problema potrebbe essere superato utilizzando uno strumento interno a Moodle con potenzialità sia esplorative che comunicative, in quanto ciò rappresenterebbe una trasposizione digitale dell'interazione cooperativa reale in cui il momento esplorativo e quello comunicativo avvengono contemporaneamente nello stesso ambiente.
L'estratto delle chat per gli studenti di classe prima suggerisce che l'uso di materiali come secchielli e castagne sembri adatto a preparare la strada per una comprensione iniziale del concetto di variabile e

8. Osservando le **Figure 6** e **7** si comprende che per totale la studentessa intende le 9 castagne a destra dell'uguale.

favorisca un approccio al pensiero relazionale. Anche per gli studenti di classe terza, l'estratto presentato sembra suggerire che l'approccio di *early algebra* al principio di induzione favorisca la costruzione del concetto di passo induttivo.
Le sperimentazioni qui descritte rientrano comunque in un progetto di ricerca più ampio che prevederà in futuro un'attenta analisi dei dati raccolti relativa alle interazioni tra studenti e studenti-docente rilevabili dalle chat di Moodle.
Quella che qui presentiamo è un'esperienza progettata e svolta nei contesti su menzionati e che ogni insegnante può adattare nelle proprie classi. I dialoghi dei fumetti da noi presentati sono stati infatti realizzati dalle insegnanti delle classi coinvolte e dunque i termini utilizzati sono quelli a cui le classi erano già abituate dal consueto lavoro d'aula.
L'esperienza qui proposta apre, naturalmente, a possibilità progettuali diverse in relazione a differenti contesti e che possono far emergere difficoltà e riscontrare problematiche che noi non abbiamo rilevato.

Ringraziamenti
Abbiamo il piacere di ringraziare gli Istituti Comprensivi "Rosario Livatino" di Ficarazzi (PA); "B. Telesio" di Reggio Calabria (RC); "Curinga" di Curinga (CZ); "Alfieri – Garibaldi" di Foggia (FG); "Gabriele Rossetti" di Vasto (CH); Perugia 6 – "Mario Grecchi" di Castel del Piano (PG); "Rita Levi Montalcini" di Lucignano (AR); "Giovanni XXIII" di Almenno San Salvatore (BG) che hanno partecipato alla sperimentazione delle attività discusse in questo lavoro.

Bibliografia

Albano, G., Coppola, C., & Dello Iacono, U. (2021). What Does 'Inside Out' Mean in Problem Solving? *For the learning of mathematics*, *41*(2), 32–36. https://www.jstor.org/stable/27091202

Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: Didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, *9*(4), 429–438. https://doi.org/10.1007/BF00410588

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds.* Harvard University Press.

Bruner, J. (1991). The narrative construction of reality. *Critical inquiry*, *18*(1), 1–21. https://doi.org/10.1086/448619

Castellini, A. (2016). Against problem solving by segment method. *EDiMaST: Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology*, *2*(2), 287–302. https://www.edimast.it/index.php/edimast/article/view/32

Coppola, C., Mollo, M., & Pacelli, T. (2014). Manipolazione di un linguaggio socialmente costruito in una classe di scuola primaria: Costruzione del concetto di equivalenza. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *37*(1), 7–33.

Cusi, A., & Malara, N. A. (2008). Improving awareness about the meaning of the principle of mathematical induction. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 393–398). Cinvestav-UMSNH.

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *1*, 23–37. https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.2

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Engeström, Y. (2015). *Learning by expanding.* Cambridge University Press.

Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational research review*, *5*(1), 1–24. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.12.002

Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Insegnare e valutare la competenza in matematica. In AA.VV. (Eds.), *Didattica per competenze* (pp. 10–14). Supplemento a *La Vita Scolastica*, *70*(2). Giunti Scuola.

Giberti, C., & Maffia, A. (2021). L'interpretazione del simbolo di uguaglianza nel primo ciclo d'istruzione. *RicercAzione*, *13*(1), 199–211. https://doi.org/10.32076/RA13107

Kieran, C. (Ed.) (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year olds: The global evolution of an emerging field of research and practice.* Springer.

Lemmo, A., & Maffia, A. (2021). Un esempio di introduzione del paradigma relazionale nella scuola media. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *10*, 53–69. https://doi.org/10.33683/ddm.21.10.3

Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: An interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1181–1197. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione.* https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Navarra, G. (2019). Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebrica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 70–94. https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.3

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* Roskilde University. (Titolo originale: *Kompetencer og matematiklæringIdeer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark, number 18 in Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie* pubblicato nel 2002).

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: A view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(3), 447–469. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09979-8

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1151–1167. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x

Telloni, A. I., & Malara, N. A. (2021). A constructive and metacognitive teaching path at university level on the Principle of Mathematical Induction: Focus on the students' behaviours, productions and awareness. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *19*(1), 133–161. https://doi.org/10.5485/TMCS.2021.0525

Zan, R. (2011). The crucial role of narrative thought in understanding story problem. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI – Proceedings of the MAVI-16 Conferenc* (pp. 287–305). Institute of Mathematics and Natural Sciences, Tallinn University & Vali Press.

Zan, R. (2012a). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35 A*(2), 107–126.

Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35 A*(5), 437–468.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), 116 - 146, DOI: 10.33683/ddm.24.16.5

OPEN ACCESS

Un viaggio nel tempo. Storia, spunti e riflessioni didattiche da un progetto di educazione informale

A journey through time. Storytelling, didactical insights and reflections from an informal education project

Gemma Carotenuto•, Rosalia Maria Lo Sapio°, Maria Mellone••, Annalisa Ambrosio°° e Lucia Moisio°°
•Dipartimento Scienze Umane Filosofiche e della Formazione, Università di Salerno – Italia
°Istituto Comprensivo 49° di Napoli "Toti-Borsi-Giurleo" – Italia
••Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università di Napoli "Federico II" – Italia
°°Scuola Holden di Torino – Italia

✉ gcarotenuto@unisa.it, rlosapio@unisa.it, maria.mellone@unina.it, ambrosio.annalisa@gmail.com, mollimoisio@icloud.com

Sunto / Questo lavoro nasce dall'esperienza delle autrici all'interno della terza edizione del progetto "Proud of You". Il progetto si pone l'obiettivo di prevenire l'abbandono scolastico in alcune scuole situate in periferie svantaggiate di territori del Meridione d'Italia. La sua azione prevede la realizzazione di contesti educativi informali volti a sostenere lo sviluppo di competenze in italiano e in matematica degli allievi e al miglioramento del loro atteggiamento verso la scuola. La terza edizione del progetto ha proposto alle scuole coinvolte un *librogame*, che ha fatto da cornice di senso alle attività didattiche. La narrazione sarà utilizzata anche in questo articolo per raccontare di alcuni momenti salienti dell'esperienza didattica in matematica. Questa, sviluppata in sette brevi capitoli, sarà seguita da una sezione di spunti e riflessioni didattiche in riferimento alle teorie che hanno fatto da sfondo alla progettazione didattica.

Parole chiave: educazione matematica informale; *storytelling*; metafore; atteggiamenti verso la matematica; corpo.

Abstract / This work stems from the authors' experience within the third edition of the "Proud of You" project. The project aims to prevent school dropout in some schools located in disadvantaged suburbs of territories in the South of Italy. Its action involves the implementation of informal educational contexts aimed at supporting the development of pupils' skills in Italian language and mathematics and the improvement of their attitude toward school. The third edition of the project proposed a gamebook to the schools involved, which served as a sense-making framework for the educational activities. The storytelling will also be used in this article to tell about some highlights of the teaching experience in mathematics. This experience, developed in seven short chapters, will be followed by a section of teaching insights and reflections with reference to the theories that formed the background to the instructional design.

Keywords: informal mathematics education; storytelling; metaphors; attitudes toward mathematics; body.

1 Introduzione

Sebbene il fenomeno della dispersione scolastica abbia registrato in Italia negli ultimi anni un ridimensionamento, in linea con il trend europeo, questo rimane ancora una vera e propria emergenza in specifiche aree del Paese, specie in alcune regioni del Meridione (Istituto Nazionale di Statistica [ISTAT], 2023). Ciò viene confermato anche dalle scelte politiche post pandemiche del Piano Nazionale di Ripresa e Resilienza, che evidenziano tra le maggiori criticità del sistema italiano di istruzione, educazione e formazione proprio l'alto tasso di abbandono scolastico e i grossi divari territoriali in termini di competenze di base. Sebbene la dispersione scolastica sia un fenomeno molto complesso, i cui fattori scatenanti sono relativi a condizioni personali, familiari e sociali di vulnerabilità e svantaggio, i due problemi, l'abbandono scolastico e i bassi livelli di competenza, sono tra loro fortemente connessi e si influenzano a vicenda. Se da un lato è banale osservare che un'uscita precoce di studenti e studentesse dal sistema di istruzione non permette loro di raggiungere le competenze di base richieste dalla nostra società, dall'altro la mancata acquisizione di tali competenze, ossia l'insuccesso scolastico, concorre al fenomeno dell'abbandono scolastico (Autorità Garante per l'Infanzia e l'Adolescenza, 2022).
In questo articolo presenteremo con un particolare *storytelling* una delle esperienze educative sviluppate all'interno del progetto "Proud of You" (PoY).[1] Il progetto PoY è stato gestito dall'associazione "Next-Level", che lavora nel campo della promozione sociale e culturale dei giovani, ed è stato finanziato dal Fondo di Beneficenza ed opere di carattere sociale e culturale della banca italiana Intesa Sanpaolo. PoY si è posto l'obiettivo di prevenire l'abbandono scolastico in periferie svantaggiate di alcuni territori del Meridione d'Italia, attraverso interventi didattici volti a sostenere lo sviluppo di competenze in italiano e in matematica degli studenti coinvolti (Carotenuto et al., 2020).
A partire dal 2018, nel corso delle sue tre edizioni, PoY ha coinvolto alcune scuole primarie[2] e secondarie di primo grado[3] di diversi quartieri di Napoli, capoluogo di una regione che registra tassi di abbandono scolastico fino al 19%, acuendo il grave allarme sociale già espresso dal dato nazionale del 14% (Il Mattino, 2019). La terza edizione del progetto è stata inoltre realizzata anche presso un istituto comprensivo calabrese, a Polistena (RC). I territori a cui si è rivolto negli anni PoY sono caratterizzati da una popolazione con basso livello di istruzione e da situazioni di deprivazione economica e socio-culturale che, in molti casi, sfociano in fenomeni di criminalità, problemi giudiziari e tossicodipendenza. Questi fenomeni hanno inevitabilmente delle ricadute anche sulla quotidianità e sul benessere dei minori che vivono in queste aree. Per tali minori allontanarsi dalla scuola significa non solo perdere la più importante occasione di formazione ma anche allontanarsi da un luogo di "protezione" (Autorità Garante per l'Infanzia e l'Adolescenza, 2022), rimanendo maggiormente esposti al rischio di essere coinvolti nella criminalità organizzata locale. PoY si è proposto di supportare alcune scuole di questi territori, attraverso proposte didattiche alternative e coinvolgenti basate sull'apprendimento per scoperta, con l'obiettivo di catturare l'interesse dei ragazzi e valorizzare i loro talenti.
La terza edizione del progetto PoY è stata caratterizzata da un'intensa collaborazione tra le progettiste di matematica e italiano, autrici di questo contributo, che hanno lavorato alla realizzazione di un *librogame*, pubblicato in forma digitale insieme con le schede di supporto alle attività didattiche[4] (Next-Level, 2024). Si tratta di una storia "a bivi" in cui sono gli studenti, volta per volta, a scegliere quale direzione prendere e quale personaggio seguire. Attraverso il *librogame* gli studenti sono stati coinvolti in un viaggio nel tempo in cui hanno affrontato attività di italiano e di matematica, volte allo sviluppo e al potenziamento di competenze trasversali di matematica (risoluzione di problemi,

1. https://www.next-level.it/progetti/proud-of-you/.
2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
4. Il *librogame* è accessibile al link: https://poy.next-level.it/.

processi di generalizzazione, utilizzo consapevole di rappresentazioni matematiche, competenze argomentative) e di italiano (comprensione linguistica e testuale, arricchimento del bagaglio lessicale, produzione testuale creativa, consolidamento di conoscenze grammaticali di base). Il *librogame* e le sue attività sono stati presentati e condivisi alle insegnanti delle classi coinvolte nel progetto attraverso specifici incontri di formazione docenti.

Il progetto ha previsto tredici incontri in cui le insegnanti, supportate da un gruppo di studenti universitari in qualità di tutor, hanno proposto le attività del *librogame* ai loro studenti. Le attività si sono svolte sia in orario curriculare che in orario extra curriculare, sia all'interno degli spazi scolastici che al di fuori di essi. In particolare, le prime attività sono state svolte in orario curriculare, per favorire la massima partecipazione degli studenti in vista degli incontri pomeridiani facoltativi. A Napoli, alcune tappe del viaggio nel tempo sono state realizzate al di fuori degli edifici scolastici, con uscite strategiche sul territorio in particolari siti di interesse culturale e naturalistico della città che si offrivano come perfetti scenari per le avventure del *librogame*. Ad esempio, per una delle tappe ambientate nel Medioevo le classi coinvolte hanno visitato Castel Sant'Elmo e Castel dell'Ovo, mentre per una delle tappe dell'Antico Egitto le attività si sono svolte presso il Museo Archeologico Nazionale di Napoli.

In questo lavoro, per esigenze di sintesi, ci si focalizzerà solo su alcune delle attività di matematica del *librogame*. Nei prossimi capitoli l'esperienza educativa di PoY sarà raccontata attraverso la voce narrante di una bambina immaginaria. Il lettore sarà guidato attraverso alcuni momenti salienti delle attività, il cui racconto è stato costruito a partire dalle note sul campo dei dialoghi di classe e da alcuni dei protocolli raccolti. Questa scelta comunicativa è dettata dall'intenzione di dare risalto all'esperienza immersiva e sensoriale che si è intesa proporre attraverso le attività del progetto, sperimentando la possibilità di riferirsi alle teorie che hanno fatto da sfondo alla progettazione anche con uno stile comunicativo più coerente con esse. Lo *storytelling* utilizzato in questo lavoro e sviluppato attraverso sette capitoli, sarà seguito da una sezione di spunti e riflessioni didattiche, che include anche le appendici ai primi cinque capitoli. Come nel *librogame*, starà al lettore scegliere che percorso seguire: se attraversare la narrazione dei capitoli tutta d'un fiato, e lasciare le riflessioni alla fine, o fermarsi di volta in volta ad approfondire alcuni riferimenti teorici che aiutano a interpretare i processi di insegnamento e apprendimento della matematica e hanno supportato le scelte di progettazione.

Buon viaggio!

2 La storia

Capitolo 1. La scuola era noiosa e nessuno ci voleva più andare

All'inizio mi sembrava una cosa intelligente andare a scuola, perché mi consentiva di allontanarmi da casa per un po' di ore al giorno, e soprattutto di vedere alcuni dei miei più cari amici passando del tempo con loro.

A settembre e a ottobre sono entrata in aula quasi tutti i giorni. Un po' in ritardo, magari, ma c'ero e facevo anche del mio meglio, ma poi a poco a poco la situazione è cambiata. Ogni tanto c'era un argomento che mi interessava, è vero, ma a furia di stare seduti e di ripetere le stesse parole, o di scrivere le stesse cose, ho iniziato ad annoiarmi a dismisura e a distrarmi. Senza contare che svegliarsi presto non è affatto bello. Oltretutto la scuola è impegnativa e spesso difficile. Gli insegnanti hanno sempre tante richieste diverse, per rispettarle bisogna essere attenti e precisi, soprattutto in quei momenti dell'anno in cui a casa capitano fatti ben più interessanti di quelli che avvengono a scuola, per esempio a Natale.

La matematica mi metteva un po' di angoscia per via dei conti che non quadravano sempre, spesso copiavo gli esercizi già eseguiti dai miei compagni, così il problema era risolto. L'italiano, invece, mi sembrava perfettamente inutile: nella vita vera chi ti chiede di scrivere in maniera corretta le parole? E chi ti

dà meno considerazione se non lo fai? La maggior parte dei miei parenti e dei miei amici scrivono come me e nessuno se ne cura. In ogni caso mi sembrava assurdo avere a che fare per quattro ore al giorno con frazioni e figure geometriche, verbi e aggettivi, se poi fuori dall'aula queste cose non mi servivano a niente. Di fronte a questo genere di esercizi la concentrazione è difficile da mantenere, soprattutto se hai 10 anni e fuori dal cancello della tua scuola c'è il sole, si sente un via vai di motorini, i tuoi cugini più grandi si stanno innamorando, la mamma è da sola e deve pensare a tutti i lavori di casa.
Questi sono i motivi per cui ho iniziato ad andare a scuola di meno, un giorno sì e un giorno no.
Tornare era deprimente: mi sembrava che i miei compagni fossero rimasti più indietro di me. Magari sapevano eseguire qualche operazione in più, ma si erano persi tutto ciò che era successo fuori.
Verso gennaio i giardini e le strade di fronte a scuola erano sempre più pieni di bambini e ragazzi, e i corridoi della scuola erano sempre più vuoti.

Capitolo 2. Una nuova sfida
Dunque, ci sono fratello e sorella, Pietro e Alessia, hanno più o meno la mia età, e lo zio, detto Prof perché sembra sempre il più intelligente di tutti, ma soprattutto perché in famiglia ha la fama di quello che ha studiato, anche se ha frequentato solo un corso per corrispondenza di elettronica: ci sono questi tre, dicevo, che hanno costruito una casa sull'albero poco distante da casa. Siccome è riuscita piuttosto bene, lo zio – Prof – si è fatto prendere la mano e l'ha trasformata in una macchina del tempo. Non voleva farlo, in realtà, ha solo messo insieme dei circuiti improvvisati (luci dell'albero di Natale, un tostapane e chissà che cos'altro) per un suo esperimento, quand'ecco che la casa sull'albero è partita!

Questa storia non è successa davvero, ma ci è stata raccontata in classe. All'inizio non capivamo bene di che cosa si trattasse, se fosse una lettura per distrarci dai compiti o altro, ma andando avanti ci siamo accorti che questo viaggio nel tempo avrebbe coinvolto tutti noi della classe. Come?
Innanzitutto, per dare una mano a questo equipaggio improvvisato che si trovava catapultato in epoche diverse, dall'Antico Egitto al futuro, dal Medioevo al Settecento. I quattro viaggiatori nel tempo – perché c'era anche un gatto che si era accucciato nella casa sull'albero – finivano puntualmente nei guai e non avrebbero saputo come uscirne, senza il nostro aiuto.

Qualche esempio? Abbiamo dovuto aiutarli a scrivere un invito al ballo che scoraggiasse un ospite molto sgradito a prendervi parte, ci siamo trovati a costruire un castello in miniatura, ci siamo impegnati ad interpretare un autentico geroglifico egizio, abbiamo dovuto capire come ricaricare la macchina del tempo costruendo dei piccoli ingranaggi tridimensionali. Ma non è finita! Nell'Antica Grecia abbiamo dovuto parlare a favore di alcuni cittadini per evitare che venissero, come dicevano loro, ostracizzati… E per trovare il gatto Malcolm ci siamo avventurati per cardini e decumani di un accampamento dell'Antica Roma. E questo è solo il passato, ci torneremo: non vi dico il futuro.

Capitolo 3. Improvvisarsi *wedding-planner* nel Medioevo
Dopo una rapida tappa nel futuro, appunto, la macchina del tempo è atterrata – se così si può dire – nel Medioevo. Nel castello dove sono entrati Prof e Alessia si stava preparando una festa di nozze e gli abitanti hanno chiesto il loro aiuto per decorare le terrazze del castello: serviva un *wedding-planner*.
L'insegnante ci ha chiesto di esprimere la nostra preferenza su chi tra Alessia e Prof avremmo voluto seguire. La classe, per alzata di mano, ha deciso di seguire Alessia, perché ci incuriosiva scoprire come se la sarebbe cavata nell'organizzazione della festa. Il primo problema era la forma diversa dei vari edifici del castello: la Chiesa aveva pianta pentagonale, le Scuderie erano in un bel palazzo con sei mura, quindi a pianta esagonale, mentre il Palazzo del Principe aveva una pianta ettagonale. Alessia desiderava rendere davvero speciale la festa di nozze e, per farlo, voleva creare su ogni terrazza un effetto "soffitto magico": in pratica si trattava di tendere un festone da ogni merlo fino a tutti gli altri merli, tranne i due che gli erano vicini. L'insegnante, per spiegarci meglio, ha detto: «Se due merli non

sono consecutivi, allora tra loro va disteso un festone». Chiaro, no?
Insomma, eravamo nel Medioevo, e anziché duellare, cavalcare o indossare cotte di maglia, il nostro compito era quello di calcolare quanti festoni occorressero per creare il soffitto magico.
Ho sentito subito un odore di inganno, questo era un vero problema e la soluzione non era facile come sembrava. Ero certa che per trovarla fosse necessario misurare, fare calcoli, applicare formule.
Stavo per gettare la spugna e dire: «Ok la storia mi è piaciuta ma se devo fare calcoli, addio».
Poi all'improvviso l'insegnante, ci ha detto: «Si va!». In un lampo ci siamo ritrovati fuori da scuola, in direzione di un vero castello medioevale (**Figura 1**). Una volta arrivati, ci hanno accolto dei signori gentili che dopo una breve visita ci hanno fatto strada su una grande terrazza del castello: è allora che l'insegnante ha tirato fuori una scatola piena di nastri e ci ha chiesto di metterci in cerchio. Ognuno di noi sarebbe stato un merlo del castello, noi avremmo solo dovuto distendere i nastri fra un merlo e l'altro per vedere alla fine quanti ne avremmo utilizzati. Sembrava divertente, e l'atmosfera era eccitata, tutti discutevano.

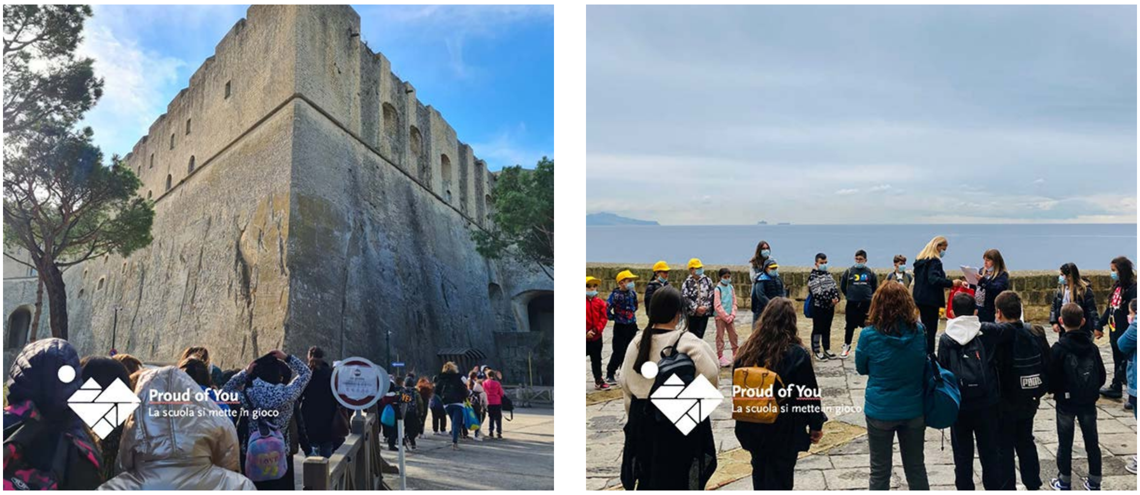


Figura 1. Per le scuole di Napoli, l'attività ha previsto la visita a un vero castello medievale. Nell'immagine a sinistra, l'arrivo di alcune classi a Castel Sant'Elmo. Nell'immagine a destra, gli allievi si preparano a esplorare il problema matematico proposto su una delle terrazze di Castel dell'Ovo.

Per prima cosa, abbiamo immaginato di essere sulla terrazza della Chiesa del castello medievale. E ciascuno di noi si è messo in corrispondenza di un vertice, così da occupare la posizione di un merlo. Quindi eravamo cinque, messi più o meno lì dove nella figura ci sono i pallini neri (**Figura 2**).

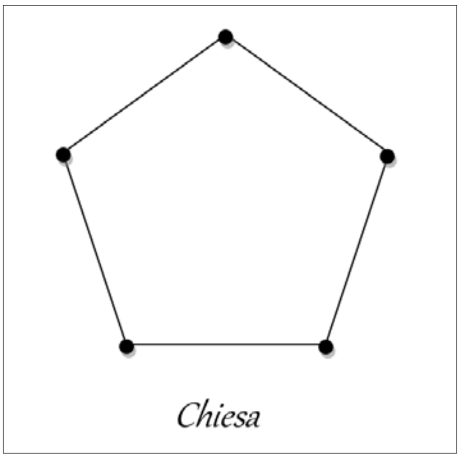


Figura 2. Rappresentazione della terrazza della Chiesa.

Abbiamo iniziato a ragionare ad alta voce.
Io chiedevo: «Quanti nastri serviranno?», e gesticolavo immaginando di mandare un festone alla mia destra. E Maria rispondeva: «No, non così, i festoni devono proprio attraversare la terrazza!». Allora Giovanni continuava: «Hai ragione! Quindi non dobbiamo collegarci con tutti quanti! Bisogna capire chi deve collegarsi con chi altro…».
Ci siamo guardati intorno, ci siamo fatti ripetere dall'insegnante che cosa voleva esattamente Alessia e poi Luisa ha detto: «I festoni vanno distesi solo tra merli non consecutivi. Quindi con i festoni non dobbiamo decorare il contorno della terrazza, ossia non devo collegarmi con chi è più vicino a me!». Eravamo d'accordo, qualcuno ha aggiunto: «Giusto… Non dobbiamo collegarci né con chi è subito a destra né con chi è subito a sinistra… è un po' come disegnare le *diagonali di un poligono*». A quel punto qualcuno ha proposto di prendere i festoni in mano e di fare una prova pratica, cercando di posizionarli. Io mi stavo scocciando: «Sì, ok, ma quanti ne deve prendere ciascuno di noi?». Luisa è tornata all'attacco: «I merli sono cinque: prendiamone cinque ciascuno e capiamo…».
Così abbiamo fatto delle prove stendendo i festoni, e passandoli tra noi.
«Sicuramente io e Kevin ci dobbiamo collegare perché siamo lontani», ha detto Lucia.
Quando Kevin e Lucia si sono passati il festone sembravano due merli pronti per la festa ed è stato chiaro a tutti che stavamo procedendo nel modo giusto; perciò, abbiamo continuato fino a completare il soffitto magico. Ed è stato allora che ci siamo preoccupati degli avanzi: qualcuno aveva in mano ancora tre festoni, qualcuno cinque, qualcuno quattro. Ho detto: «Noi ne avevamo presi cinque a testa, ma quanti ne abbiamo usati in tutto?». Ci siamo messi a guardare il soffitto, naso all'aria, e ci siamo accorti che, in totale, avevamo usato 5 festoni.
«Com'è possibile?!», ha mormorato Julian.
«C'era da aspettarselo che cinque festoni a testa sarebbero stati troppi! In effetti ognuno di noi non doveva collegarsi né con chi è subito alla destra né con chi è subito a sinistra… né con se stesso!». Anna non aveva tutti i torti, nonostante non mi sia mai stata simpatica…
La prima terrazza era bell'e decorata (**Figura 3**).

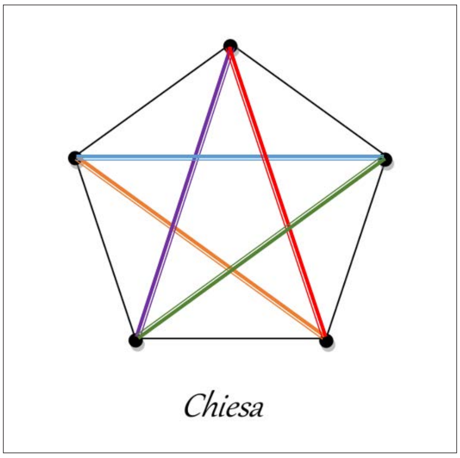


Figura 3. Rappresentazione del soffitto magico per la terrazza della Chiesa.

Siamo passati alla seconda terrazza, quella delle Scuderie, di forma esagonale (**Figura 4**). Il merlo in più ha richiesto che si aggiungesse al gruppo un altro compagno.

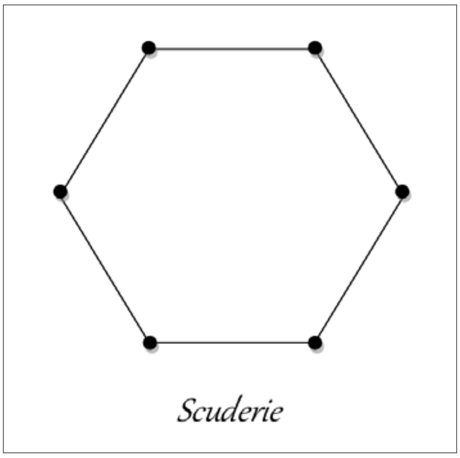


Figura 4. Rappresentazione della terrazza delle Scuderie.

«Ora c'è un merlo in più, siamo in 6: i festoni sicuramente aumenteranno…», ecco, Giulio è famoso per dire sempre delle ovvietà.
«Sì, ma di quanto?», gli abbiamo chiesto in un bel coretto. E poi: «Andiamo tutti a prendere i festoni!», «Sì, ma non facciamo come prima che ne sono avanzati un sacco…», ha precisato Luisa.
Così Julian si è chiesto: «Allora quanti ciascuno? Possiamo prevederlo?»
«Ragioniamoci. Siamo 6. Come ci collegheremo?», ho detto io.
«Non dovrebbe essere difficile: anche qui dovremo collegarci con tutti gli altri, ma non con chi è vicino, a destra e a sinistra… Quindi al massimo 6 – 2… Cioè 4 festoni ciascuno».
«In realtà non dobbiamo collegarci nemmeno con noi stessi, quindi basterà prendere 3 festoni ciascuno… ossia non 6 – 2, ma 6 – 3» (**Figura 5**).

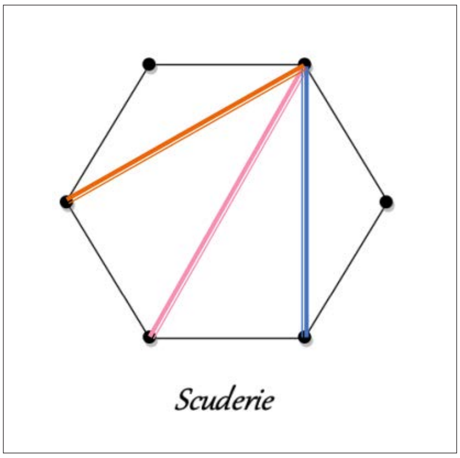


Figura 5. Disegno dei tre festoni distesi a partire da uno dei merli della terrazza delle Scuderie.

Oramai eravamo tante voci di un coro, non è neanche importante stare a raccontarvi con precisione chi ha detto cosa, fatto sta che eravamo tutti d'accordo e siamo tornati nella nostra terrazza medioevale con tre festoni a testa. Ce li siamo passati con disinvoltura e abbiamo composto il soffitto magico. Ed è lì che abbiamo scoperto che, nonostante i nostri calcoli e ragionamenti, i festoni che ci siamo portati sulla terrazza erano di nuovo troppi, ma perché?
«In realtà, ora che ci penso, io volevo passare l'ultimo festone che mi avanzava a Lucia, ma lei aveva

fatto prima di me: me lo aveva già passato…», ha ammesso Giovanni.
«È vero: anche a me è capitato!», aggiunta di Maria. A lei si sono aggiunti anche altri due compagni.
«Io mi sono distratta col cellulare e i festoni che avevo mi sono tutti avanzati: mi ritrovo in mano solo quelli che mi hanno passato gli altri».
«OK», ho detto, «ma quindi alla fine quanti ne abbiamo appesi in tutto qui alle Scuderie?».
«Il soffitto è completo e sono in tutto 9 festoni», ha detto Luisa.
«Invece noi ne abbiamo presi 3 per ciascuno, quindi 3 per 6… 18».
«Giusto il doppio di quelli che servivano!», Luisa a questo punto ha guardato la maestra per cercare la sua approvazione: fa sempre così.
«Sì, mi torna che ne abbiamo usati proprio la metà!», Julian si è messo a ragionare a voce alta: «Se voglio collegarmi con chi mi sta di fronte, basta che io gli lanci un festone… o che lui lo lanci a me, ma sicuramente non dobbiamo usarne due, quindi un festone avanza, o a lui o a me».
«Questo vale per ciascuno di noi. Perciò il soffitto magico ora è fatto di 9 festoni, ossia 18 diviso 2».
La seconda terrazza era finalmente pronta per le nozze (**Figura 6**). Stendere i festoni è stata la parte meno complicata, più difficile è stato trovare risposte ai nostri perché (**Figura 7**). Ma che soddisfazione!

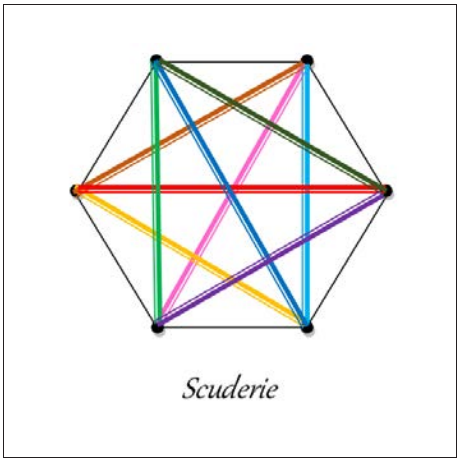


Figura 6. Rappresentazione del soffitto magico per la terrazza delle Scuderie.

Figura 7. Gli allievi, su una delle terrazze di Castel Sant'Elmo, stendono i festoni per comporre il soffitto magico per la terrazza esagonale delle Scuderie.

A questo punto mancava un'ultima terrazza, quella con più merli, la terrazza del Palazzo del Principe. Per arrivare a sette, un altro compagno si è aggiunto al gruppo dei "merli parlanti" (**Figura 8**).

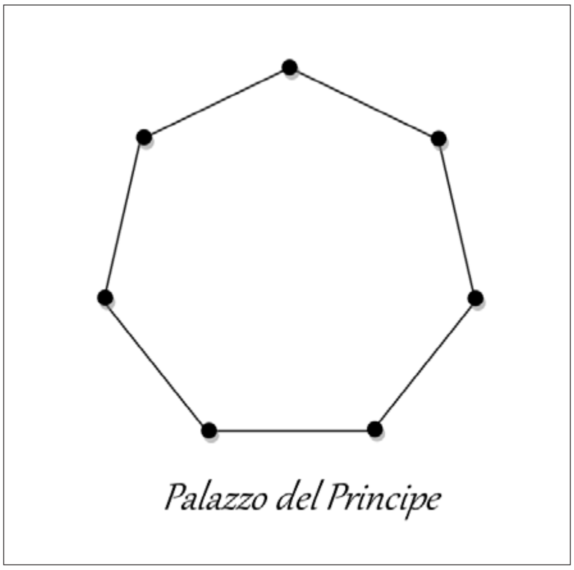


Figura 8. Rappresentazione della terrazza del Palazzo del Principe.

«L'ultimo soffitto magico sarà più scenografico, con molti più intrecci dei precedenti», la solita saggezza di Luisa.
«Ma adesso non dovrebbe essere difficile. Scommettiamo che riusciamo a prevedere il numero esatto di festoni che occorrono?», ha chiesto Kevin, che di solito durante le ore di matematica fa il professionista degli aeroplanini.
Ci abbiamo ragionato insieme. Alla fine ho pensato ad alta voce: «Sarebbero 7 – 3, ossia 4 festoni ciascuno… che per ognuno dei 7 merli significherebbe 28 festoni in totale. Ma se ognuno di noi lanciasse davvero 4 festoni, tra due merli non consecutivi ci sarebbero due festoni, e invece dobbiamo metterne solo uno. Quindi prendiamone 28 diviso 2… prendiamo 14 festoni!» (**Figura 9**).

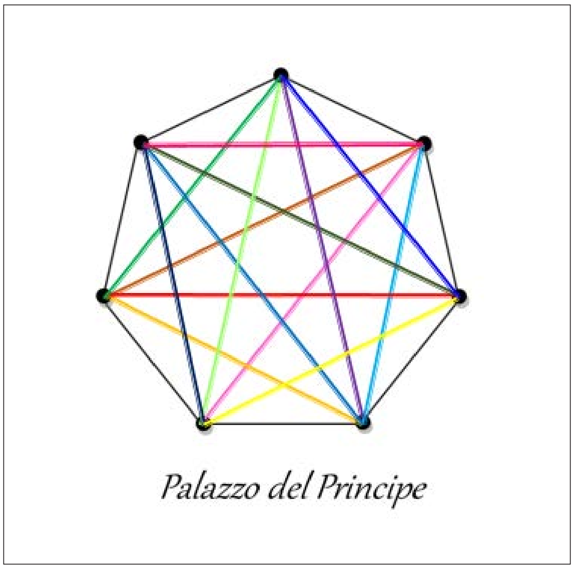


Figura 9. Rappresentazione del soffitto magico per la terrazza del Palazzo del Principe.

Alla fine abbiamo utilizzato proprio quattordici festoni. Il numero esatto per creare il soffitto magico sull'ultima terrazza... Il nostro ragionamento era esatto e sono riuscita perfino a dire la mia!

Tornati a scuola il giorno dopo, l'insegnante ci ha chiesto di provare a scrivere la *legge segreta delle diagonali,* ossia una formula che lega il numero di vertici di un poligono con il numero delle sue diagonali. Ed ecco il nostro capolavoro:

$$\text{Numero di diagonali di un poligono di } n \text{ vertici} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Ci sentivamo come doveva essersi sentito Einstein quando ha scoperto la relatività: *dei geni*. Non era stato merito di nessuno in particolare, mi tocca dire che ci eravamo arrivati insieme, come una *vera* classe!

Capitolo 4. Barattare datteri con un gatto nell'Antico Egitto

Di ritorno dal Medioevo la nostra avventura non è finita, anzi. Qualche giorno dopo, l'insegnante è andata avanti a leggere la storia. Questa volta Alessia e Pietro si sono ritrovati nell'Antica Roma, nell'anno 42 a.C.: i due fratelli avrebbero preferito ritornare a casa, ma la macchina del tempo non funzionava ancora troppo bene e li ha portati laggiù, o lassù. Appena si sono accorti di essere finiti in quell'epoca, si sono anche resi conto che il loro gatto blu, Malcolm, era scappato via lontano. Subito Pietro e Alessia hanno iniziato a cercarlo.

L'insegnante, come sempre, ci ha chiesto di decidere chi avremmo voluto seguire: Alessia che è brava a scuola sapeva dire qualche parola in latino, Pietro invece no. La classe, per alzata di mano, ha deciso di seguire di nuovo Alessia: in questi casi la maggioranza vince, pazienza se io avevo votato per l'opzione di pedinare Pietro. Così, dopo un paio di incontri con alcuni cittadini romani, abbiamo scoperto insieme ad Alessia che il felino era finito nella stiva di una nave allestita dal triumviro Marco Antonio, e stava salpando verso Alessandria d'Egitto, patria dell'amante di Marco Antonio, Cleopatra.

La donna amava i gatti e Marco Antonio ne aveva imbarcati diversi, per portarglieli in dono: tra questi c'era anche il povero Malcolm. Una volta arrivati ad Alessandria con la macchina del tempo, che per una volta ci è stata di grande aiuto, siamo subito andati al porto ad aspettare l'arrivo della nave romana piena di doni per la Signora d'Egitto.

> «A parte il colore giallo-grigio che aveva preso il suo pelo, la coda mangiucchiata e un graffio sul muso, quando abbiamo visto Malcolm non abbiamo avuto dubbi che si trattasse di lui, soprattutto perché faceva l'offeso e puntava il muso nella direzione opposta rispetto alla nostra. Riavere Malcolm, però, non è stato così semplice: abbiamo dovuto comprendere la scrittura geroglifica dei numeri per barattare il nostro animale con dei datteri. Mi spiego meglio.
>
> Prof era riuscito a procurarsi al mercato delle ceste piene zeppe di datteri. Alessia pensava di usarli per riavere indietro Malcom. Per proporre lo scambio, occorreva però comunicare all'addetto al baratto quanti datteri avessimo in totale. Prof, non avendo una bilancia, li aveva contati tutti e ci aveva comunicato che erano esattamente 10152. Per essere d'aiuto ad Alessia abbiamo dovuto decifrare la scrittura dei numeri nell'Antico Egitto. Per farlo, abbiamo recuperato la pagina di uno dei libri di Prof su cui erano riportati i sette simboli con cui nella scrittura geroglifica si rappresentano i numeri e le loro relazioni» (Figura 10).
>
> (Next-Level, 2024)

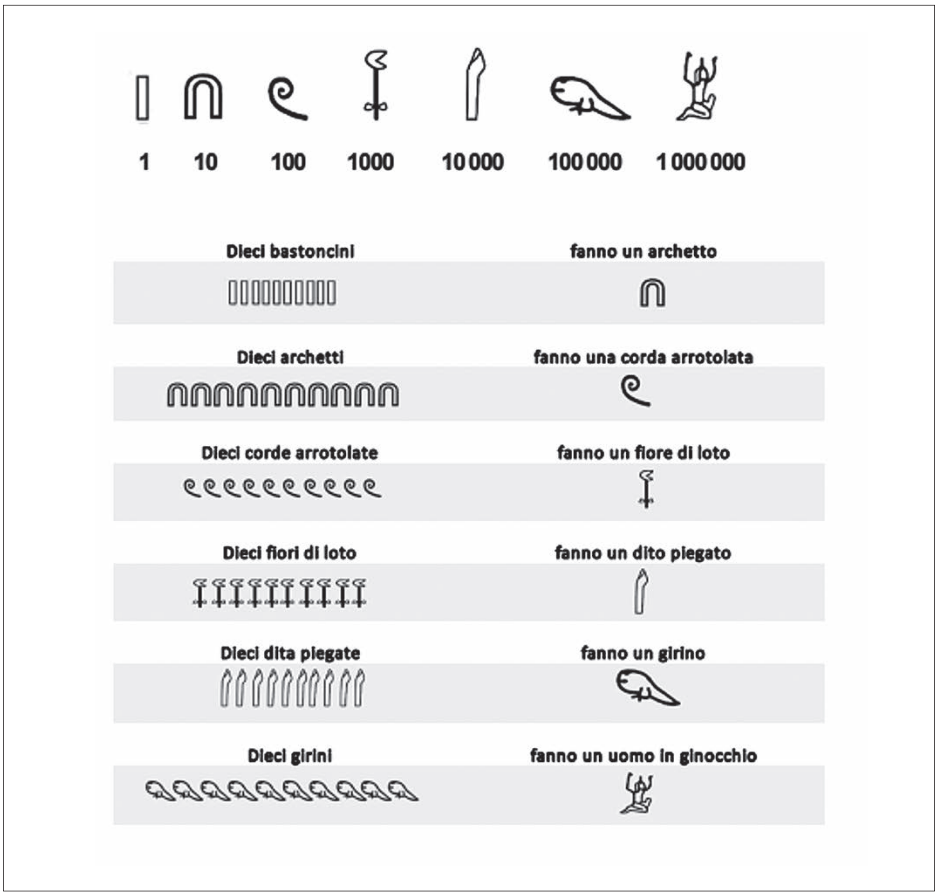


Figura 10. I sette simboli con cui nella scrittura geroglifica si rappresentano i numeri e le relazioni tra i simboli, tratto da Next-Level (2024).

Come scrivere il numero 10152 con i geroglifici? Qui ha avuto inizio il lavoro della nostra classe e anche la solita baraonda.
Kevin ha detto: «Ma è facilissimo! Basta vedere come si scrivono le singole cifre con i geroglifici ed è fatta…». «Sì», gli ha risposto Luisa, «ma sulla tabella abbiamo solo il geroglifico che corrisponde a 1, mancano quelli per lo 0, per il 5 e per il 2». A questo punto, mi è venuta un'idea: «Semplice, per il 2 possiamo usare due bastoncini, per il 5 cinque bastoncini… E per lo 0? Forse nessun bastoncino. Proviamo!» (Figura 11).

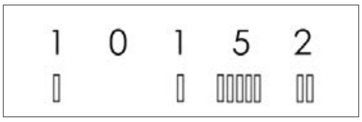


Figura 11. Rappresentazione di ciascuna cifra del numero 10152 con i geroglifici.

«Qualcosa non mi torna…», ha obiettato qualcuno: «Così non sarebbe lo stesso che scrivere con i geroglifici il numero 1152?» (Figura 12).

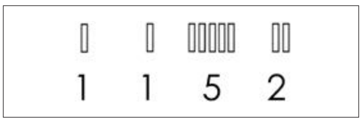


Figura 12. Rappresentazione di ciascuna cifra del numero 1152 con i geroglifici.

E poi, dopo un po' di silenzio: «Ma anche 27 oppure 9…» (**Figura 13**).

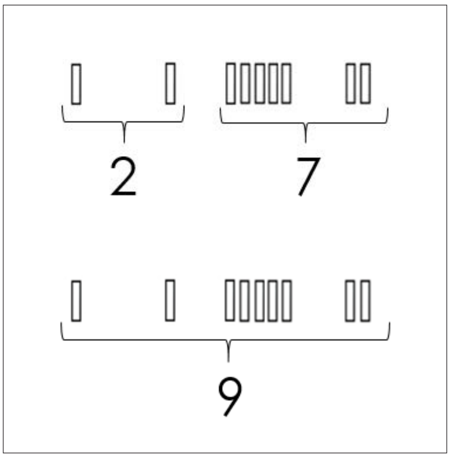


Figura 13. Rappresentazione di ciascuna cifra del numero 27 e del numero 9 con i geroglifici.

Eravamo tutti intorno alla lavagna, e discutevamo animatamente, con grande stupore dell'insegnante. «In realtà io immaginavo che un numero come 27, essendo formato da 2 decine e 7 unità, si scrivesse non solo con i bastoncini ma anche con gli archetti, così», ha ipotizzato Maria scrivendo questi simboli e numeri sulla lavagna (**Figura 14**):

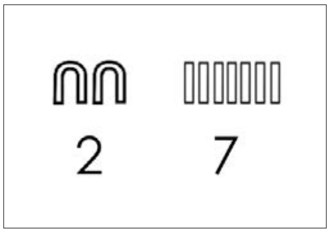


Figura 14. Rappresentazione del numero 27 con i geroglifici.

«Sì, altrimenti a che cosa servirebbero tutti quei geroglifici della pagina di Prof?», le ha dato ragione Julian: «Noi dobbiamo dire in egiziano antico che abbiamo una cesta con 10152 datteri. Cominciamo dal 52, 5 decine e 2 unità, quindi mi sembra di aver capito che basterà disegnare 5 archetti e 2 bastoncini…» (**Figura 15**).

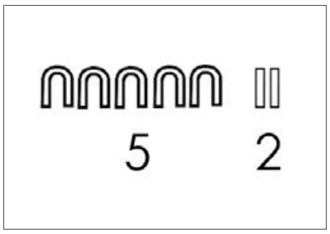


Figura 15. Rappresentazione del numero 52 con i geroglifici.

«E per il 152 occorrerà aggiungere un centinaio, cioè una corda arrotolata» (**Figura 16**).

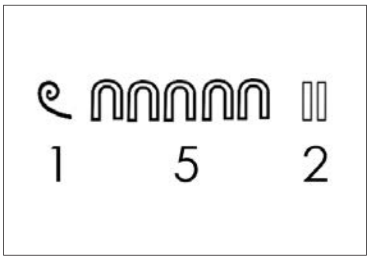


Figura 16. Rappresentazione del numero 152 con i geroglifici.

«Mentre di unità di migliaia nel 10152 non ce ne sono…»
«Quindi manca solo una decina di migliaia, cioè un dito piegato!»
La magia che abbiamo vissuto nel Medioevo stava capitando di nuovo qui, nell'Antico Egitto: non era più importante capire chi stesse parlando, ci trovavamo a ragionare tutti insieme, come un unico gigantesco cervello.

Alla fine abbiamo scritto (**Figura 17**):

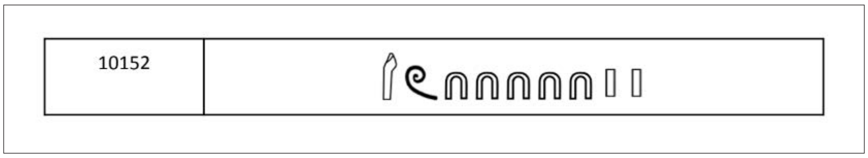


Figura 17. Rappresentazione del numero 10152 con i geroglifici.

Con questo numero, oltre a sentirci molto intelligenti, siamo riusciti a farci capire dall'egiziano addetto al baratto e a riportare il gatto Malcolm nelle braccia dei protagonisti della storia. Ecco come ha commentato Pietro il successo dell'operazione:

> «Ci siamo! Abbiamo ricomprato Malcom, è lurido e manda un odore pestilenziale ma finalmente è con noi. Adesso che la squadra è ricomposta non ci resta che tornare alla casa sull'albero, mettere in moto la macchina del tempo e partire a razzo. Questo viaggio nel passato è già durato fin troppo per i miei gusti. Voi intanto fate il tifo per noi e tenete incrociate tutte le dita che avete. Si parte!»
>
> (Next-Level, 2024)

Capitolo 5. Piedi alieni, teletrasporto e dispute infervorate nel futuro

Com'era ovvio, prima del ritorno a casa dei nostri eroi ci sono stati altri giorni memorabili a spasso nel tempo. E, mentre viaggiavamo, a qualcuno di noi sembrava di avere già sentito parlare di quei personaggi che si affollavano sulle pagine: probabilmente avevamo incontrato i loro nomi sui libri di Storia. Per me, però, la tappa più entusiasmante è stata senza dubbio quella ambientata nel futuro. Più precisamente nel 3021.
Quando l'insegnante ha iniziato a leggerci la storia a voce alta, come sempre, tutti noi ci aspettavamo un futuro di catastrofi nucleari e cambiamenti climatici apocalittici; invece, ci siamo trovati in una specie di pianura ricoperta di una leggerissima erbetta verde e leggera. Seguiamo Alessia, che si è avventurata fuori dalla macchina del tempo.

> «Discesa la prima collina, vedo una specie di palo alto con due lucine, una rossa e una verde. Ha tutta l'aria di un semaforo, e siamo solo io e lui, ma dal momento che è rosso mi fermo: non si sa mai. A quel punto il semaforo rosso si abbassa, si piega, si avvicina e mi scatta una foto. Che tuffo al cuore! Di fianco al semaforo si è appena materializzata una bambina di sette anni, o giù di lì. È vestita di arancione, un materiale strano e brillante che le sta d'incanto. "Alessia Mezzanotte, se non sbaglio?", mi chiede. "Sì, sono io". "Il mio rilevatore dice che hai paura, cara. Che cosa posso fare per aiutarti?"».
>
> (Next-Level, 2024)

La bambina del futuro è stata molto gentile, ha spiegato ad Alessia che il futuro del 3021 è il migliore dei mondi possibili, niente più guerra, niente più fame, neanche un etto di plastica prodotto.

> «"Non siamo alieni, siamo solo i tuoi pro-pro-pro-nipoti!", dice lei a un certo punto. Alessia ha osservato che in effetti, a parte gli abiti e la capacità di materializzarsi istantaneamente, la bambina era esattamente una bambina.
> "Non proprio", spiega la bambina, "Adesso siamo in piena mutazione: alcuni di noi hanno ancora le dita dei piedi e altri no. Tra i mutanti c'è il 27% della popolazione che ha le dita palmate; un 10% della popolazione ha il piede fatto a martello senza il minimo accenno di dita dei piedi, e un 40% della popolazione che ha ancora alcune dita dei piedi, ma non tutte e cinque. E tutti quelli che restano, invece, hanno dei piedi esattamente identici ai vostri"».
>
> (Next-Level, 2024)

La bambina a quel punto ha tirato fuori da una sua specie di tasca uno strano aggeggio e proiettando nell'aria numeri e immagini luminose ci ha mostrato alcuni dati rilevanti riguardo a questa trasformazione. Poi ci ha chiesto aiuto: la nostra missione era comprendere e studiare quelle informazioni e restituirle in una forma comprensibile ai nostri poveri contemporanei con cinque dita dei piedi, utilizzando tabelle, grafici a torta e grafici a barre (**Figura 18**).

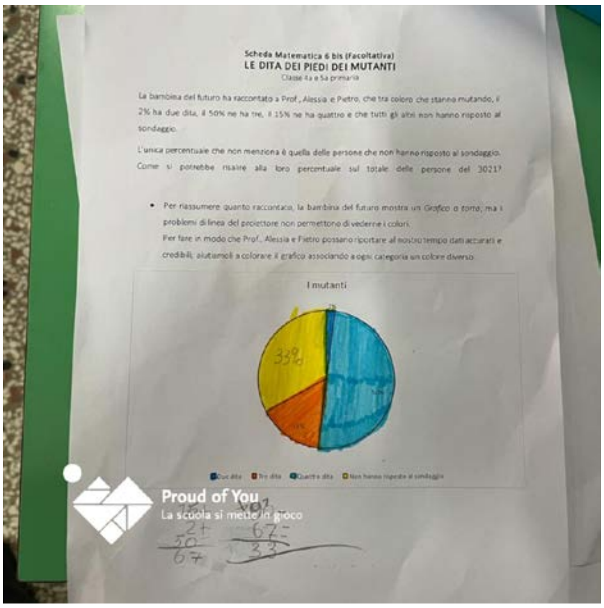


Figura 18. Protocollo raccolto che mostra il completamento del grafico a torta fornito sulla base dei dati condivisi nella storia.

Eravamo tutti molto appassionati a questo curioso argomento delle dita dei piedi: persino i più scalmanati stavano in silenzio e ascoltavano la voce dell'insegnante che andava avanti a leggere la storia. Infatti, le avventure erano appena iniziate.
Poco dopo, lasciata la bambina, siamo finiti in un'incredibile disputa tra piante e robot.
Come mai? In pratica queste due specie di abitanti del futuro si stavano accapigliando sul *teletrasporto*. Inutile dire che i robot erano favorevoli alla diffusione e all'incremento di quella tecnologia mentre le piante no, perché desideravano salvaguardare l'ambiente e preservare la loro specie, evitando cambiamenti repentini, spostamenti di radici e spore da una parte all'altra del globo.
Per sostenere la loro causa, i robot avevano preparato tre grafici (Figura 19), riguardo alcuni dati di proiezione di un mondo in cui sarebbe stato possibile usare il teletrasporto, che hanno sottoposto a Pietro, Alessia e Prof (e quindi anche noi) senza aggiungere neppure mezza parola.

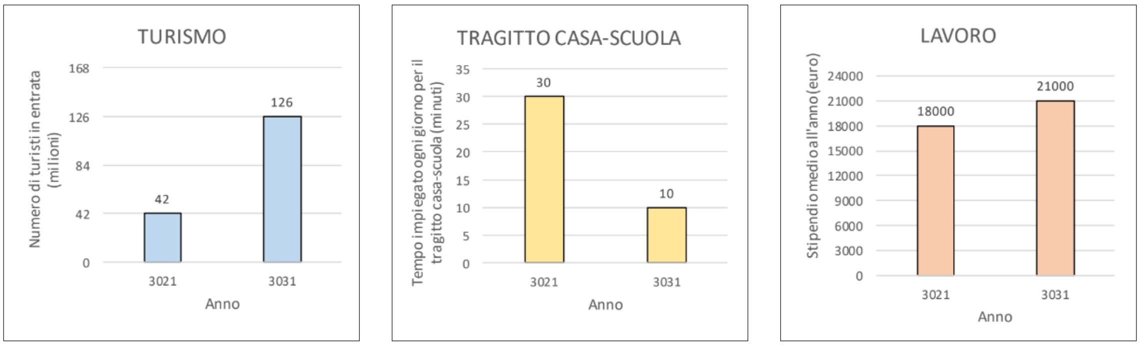


Figura 19. Grafici forniti dai robot a sostegno della loro causa, tratti da Next-Level (2024).

Che cosa dovevamo fare noi ragazze e ragazzi? In pratica, chi era a favore del teletrasporto e del suo incremento, in accordo con i robot, doveva studiare questi dati e preparare un bel discorso per spiegare al mondo come mai investire nel teletrasporto era una scelta intelligente.
In quanto alle piante, queste si esprimono in modo completamente diverso dai robot. Ecco il discorso intenso e commovente che hanno preparato:

> «**L'arringa delle piante**
> I robot sono affascinati dalla tecnologia, ma è giusto perseguire il progresso tecnologico a tutti i costi? I nostri scienziati ritengono che il teletrasporto sia molto inquinante, al punto da provocare nel tempo un impressionante e dannoso aumento della temperatura del Pianeta, com'era già successo mille anni prima. Ondate di caldo in pieno inverno e violente tempeste in estate, scioglimento dei ghiacciai e scomparsa di moltissime specie animali… Giusto per dirne qualcuna.
> Per non parlare poi delle spiagge! A causa dei cambiamenti climatici, le spiagge sabbiose che tanto amiamo potrebbero scomparire. Attualmente si contano 36 mila chilometri di litorale sabbioso. Secondo le previsioni elaborate dai nostri scienziati, però, se si continua di questo passo, tra soli venti anni ben 1/10 del litorale sarà sommerso dal mare. Se si guarda direttamente al 3100, invece, addirittura 1/4 del litorale sabbioso attuale sarà completamente scomparso.
> Bisogna agire subito e in fretta, avere cura dell'ambiente che ci circonda e prendere la decisione giusta che, in questo caso, corrisponde ad essere dalla parte di noi piante!».
>
> (Next-Level, 2024)

Le piante non hanno preparato però nessuna immagine a favore della loro argomentazione! Chi la pensava come loro sugli svantaggi del teletrasporto ha avuto quindi il compito di aiutarle legando al discorso almeno un grafico chiaro e accurato.

Ciascuno di noi ha avuto qualche minuto per riflettere su da che parte schierarsi. Dopodiché abbiamo formato due gruppi di pensiero e ci siamo messi a lavorare per preparare i materiali necessari a sostenere la nostra fazione. Piante contro robot. "No al teletrasporto" contro "Sì al teletrasporto".
Sarebbe impossibile descrivere con precisione come si è svolta la nostra discussione, però posso farvi qualche esempio per rendere l'idea. Sia i sostenitori della posizione dei robot sia i sostenitori della posizione delle piante hanno riflettuto su come sarebbe cambiato il mondo nel futuro del futuro, nel caso di utilizzo del teletrasporto.
Il gruppo che sosteneva la posizione dei robot ha sottolineato, alcuni vantaggi:

1. «Grazie al teletrasporto potremo dormire di più e fare le cose con calma, visto che si risparmia tempo nel tragitto da casa fino a scuola, in media, guadagneremmo 20 minuti al giorno».
2. «Non solo, potremmo fare molti più acquisti: vestiti, cellulari e tutto ciò che abbiamo sempre desiderato, perché in un mondo col teletrasporto si guadagnerebbe di più, come mostra il grafico sul Lavoro».

Il gruppo che sosteneva le piante ha preso posizione contro queste logiche consumistiche, che mettono a rischio natura, animali e persone. Ma chi sosteneva i robot ha ribattuto:

3. «Come mostra il grafico sul Turismo, il numero dei turisti in entrata triplicherebbe. Il turismo diventerebbe una grande risorsa per il nostro Paese (alberghi, ristoranti, musei…). Non solo, noi stessi potremmo viaggiare di più e visitare i luoghi che abbiamo sempre desiderato vedere. Ad esempio, il Giappone, la città di Parigi, i Caraibi…».

In risposta all'osservazione precedente fatta dalla fazione dei robot, quella delle piante ha detto:

1. «State sottovalutando una cosa fondamentale: il teletrasporto è una minaccia per la natura e le sue bellezze. Che senso avrebbe visitare il Giappone senza i suoi ciliegi in fiore, o Parigi senza il viale alberato degli Champs Elysées?».
2. «Non solo! Perché si dovrebbe andare ai Caraibi se le spiagge si fossero ridotte a dismisura? Ad esempio, questo grafico (**Figura 20**) mostra una previsione della riduzione del nostro litorale sabbioso, da qui a 20 anni e da qui a 80 anni, anche solo continuando a usare il teletrasporto come stiamo già facendo».

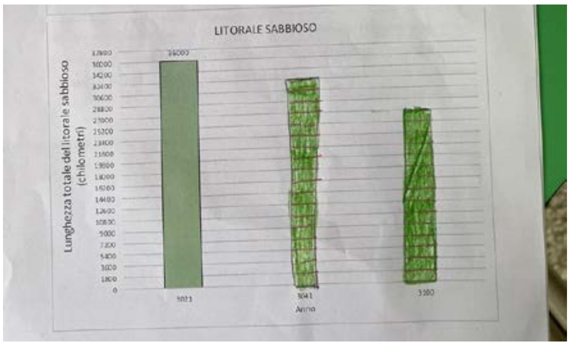


Figura 20. Protocollo raccolto che mostra il grafico a barre realizzato da un allievo a sostegno dell'argomentazione delle piante.

Io personalmente mi trovavo a sostenere la posizione dei robot, ma discutendo così, mi sono accorta che non è semplice stabilire chi ha ragione in una simile disputa: anche le piante dicevano frasi sensate e piene di saggezza. La realtà è complessa e i punti di vista possono essere molteplici. Se dovessi riassumere che cosa mi ha insegnato il viaggio nel futuro, direi che è stato questo. Oltre a sviluppare un po' di familiarità con i grafici.

Capitolo 6. Nell'Antica Grecia, sulle tracce di Ipazia

In seguito, insieme alla classe e ai nostri insegnanti, siamo andati avanti a leggere le avventure di Prof, Pietro, Alessia e Malcolm. Nell'episodio successivo siamo stati nel Settecento, alla corte del re di Francia Luigi XVI, dove abbiamo contribuito a invitare al ballo alcuni ospiti graditi e abbiamo scoraggiato molti altri poco graditi: intanto, nel farlo, ci siamo addestrati a scrivere le nostre opinioni in un tono gentile, per sortire in chi ci legge un certo effetto di persuasione. Sempre nella reggia di Luigi XVI, abbiamo inventato e ballato minuetti sfruttando l'armonia della geometria (**Figure 21** e **22**).

Figura 21. In classe, ciascun gruppetto di quattro allievi interpreta attraverso i movimenti di tutto il corpo la coreografia inventata.

Figura 22. Gli allievi interpretano le coreografie nel porticato e in una delle sale del Museo di Capodimonte.

Poi la macchina del tempo ci ha scaraventati nell'Antica Grecia, nei giorni in cui era in corso la pratica dell'ostracismo, perciò i nostri eroi hanno dovuto dire la loro su quale dei candidati all'esilio fosse il più indicato a subire quel trattamento. Ovviamente li abbiamo aiutati, sentendo le accuse rivolte ai vari "colpevoli". Eccone una:

> «"Palladios, un marinaio buono ed esperto, ha rivelato alla sua fidanzata dove vengono custodite le ancore della flotta di Atene. Peccato che la sua fidanzata abiti a Sparta, una città nemica di Atene. Adesso la fidanzata non si fa più vedere e Atene ha perso circa 100 ancore nuove di zecca."
> Indovinate chi è stato esiliato alla fine? Esatto, una donna! A quel punto Alessia è sbottata.
> "Anche Ipazia era una donna, la più grande matematica, filosofa e astronoma dell'antica Grecia, un genio assoluto! Eppure, alla prima occasione, con la scusa che fosse una strega, l'hanno presa e uccisa in modo barbaro. Perché era una donna e perché aveva osato mettersi allo stesso livello dei maschi, due cose che li fanno andare fuori di testa"».
>
> (Next-Level, 2024)

Visto che non conoscevamo Ipazia, l'intervento di Alessia ci ha dato l'occasione per scoprire qualcosa in più sulla sua opera, esercitandoci a tracciare delle coniche, circonferenze ed ellissi per la precisione (**Figura 23**).

Figura 23. Scegliendo di utilizzare spago e gesso, un gruppetto di allievi prova a disegnare una circonferenza sul pavimento.

Capitolo 7. Ricordi da salvare

Alla fine, quando Alessia, Pietro e Prof sono finalmente tornati a casa, devo confessare che un po' mi è dispiaciuto. Viaggiare con loro, appassionarmi alle loro avventure e ridere delle loro disavventure mi ha fatto quasi dimenticare che intanto stavo imparando l'italiano, la matematica e la storia. Il finale aveva una nota un po' triste, quando Prof ha spiegato a Pietro e Alessia che i ricordi: «Spariranno tutti».

> «Prof ci ha raggiunto, ha in braccio Malcom che sta facendo le fusa dalla felicità, perché l'unico davvero contento di essere tornato a casa è il gatto. "Ci sono delle regole, ragazzi, non possiamo interferire con il flusso del tempo, ogni cosa deve tornare a posto".
> "Che significa?", chiede Alessia.
> "Significa che se raccontassimo quello che abbiamo visto, nel passato o nel futuro, potremmo creare delle crepe spazio-temporali molto pericolose. Per questo tutto deve sparire. Le nostre tracce sono già state cancellate dai posti in cui siamo stati, e fra poco spariranno anche dalla nostra memoria. Solo così tutto potrà tornare come prima"».
>
> (Next-Level, 2024)

Allora, prima di dimenticare tutto, abbiamo costruito una linea del tempo per mettere in ordine i luoghi e le avventure del viaggio e abbiamo compilato un diario per ricordare gli aneddoti più divertenti e curiosi incontrati lungo il percorso (**Figura 24**).
Così, se mai la macchina del tempo dovesse ripartire, noi saremo pronti a salire a bordo!

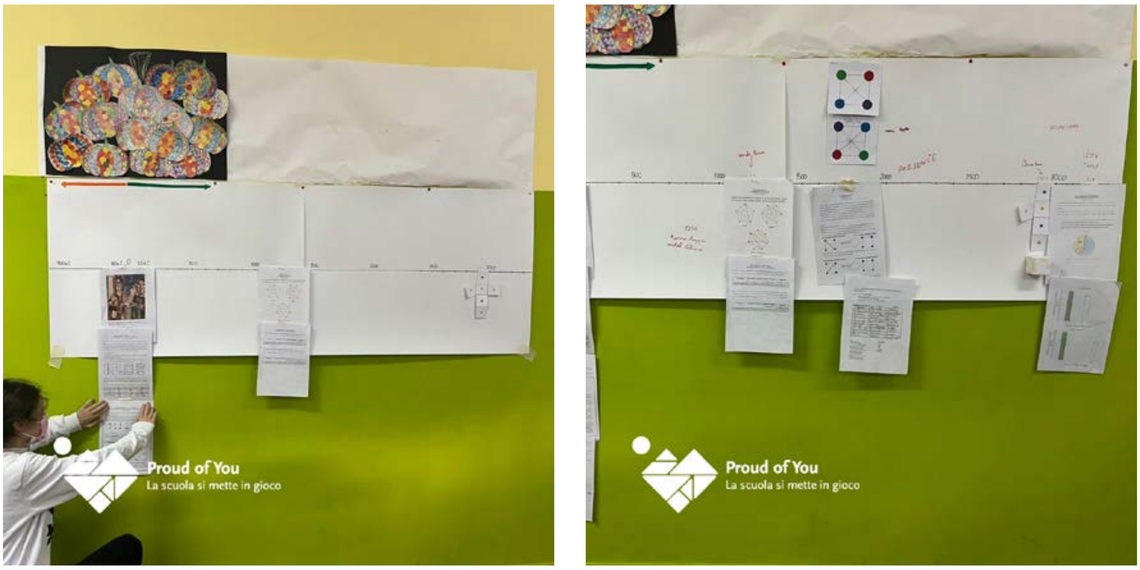


Figura 24. Un esempio di linea del tempo in due successive fasi di costruzione. Nelle immagini è possibile riconoscere, oltre ai segni grafici prodotti durante l'esplorazione della linea temporale, schede compilate e modelli geometrici provenienti da alcune delle tappe del viaggio.

3 Spunti e riflessioni didattiche

Come anticipato nel **par. 1**, per la terza edizione del progetto PoY, abbiamo scelto di connettere le attività didattiche attraverso una struttura narrativa, quella del *librogame*, che facesse da cornice di senso, secondo la metodologia degli "sfondi integratori" (Zanelli, 1986). L'utilizzo della narrazione, con il ricorso all'elemento fantastico, ci è sembrata una buona scelta anche per le particolari condizioni del momento storico in cui le attività sono state progettate. La fase di progettazione didattica di PoY, infatti, prevedeva inizialmente un lavoro condiviso con gli insegnanti delle scuole coinvolte, che è stato però bruscamente interrotto dallo scoppio della pandemia di Covid-19. Era la primavera del 2020. L'inizio delle attività didattiche in presenza previste dal progetto veniva rimandato di mese in mese. Intanto, diventava sempre più chiaro che sarebbe stato difficile co-progettare con gli insegnanti, impegnati nell'enorme sforzo di portare avanti una didattica a distanza, che per particolari e opinabili decisioni politiche, nel territorio campano è durata a lungo anche nel livello di scuola primario. Poco dopo aver raccolto le aspettative e i bisogni educativi percepiti dagli insegnanti, abbiamo quindi dovuto rinunciare al confronto continuo con loro per la fase di progettazione. Rimaneva, anzi si faceva sempre più forte, però, l'esigenza di preparare per allievi e insegnanti un'esperienza piacevole, stimolante e significativa dal punto di vista formativo. Così, mentre PoY dava sostegno tecnologico e pratico alla didattica a distanza delle scuole coinvolte, come progettiste di matematica e progettiste di italiano, abbiamo approfittato di un tempo più lungo per costruire insieme una storia fantastica. Ne è nato un viaggio nel tempo (**Figura 25**), con l'obiettivo di offrire, appena sarebbe stato possibile, un'occasione di svago e di coinvolgimento attivo di allievi e insegnanti in ricche esplorazioni matematiche e usi creativi della lingua, all'interno di una cornice di senso condivisa.

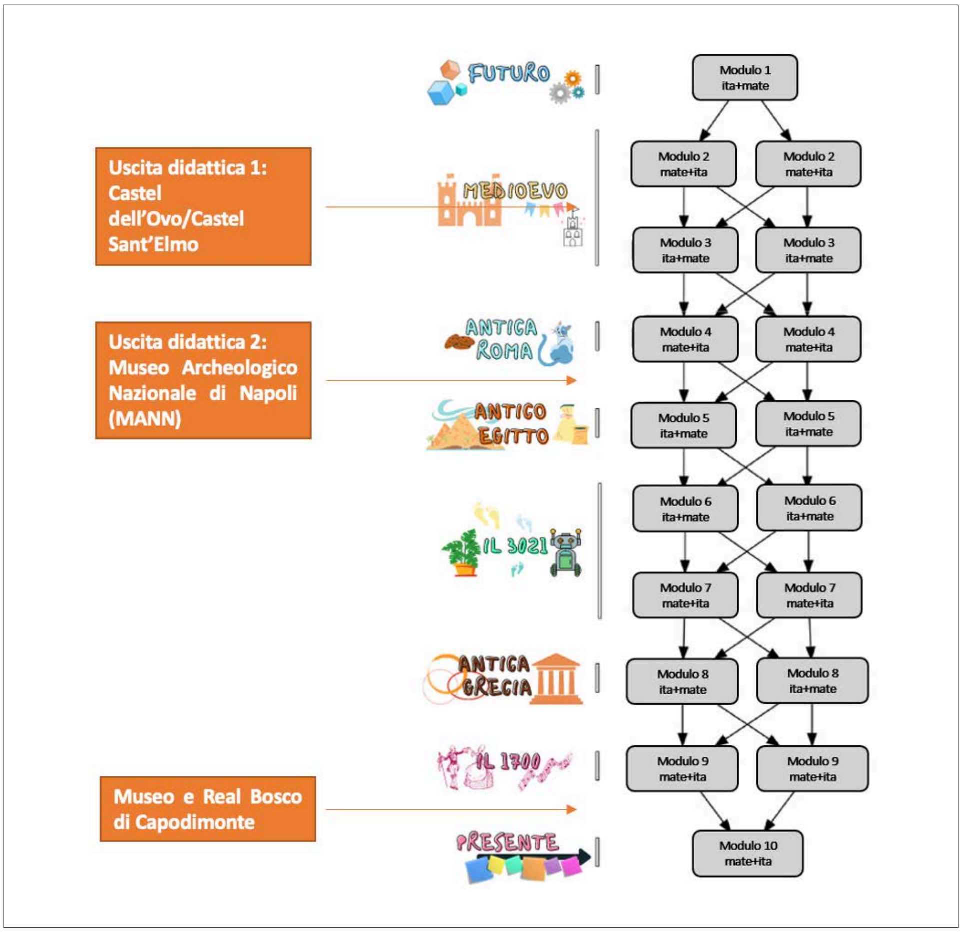


Figura 25. Schema grafico dell'articolazione del *librogame* e delle uscite sul territorio. Da ognuna delle caselle centrali partono due frecce: un *librogame* infatti è una storia "a bivi", in cui è il lettore - in questo caso gli studenti - a scegliere di volta in volta che direzione dare alla narrazione. Inoltre, in ogni casella, è indicata prima la disciplina ai cui obiettivi è stato dedicato più tempo nel corso della tappa.

Nell'estate del 2021 circa 90 allievi di Polistena sono finalmente partiti con insegnanti e tutor per questo viaggio all'interno di un campo estivo, mentre i 325 allievi delle scuole di Napoli e i loro accompagnatori lo hanno fatto nell'autunno dello stesso anno.
Questa è la storia di come è nato il *librogame* di PoY, del cui spirito abbiamo dato assaggio nei 7 capitoli del racconto proposto in questo articolo.
Nel seguito di questo paragrafo condivideremo alcuni spunti teorici e riflessioni che hanno supportato il nostro lavoro di progettazione e che sono centrali nel panorama attuale della ricerca in educazione matematica.

3.1 Appendice al Capitolo 1. Il problema della disaffezione verso la matematica

Negli ultimi anni sia a livello istituzionale che di ricerca è cresciuta l'attenzione per il preoccupante fenomeno della disaffezione nei confronti della matematica. In molti casi la sensazione di inadeguatezza nella risoluzione di esercizi o problemi intrecciata a una visione della matematica come disciplina ripetitiva, meccanica, fatta di problemi incomprensibili e distanti dalla realtà, concorrono a sviluppare nei ragazzi disaffezione nei confronti della matematica (Di Martino & Zan, 2010). Sono state condotte ancora poche ricerche sul legame tra abbandono scolastico e disaffezione nei confronti della matematica, tuttavia alcuni studi hanno mostrato quanto l'abbandono scolastico sia spesso legato a bocciature o insuccessi proprio in ambito matematico (Moscucci et al., 2005). La ricerca, nel campo della didattica della matematica, riguardante i fattori *affettivi*, sviluppata a partire dalla metà degli anni '80, ha segnato un passo importante nella direzione di un approccio alla disciplina che vada oltre la pura

dimensione cognitiva, considerando anche l'importanza di fattori come emozioni, convinzioni, valori, atteggiamenti (McLeod, 1992). In questa prospettiva è stato elaborato un modello teorico ormai consolidato che descrive l'atteggiamento (in inglese *attitude*) nei confronti della matematica come un costrutto tridimensionale (Di Martino & Zan, 2010) caratterizzato da componenti mutuamente interconnesse. Queste sono: i) la disposizione emozionale – emozioni positive come speranza, sorpresa, curiosità, ma anche emozioni negative come ansia, paura, frustrazione; ii) il senso di autoefficacia, ossia la percezione che lo stesso alunno ha della propria competenza in matematica, esemplificando la sensazione di riuscire in matematica oppure quella di non riuscire in matematica; iii) la visione che l'alunno ha della matematica. Anche quest'ultima ha a che fare con le esperienze in matematica vissute dallo studente, e una teoria di successo distingue tra una *visione strumentale* della matematica, secondo la quale la disciplina è fatta di regole e procedure da memorizzare e applicare senza errori, e una *visione relazionale* della matematica, che considera centrali nella disciplina i processi del congetturare e dell'argomentare, il *problem solving*, i collegamenti tra i vari fatti matematici, i "perché" degli algoritmi che si applicano e dunque il senso di quello che si fa (Skemp, 1976).
A partire da queste ricerche, le progettazioni delle attività di matematica di PoY hanno puntato a sviluppare atteggiamenti positivi nei confronti della disciplina provando a lavorare su tutte e tre le componenti del modello di atteggiamento. Il *librogame* è stato pensato proprio per poter essere accattivante e generare emozioni positive, come curiosità e attesa. Inoltre, l'obiettivo della progettazione matematica è stato quello di creare delle sfide matematiche, a cui tutti gli allievi potessero contribuire, in modi creativi e collaborativi. I principali obiettivi sono stati la costruzione di modelli geometrici tridimensionali e bidimensionali, di rappresentazioni (del piano, dei numeri e dei dati statistici), la scoperta di alcune formule e di alcune regolarità, in ottica algebrica.
Un altro elemento importante nella progettazione è stata la cura del coinvolgimento del corpo, infatti la disaffezione nei confronti della matematica, ma più in generale della scuola, è anche legata a un senso di frustrazione dell'organizzazione degli spazi e delle lezioni, in cui è previsto che i ragazzi stiano fermi nei banchi ad ascoltare passivamente, con un'organizzazione che prevede di rimanere sempre chiusi nella propria aula e a scuola (si veda il par. 3.3).

3.2 Appendici al Capitolo 2

3.2.1 Lo Storytelling in educazione matematica

La pratica dello *storytelling* è oggetto di studio in diversi ambiti scientifici, come quelli della psicologia, dell'antropologia e della pedagogia. Si tratta infatti di un'espressione culturale umana che senza troppe forzature può essere considerata universale. Non è un caso, ad esempio, che le più antiche teorie sul mondo siano nate e siano state tramandate sotto forma di miti e leggende. Il valore dell'approccio narrativo nell'insegnamento, specie nei primi anni di scuola, è ampiamente riconosciuto a livello internazionale già dagli anni Ottanta del secolo scorso. I bambini vengono esposti alle storie fin dalla prima infanzia, tanto da dimostrare di interiorizzare fin da piccoli una conoscenza implicita sulla loro struttura che Levorato (1988) chiama "schema delle storie". Questo permette ai bambini, ad esempio, di comprendere più facilmente un testo narrativo rispetto a un testo descrittivo o argomentativo (Colombo, 2022), oltre a orientarli spesso a scegliere la forma narrativa anche quando il contesto richiederebbe loro di esprimersi secondo una forma espositiva o descrittiva.
Come affermato da Egan (1986) nei suoi studi pionieristici sull'argomento in campo educativo, lo *storytelling* può essere usato per perseguire obiettivi educativi nelle diverse discipline. Le storie sono portatrici di informazioni e per loro natura propongono conflitti da risolvere, domande che aspettano una risposta e introducono aspettative in chi ascolta. Non solo, non meno importante è il potere dello *storytelling* di creare significati attorno alle cose che racconta e di coinvolgere emotivamente gli studenti, connettendo la loro immaginazione alle materie di studio. Sono queste caratteristiche con un grande potenziale educativo, particolarmente adeguate a un contesto educativo informale, che sono state considerate in PoY come trampolino di lancio sia per attività di *problem solving* matema-

tico che per attività di composizione creativa di testi. Lo *storytelling*, e più in generale le narrazioni, hanno riscosso molto interesse anche nel campo specifico della ricerca in educazione matematica, dove non sono stati tralasciati gli aspetti affettivi e più in generale di atteggiamento verso la matematica. Nel par 3.1 si è già accennato alla questione della necessità di una condivisione di senso nel fare matematica a scuola, affinché questa non venga percepita secondo un approccio procedurale come semplice manipolazione di simboli. Zazkis e Liljedahl (2009) osservano come lo *storytelling* sia generalmente poco presente nelle ore di matematica e sostengono che invece «introdurre storie *nelle* ore di matematica cambierebbe le storie *sulle* esperienze di matematica degli allievi» (p. 4, traduzione delle autrici).
Gli stessi autori analizzano diverse storie che a volte si utilizzano nell'insegnamento della matematica, di cui propongono anche molte variazioni, allo scopo di riflettere sul fatto che si possono distinguere diversi tipi di storia a seconda del rapporto tra la narrazione e l'attività matematica a loro connessa. Ad esempio, una storia può semplicemente "fare da cornice" a un'attività matematica. È questo il caso del classico schema di storie di un esploratore che per uscire da una situazione di pericolo ha bisogno di risolvere un indovinello matematico. Per le diverse tappe del viaggio nel tempo, però, il nostro sforzo è stato quello di creare narrazioni intrecciate con le attività matematiche. Ciò è stato possibile grazie a scambi continui tra le progettiste di italiano, impegnate a scrivere la storia, e quelle di matematica. In particolare, ci siamo impegnate a costruire storie che "pongono domande (matematiche)", in cui cioè i momenti di crisi che caratterizzano tutte le storie, potessero essere risolti attraverso processi matematici. "Questo tipo di storie è in grado di suscitare il coinvolgimento emotivo degli allievi, che si connettono con l'attività matematica sentendosi loro stessi eroi o attori della storia" (Zazkis & Liljedahl, 2009). Siamo infatti convinte – in linea anche con le riflessioni di Mellone et al. (2013) – che i percorsi didattici che sfruttano i processi di identificazione suscitati da una narrazione (Bettelheim, 1976), attraverso la sua drammatizzazione in classe, favoriscano l'emergere di significati matematici in modi significativi.
Il tipo di storia che pone domande ha molti punti in comune con una particolare tipologia di problemi: i cosiddetti *problemi narrativi* (Zan, 2016). Di questi ultimi ci limiteremo a dire che si tratta di problemi a parole, tipici della pratica scolastica, in cui però non solo è presente una vera e propria storia, ma le informazioni matematiche e la domanda sono coerenti con essa. Questa particolare caratteristica fa sì che ci sia una condivisione del senso del problema con gli allievi, che così come accade per i problemi della vita di tutti i giorni non andrebbe mai data per scontata per i problemi scolastici (Carotenuto et al., 2021; Zan, 2016). Inoltre, la stessa caratteristica di coerenza fa sì che il *pensiero narrativo* (Bruner, 1986), attivato dalla narrazione in chi legge per comprendere azioni, intenzioni, scopi ed emozioni dei personaggi, non sia di ostacolo per l'attivazione del suo duale, ossia il *pensiero logico* (Bruner, 1986), necessario invece per la risoluzione del problema matematico. Al contrario, afferma Zan (2016), «la centralità del pensiero narrativo nella vita quotidiana fa sì che esso possa costituire una formidabile risorsa per lo sviluppo del pensiero logico» (p. 116).

3.2.2 Educazione matematica informale

Le attività didattiche proposte nelle varie edizioni di PoY si ispirano ai principi dell'*Educazione Matematica Informale*. Si tratta di un approccio didattico innovativo, che ha attirato l'attenzione della ricerca solo di recente. In esso si creano contesti educativi che differiscono sia da quelli scolastici che da quelli riconducibili alla *everyday mathematics*, ossia alla matematica che si può incontrare incidentalmente nella vita di tutti i giorni (Nunes et al., 1993). Tipici esempi di educazione matematica informale sono le attività di matematica proposte nei campi estivi o all'interno dei musei scientifici. Per le esperienze didattiche di PoY, molte attività sono state condotte negli stessi spazi degli edifici scolastici, in aule, palestre e cortili, ma non sono mancate attività proposte insieme alle visite di alcuni musei della città di Napoli e di altri luoghi di interesse storico, culturale e paesaggistico.

Secondo Nemirovsky et al. (2017), gli aspetti che caratterizzano i contesti di educazione matematica informale e li rendono diversi da quelli scolastici sono:

1. la *partecipazione volontaria* da parte dello studente e la sua libertà nel seguire i propri interessi, anche condizionando lo sviluppo delle attività stesse;
2. la *fluidità dei confini disciplinari*, con frequenti connessioni della matematica con l'arte, la letteratura, le altre scienze e la tecnologia;
3. l'*assenza di forme tradizionali e individuali di valutazione.* Generalmente l'apprendimento viene documentato, ma solo ai fini della valutazione del progetto educativo e in ottica di miglioramento delle pratiche didattiche.

Per queste ragioni, i contesti informali di apprendimento hanno un grande potenziale per la diffusione di visioni alternative della matematica e per il coinvolgimento di tutti gli studenti in attività creative, che sono liberi di seguire i propri interessi (Nemirovsky et al., 2017). Alla base del progetto PoY c'è proprio l'intenzione di sfruttare questo potenziale, allo scopo di favorire atteggiamenti positivi verso le discipline coinvolte, la matematica e l'italiano, e più in generale verso la scuola, provando a raggiungere anche gli studenti più in difficoltà e a rischio di abbandono scolastico.

3.3 Appendice al Capitolo 3. Drammatizzazione, metafore e corpo

Nel Capitolo 3 della storia abbiamo raccontato alcuni momenti salienti delle attività di PoY che hanno accompagnato gli allievi verso la scoperta della nota formula che permette di calcolare il numero di diagonali di un poligono. Come per ogni attività proposta, gli obiettivi didattici, i tempi, i materiali e le modalità sono stati calibrati sui gradi scolastici delle classi coinvolte. Per quanto riguarda gli obiettivi matematici di queste attività, ad esempio, la scoperta ha interessato dai casi specifici di poligoni con differenti numeri di lati per le classi quarte della primaria fino al caso generale del poligono con n lati per le classi della secondaria.
Per le scuole di Napoli, uno degli incontri ha previsto un'uscita sul territorio, per visitare un vero castello medievale: alcune classi sono state ospitate dalle terrazze di Castel Sant'Elmo e altre da quelle di Castel dell'Ovo. Come narrato in questo contributo, le attività hanno previsto una *drammatizzazione* di alcuni passaggi del *librogame*. Gli allievi hanno infatti simulato con i movimenti di tutto il corpo l'esperienza di decorare le terrazze di vari edifici di un castello con dei festoni, grazie al ricorso alla materialità di nastri appositamente predisposti. L'addobbo scelto da Alessia, uno dei personaggi del *librogame*, prevedeva di creare un effetto *soffitto magico* (Figura 26): bisognava cioè tendere un festone da ogni merlo fino a tutti gli altri merli, tranne i due che gli erano vicini. Agli occhi di un esperto il riferimento alla definizione di diagonale di un poligono (come segmento che unisce due vertici non consecutivi) è evidente.

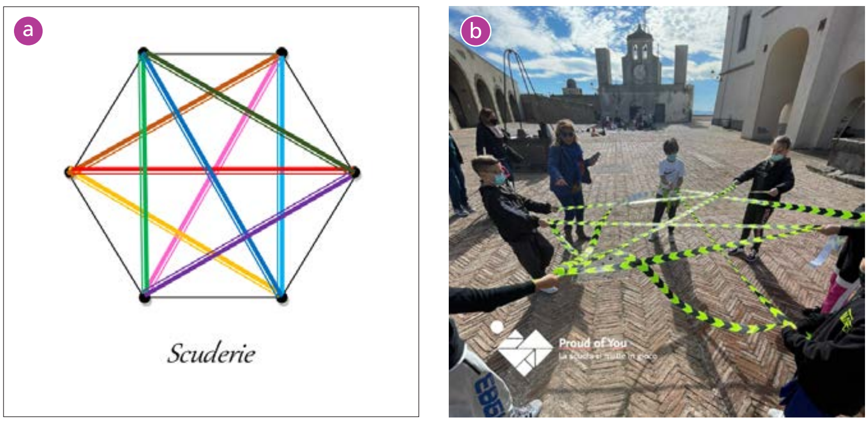


Figura 26. a) Disegno del soffitto magico per la terrazza esagonale delle Scuderie; b) Una foto dall'attività a Castel Sant'Elmo.

Così, in una delle attività, per ogni terrazza da decorare nella storia, gli allievi si sono ritrovati prima in cerchio a rappresentare i merli della terrazza, poi uniti tra loro con le braccia come in un girotondo per visualizzare il muretto della terrazza e, infine, hanno teso tra loro dei nastri che ricordavano i festoni del soffitto magico. Lo *storytelling* e le attività che da esso nascevano hanno permesso cioè di stabilire delle *metafore matematiche*, vissute dagli allievi con tutto il corpo attraverso l'ascolto e la drammatizzazione della storia. Le metafore hanno coinvolto i seguenti elementi caratteristici di un poligono: vertice, lato e diagonale, secondo le relazioni indicate nella **Figura 27**.

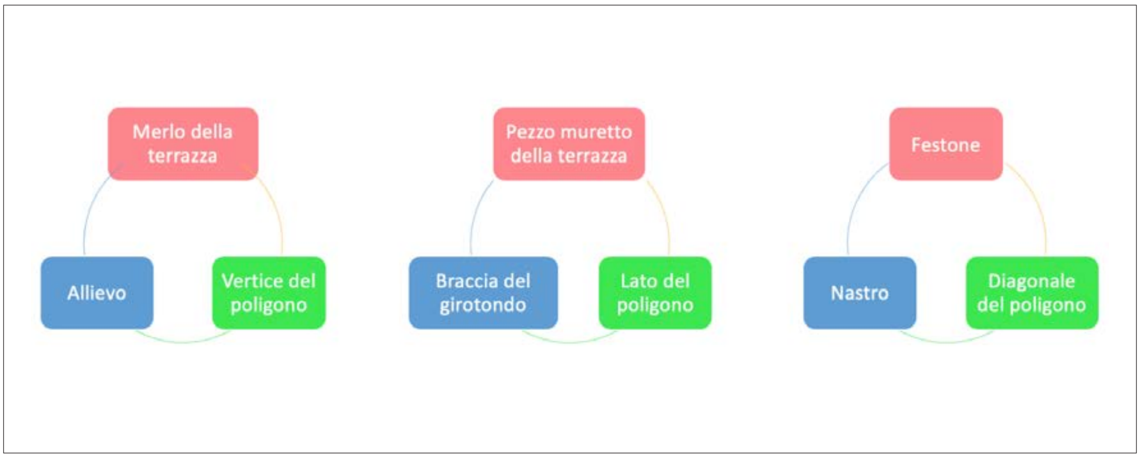


Figura 27. Corrispondenze tra le metafore nella storia (in rosa), le configurazioni spaziali dagli allievi assunte durante la drammatizzazione (in azzurro) e gli elementi geometrici dei poligoni coinvolti (in verde).

Alla base di queste scelte progettuali, ci sono alcune idee teoriche che esponiamo qui brevemente.
Negli ultimi decenni le metafore hanno riscosso molto interesse nell'ambito della ricerca in didattica della matematica. Esse vengono considerate molto più che semplici dispositivi retorici, ma sono invece riconosciute come strumenti potenti per la costruzione e l'apprendimento di nuovi concetti matematici. Questo filone di ricerca è stato favorito dalla larga diffusione del lavoro di Lakoff e Núñez (2000), proveniente dalla linguistica cognitiva. I due autori fanno risalire l'origine di molte idee matematiche alle esperienze fisiche e corporee della vita quotidiana e considerano le metafore come tramite tra ragionamento sensomotorio e ragionamento astratto.
Contemporaneamente al diffondersi di queste idee, è stata riconosciuta sempre più nella didattica della matematica l'esigenza di rendere l'apprendimento più democratico, inclusivo e vicino all'esperienza umana degli allievi. Soto-Andrade (2018) suggerisce a questo proposito che il ricorso alla *metaforizzazione enattiva* – ossia agita con tutto il corpo – nell'apprendimento della matematica possa essere un utile strumento, in grado di evitare l'attuale *abuso cognitivo* a cui sono sottoposti milioni di studenti nel mondo a causa della didattica tradizionale, che si è rivelata «nel migliore dei casi poco efficace e nel peggiore emotivamente dannoso» (Watson, 2008, p. 165).
Più in generale, da ormai più di vent'anni, la comunità ricerca in didattica della matematica sta sviluppando una crescente consapevolezza del ruolo cruciale del corpo e del movimento. Le risorse materiali e sensibili, come i gesti, i materiali, la postura, le azioni motorie, gli artefatti e i segni sono state concettualizzate come elementi centrali nei processi di apprendimento-insegnamento (Radford et al., 2017). Nel Capitolo 3 della storia inclusa in questo articolo, abbiamo provato a dare una suggestione di come una formula possa essere "percepita attraverso i sensi" grazie a un'opportuna progettazione didattica. La formula che permette di ottenere il numero di diagonali D_n di un poligono di n vertici

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

suggerisce di:

– considerare il numero delle diagonali da ogni vertice (n – 3);
– moltiplicare per il numero dei vertici (n);
– e infine dividere per 2, per non contare due volte la stessa diagonale.

Ognuno di questi passaggi acquisisce senso grazie alle metafore introdotte dalla storia, che favoriscono nell'attività – grazie anche alla discussione matematica orchestrata dall'insegnante – azioni e movimenti di tutto il corpo e attivazione di sensi diversi, come la vista e il tatto. Aderendo alla prospettiva teorica della *Sensous Cognition* (Radford, 2013) crediamo infatti che l'apprendimento venga favorito quando, nella loro interazione con il mondo materiale, gli studenti sono invitati ad adottare un modo matematico, culturalmente determinato, di percepire attraverso i sensi, agire e pensare.

3.4 Appendice al Capitolo 4. Aspetti culturali in educazione matematica

La matematica è parte integrante della produzione culturale umana. Non a caso, negli ultimi anni ricercatori in diversi ambiti si sono dedicati a riconoscere somiglianze e differenze tra le produzioni matematiche sviluppate nel tempo dalle diverse culture. Ad esempio, Bishop (1988), uno dei primi ricercatori che ha portato all'attenzione della ricerca internazionale in didattica della matematica il ruolo cruciale svolto dalla cultura, ha identificato il contare, il localizzare, il misurare, il progettare, il giocare e il costruire modelli come bisogni umani alla base della matematica, sviluppata localmente nelle diverse culture. Più recentemente, invece, sono state indagate e valorizzate le differenze tra le produzioni matematiche in termini di sistemi di strumenti, saperi e tradizioni. In questa direzione si è inteso riconoscere la matematica, così come l'arte e altre espressioni simboliche, prima di tutto come manifestazione semiotica di certe sensibilità che i membri di una determinata cultura sviluppano attraverso esperienze condivise (si vedano, ad esempio, Barton, 2007; Radford, 1997). In questa prospettiva si riconosce la matematica, esattamente come altre attività culturali, come profondamente legata ai bisogni materiali e simbolici di un dato gruppo sociale. Questa visione molto affascinante risulta essere anche molto potente da un punto di vista didattico. Ad esempio, la possibilità di conoscere ed esplorare modi diversi di rappresentare numeri, relazioni, forme di ragionamento è potenzialmente un modo molto efficace per sviluppare consapevolezza e padronanza nell'uso degli strumenti matematici stessi. Non a caso nelle Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta primaria, troviamo proprio quello di «Conoscere sistemi di notazione dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra» (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012, p. 50).
Queste riflessioni ci hanno guidato nella progettazione dell'attività del *librogame* relativa alla tappa dell'Antico Egitto. L'idea infatti è stata quella di far esplorare ai bambini il sistema di numerazione egizio, legato a una cultura affascinante e molto lontana dalla nostra. Il sistema di numerazione egizio, infatti, pur essendo in base dieci, non è posizionale come il nostro, ma bensì additivo, e questo ovviamente lo rende molto più intuitivo, ma anche meno potente. A questo proposito, il grande matematico Carl Friedrich Gauss viene citato per aver detto che «la più grande calamità della storia delle scienze è stata il fallimento di Archimede nell'inventare la notazione posizionale» (Newman, 1956, p. 328). In effetti è decisamente sorprendente notare che i grandi matematici del passato manipolavano rappresentazioni numeriche molto meno potenti di quelle che gli attuali bambini di 8 anni maneggiano con disinvoltura. Questo ci impone di pensare molto accuratamente alla mediazione didattica che permetta ai bambini di riflettere sul funzionamento di una rappresentazione numerica che molti danno per scontato e di sviluppare consapevolezza rispetto alla sua potenza. Le attività dell'Antico Egitto di PoY puntano a lavorare proprio in questa direzione (Figura 28 e Figura 29).

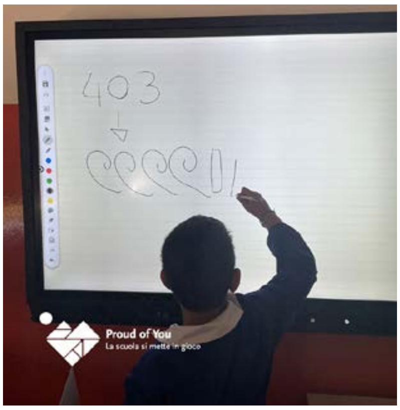


Figura 28. Un allievo traduce un numero espresso secondo il sistema decimale posizionale nella corrispondente sequenza di geroglifici in uso nell'antico sistema di numerazione egizio.

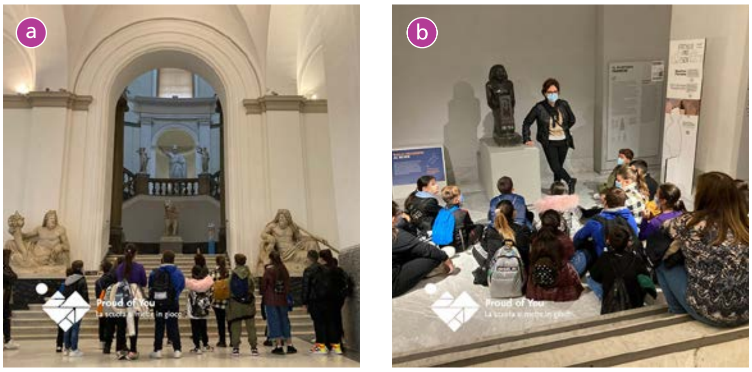


Figura 29. **a)** Gli allievi di Napoli all'ingresso del Museo Archeologico Nazionale di Napoli; **b)** Un momento della visita alla sezione egizia del museo.

3.5 Appendice al Capitolo 5. Educazione matematica critica

La progettazione delle attività didattiche ha puntato a diversi obiettivi di educazione alla cittadinanza attiva e alla partecipazione democratica, che sono stati intrecciati a quelli specifici delle due discipline coinvolte.

Per quanto riguarda le attività di matematica, sono stati di forte ispirazione il filone di ricerca della *Critical mathematics education* (Skovsmose & Penteado, 2012) e la visione pedagogica di Paulo Freire (1921/1970). A tal proposito, sono state progettate attività che, in uno scenario di fantasia, hanno dato l'opportunità di riflettere e argomentare le proprie idee su questioni ambientali e questioni di genere. In particolare, una delle tappe dedicate al futuro, raccontata nel Capitolo 5 della storia, ha coinvolto gli allievi in una disputa, che ha visto da un lato i robot, affascinati dalla velocità e dal progresso tecnologico, dall'altro le piante, interessate alla preservazione della loro specie e alla salvaguardia ambientale, e in particolare a quella delle coste. Dal punto di vista della progettazione, la scelta delle tematiche da trattare non è stata casuale. Ispirate dai lavori di Freire (1921/1970), tale scelta è avvenuta tenendo conto della dimensione personale, sociale e culturale degli allievi destinatari delle attività ed è nata dalla forte volontà di rispondere alle esigenze del territorio. Freire fa riferimento alla ricerca di un *tema generatore* – un tema che contiene in sé la possibilità di dare origine a nuovi temi tra loro collegati – da proporre come situazione problematica concreta, motivante e stimolante e che richieda una riflessione critica su dimensioni significative della realtà. In questo caso, l'attenzione si è inizialmente focalizzata sul tema dell'*inquinamento*, un aspetto preoccupante in diverse zone della Campania, specialmente in quella tristemente nota come Terra dei fuochi, a causa dello smaltimento illegale dei rifiuti e dei frequenti incendi illeciti. A partire da questa tematica, si è poi riflettuto sui temi ad essa collegati e più specifici per il contesto a cui le attività erano rivolte. Data la presenza di una

zona litoranea a cui gli abitanti sono particolarmente affezionati, si è scelto di trattare il problema dell'*erosione costiera*. I momenti dedicati alla difesa dei robot e delle piante e la possibilità di scegliere da che parte stare hanno consentito agli allievi di partecipare a un discorso democratico attraverso la lettura, l'interpretazione e la comprensione critica dei dati forniti, ricollegandosi spesso in maniera diretta e significativa alle loro vite. In questo senso, in linea con la prospettiva della *Critical mathematics education* (Skovsmose & Penteado, 2012), l'educazione matematica è stata intesa come parte di uno sforzo democratico, in cui le competenze matematiche sono state riconosciute utili al fine di comprendere e interpretare criticamente la realtà (Skovsmose, 1994).
In particolare, Skovsmose (1994) distingue tre tipi di saperi:

- *Mathematical knowing*, che comprende le abilità matematiche e la capacità di padroneggiare algoritmi e procedure e riprodurre teoremi e dimostrazioni;
- *Technological knowing*, che comprende le abilità applicative della matematica e le competenze di costruzione di modelli;
- *Reflective knowing*, che comprende la competenza a riflettere e valutare su un certo utilizzo della matematica.

L'ultimo tipo di sapere è collegato allo sviluppo di un sapere matematico riflessivo. Secondo l'autore, le tre componenti della competenza matematica permettono ai futuri cittadini di esercitare il pensiero critico e di emanciparsi dal punto di vista sociale.
In questa ottica, anche il dialogo educativo assume particolare rilievo. In particolare, in tutte le attività proposte in PoY, l'espediente di una storia "a bivi" ha consentito che la scelta della strada da seguire fosse sempre determinata a seguito di un confronto democratico, a cui ciascun allievo ha partecipato argomentando il proprio punto di vista e ascoltando la posizione degli altri.

4 Riflessioni conclusive

In questo contributo abbiamo presentato, attraverso un particolare *storytelling*, il percorso progettato e realizzato nella terza edizione di PoY. Come sottolineato nell'introduzione, PoY è nato con l'obiettivo di promuovere lo sviluppo di competenze in italiano e matematica di studenti appartenenti a territori svantaggiati e, contestualmente, agire sulla prevenzione dell'abbandono scolastico precoce. Questo obiettivo molto ambizioso si è tradotto nella necessità di progettare e ri-progettare ciclicamente, attraverso diverse fasi di valutazione e revisione avvenute durante le tre edizioni del progetto, attività coinvolgenti e che permettessero di sviluppare degli apprendimenti disciplinari profondi. Si è trattato quindi di una vera e propria sfida progettuale che ha trasformato PoY in, come viene definito in letteratura, un *Educational Design Study* (Bakker, 2018). In altre parole, lo sviluppo iterativo di soluzioni a problemi educativi contingenti e complessi, come il lavorare in contesti di povertà educativa, sono divenuti terreno di indagine empirica per sviluppare nuova conoscenza sui processi di apprendimento e sulle metodologie che hanno supportato questi processi.
Da una valutazione esterna, il progetto PoY è risultato efficace da diversi punti di vista. Infatti, PoY ha previsto una valutazione d'impatto finale, condotta dal Dipartimento di Psicologia dell'Università della Campania "Luigi Vanvitelli". Il primo dato davvero incoraggiante che è stato registrato è stato un aumento della frequenza scolastica nelle giornate di progetto. Inoltre, osservazioni dirette, questionari e focus group con docenti e tutor hanno messo in luce un effetto positivo del progetto sugli studenti, sia in termini di atteggiamenti che di conoscenze. Gli studenti, in particolare, hanno molto gradito il clima di cooperazione e di libera espressione favorito dalle attività proposte. Inoltre, per

quanto riguarda l'insegnamento della matematica, docenti e tutor hanno apprezzato la pragmaticità dei contenuti e il forte legame con aspetti della città e della vita quotidiana. Le attività sono risultate essere coinvolgenti e inclusive anche nei confronti degli alunni con disabilità e bisogni educativi speciali. Infine, gli insegnanti che hanno preso parte al progetto hanno riferito che i loro colleghi che non hanno partecipato sono rimasti incuriositi dalle conversazioni degli alunni riguardo PoY durante le lezioni curriculari.

I risultati relativi a quest'ultima edizione di PoY, connessi alle esperienze nelle precedenti edizioni, hanno consentito una riflessione sugli aspetti didattico-metodologici che hanno guidato le attività e sull'impatto su studenti e insegnanti. In particolare, ne sono scaturite riflessioni riguardo l'efficacia di specifiche scelte progettuali e modalità di conduzione di attività di educazione matematica in situazioni caratterizzate da svantaggio sociale. Grazie al particolare *Design Study* sviluppato in PoY sono stati individuati alcuni elementi chiave da considerare per le progettazioni di percorsi di educazione matematica in contesti di povertà educativa. Nel seguito citeremo tre di questi elementi.

Il primo elemento chiave è l'uso dello *storytelling* in matematica e, in generale, la necessità di costruire delle cornici di senso per le attività matematiche che si propongono in realtà scolastiche che lavorano in territori svantaggiati, al fine di agganciare emotivamente gli studenti. Nel caso specifico dell'ultima edizione di PoY, lo *storytelling* ci ha dato anche l'opportunità di veicolare l'immagine della matematica come prodotto culturale e di utilizzare la matematica per comprendere e interpretare criticamente la realtà, secondo la prospettiva della *Critical Mathematics Education*.

Inoltre, PoY ci ha dato l'occasione di apprezzare l'efficacia in termini di motivazione e coinvolgimento di tutte e tre le caratteristiche dell'educazione informale: la volontarietà di partecipazione e la libertà di seguire i propri interessi da parte dei partecipanti alle attività, la fluidità dei confini disciplinari nelle attività proposte e l'assenza di una valutazione tradizionale e individuale, ancora troppo spesso esercitata/subita in maniera punitiva a scuola (Corsini, 2023). È nostra convinzione che queste caratteristiche, con opportuni adattamenti, potrebbero rivelarsi ancora più efficaci nelle attività curriculari, soprattutto in contesti scolastici caratterizzati da alti tassi di abbandono scolastico.

Queste riflessioni si intrecciano inevitabilmente anche ad altre questioni, come la durata degli effetti e la sostenibilità di questo tipo di progetti. In particolare, l'esperienza sviluppata durante le tre edizioni di PoY ha reso sempre più evidente che la sola partecipazione degli insegnanti alla fase attuativa del progetto non basta. Infatti, l'incontro e il dialogo tra ricercatori-formatori, tutor e docenti, ognuno con esperienze formative e professionali diverse, ha reso ancora più evidente l'importanza e la necessità di coinvolgere i docenti nella progettazione di interventi educativi che possano prevenire e contrastare il fenomeno della dispersione scolastica. In questa direzione, l'efficacia nel tempo di una progettazione didattica significativa in contesti svantaggiati ha come premessa sia il coinvolgimento attivo degli insegnanti alla fase di progettazione delle attività, che la cura della coerenza tra le attività del progetto e la pratica d'aula ordinaria. In particolare, tale consapevolezza ha aperto la strada a un indirizzo di ricerca più preciso, orientato a focalizzare l'attenzione sugli insegnanti e sui loro processi di progettazione e conduzione nella prassi didattica quotidiana. Questa ricerca si è spostata, quindi, ad indagare la creatività alla base dei processi che portano gli insegnanti a progettare attività di didattica della matematica altamente coinvolgenti, adatte proprio al lavoro educativo in contesti svantaggiati, e di come accendere questa creatività (Lo Sapio, 2023; Lo Sapio et al., 2022).

Come messo in evidenza nella recente indagine internazionale sui futuri temi di ricerca in educazione matematica (Bakker et al., 2021), il lavoro di educazione matematica in contesti svantaggiati e, in particolare, l'utilizzo di approcci informali in questi contesti sono temi sicuramente emergenti. D'altra parte, solo in tempi recenti la ricerca sta affrontando queste problematiche che, anche se di grande importanza, pongono sfide metodologiche e teoriche molto impegnative (Bakker et al., 2021; Casi, 2024), come visto anche per PoY.

Infine, ci sembra importante sottolineare come spesso metodologie didattiche nate proprio per rispondere a problemi di insegnamento e apprendimento in contesti particolarmente critici hanno de-

terminato lo sviluppo di strumenti e approcci didattici che si sono poi rivelati preziosi anche in contesti in cui queste criticità non erano presenti. Ne sono esempi illustri il metodo Montessori e le riflessioni di Emma Castelnuovo.
L'auspicio è che quindi, nonostante le difficoltà teoriche e metodologiche, la ricerca in educazione matematica continui a occuparsi con sempre maggiori energie di questi temi, arrivando a sviluppare risorse teoriche e didattiche che migliorino la mediazione educativa in matematica in contesti svantaggiati, trasformando le difficoltà di questi territori in opportunità per tutti.

Ringraziamenti
Ringraziamo l'associazione "Next-Level" e tutti coloro che hanno partecipato con passione e professionalità alla terza edizione del progetto PoY. In particolare, desideriamo ringraziare Valentina Leo, esperta DSA, per il suo supporto nella preparazione dei materiali. Ringraziamo i partner e le scuole aderenti. Per i partner, l'Università "Suor Orsola Benincasa" di Napoli, l'Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli", la Società Cooperativa Sociale Onlus "Il Millepiedi" e la Comunità "Luigi Monti" di Polistena (RC). Per le scuole, gli allievi, gli insegnanti, le docenti referenti di progetto e le dirigenti dell'Istituto Comprensivo di Napoli "Radice Sanzio Ammaturo", dell'Istituto Comprensivo di Napoli 83° "Porchiano Bordiga" e dell'Istituto Comprensivo "Capoluogo Brogna" di Polistena (RC). Siamo grati a tutti i tutor che hanno dato il loro contributo per la realizzazione delle attività didattiche e per la predisposizione dei materiali, affiancando e supportando i docenti.

Bibliografia

Autorità Garante per l'Infanzia e l'Adolescenza. (2022). *La dispersione scolastica in Italia: un'analisi multifattoriale. Documento di studio e proposta.* Tipografia Eurosia.

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers.* Routledge.

Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Barton, B. (2007). *The language of mathematics: Telling mathematical tales* (Vol. 44). Springer Science & Business Media.

Bettelheim, B. (1976). *The Uses of Enchantment: The Meaning and Importance of Fairy Tales.* Vintage Books.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds.* Harvard University Press.

Carotenuto, G., Di Martino, P., & Lemmi, M. (2021). Students' suspension of sense making in problem solving. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 817–830. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01215-0

Carotenuto, G., Mellone, M., Sabena, C., & Lattaro, P. (2020). Un progetto di educazione matematica informale per prevenire la dispersione scolastica. *Matematica, Cultura e Società,* Serie 1, *5*(2), 157–172.

Casi, R. (2024). *Informal Mathematics Education in Museums: An Exploratory Study on Teacher Education.* Tesi di dottorato. Università di Torino.

Colombo, A. (2022). *Leggere. Capire e non capire.* Zanichelli.

Corsini, C. (2023). *La valutazione che educa. Liberare insegnamento e apprendimento dalla tirannia del voto.* Franco Angeli.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teachers Education, 13*(1), 27–48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Egan, K. (1986). *Teaching as storytelling: An alternative approach to teaching and curriculum in the elementary school.* University of Chicago Press.

Freire, P. (1970). *Pedagogy of the oppressed.* Continuum. (Titolo originale: *Pedagogía del oprimido* pubblicato nel 1921).

Il Mattino. (2019, 16 dicembre). *Napoli, Gesac e Intesa Sanpaolo insieme contro la dispersione scolastica.* https://www.ilmattino.it/foto/napoligesaceintesasanpaoloinsiemecontroladispersionescolasticanewfotosudsergio-siano-4929719.html

Istituto Nazionale di Statistica. (2023). *BES 2022. Il benessere equo e sostenibile in Italia.* https://www.istat.it/produzione-editoriale/rapporto-bes-2022-il-benessere-equo-e-sostenibile-in-italia/

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from.* Basic Books.

Levorato, M. C. (1988). *Racconti, storie e narrazioni. I processi di comprensione dei testi.* Il Mulino.

Lo Sapio, R. M. (2023). *A characterisation of mathematics education creativity inspired by active and popular pedagogy.* Tesi di dottorato. Università degli studi di Salerno.

Lo Sapio, R. M., Carotenuto, G., Coppola, C., & Mellone, M. (2022). Mathematics teachers' creativity for fostering inclusion and preventing early school leaving. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1768–1776). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). McMillan.

Mellone, M., Spadea, M., & Tortora, R. (2013). A story-telling approach to the introduction of the multiplicative structure at kindergarten. *Annals of the Polish Mathematical Society 5th series: Didactica Mathematicae 35*, 51–70. https://doi.org/10.14708/dm.v35i0.531

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione.* https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Moscucci, M., Piccione, M., Rinaldi, M. G., Simoni, S., & Marchini, C. (2005). Mathematical discomfort and school drop-out in Italy. In M. Bosch (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 245–255). FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Civil, M. (2017). Towards a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 968–980). National Council of Teachers of Mathematics.

Newman, J. R. (1956). *The world of mathematics.* Simon and Schuster.

Next-Level. (2024). *In viaggio nel tempo.* https://poy.next-level.it/

Nunes, T., Schliemann, A., & Carraher, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge University Press.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2013). Sensuous cognition. In D. Martinovic, V. Freiman & Z. Karadag (Eds.), *Visual Mathematics and Cyberlearning* (pp. 141–162). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-2321-4_6

Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L. & Sabena, C. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 700–721). NCTM.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematical education.* Kluwer Academic Publishers.

Skovsmose, O., & Penteado, M. G. (2012). Mathematics education and democracy: An on-going challenge. *International Journal for Mathematics in Education, 4*, 15–29.

Soto-Andrade, J. (2018). Enactive metaphorising in the learning of mathematics. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited lectures from the 13th international Congress on Mathematical Education* (pp. 619–637). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_34

Watson, A. (2008). Adolescent learning and secondary mathematics. In P. Liljedahl, S. Oesterle & C. Bernèche (Eds.), *Proceedings of the 2008 Annual Meeting of the CMESG* (pp. 21–32). Canadian Mathematics Education Study Group, Université de Sherbrooke. https://doi.org/10.1515/9781400836123-019

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: Difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Carocci Faber.

Zanelli, P. (1986). *Uno "sfondo" per integrare: Esperienze di programmazione di situazioni educative.* Cappelli.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching mathematics as storytelling.* Sense Publishers.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), 147 - 163, DOI: 10.33683/ddm.24.16.6 OPEN ACCESS

Progettare e sperimentare a scuola attraverso il DIST-M: opportunità didattiche e riflessioni

Designing and experimenting didactic activities through DIST-M: didactic opportunities and reflections

Anna Coen•, Andrea Cravotta°, Piera Romano•• e Chiara Tarallo°°
•Liceo Statale "A. Banfi", Vimercate (MB) – Italia
°Liceo Scientifico Statale "E. Curiel", Padova – Italia
••Liceo Scientifico Statale "Mons. B. Mangino", Pagani (SA) – Italia
°°Liceo Statale "P. Calamandrei", Napoli – Italia

anna.coen@liceobanfi.eu, andrea.cravotta@gmail.com, pieraromano.72@gmail.com, mastarallo@gmail.com

Sunto / La richiesta di progettare e sperimentare un'attività con la metodologia del *Digital Interactive Storytelling in Matematica* (DIST-M) durante un corso di formazione per docenti in servizio si è rivelata un'efficace opportunità di sviluppo professionale. Vengono qui presentate le riflessioni degli autori in merito alle ricadute e alle potenzialità di una sperimentazione didattica attuata secondo il quadro teorico e il protocollo del DIST-M, in riferimento alla progettazione per competenze, all'interazione tramite Moodle, che offre la possibilità di esaminare le discussioni di classe attraverso la trascrizione delle chat, e alla modalità immersiva dello *storytelling*, che ha richiesto a docenti e studenti di agire impersonando personaggi con ruoli predefiniti, alternando le modalità di attore e di osservatore. In particolare, viene evidenziato come la metodologia del DIST-M possa diventare utile strumento di valutazione formativa degli studenti, nonché occasione di autovalutazione per docenti e studenti riflessivi.

Parole chiave: *storytelling*; *digital storytelling*; didattica della matematica; apprendimento collaborativo; gioco di ruolo; piattaforma Moodle.

Abstract / The request to design and evaluate an activity based on the Digital Interactive Storytelling in Mathematics (DIST-M) methodology, during a training course for in-service teachers, has demonstrated its efficacy as an effective professional development experience. In this paper, the authors present their reflections on the implications and potential identified in the application of the DIST-M theoretical framework and protocols, particularly concerning: skill design, interaction through Moodle Chat, with respect to the possibilities to re-read the transcription of the class discussions, and the immersive mode, that requires both teachers and students to interact by assuming characters with predefined roles, alternating between acting and observing. Finally, it is suggested that the DIST-M methodology could be used as a useful tool for formative assessment of student engagement, as well as for self-assessment among reflective educators and learners.

Keywords: storytelling; digital storytelling; mathematics education; collaborative learning; roleplaying; Moodle platform.

1 Introduzione

Le sfide provenienti dalla continua e rapida evoluzione della società odierna investono inevitabilmente il mondo della scuola, chiamato a garantire un'offerta formativa significativa ed efficace, adatta alla pluralità dei bisogni educativi, con conseguente necessità, per i docenti, di formazione continua.
In questo articolo, descriviamo l'esperienza di formazione avvenuta attraverso la partecipazione al corso *B3*: "*Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a competence-based social approach #2*" (corso relazionato con l'omonimo dispositivo metodologico di seguito indicato con DIST-M),[1] inserito nel progetto nazionale "PNSD - Formazione Lincei per la scuola",[2] per lo sviluppo dell'innovazione didattica e digitale nella scuola italiana e attuato a seguito del Protocollo di Intesa n. 10 del 24/11/2020 fra il Ministero dell'Istruzione e la Fondazione "I Lincei per la scuola". Spinti dall'interesse nei confronti della metodologia dello *storytelling*, abbiamo deciso di partecipare per esplorare le potenzialità della narrazione in matematica e, allo stesso tempo, per coinvolgere gli studenti in attività matematiche significative in un contesto informale. Il corso, della durata di 120 ore circa, articolate in 3 anni scolastici, rivolto a docenti di matematica della scuola secondaria di secondo grado,[3] prevedeva: attività formative con esperti in didattica della Matematica; attività di progettazione di percorsi didattici sotto forma di fumetti digitali interattivi, in linea col quadro teorico DIST-M (Albano et al., 2022), con la guida di docenti tutor; attività di sperimentazione in classe dei percorsi progettati; attività di riflessione sul percorso fatto. *Ex post*, la proposta formativa si è trasformata in una esperienza immersiva di ricerca-azione: ciascuno di noi è stato chiamato a riflettere sulla propria formazione e sulle proprie scelte professionali, ci è stato richiesto di agire attivamente per la costruzione dello *storyboard*, e, grazie alla sperimentazione nelle classi IV di liceo scientifico, abbiamo avuto modo sia di autovalutare la nostra azione didattica sia di valutare le competenze in possesso dei nostri allievi.
In questo lavoro, dopo aver sinteticamente introdotto la metodologia del DIST-M, descriviamo le tre fasi del corso di formazione: progettazione, sperimentazione, riflessione. Per ciascuna di queste fasi, riportiamo le nostre osservazioni in riferimento alle ricadute sulla propria professionalità di docente e alla replicabilità dell'esperienza di sperimentazione didattica.

2 La metodologia DIST-M

Il percorso formativo che descriviamo si basa sulla metodologia *Digital Interactive Storytelling in Matematica* (DIST-M), una proposta didattica innovativa, sviluppata nell'ambito dell'omonimo Progetto di Rilevante Interesse Nazionale[4] e oggetto di numerosi studi (si vedano, ad esempio, Albano et al., 2020; Albano et al., 2024), che integra la narrazione nel processo di insegnamento-apprendimento in Matematica, raramente presente nell'insegnamento tradizionale.
La metodologia dello *storytelling* è considerata efficace per facilitare l'apprendimento, anche in matematica, visto che consente di proporre i contenuti attraverso situazioni fantastiche, in un contesto informale e coinvolgente che mira a promuovere l'esplicitazione di creatività, di capacità di *problem solving* e di competenze disciplinari (Zazkis & Liljedahl, 2019). Nel DIST-M, contrariamente a quanto

1. https://sites.google.com/unisa.it/dist-m/il-progetto/il-dist-m
2. https://www.linceiscuola.it/percorsi-digitali/
3. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.
4. Progetto PRIN – Bando 2015 – Prot. 20155NPRA5 finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca accessibile al link https://sites.google.com/unisa.it/dist-m/il-progetto/pubblicazioni

spesso si propone con la metodologia dello *storytelling*, non sono gli studenti a vestire i panni degli sceneggiatori ma i docenti, con il compito di scegliere i contenuti e creare il design dello *storyboard* in forma di fumetto. Lo *storyboard* funge da canovaccio e viene completato dagli studenti nella fase di fruizione della storia, quando questi entrano nella storia come personaggi della stessa e affrontano la situazione problematica posta attraverso il fumetto. In questo senso va interpretato l'aggettivo *Interactive* che accompagna *Storytelling*: lo studente interagisce con i pari e con l'esperto immergendosi, attraverso una piattaforma digitale, nella narrazione veicolata dal fumetto, nei panni di uno dei protagonisti. Ad ogni episodio, lo studente interpreta un personaggio diverso, in modo da potenziare ciascuna delle funzioni cognitive ad esso associate (si veda il par. 2.1). Le interazioni, durante lo svolgimento di ogni singolo episodio, completano la narrazione progettata dai docenti, rendendo differenti le storie a seconda delle risposte degli studenti, diversi in ciascuna classe. Il docente, apparentemente assente, in realtà impersona l'unico adulto del fumetto, con il compito di agire sulla base degli stimoli/risposte/silenzi degli studenti. Tutto ciò è reso possibile grazie al fatto che l'*Interactive Storytelling* è *Digital*, nella misura in cui l'intervento didattico viene proposto alla classe attraverso una piattaforma digitale, a cui i docenti e gli studenti accedono con account fittizi appositamente creati. Il percorso didattico proposto agli studenti diventa, così, un ambiente multimediale, con immagini, video e supporti tecnologici predisposti a priori, fruibili anche attraverso i dispositivi di cui oramai gli studenti non fanno più a meno (smartphone, tablet ecc.). Nella sperimentazione qui presentata è stata usata la piattaforma Moodle, supportata dai ricercatori che hanno diretto il corso di formazione.
Nei seguenti sottoparagrafi andiamo a riprendere alcuni elementi caratterizzanti la metodologia del DIST-M.

2.1 Il gioco di ruolo

Nelle nostre classi già ampiamente utilizziamo il lavoro di gruppo per affrontare un dato compito, spesso in modalità collaborativa, che per le discipline STEM è ben descritto e sintetizzato nell'idea di sperimentazione TEAL[5] del progetto "Avanguardie educative" dell'INDIRE. Più raramente, adottiamo la modalità cooperativa, assegnando uno specifico compito ai componenti del gruppo, piuttosto i gruppi sono solitamente formati con un criterio di eterogeneità, relativamente alla valutazione. Quasi sempre, in maniera informale, si verifica che uno o due componenti del gruppo assumano spontaneamente il ruolo di capogruppo, ed è compito del docente fare in modo che anche i componenti meno attivi relazionino sul lavoro svolto. Nel percorso di formazione/sperimentazione che stiamo descrivendo, invece, i ruoli sono ben definiti ed assegnati ed essi assumono una duplice valenza: da un lato, puntano a garantire l'efficacia della collaborazione, evitando effetti negativi come la predominanza di qualche studente o, al contrario, l'inattività di qualche altro; dall'altro, i ruoli assegnati corrispondono a funzioni cognitive che entrano in gioco quando si affronta e si risolve una situazione problematica, funzioni che, però, non possono essere date per scontate negli allievi e che, pertanto, vanno potenziate, educando intenzionalmente a ciascuna di esse (Albano et al., 2021). Allo scopo, la metodologia del DIST-M prevede che tali funzioni vengano rese esplicite attraverso le caratteristiche dei personaggi del fumetto proposto, con cui gli studenti dovranno immedesimarsi, facendone quindi esperienza diretta, in modo da poterli in seguito riconoscere dentro se stessi quando si trovano ad affrontare situazioni problematiche. I personaggi individuati nel DIST-M (Albano et al., 2020) sono il *Boss*, la *Peste*, il *Promoter*, il *Blogger* e il *Guru*, e corrispondono rispettivamente alle funzioni cognitive di *organizzatore*, *mente critica*, *esploratore*, *redattore* e *conoscenza e saggezza*. Ciascuno condivide con gli altri l'obiettivo di portare a termine l'attività matematica assegnata al gruppo, ma con compiti diversi e agli studenti viene richiesto di agire secondo le caratteristiche del personaggio che viene loro assegnato. A differenza degli altri personaggi, il Guru assume un ruolo asimmetrico, fungendo da

5. TEAL (*Technology Enhanced Active Learning*) tecnologie per l'apprendimento educativo: https://innovazione.indire.it/avanguardieeducative/teal.

esperto in senso vygotskiano, guidando e sostenendo l'attività conoscitiva dei compagni.
Oltre ai ruoli/funzioni cognitive individuali, il protocollo di sperimentazione del DIST-M prevede anche un ruolo di gruppo relativo al tipo di partecipazione richiesta. I gruppi di studenti, a turno, ricoprono il ruolo di gruppo Attore, attivo nella risoluzione dei quesiti posti dalla storia matematica proposta, e di gruppo Osservatore, con il compito di osservare gli attori e valutare non solo il modo in cui essi affrontano la risoluzione dei quesiti, ma soprattutto il modo in cui interpretano i ruoli individuali assegnati. La richiesta di agire alternativamente come Attore e come Osservatore è presentata come attività idonea a favorire la costruzione dell'identità matematica dello studente e aprire nuovi scenari e possibilità nella fase di valutazione. Va sottolineato che l'attività di Osservatore non è da intendersi come una modalità passiva: essa vuole, invece, essere un passaggio dall'agire al pensare sull'agire, che non è un passaggio né semplice né che si può dare per automatico e che, quindi, merita attenzione didattica. Il protocollo prevede che, in ogni episodio, solo un gruppo faccia da Attore e tutti gli altri da Osservatore, e che il *Guru* interagisca solo con il gruppo Attore.
La metodologia DIST-M prevede una duplice rotazione dei ruoli, a livello individuale e di gruppo. Infatti, nel passaggio da un episodio a quello successivo:

– il gruppo che è stato Attore diventa Osservatore e un nuovo gruppo che ancora non ha giocato da Attore lo diventa;
– ogni studente cambia il proprio personaggio, assumendo un ruolo diverso da quelli precedentemente già giocati (o in veste di Attore o in veste di Osservatore).

Agli studenti-osservatori è stato richiesto, in ogni episodio, di compilare una tabella di osservazione degli interventi degli attori, soprattutto relativamente al rispetto delle caratteristiche dei personaggi.

3 La fase di progettazione

Dopo la fase di formazione in merito al quadro teorico, il percorso formativo DIST-M B3 è stato strutturato in modo che i docenti iscritti fossero divisi in gruppi da quattro, guidati da un tutor,[6] per circa 45 ore, da remoto, per la progettazione di interventi didattici di tipo DIST-M, incentrati ciascuno su una delle competenze ritenute caratterizzanti per la matematica. I docenti iscritti hanno avuto modo di confrontarsi, nella fase di formazione, con gli esperti in didattica della matematica sul concetto di competenza in matematica e sugli esiti del progetto KOM (Niss, 2003), in cui si individuano otto competenze che principalmente contribuiscono all'acquisizione della *mathematical literacy*, secondo la definizione del quadro di riferimento PISA (Organization for Economic, Cooperation and Development [OECD], 2016).

3.1 Scelta degli obiettivi di competenza: lo *storyboard*

Durante la fase di formazione, ogni gruppo ha avuto la possibilità di scegliere una delle competenze matematiche individuate da Niss (2003), come focus dell'intervento didattico da progettare e il nostro gruppo ha scelto la competenza di modellizzazione matematica. Oltre a quella principale, lo *storyboard* aveva lo scopo di focalizzare l'attenzione anche su altre competenze, definite secondarie rispetto al focus della progettazione, ma non per questo meno importanti ai fini dell'azione didattica, che per il nostro gruppo sono state: la competenza nell'utilizzo di strumenti, anche digitali, quali un foglio di

6. Tre degli autori di questo articolo hanno fatto parte di uno dei gruppi di docenti del percorso formativo DIST-M B3, guidati dal quarto autore, Romano, che è stato tutor.

lavoro e un elaboratore grafico per lo studio della matematica; la competenza relativa alla comunicazione matematica, riferita alla capacità di comprendere la produzione altrui di testi orali, scritti o visuali di matematica in diversi registri linguistici; la competenza nel pensare matematicamente, per controllare che i nostri studenti sappiano usare la matematica per generalizzare risultati matematici noti a contesti diversi. Tali competenze sono secondarie relativamente alle scelte di progettazione, ma risultano fondamentali affinché gli studenti possano poi portare a termine le attività che abbiamo ideato, in linea con il lavoro di Niss (2003) che vede l'impossibilità di separare nettamente una competenza dall'altra.
Siamo partiti dalla definizione data da Niss (2003), secondo cui la competenza di modellizzazione in matematica si manifesta attraverso la capacità di analizzare la struttura e le proprietà di modelli esistenti, di decodificare modelli esistenti e, infine, nell'essere in grado di proporre modelli matematici adeguati a descrivere un dato contesto.
Il confronto tra i docenti corsisti e il tutor per avviare la sceneggiatura della storia matematica ha evidenziato che ognuno aveva una convinzione ingenua sulla competenza di modellizzazione, frutto delle differenti esperienze professionali nonché della formazione universitaria di ciascuno di noi, e, dal confronto con i ricercatori in didattica, in effetti abbiamo imparato che non c'è interpretazione univoca su come essa debba intendersi, così come ampiamente riportato in Kaiser e Sriraman (2006). Tra gli autori del presente contributo c'era chi intendeva la modellizzazione principalmente come l'individuazione di parametri e variabili per la scelta di un modello, chi invece la intendeva come capacità di decodifica di modelli proposti da altri. Dopo un confronto costruttivo su questo tema, abbiamo concordato, sulla base della conoscenza delle classi a cui ci siamo rivolti, che l'intervento didattico da progettare dovesse essere adatto soprattutto a verificare se i nostri studenti avessero acquisito, nel corso degli anni, la capacità di decodificare dati e di utilizzare le conoscenze matematiche, piuttosto che potenziare, con l'attività DIST-M, la capacità dei nostri alunni di proporre autonomamente un modello. Questo quadro di riferimento ci ha poi portato a determinare lo *storyboard* generale del nostro fumetto, organizzato in quattro episodi, ciascuno con uno specifico obiettivo didattico, anticipati da un episodio introduttivo, come riportato di seguito:

– Episodio introduttivo (Allegato 1): si descrivono i personaggi della storia, illustrandone le caratteristiche da cui si evincono i ruoli, ossia le funzioni cognitive a cui si fa riferimento con ciascuno di essi.
– Episodio 1 (Allegato 2): decodificare modelli esistenti, attraverso la lettura dei dati di un esperimento, già organizzati in tabella.
– Episodio 2 (Allegato 3): raccogliere, elaborare dati e individuare, in un diagramma a dispersione, la migliore linea di tendenza.
– Episodio 3 (Allegato 4): individuare le funzioni matematiche adatte alla descrizione del modello.
– Episodio 4 (Allegato 5): riconoscere l'invarianza di un modello matematico rispetto al contesto fisico in cui esso viene costruito.

3.2 Scelta del contenuto disciplinare: la storia matematica

Dopo aver individuato le competenze, abbiamo dovuto individuare i contenuti disciplinari da inserire nella nostra storia matematica. Abbiamo scelto il contesto sperimentale della fisica, per coinvolgere i nostri alunni nell'analisi di dati sperimentali che prevedono l'utilizzo di relazioni e funzioni conosciute, come la proporzionalità inversa, la funzione logaritmo e la funzione esponenziale, e i relativi grafici, non solo elementari ma anche deducibili mediante opportune trasformazioni geometriche. Considerato che abbiamo coinvolto le nostre classi quarte, tutte di liceo scientifico, abbiamo scelto di lavorare con le funzioni di stato in termodinamica, da tutti già studiata, proponendo dapprima la Legge di Boyle e, successivamente, l'analisi dell'andamento del tempo caratteristico di una sonda di

temperatura. L'esperimento della sonda di temperatura,[7] tratto dalle esperienze laboratoriali per la scuola secondaria del progetto LS-OSA,[8] non è generalmente inserito tra i contenuti curricolari affrontati a scuola. Il modello matematico necessario a descrivere il fenomeno è di tipo esponenziale, lo stesso adatto a descrivere svariati fenomeni fisici, tra cui la carica e scarica di un condensatore, circostanza che ci è sembrata adatta a mostrare l'efficacia di un modello matematico al di là della specifica applicazione fisica.
Lo *storyboard*, relativamente al contenuto disciplinare scelto, è così organizzato:

- *Episodio 1 – Sai leggere i dati?* In questo episodio, agli studenti viene fornita una tabella attraverso il fumetto, contenente dati relativi all'esperimento in cui Boyle ha teorizzato la ben nota legge sulle trasformazioni termodinamiche isoterme. Essi dovranno dimostrare di conoscere la differenza tra dati sperimentali e dati teorici per poter ricavare un dato mancante della tabella, necessario per passare all'episodio successivo.
- *Episodio 2 – Raccogli ed elabora i dati.* Lo *storyboard* prevede la visione di un video in cui viene riprodotto l'esperimento della sonda di temperatura. Gli studenti dovranno raccogliere i dati dal video e organizzarli in un diagramma a dispersione attraverso l'utilizzo di un foglio di lavoro.
- *Episodio 3 – Alla ricerca della curva perduta.* Lo scopo dell'episodio è di individuare la linea di tendenza che meglio approssima il diagramma a dispersione ottenuto con i dati dell'esperimento visionato. Gli studenti dovranno utilizzare opportune trasformazioni geometriche per capire, almeno qualitativamente, di quale funzione matematica si tratta.
- *Episodio 4 – Ripercorriamo la stessa curva.* Anche in questo episodio, gli studenti guardano un video, che descrive il processo di carica di un condensatore in un circuito RC a corrente continua, argomento di fisica ancora non affrontato. Pur non conoscendo la situazione fisica descritta, ci si aspetta che gli studenti siano in grado di riconoscere che il modello matematico che descrive il fenomeno è lo stesso proposto nell'episodio precedente, almeno qualitativamente. Per concludere l'episodio, dovranno fornire il valore di saturazione della tensione, da dedurre dai dati nuovamente raccolti e analizzati.

3.3 Il fumetto

Parte integrante della progettazione è stata la creazione del fumetto. Nel nostro fumetto (di cui si trovano gli episodi commentati negli Allegati 1, 2, 3, 4 e 5), quattro compagni di classe, Giulia, in veste di *Boss* o stratega; Marco, *Promoter* o nerd del gruppo; Samantha, *Peste* e Johnny, *Blogger*, appassionati di materie scientifiche, trascorrono un pomeriggio in una *escape room* scientifica di proprietà dello zio di Johnny, Alberto.

Figura 1. Episodio introduttivo: i protagonisti entrano nella *escape room* e danno avvio allo *storyboard* matematico.

7. Per i dettagli dell'esperimento, si veda https://ls-osa.uniroma3.it/esperimenti/fisica/f60/.
8. Per approfondimenti sul progetto, si veda https://ls-osa.uniroma3.it/.

La storia entro cui si sviluppa il percorso matematico ha come protagonisti i quattro amici, particolarmente interessati allo studio delle discipline scientifiche e stimolati dalle sfide insite nel *problem solving*. Pertanto, il fumetto prende il via con la scelta, da parte del gruppo, di trascorrere un pomeriggio in una *escape room* a tema scientifico, di proprietà di un docente di fisica in pensione, zio di uno di loro. La *escape room* ci ha consentito di proporre quesiti diversi in ogni stanza, anche non necessariamente collegati tra loro da un punto di vista matematico, in modo che ogni stanza rappresentasse una sfida per ciascuno di loro, anche da un punto di vista emotivo. Lo zio Alberto aveva il compito di seguire i ragazzi sia per aiutarli nella risoluzione dei quesiti posti episodio per episodio, a una loro richiesta di auto, sia per animare la discussione tra gli studenti, all'occorrenza. Questa struttura ci ha permesso di affrontare, in ogni stanza, situazioni problematiche indipendenti, seppur simili per tematica e metodologia.

3.4 Progettare un DIST-M: considerazioni dei docenti coinvolti

La fase di progettazione, fruita da remoto per circa 15 incontri, è stata la parte più corposa del percorso di formazione. Essa si è trasformata in apprendimento esperienziale, permettendo di vivere in prima persona le sfide e le opportunità del lavoro collaborativo, arricchite dal fatto che ciascuno di noi testimonia realtà e percorsi differenti. Riteniamo che il valore aggiunto sia stata la richiesta esplicita di studio di specifici articoli di ricerca in didattica della matematica a proposito della competenza prima di avviare la progettazione dell'attività. In effetti, ci è sembrato di trasformare l'intero processo di progettazione/sperimentazione/riflessione in una impresa scientifica, diversa da tutte le altre precedentemente attuate in base alle nostre convinzioni ed esperienze passate.
La seconda nostra considerazione riguarda la creazione del fumetto. Abbiamo toccato con mano che una sceneggiatura coerente e completa richiede grande controllo dei contenuti, oltre che degli obiettivi didattici che si intendono perseguire. Per questo motivo, abbiamo maturato il convincimento che, laddove si decida di sperimentare la metodologia dello *storytelling* chiedendo agli studenti di lavorare allo *storyboard*, il compito di scrivere la sceneggiatura dovrebbe avvenire solo al termine di un percorso didattico guidato dal docente, come fase di valutazione formativa. In questo modo, lo studente potrebbe mostrare il grado di consapevolezza e competenza acquisita sul contenuto in esame, attraverso un compito in modalità cooperativa che inserisce i contenuti appresi e le competenze maturate in un contesto informale.
D'altro canto, l'attività di *storytelling* diviene anche efficace strumento di autovalutazione per il docente, durante il processo di apprendimento-insegnamento, perché, attraverso le storie proposte dagli studenti, si riesce a controllare l'efficacia della mediazione didattica messa in atto precedentemente relativamente agli obiettivi di apprendimento programmati. Anche l'effettiva creazione delle vignette, risultata particolarmente impegnativa, merita una considerazione in termini di ricaduta possibile sull'azione del docente. Nessuno di noi riteneva di essere in grado di costruire, in poco tempo, un fumetto, senza avere competenze in campo artistico. Su suggerimento del tutor, coautore del contributo, abbiamo optato per l'utilizzo di Canva,[9] un applicativo che dispone di modelli predefiniti di fumetti, personaggi e sfondi personalizzabili. Nonostante ciò, non è da sottovalutare il tempo e la competenza necessarie alla scelta, nonché alla modifica delle immagini e l'inserimento delle didascalie, tanto che ci siamo accorti di aver ridotto il numero di vignette negli episodi successivi al primo, forse anche a discapito della chiarezza delle consegne richieste agli studenti. Pertanto, aver sperimentato la sceneggiatura di uno *storyboard* può rendere un insegnante maggiormente consapevole dell'importanza delle eventuali competenze trasversali messe in campo dallo studente, ad esempio in termini di competenze digitali, e favorire così la costruzione di una più adeguata rubrica di valutazione.

9. https://www.canva.com/it_it/educazione/ con accesso alle funzionalità premium per i docenti.

4 La fase di sperimentazione

Nella fase di progettazione dell'attività, abbiamo deciso di sperimentare con allievi frequentanti la classe quarta del liceo scientifico nell'a.s. 2022/2023, nelle rispettive scuole di servizio: la classe 4 E, composta da 19 alunni e guidata da Coen del liceo "Banfi", di Vimercate (MB); la classe 4 E, composta da 24 alunni e guidata da Cravotta, del liceo "Curiel" di Padova; la classe 4 A, composta da 15 alunni e guidata da Tarallo, del liceo "Calamandrei" di Napoli. Ciò ci ha consentito di confrontare le risposte degli studenti, indipendentemente dal contesto geografico, scolastico e di classe. Romano ha deciso di coinvolgere la sua classe 4 D del liceo "Mangino" di Pagani (SA), composta da 23 alunni, a dicembre dell'anno scolastico 2023/24, apportando piccole correzioni, relativamente alla creazione dei gruppi e al ruolo da attori e osservatori, come diremo nel par. 4.1, ma non alla sceneggiatura, dal momento che avremmo dovuto dedicare ulteriore tempo alla modifica delle vignette, sacrificando la parte di riflessione che è stata, invece, necessaria ai fini dell'analisi delle sperimentazioni e che ci ha portato poi alla stesura di questo contributo.

4.1 L'organizzazione in classe

Dal momento che lo *storyboard* progettato prevede quattro episodi, abbiamo scelto di suddividere gli studenti di ciascuna classe in quattro gruppi, in modo che ogni gruppo potesse esperire un episodio in veste di Attore in uno degli episodi (si veda il par. 2.1). Analogamente, in ogni gruppo sono stati inseriti almeno quattro studenti, visto che la storia prevede quattro personaggi. Nel caso in cui la classe fosse composta da più di 16 studenti, abbiamo deciso di duplicare alcuni personaggi, pertanto nei gruppi con cinque o sei alunni, due o più studenti hanno interpretato i personaggi di Giulia-Peste, e Marco-Nerd (Promoter). La scelta di duplicare proprio Giulia e Marco è stata dettata dall'importanza che i docenti coinvolti hanno dato alla funzione di *mente* critica e dalle molteplici richieste previste dallo *storyboard* relative all'uso di strumenti digitali.
Per favorire la immersività, gli studenti entrano nella storia come personaggi e non come persone, quindi hanno ricevuto un *nickname* con cui collegarsi alla piattaforma Moodle, indicativo del personaggio e della modalità attore/osservatore e, almeno formalmente, non sono stati informati sulla reale identità degli altri protagonisti del proprio gruppo. La scelta dell'anonimato, prevista dal protocollo DIST-M, è giustificata dal fatto di voler evitare *bias* sia tra gli studenti sia da parte del docente nei confronti degli studenti. Allo stesso modo, lo zio Alberto, che nello spirito immersivo del DIST-M rappresenta la conoscenza, l'esperto in senso vygotskiano, a cui rivolgersi in caso di difficoltà, è stato impersonato dal docente della classe, senza che gli studenti ne fossero informati, così da favorire gli interventi degli studenti senza remore dovute alla paura della valutazione e da evitare comportamenti legati al contratto didattico. I gruppi di studenti sono stati formati dal docente della classe, che ha anche assegnato a ciascuno il personaggio/ruolo da interpretare, ruotando episodio per episodio in accordo al modello DIST-M (si veda il par. 2.1), con l'impegno a creare gruppi piuttosto eterogenei in base alle caratteristiche degli studenti, non solo rispetto ai risultati di profitto in matematica, ma anche relativamente al modo in cui ciascuno di essi è solito comportarsi relativamente alle funzioni cognitive rappresentate dai personaggi.
L'episodio introduttivo è stato illustrato da tutti i docenti in classe in un'ora, congiuntamente alle caratteristiche tecniche della piattaforma Moodle e alle istruzioni per accedere. Successivamente, ogni autore ha dedicato un'ora ad ogni episodio, in orario extracurricolare e a distanza per le classi di Coen e Cravotta, in orario curricolare per Tarallo e Romano, accedendo in piattaforma attraverso gli *smartphone* degli studenti e, ove possibile, *laptop* forniti dalla scuola.

Figura 2. Gli studenti di Romano in classe durante lo svolgimento dell'episodio 2.

4.2 Insegnare-apprendere attraverso un DIST-M: luci e ombre secondo i docenti coinvolti

Interagire in piattaforma attraverso il *nickname* ha effettivamente distratto sia gli studenti che il docente dalla reale identità di chi interveniva in chat, e, dopo la lettura degli episodi, l'attenzione di ciascuno si è focalizzata sulla storia matematica.

Interagire solo in chat impersonando zio Alberto ha effettivamente messo il docente nella condizione di essere meno invadente e più silenzioso: in presenza, durante i lavori di gruppo e le discussioni di classe, anche involontariamente, facilmente si cede alla tentazione di intervenire e, quindi, di sovrapporsi agli studenti, anche solo con la gestualità e il linguaggio non verbale, che comunque intimidisce o indirizza lo studente chiamato a dare risposte. Invece, interpretare il personaggio dell'esperto che interviene solo su richiesta, a meno di momenti di grave *empasse*, ha consentito di lasciare spazio alle interazioni tra gli studenti in maniera più genuina.

Nonostante siamo consapevoli che non è proponibile l'uso di tale modalità per lunghi periodi didattici, ci siamo convinti che può valere la pena, sia per i docenti, che per gli studenti, fare esperienza di questa forma di interazione tramite chat. Come vedremo nel paragrafo successivo, per il docente l'uso della chat risulta utile strumento per valutare gli interventi degli studenti e autovalutare la propria azione didattica, ma non è da sottovalutare la possibilità offerta anche agli studenti di rileggere le conversazioni avvenute e riflettere sulle risposte proprie e altrui, riflessione che potrebbe ulteriormente contribuire all'attivazione delle funzioni cognitive necessarie per la risoluzione di problemi matematici.

Un'altra osservazione che abbiamo fatto riguarda la piattaforma utilizzata. Moodle non ha incontrato il gradimento degli studenti, abituati, nelle nostre classi, ad altre piattaforme più intuitive, come ad esempio Google Workspace for Education (utilizzata sicuramente più spesso in ambito di scuola secondaria, soprattutto dopo l'esperienza della didattica a distanza). Gli stessi ragazzi ci hanno fatto notare che anche la Google Chat, a cui accedono con l'account istituzionale fornito loro dalla scuola, consente la creazione di chat dedicate e di mantenere la cronologia attiva, potendo essere peraltro facilmente utilizzata anche dallo smartphone. Romano, che è anche amministratore della piattaforma Google della sua scuola, ha in effetti provato a fruire di un singolo episodio attraverso la Google Workspace, creando utenze fittizie con i *nickname* necessari, notando maggiore fluidità nell'uso della chat da parte degli studenti. Ovviamente, non riteniamo assolutamente rilevante la scelta della piattaforma da utilizzare in termini di risultati di apprendimento-insegnamento, ma il maggiore gradimento da parte degli studenti può incidere sull'esito della sperimentazione didattica. D'altronde, è necessario, in termini di replicabilità, avere la possibilità di agire sulla creazione delle utenze. Ci rendiamo conto che, in generale, per attività che fanno un uso avanzato di strumenti tecnologici è necessario che le scuole siano sensibilizzate nel creare gruppi di lavoro con persone di diverse competenze (tecnici, docenti) che possano interagire tra loro per il buon esito delle attività didattiche.

Relativamente alla sperimentazione in classe dello *storyboard* matematico da noi progettato, va fatta un'osservazione importante. Da protocollo, abbiamo coinvolto le nostre classi quasi in parallelo, per rispettare i tempi di consegna previsti dal corso di formazione. Ciò non ha consentito di modificare lo *storyboard*, anche se ci siamo accorti che in alcune parti la sceneggiatura avrebbe richiesto alcune modifiche (ad esempio, nel secondo episodio, non è chiara la richiesta agli studenti per il passaggio all'episodio successivo). In una prospettiva di replicabilità, riteniamo potrebbe rivelarsi efficace la collaborazione tra colleghi, magari nella stessa scuola, per usare lo stesso fumetto in due classi differenti, proponendo i singoli episodi in una sola classe alla volta, in modo da intervenire sulla sceneggiatura con le eventuali necessarie correzioni. Addirittura, in questo modo, si avrebbe anche la possibilità di chiedere agli studenti di partecipare alla sceneggiatura, progettando un ulteriore episodio. Peraltro, in questo modo, questa forma di azione didattica si andrebbe a configurare come pratica del *lesson study* (Bartolini Bussi & Ramploud, 2018), le cui fasi sono proprio la co-progettazione di una lezione, l'osservazione critica e riflessiva da parte dei componenti del gruppo di lavoro e la ri-progettazione della stessa, prima di proporla in un'altra classe, per intervenire laddove ci sono stati aspetti carenti o poco efficaci nella prima fase di progettazione. Lo scopo non è certamente quello di creare una lezione *perfetta*, ma di potenziare la capacità dei docenti coinvolti di interagire per il raggiungimento di un obiettivo didattico, di riflettere sulle scelte, proprie ed altrui, anche in base alle risposte degli studenti.

5 La fase della riflessione

Dopo aver proposto in classe il fumetto progettato, il percorso di formazione ci ha visti impegnati nella fase di riflessione sugli esiti della sperimentazione.
Il percorso didattico è stato organizzato completamente da remoto attraverso un corso Moodle, in cui è stata inserita l'attività Chat, per le discussioni testuali sincrone. Rileggere la chat ed esaminare le conversazioni degli studenti ci ha permesso di osservare in asincrono le classi coinvolte, quasi *dall'esterno*, recuperando anche gli interventi che, in una discussione in presenza, potrebbero essere trascurati, se non del tutto ignorati. Peraltro, abbiamo potuto analizzare a posteriori anche l'intervento di noi docenti e il modo in cui abbiamo partecipato alla discussione, in qualità di zio Alberto.
Poiché la modalità DIST-M era nuova sia per noi docenti che per gli studenti coinvolti, abbiamo focalizzato la nostra attenzione innanzitutto sugli effetti del gioco di ruolo e sull'impatto dell'interazione in chat tra e con gli studenti. Riportiamo di seguito alcune riflessioni, esibendo alcuni estratti esemplificativi dalle chat di Moodle.

5.1 La partecipazione degli studenti come Attori e Osservatori

Focus fondamentale della sperimentazione di un'attività DIST-M consiste nel chiedere agli alunni di partecipare impersonando i personaggi del fumetto, con le relative caratteristiche, a volte agendo da attori e, più spesso, da osservatori. Ricordiamo che i nostri personaggi sono: Giulia, Boss o stratega, Marco, Promoter o nerd, Samantha, la Peste, Johnny, il Blogger e zio Alberto, il Guru. Ci siamo chiesti se davvero i nostri alunni sono riusciti a comportarsi come era loro richiesto. Vediamo di seguito alcuni estratti delle chat focalizzandoci sulla sola interpretazione dei ruoli.
L'estratto che segue è un esempio di come gli studenti, nel lavorare insieme, abbiano fatto riferimento anche al ruolo che ciascuno era chiamato a interpretare. Vediamo che Giulia-Boss, dopo aver individuato il tipo di proporzionalità espressa dai dati dell'esperimento di Boyle, ha un'incertezza relativa alla rappresentazione decimale della costante ottenuta, che invece veniva richiesta sotto forma di frazione. L'intervento di Samantha-Peste chiama in gioco Marco nella sua veste di Promoter e nerd, chiedendogli di fare il *suo lavoro*, facendo riferimento al fatto che Marco è colui che meglio sa come e quando usare gli strumenti informatici.

Episodio 1 – Gruppo Attore

Giulia: «sembra una proporzionalità inversa, però mi viene 66,57 e non so come metterlo in frazione».[10]

Samantha: «ci pensa Marco con un convertitore».

L'estratto che segue mostra come Giulia e Samantha intervengono in coerenza con i rispettivi ruoli di Boss e Peste. Ci sembra che l'intervento di Samantha sia proprio forzato dal voler mostrare che lo studente si sta immedesimando col personaggio.

Episodio 3 – Gruppo Attore

Giulia: «Potremmo iniziare andando per esclusione?»

Samantha2: «mi sembra una buona idea».

Giulia: «Allora se la temperatura deve crescere, quello giallo è quello rosso non vanno bene, giusto?»

Samantha: «Okay, ma ne siamo proprio sicuri?»

Ripercorrendo le chat, ci siamo accorti che sembra esserci una correlazione tra l'aderenza ai ruoli e la messa in gioco di competenza disciplinare. Abbiamo osservato che gli studenti hanno agito coerentemente con il ruolo e il personaggio assegnato soprattutto nella fase iniziale di ciascun episodio. Tale aderenza si è affievolita nel momento in cui la richiesta di competenza disciplinare per rispondere alle richieste dello zio Alberto aumentava, fino a dimenticarsi completamente del ruolo giocato. Lo stralcio seguente mostra un esempio in tal senso. Nel corso del secondo episodio (classe di Coen), gli studenti avevano il compito di comunicare a zio Alberto il modello di funzione che meglio poteva approssimare i dati da loro raccolti nell'esperimento di Fisica sulla sonda di temperatura che viene loro mostrato in un video. Di seguito riportiamo la trascrizione della chat degli attori, relativo all'analisi del grafico in **Figura 3** creato nel foglio di lavoro messo a loro disposizione:

Episodio 2 – Gruppo Attore

Zio Alberto: «Avete un'idea di quale sia la funzione?»

Samantha2: «si».

Zio Alberto: «Discutetene tra voi».

[...]

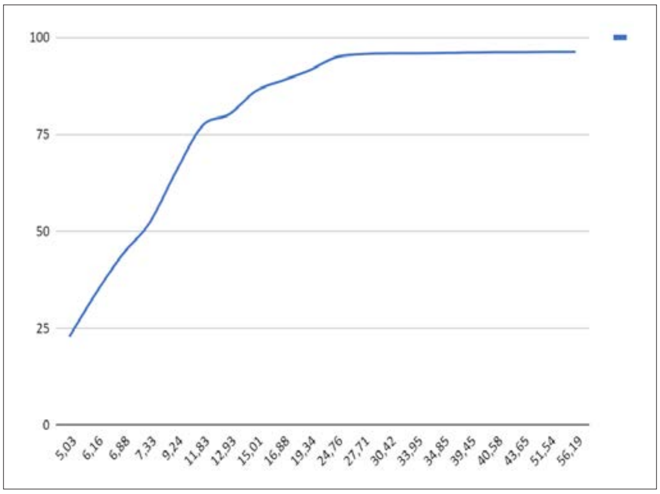


Figura 3. Grafico creato dagli studenti per descrivere i dati dell'esperimento dell'episodio 2.

10. I dialoghi sono le trascrizioni fedeli delle chat online nelle quali è avvenuta l'interazione discorsiva all'interno dei gruppi. Sono stati dunque riportati le parole, i simboli, le maiuscole e le minuscole utilizzati dagli studenti.

Marco: «t(s)=tmax(1-a^t)».[11]
Samantha2: «è una simmetria rispetto all'asse x dell'esponenziale».
Marco: «con traslazione».
Giulia: «secondo me pure».
[...]
Zio Alberto: «fate un esempio e fatela disegnare ad Excel, usate un secondo foglio».
Samantha: «Va bene?»
Zio Alberto: «qual è l'esempio di funzione usata?»
[..]
Marco: «T(t)=96,5*(1-1,18^(-t))».
Marco: «dove 1,18 è un valore trovato sostituendo un punto casuale dell'esperimento e imposto il passaggio per esso».

Dopo una lunga pausa in chat, in cui nessuno è intervenuto, Marco fornisce anche informazioni che non erano state richieste. Lo studente che, in questo estratto, impersonava Marco non si è comportato da *Promoter*, ma da *Boss*. Si tratta di uno studente che ha elevate competenze matematiche, e che successivamente ha riconosciuto con il suo docente, Coen, di essere intervenuto in maniera preponderante. Non è stato possibile stabilire se sia stato lui a prendere l'iniziativa o se i compagni hanno deciso di delegare a lei il compito di procedere, anche se un osservatore ha sottolineato che tutti i componenti del gruppo si stavano *ovviamente* affidando a Marco, facendo forse intendere che gli altri componenti del gruppo sapevano chi stava interpretando Marco.
Al di là del rispetto del ruolo, quello che ci sembra particolarmente significativo è la riflessione sui ruoli, come emergono dalle parole degli osservatori, che ricordiamo avevano il compito di osservare gli attori e valutare il modo in cui essi affrontavano la risoluzione dei quesiti e il modo in cui interpretavano i ruoli individuali assegnati. Ne riportiamo alcuni stralci:

1. «L'attore [Marco] avrebbe potuto lasciare più spazio agli altri personaggi, specialmente a Giulia, anche se questo avesse comportato un impiego maggiore di tempo per risolvere il quesito».
2. «Giulia fa osservazioni corrette osservando la tabella, che indirizzano il gruppo sulla strada corretta, anche se non è sempre quella esatta (cosa che stona un po' con il suo personaggio)».
3. «Avrei tentato di far parlare di più Giulia o comunque avrei chiesto ulteriori conferme riguardo ad alcuni passi della risoluzione».
4. «Samantha 1 ha più volte messo in dubbio quanto detto dal gruppo, richiedendo anche ulteriori dimostrazioni. Samantha 2 invece è risultata forse leggermente troppo accondiscendente ed è intervenuta meno».

Come si può vedere dagli stralci esemplificativi riportati, le riflessioni degli osservatori possono essere preziose occasioni per il docente per una meta-discussione con la classe che vada oltre la matematica. Le osservazioni 1 e 3 evidenziano che nell'interazione con gli altri è necessario lasciare tempo, sia esso per risolvere sia esso per spiegare. L'osservazione 2 può essere l'occasione per parlare delle convinzioni sul ruolo di Boss: ci si aspetta che una guida non sbagli mai: il fatto che Giulia talvolta avesse indicato una strada non esatta non è in linea con il ruolo di Boss. E questo *bias*, diffuso nei confronti di tutte le figure guida (genitori, docenti…), val la pena di essere discusso con gli allievi, anche dal punto di vista matematico, dal momento che i grandi risultati matematici che oggi presentiamo in

11. Gli studenti in chat non avevano a disposizione un editor di caratteri matematici.

una forma lineare e fluida sono invece il frutto di tanti precedenti tentativi falliti. Lavorare su questi aspetti a partire dagli stessi scritti degli studenti ha un valore di coinvolgimento che li rende, a nostro avviso, impareggiabili.
L'osservazione 4, che riguarda lo stesso ruolo giocato da due allievi diversi, fa emergere modi diversi di interpretare un ruolo e quest'osservazione può essere l'occasione per discutere di cosa per gli studenti significa essere Peste-spirito critico.

L'analisi delle risposte degli osservatori ha evidenziato, secondo noi, la necessità di fornire loro una griglia di osservazione che li mettesse in condizione, da un lato, di valutare il comportamento degli attori relativamente alle caratteristiche del personaggio, come in 1 e 3; dall'altro, di scendere nei dettagli matematici, dichiarando cosa avrebbero fatto al posto dell'attore, per cui la valutazione di risposta non corretta andrebbe dettagliata mostrando la risposta esatta. L'uso della griglia può facilitare, anche per gli osservatori, l'attivazione della funzione cognitiva richiamata dal personaggio, mettendo in evidenza le competenze matematiche dell'osservatore.
Al termine dell'attività, gli studenti hanno risposto ad un questionario di valutazione. Una delle domande era relativa al coinvolgimento in base al ruolo impersonato. Dalle risposte raccolte è emerso che gli studenti, da osservatori, si sono concentrati maggiormente sui compiti assegnati al loro personaggio, ma anche che si sono sentiti meno coinvolti nello svolgimento del compito.
Si potrebbe banalmente pensare che abbia inciso la scelta di avere un solo gruppo di studenti attori per ciascun episodio, per cui il singolo studente agisce per ben tre volte come osservatore, la qual cosa può generare perdita di interesse sia per l'attività di osservazione, sia per l'attività di *problem solving*. In effetti, Romano, dopo il primo episodio, su richiesta della classe, ha chiesto ad ogni gruppo di osservatori di agire anche come attori: oltre ad accrescere l'interesse generale, la docente ha potuto anche verificare le competenze matematiche per un maggior numero di studenti, anche se, ovviamente, ha avuto meno risposte in veste di osservatori. In realtà, riteniamo che la perdita di interesse sia dovuta ad una mancata piena consapevolezza di ciò che l'osservatore deve fare, forse anche da parte dei docenti stessi, anch'essi nuovi a questo tipo di azione didattica. Abbiamo già detto che, per gli studenti, può aiutare una griglia di osservazione più puntuale, che ne indirizzi le scelte, ma, soprattutto, riteniamo opportuno che ciascun docente educhi gli studenti all'osservazione attiva durante le attività di gruppo, come strumento efficace di valutazione formativa.

5.2 La chat come strumento di valutazione e autovalutazione per il docente

Nella fase di progettazione, ci eravamo proposti di verificare che gli studenti fossero in grado di leggere un testo che parlasse di matematica e di ricavare da esso informazioni appropriate per la risoluzione di un problema, anche perché spesso riscontriamo, nella nostra pratica didattica, che alcuni studenti non riescono a portare a termine un compito proprio perché non hanno correttamente utilizzato il testo come fonte di informazioni. Pertanto, soprattutto nel primo episodio, abbiamo previsto che gran parte del lavoro di interpretazione fosse fatto dai personaggi del fumetto, facendo loro indicare, esplicitamente, agli studenti cosa fare e cosa dire allo zio Alberto per uscire dalla prima stanza della *escape room*. Non c'è dubbio che i nostri allievi siano stati molto incuriositi dalla proposta di un *problem solving* matematico attraverso vignette create dai propri docenti, ma, al contempo, non è stato per loro immediato considerare il fumetto come un vero e proprio *testo del problema*. Nello stralcio di chat riportato in Figura 4, si vede che lo zio Alberto interviene, anche se non direttamente interpellato, proprio per sottolineare che il fumetto è parte integrante del problema ricordando agli studenti che il fumetto va utilizzato ricordando agli studenti che i dialoghi del fumetto sono utili per ottenere le informazioni necessarie per procedere verso la soluzione.

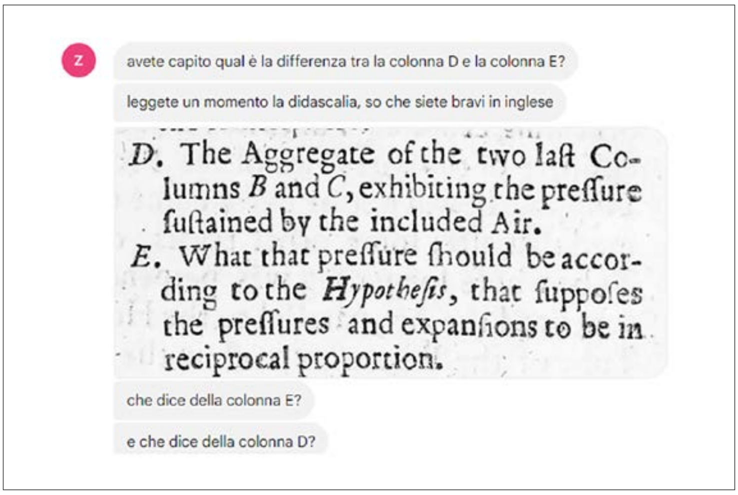


Figura 4. Episodio 3: un estratto di una chat con gli studenti.

La completa autonomia degli studenti, ottenuta mediante una interazione in chat in cui il docente aveva il compito di intervenire solo se interpellato, ha fatto, talvolta, ricredere i docenti in merito a competenze che avevano presunto essere in possesso dei propri studenti. Ad esempio, lo stralcio riportato di seguito mostra le difficoltà di qualche gruppo nell'utilizzo del foglio di lavoro, sebbene in fase di progettazione ognuno di noi avesse ritenuto le richieste adeguate al livello di competenza dei propri studenti. Nonostante la maggior parte degli studenti avesse già utilizzato un foglio di calcolo, almeno con il proprio docente, molti tra loro si sono detti poco esperti nel farlo, chiedendo l'aiuto di zio Alberto per utilizzare alcune specifiche funzioni dell'applicativo, come si evince dalla trascrizione che segue.

Episodio 1 - Gruppo Attore

Giulia: «qualcuno che se la cava con excel? marco?»
Marco: «non tanto so usare solo carta e penna».
[...]
Zio Alberto: «strana la scelta di mettere i dati nelle righe invece che nelle colonne...»
Samantha2: «possiamo sempre cambiare».
Giulia: «ok ora provo a invertire».
Giulia: «ma non sono una campionessa di excel».
Samantha2: «tranquilli giulia siamo tutti nella stessa stanza per colpa dello zio <3».
Zio Alberto: «suggerisco un "copia" e poi un "incolla speciale con trasposizione"».
[...]

Di contro, l'analisi dei grafici proposta nel terzo episodio ha visto gli studenti spontaneamente ricorrere ad un elaboratore grafico on line, tipo Desmos, per individuare il modello matematico adatto a descrivere i dati raccolti, evidenziando la loro capacità di selezionare le risorse digitali che sanno usare meglio, e da loro ritenute opportune per risolvere il problema posto.
Un altro oggetto di riflessione è stata per noi la *narrazione del docente*. Infatti, la sperimentazione e l'analisi a posteriori degli interventi degli studenti ci ha fatto riflettere sul fatto che, talvolta, le mancate risposte degli studenti possono essere in parte dovute a un problema di comunicazione non efficace tra il docente e la classe. Abbiamo notato che spesso e in tutte le classi, gli studenti si sono rivolti al Guru non tanto per le intrinseche difficoltà delle richieste, ma proprio per avere chiarimenti sul da fare. Come mostra, a titolo esemplificativo, il seguente estratto, zio Alberto è dovuto necessariamente intervenire per chiarire la consegna.

Johnny1: «zio Alberto ma il dato effettivo che ci serve per uscire dalla stanza come facciamo a capire qual è? intendo il dato sulla linea di tendenza».
Zio Alberto: «in realtà non c'è un dato preciso basta commentare il grafico in chat».

Ci siamo resi conto che non è infatti raro che il docente sottovaluti la difficoltà intrinseca alle proprie richieste, magari insite nella scelta del linguaggio formale utilizzato, di cui gli studenti potrebbero ancora non comprendere appieno il significato.
Un'ultima considerazione riguarda la richiesta, propria del protocollo DIST-M, di interazione solo via chat. Abbiamo già sottolineato la potenzialità dello strumento in riferimento alla possibilità offerta dalla cronologia per consentire non solo al docente, ma anche allo studente, la riflessione e l'autovalutazione dei propri interventi. Vogliamo qui anche far notare che, nonostante il contesto informale favorito dallo *storytelling*, anche nella modalità *a distanza* e *silenziosa*, l'interazione si è rivelata essere una vera e propria discussione matematica in una concezione vygotskiana (Bartolini Bussi et al., 1995), in cui si richiede la presenza di voci diverse. Quella dell'insegnante si è ancora una volta rivelata una voce essenziale da più punti di vista. Dal lato cognitivo e metacognitivo, il docente/Guru ha aiutato nella risoluzione della situazione problematica, agendo nella sua funzione di esperto vygotskiano, con i suoi interventi quando gli studenti si sono trovati in difficoltà e non ne sapevano uscire da soli, ponendo domande di aiuto o richieste di spiegazione. Ha inoltre orchestrato la discussione matematica, per favorire la ricostruzione della storia di risoluzione e promuoverne l'avanzamento, recuperando, attraverso la cronologia, osservazioni decisive fatte da qualche compagno che i ragazzi non avevano notato, perché distratti da altri commenti, o rispecchiando, come una vera eco, alcuni passaggi allo scopo di sottolinearne l'importanza. Dal lato affettivo/gestionale, il docente/Guru si è preso in carico di coinvolgere e tenere l'attenzione degli studenti *animando* la chat, nel momento in cui gli studenti, non fisicamente presenti in aula, hanno manifestato minore partecipazione o interesse, e ha gestito il tempo, non scandito dalla campanella, ma dalla durata precedentemente concordata, soprattutto in orario extracurricolare.

6 Conclusioni

In questo lavoro abbiamo illustrato l'articolato percorso di formazione a cui abbiamo partecipato, che riteniamo essere diventato una valida esperienza di ricerca-azione, in cui abbiamo avuto modo di riflettere da un lato sulla modalità di formazione dei docenti in servizio e dall'altro sulle potenzialità offerte dalla metodologia del DIST-M, con particolare riferimento alla possibilità di riflettere sulla propria pratica didattica (Mason, 1998).
L'aver progettato, sperimentato e analizzato un percorso didattico attraverso il confronto continuo tra pari, dopo una fase di formazione con esperti in didattica della matematica, ci ha convinto dell'importanza di una comunità di pratica, all'interno della quale la crescita professionale avviene a seguito di riflessione sulle proprie e altrui scelte. Nel nostro caso, l'aver approfondito il significato di competenza di modellizzazione attraverso letture dedicate e l'aver messo a confronto diverse professionalità e contesti ci ha chiarito i nostri impliciti sui quali in futuro avremo modi di riflettere ulteriormente e fare scelte didattiche opportune.
Siamo profondamente convinti che la classe sia il luogo in cui gli studenti, attraverso la mediazione del docente, imparano, dall'interazione, a cogliere le connessioni e usano il tempo «per parlarsi, confrontarsi, imparare a porre le domande a sé e agli altri» (Postman & Weingartner, 1973, p. 37); ciò nonostante, la sperimentazione di un'attività in modalità DIST-M ci ha consentito, da un lato, di dare una diversa interpretazione alla discussione di classe, attraverso l'interazione via chat in Moodle

e l'immersività nello *storytelling* matematico, e, dall'altro, di osservare le dinamiche del gruppo classe, comprensivo del docente, quasi dall'esterno, grazie alla cronologia delle chat.
La richiesta di agire secondo un ruolo predefinito, previsto da protocollo DIST-M e qui finalizzato alla immersività nello *storytelling*, ci sembra particolarmente efficace da promuovere, anche solo attraverso attività di gruppo di tipo cooperativo, per rafforzare le funzioni cognitive coinvolte in un'attività di *problem solving*. L'alternanza tra un ruolo attivo, di risolutore, e un ruolo di osservatore può favorire la competenza metacognitiva degli studenti, che, peraltro, nell'atto dell'osservare, mettono in campo capacità di analisi critiche in un contesto non formale, che possono anche contribuire alla pratica della valutazione formativa da parte del docente. Inoltre, al netto delle difficoltà di organizzazione, anche l'uso dei *nickname* si rivela valido strumento per mettersi all'ascolto di ciascuno, studente o compagno di classe, senza eventuali stereotipi o pregiudizi dovuti alla conoscenza reciproca, mentre lo strumento della chat aiuta i docenti ad *ascoltare* di più ed intervenire di meno, potenziando il ruolo di docente come mediatore, piuttosto che di trasmettitore di conoscenze.
Peraltro, la verbalizzazione della discussione, attraverso la chat, favorisce la pratica della riflessione per tutti i soggetti coinvolti. I docenti hanno modo di riflettere su ciò che è stato progettato, sulle aspettative contrapposte alle effettive risposte ricevute, sulle modifiche necessarie da fare in merito alle decisioni intraprese e da intraprendere. D'altro lato, gli studenti possono riflettere sui propri interventi e su quelli dei compagni, valutandone opportunità ed efficacia e riuscire, in tal modo, a certificare, successivamente, il proprio eventuale processo di apprendimento. Infine, la richiesta di scrivere in chat di matematica, se da un lato risente della difficoltà di riprodurre testi di matematica in una chat testuale, dall'altra consente di rilevare potenziare le capacità linguistiche degli studenti o, comunque, carenze su cui intervenire successivamente.
Due ultime considerazioni riguardanti nello specifico lo *storytelling* in matematica.
Dopo aver sperimentato il ruolo di sceneggiatori, riteniamo che la richiesta di costruzione di una storia matematica possa divenire innovativo strumento di valutazione formativa, nel momento in cui la responsabilità della scrittura viene affidata ai nostri studenti, considerato che uno *storyboard* coerentemente progettato manifesta certamente il controllo dei contenuti trattati e degli obiettivi da perseguire. Quanto invece alla replicabilità dell'utilizzo di storie matematiche con i propri studenti, riteniamo fondamentale la condivisione dei fumetti progettati dai partecipanti al corso DIST-M B3 in questi tre anni, attraverso un repository che sarà messo a disposizione dal gruppo di ricerca che ha condotto la fase di formazione e dalla Fondazione dei Lincei, in modo da creare una comunità di pratica che possa contribuire anche al miglioramento degli *storyboard* esistenti.

Bibliografia

Albano, G., Coppola, C., & Dello Iacono, U. (2021). What does 'Inside Out' mean in problem solving? *For the Learning of Mathematics*, *41*(2), 32–36. https://www.jstor.org/stable/27091202

Albano, G., Coppola, C., Dello Iacono, U., Fiorentino, G., Pierri, A., & Polo, M. (2020). Technology to enable new paradigms of teaching/learning in mathematics: The digital interactive storytelling case. *Journal of E-learning and Knowledge Society*, *16*(1), 65–71. https://doi.org/10.20368/1971-8829/1135201

Albano, G., Coppola, C., Dello Iacono, U., Fiorentino, G., Pierri, A., Tortora, R., Marsico, G., Mollo, M., Concas, A., Ascione, E., Romano, P., Deiana, G., & Polo, M. (2022). Digital Interactive Storytelling in Matematica: Un approccio sociale orientato alle competenze. *Relazione del XXXVIII Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica "Giovanni Prodi"*. AIRDM. https://www.airdm.org/wp-content/uploads/2022/DIST-M_Relazione-Completa_Inviata.pdf

Albano, G., Coppola, C., & Polo, M. (2024). Digital Interactive Storytelling in Matematica: Un dispositivo metodologico per l'apprendimento sociale orientato alle competenze. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *16*, 9–35. http://dx.doi.org/10.33683/ddm.24.16.1

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica.* Centro documentazione educativa.

Bartolini Bussi, M. G., & Ramploud, A. (2018). *Il lesson study per la formazione degli insegnanti.* Carocci.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, *38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Mason, J. (1998). Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*, 243–267. https://doi.org/10.1023/A:1009973717476

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 116–124). Hellenic Mathematical Society.

Organization for Economic, Cooperation and Development. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy.* PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-en

Postman, N., & Weingartner, C. (1973). *Teaching as a Subversive Activity.* Delta.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2019). *Teaching Mathematics as Storytelling.* Brill.

DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (16), 164 - 179, DOI: 10.33683/ddm.24.16.7

OPEN ACCESS

Lo storytelling, la sinergia di artefatti e il gioco per costruire il senso di numero naturale

Storytelling, synergy between artefacts and play to construct the natural number sense

Michele Giuliano Fiorentino, Antonella Montone e Giuditta Ricciardiello
Università degli Studi di Bari "Aldo Moro" – Italia

michele.fiorentino@uniba.it, antonella.montone@uniba.it, giuditta.ricciardiello@uniba.it

Sunto / L'esperienza didattica sperimentale qui presentata è stata progettata sulla base della teoria della mediazione semiotica e dello storytelling. Realizzata in una classe di prima primaria, essa ha avuto come obiettivo la costruzione del senso di numero naturale e la linea dei numeri, attraverso le potenzialità offerte dalla struttura narrativa delle fiabe, l'ausilio del gioco e l'utilizzo di artefatti, in una prospettiva di curricolo verticale. Attraverso la narrazione, la sinergia di tre artefatti e il gioco si è favorita la costruzione del "senso" di numero naturale nei suoi tre aspetti cardinale, ordinale e ricorsivo, favorendo negli alunni l'acquisizione degli obiettivi didattici espressi nelle Indicazioni nazionali e – in un'ottica più a lungo termine – nei traguardi per lo sviluppo delle competenze esplicitati nello stesso documento.

Parole chiave: *storytelling*; numeri naturali; senso del numero naturale; artefatti; gioco.

Abstract / The didactical experimental path here presented has been designed on the basis of the semiotic mediation theory and of the storytelling. This research and experimental work, carried out in a first grade class of primary school, aimed to build the sense of natural number and the number line, through the potential offered by the narrative structure of fairy tales, the aid of game and the use of artefacts, in a vertical curriculum perspective. Through the narration, the synergy of three artefacts and the game, the construction of the natural number sense was promoted in its three aspects cardinal, ordinal and recursive, encouraging students to acquire the teaching objectives expressed in the National guidelines and – from a more long-term perspective – in the goals for the development of skills set out in the same document.

Keywords: storytelling; natural numbers; natural number sense; artefacts; game.

1 Introduzione

Il numero naturale è presente in tutte le attività di vita quotidiana e in particolare nella vita dei bambini, i quali sin dai primi anni contano piccole quantità ed esprimono situazioni (età, data di nascita, componenti della famiglia, misurazioni, ordinamenti ecc.). All'ingresso nella scuola primaria[1] e lungo tutto il percorso scolastico, il numero rappresenta uno dei nuclei fondanti della matematica oltre che uno dei temi principali, come indicato nei documenti ministeriali. Accade spesso che le necessità di acquisizione di abilità di lettura e scrittura di numeri naturali, o di memorizzazione della sequenza numerica, non siano accompagnate da un lavoro altrettanto approfondito riguardante il senso del numero. Questo può accadere più frequentemente con alunni in difficoltà, i quali potrebbero trovare conforto e sicurezza in apprendimenti riproduttivi e schematici, rischiando così di rimanere esclusi da apprendimenti più significativi.
Obiettivo principale del percorso didattico sperimentale qui proposto è quello di costruire il senso di numero naturale e la linea dei numeri, attraverso la narrazione, l'ausilio del gioco e l'utilizzo di artefatti. In particolare, la narrazione e il gioco vengono scelti quali modalità funzionali per approcciarsi alla scoperta e alla costruzione di nuovi concetti matematici. Abbiamo ritenuto l'ambiente fantastico delle fiabe il luogo in cui il bambino potrebbe mettere in atto una forte capacità creativa, distaccandosi dalla realtà che lo circonda e utilizzando una forma di pensiero astratto, necessario a costruire il pensiero matematico formale. L'esperienza didattica sperimentale qui descritta è stata realizzata con bambini di scuola primaria, i quali hanno elaborato tutti gli elementi costitutivi di una fiaba, inizialmente magica e successivamente scientifica, laddove ciò che serve e ciò che accade ai personaggi si trasforma in concetti matematici e problemi da risolvere. In questo articolo, oltre a presentare la progettazione didattica sperimentale, si analizzano le potenzialità della narrazione per la costruzione di concetti matematici attraverso il gioco e le potenzialità semiotiche di uno degli artefatti utilizzati.

2 Quadro teorico di riferimento

2.1 Teoria della mediazione semiotica e ruolo degli artefatti, il gioco e lo storytelling come ambiente didattico laboratoriale

Secondo la teoria della mediazione semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), l'uso di artefatti adeguatamente individuati, che svolgono la funzione di mediatori dell'apprendimento, favorisce la costruzione di significati matematici e di concetti complessi. La TMS inoltre costituisce un importante riferimento per studiare il rapporto tra gli artefatti, le azioni che essi consentono di compiere e la costruzione dei concetti matematici da parte degli allievi che li utilizzano.
L'uso del termine "artefatto" e quello della relativa espressione "schema d'uso" sono coerenti con quelli dati da Rabardel (1995), ma sono stati rielaborati da Bartolini Bussi e Mariotti (2008) per definire il costrutto di potenziale semiotico: da un lato, i significati personali sono legati all'uso dell'artefatto, in particolare in relazione allo scopo di risolvere il compito; d'altra parte, i significati matematici possono essere correlati all'artefatto e al suo utilizzo. Questa doppia relazione semiotica sarà chiamata *potenziale semiotico* di un artefatto.
In questo senso, le potenzialità didattiche offerte da qualsiasi artefatto possono essere messe in relazione con la possibilità di sfruttare tale duplice relazione che l'artefatto ha con i significati personali

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

che emergono dal suo uso e con i significati matematici che potrebbero essere evocati da tale uso. Coerentemente, qualsiasi intervento didattico può essere progettato sulla base di tali potenzialità e mirare a favorire l'evoluzione dai significati personali radicati nell'uso dell'artefatto verso i significati matematici che costituiscono l'obiettivo educativo.

Un ulteriore costrutto teorico a cui abbiamo fatto riferimento riguarda la nozione di sinergia tra artefatti differenti (Mariotti & Montone, 2020). In una prospettiva semiotica coerente con la TMS, la nozione di sinergia fa riferimento all'emergere e all'evoluzione dei segni, sia nella fase individuale che in quella collettiva dell'attività in classe, e in relazione ai diversi artefatti coinvolti. Si classifica come evento di sinergia qualsiasi fenomeno in cui sia possibile riconoscere che un riferimento implicito o esplicito a diversi artefatti crea una relazione tra significati che emergono dal loro uso. Una manifestazione di sinergia si ha quando l'emergere di un fenomeno di interferenza semiotica favorisce l'evoluzione dei segni in un'efficace catena semiotica (Maffia & Maracci, 2019). Quando i significati legati all'uso di uno degli artefatti completano i significati emersi dall'uso dell'altro, ad esempio fornendo caratteristiche extra, si dice che si è verificata una sinergia che contribuisce ad approfondire e tessere la rete semiotica connessa al significato matematico. La sinergia si verifica quando segni specifici entrano in risonanza con i diversi significati radicati nell'esperienza con diversi artefatti (Mariotti & Montone, 2020).

Questi presupposti didattici sono coerenti con l'utilizzo di metodologie laboratoriali nella didattica. Da questo punto di vista, anche le Indicazioni nazionali (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012) mettono in evidenza l'importanza di costruire concetti raffinati e complessi a partire dai primi anni di scuola e forniscono suggerimenti metodologici per affrontare e costruire in modo graduale e circolare i concetti astratti. In particolare, nel documento si suggerisce di:

> «Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interne alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento» (MIUR, 2012, p. 27) e ancora «l'esperimento, la manipolazione, il gioco e la narrazione sono delle occasioni privilegiate per apprendere per via pratica, quello che successivamente dovrà essere fatto oggetto di più elaborate conoscenze teoriche e sperimentali».
>
> (MIUR, 2012, p. 7)

In tale prospettiva, il "laboratorio" nel quale si sviluppa il legame tra il processo narrativo e la costruzione di concetti matematici, è quello dello storytelling, un ambiente di apprendimento costruttivista. Esso si può intendere come un vero e proprio sistema di elementi in cui sono rilevanti il luogo dove si svolge l'attività, gli attori coinvolti, il tempo, le regole di comportamento, i compiti e i problemi da risolvere, gli artefatti da utilizzare, i linguaggi da utilizzare e gli aspetti culturali da selezionare, analizzare e manipolare. In tale sistema lo studente diventa il protagonista orientandosi nell'attività di produzione dei significati. Tali attività vengono svolte in maniera collaborativa e permettono di costruire una storia finale, identificata come un artefatto culturale. Il tutto si svolge in un'attività di problem solving/gioco in cui si sviluppano la sperimentazione, la creatività, la discussione, l'analisi e le interpretazioni delle situazioni in un contesto che attribuisce ad esse un significato proprio in relazione al compito da svolgere e ai significati da costruire. La risoluzione di un problema contestualizzata in una situazione reale adotta procedure tipicamente utilizzate dagli specialisti della disciplina. Tutto ciò permette agli studenti di acquisire consapevolezza e costruire i concetti della disciplina, nel ruolo di esperti (Dunlap & Grabinger, 1996).

Il gioco è stato lo strumento attraverso il quale i personaggi narrativi, frutto dell'immaginazione dei bambini, le loro azioni e il contesto nel quale essi si muovono hanno assunto il ruolo di mediatori di concetti matematici. In questa fascia di età il gioco è "una cosa seria", rappresenta un "problema" da affrontare e risolvere, per potersi divertire; svolge, inoltre, un ruolo centrale nella motivazione e favorisce l'inclusione, poichè è un'attività fortemente cooperativa (Butterworth, 1999).

Durante il gioco viene stimolato il confronto dialettico ed è più facile che ci sia accettazione del fallimento (si gioca per giocare, non per vincere) e delle idee dell'altro. Mentre giocano i bambini non si sentono giudicati dall'insegnante, si sentono liberi di motivare le loro scelte, di affermare le loro opinioni e di confrontarsi con le idee dei compagni (D'Amore & Sbaragli, 2011).
Il gioco, quindi, regola l'autodisciplina che serve al buon funzionamento e alla riuscita dell'attività, promuove l'intelligenza sociale e funziona da catalizzatore dell'attività didattica. Esso, infatti, favorisce la devoluzione, meccanismo grazie al quale i bambini diventano effettivamente protagonisti del loro processo di apprendimento, perché consapevolmente responsabili delle loro azioni e scelte (D'Amore & Marazzani, 2011). Il gioco ha inoltre valenza estremamente positiva a livello sociale e, al contempo, aiuta a sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, come prescritto dalle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012).
La struttura narrativa, infine, ha costituito l'ambiente di apprendimento, tipico dello storytelling, nel quale i bambini di scuola primaria hanno organizzato le conoscenze, rivelando una forte capacità creativa, che ha permesso loro di staccarsi dalla realtà che li circonda (Crespi, 2012). In questo processo, il bambino che costruisce la storia mette in relazione una serie di fattori che danno senso ad idee astratte, come ad esempio il numero, perchè contestualizzate e rese utili dalle problematizzazioni presenti nella storia.
In sintesi, l'esperienza didattica qui presentata si compone di alcuni elementi progettuali intrecciati tra loro: da un lato la TMS ha fornito la struttura per la progettazione, l'implementazione e l'analisi delle attività, dall'altro la narrazione di una storia ha avuto il ruolo di veicolo attraverso cui le idee matematiche sono state calate nella realtà, nello spazio e nel tempo, legandosi alle intenzioni di chi narra (Dibattista & Morgese, 2014).

2.2 Il contenuto matematico: il numero naturale

Nel curricolo di matematica, il concetto di numero naturale si sviluppa verticalmente dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado,[2] poiché va ampliandosi e arricchendosi gradualmente, diventando via via più complesso (Villani, 2003). Lungi dall'essere un concetto banale, esso è in realtà complesso, composto da vari aspetti e sfaccettature. In questo contributo prenderemo in considerazione tre aspetti: l'aspetto cardinale, l'aspetto ordinale, e l'aspetto ricorsivo.
L'aspetto cardinale del numero fa riferimento all'idea di equipotenza tra insiemi non vuoti in corrispondenza biunivoca tra loro. L'equipotenza è una "relazione di equivalenza" perché soddisfa la proprietà riflessiva, quella simmetrica e quella transitiva; questo fa sì che ogni classe di equivalenza sia composta da insiemi equipotenti, e che ciascun numero cardinale possa essere interpretato, appunto, come classe di equivalenza comprendente tutti gli insiemi di numerosità pari al numero stesso. Il numero è dunque il simbolo che rappresenta la suddetta classe di equivalenza.
Cercare di stabilire una corrispondenza biunivoca tra due insiemi porta a diversi casi possibili: può accadere che gli elementi del primo insieme siano tanti quanti quelli del secondo, che il primo insieme contenga più elementi del secondo o viceversa. Il confronto tra queste quantità permette di creare una relazione d'ordine, e induce l'ordinamento usuale nei numeri naturali. Tale relazione è quella che ci permette di affermare quale insieme contenga il minor numero di elementi, ovvero quale numero precede un altro. L'aspetto ordinale del numero quindi consente di effettuare ordinamenti, conducendo gradualmente a costruire la linea dei numeri. Se l'aspetto cardinale permette, semplificando, di contare gli elementi di un insieme e l'aspetto ordinale permette di riordinarli, secondo un ordine crescente o decrescente, l'aspetto ricorsivo del numero naturale, attraverso gli assiomi di Peano, completa il concetto di numero perché fissa un punto di partenza assumendo zero come primo numero naturale e definisce l'operazione di successivo per generare l'intera sequenza numerica. Infatti, attra-

2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

verso l'azione di aggiungere 1 ad un qualunque numero n, è possibile costruire il numero successivo di n, $n + 1$, e costruire una linea dei numeri che partendo da 0 non contenga "salti" (Contardi et al., 2004; Courant & Robins, 1971).

3 Obiettivi, scelte didattiche e artefatti utilizzati

Come più volte emerso, l'obiettivo matematico del percorso sperimentale proposto è costruire il senso di numero naturale e la linea dei numeri.
Questi concetti, che generalmente potrebbero legarsi ad un'idea puramente quantitativa, racchiudono una struttura matematica complessa di natura qualitativa che fa riferimento a raffinati concetti matematici (come ad esempio la relazione di equivalenza, la relazione d'ordine, la corrispondenza biunivoca, l'assiomatica di Peano), che sono indispensabili per la costruzione di una visione del numero di valore "qualitativo", piuttosto che meramente "quantitativo". Potrebbe, inoltre, accadere che i bambini, anche molto piccoli, contino ripetendo la sequenza numerica, come fosse una filastrocca, talvolta saltando dei numeri. Questo potrebbe essere indicativo del fatto che i bambini possano aver acquisito piuttosto un'abilità meccanica di ripetizione mnemonica, e non il significato matematico.
Per far sì che il bambino costruisca correttamente il concetto di numero naturale in tutti i suoi aspetti è necessario guidarlo verso l'acquisizione dei diversi elementi che lo compongono.
Gli aspetti specifici del numero sono stati evocati dall'utilizzo di tre artefatti legati a compiti adeguatamente strutturati dall'insegnante (Di Paola et al., 2023).
Gli artefatti sono stati scelti per i loro potenziali semiotici, in termini di significati sottesi che possono essere evocati quando si eseguono compiti che coinvolgono il loro uso. In particolare, l'intera sperimentazione ha utilizzato due artefatti concreti, due giochi di società che coinvolgono tutti gli studenti, inclusi gli alunni in difficoltà, e un artefatto digitale, un robottino programmabile in grado di muoversi su una linea dei numeri appositamente creata su carta quadrettata.
Il primo artefatto, utilizzato per effettuare il "Gioco del via!", avente come obiettivo quello di costruire l'aspetto cardinale del numero come rappresentante delle classi di equipotenza, è costituito da: buste trasparenti richiudibili che modellizzano gli insiemi contenenti oggetti di piccole dimensioni; alcune buste bianche, tutte uguali, che modellizzano le classi di equivalenza. Ciascun giocatore possiede una busta trasparente riempita con un numero casuale di oggetti di cancelleria.
Il secondo artefatto, utilizzato per effettuare il gioco de "Il prato dei conigli", è costituito da una plancia di gioco divisa in quattro aree, 40 coniglietti di legno di diversi colori e un mazzo di carte da gioco che raffigurano delle quantità. La plancia di gioco e i coniglietti evocano rispettivamente l'idea di insieme e degli elementi di un insieme, e la loro cardinalità rispetto al colore dei coniglietti. Le carte permettono di effettuare una corrispondenza biunivoca tra il numero rappresentato su ciascuna carta e i coniglietti presenti sulla plancia di gioco. Con lo spostamento di un coniglietto da un'area all'altra si simula naturalmente la ricorsività, ovvero l'aggiunta o la sottrazione di 1 per aumentare o diminuire la numerosità di coniglietti dello stesso colore.
Il terzo artefatto digitale, utilizzato per effettuare il gioco "A spasso con NumberBot", è costituito da un robottino programmabile e una striscia di carta su cui sono rappresentati i numeri da 0 a 10, che evoca l'idea di linea dei numeri. Su di essa il robottino si muove seguendo una determinata programmazione fatta dai bambini e, spostandosi in modo programmato, simula il movimento sulla linea dei numeri, evocando l'idea di ricorsività (+1 e –1) e di rappresentazione della successione numerica.
Il percorso è stato strutturato in cicli didattici con consegne ben precise e momenti di discussione matematica collettiva. Durante la discussione matematica sono emersi i vari aspetti del numero naturale, legati ai diversi artefatti utilizzati. Tale processo di riflessione condivisa ha guidato gli alunni

verso la costruzione consapevole del complesso concetto di numero naturale, attraverso un percorso di scoperta e risoluzione di problemi legati di volta in volta al gioco proposto.
Con l'utilizzo di giochi a squadre è stato possibile costruire significati matematici attraverso l'interazione sociale, il lavoro cooperativo e la risoluzione di "problemi" sorti ogni qualvolta bisognava giocare. Il processo di apprendimento, durante le attività in classe, si è realizzato "per gioco", partecipando ad un gioco al quale ciascuno ha apportato il proprio personale e originale contributo (Butterworth, 1999).

4 Il percorso sperimentale: le attività di gioco

Il percorso sperimentale è stato realizzato in una classe prima primaria dell'Istituto Comprensivo Balilla-Imbriani di Bari, composta da 21 alunni dei quali uno con insegnante di sostegno per grave disabilità e due alunni con difficoltà afferente all'area comportamentale e affettivo-relazionale. L'intera sperimentazione si è sviluppata inizialmente attraverso la creazione di una fiaba, in contesto matematico, da parte dei bambini, seguita dallo svolgimento di tre giochi, "Gioco del via!", "Il prato dei conigli" e "A spasso con NumberBot", svolti in sequenza.
La creazione della fiaba ha avuto come obiettivo quello di generare un sistema di elementi in cui lo studente diventa protagonista orientandosi nell'attività di produzione dei significati.

4.1 Gioco del via!

Il "Gioco del via!", mirato a costruire l'aspetto cardinale del numero come rappresentante delle classi di equipotenza, ha poi permesso di costruire gli aspetti ordinale e ricorsivo attraverso la risoluzione di situazioni problematiche che si sono presentate nello sviluppo del gioco stesso.
Individuato un conduttore di gioco, egli estrae dal sacchetto un oggetto per volta e ogni volta dice «Via!»; contestualmente, ogni volta che il conduttore dice «Via!» i partecipanti estraggono dalla loro busta un oggetto e lo poggiano sul banco. In tal modo si evoca un'idea di corrispondenza biunivoca tra gli elementi delle buste trasparenti. Ogni volta che uno o più giocatori terminano gli oggetti della propria busta, dicono «Stop!», rimettono tutti gli oggetti nella busta, la chiudono e le ripongono in una busta bianca. In questo modo si evoca l'idea di classi di equipotenza. Il gioco termina quando tutti i partecipanti hanno svuotato le loro buste trasparenti posizionandole nelle buste bianche (o classi di equivalenza). In un momento successivo, i bambini mettono in ordine le classi di equipotenza, stabilendo l'ordinamento tra le buste bianche ricorrendo al confronto tra le buste trasparenti contenute in esse (a due a due) e individuando qual è la busta bianca che viene prima e quella che viene dopo (principio dell'ordinamento: ad esempio, $5 > 3$ perché 2 aggiunto a 3 dà come risultato 5). Infine i bambini completano la serie dei numeri, "riempiendo" i buchi, attraverso il principio della ricorsività (+1), ad esempio ottenendo il 6 aggiungendo 1 a 5 (Di Paola et al., 2023).

4.2 Il prato dei conigli

Il gioco "Il prato dei conigli" è composto da un tabellone quadrato, diviso in quattro aree, sulle quali sono riprodotti diversi ambienti di gioco (l'orto, la collina, il laghetto e il cespuglio), su cui si distribuiscono 40 coniglietti in legno di cinque colori diversi sistemando 10 coniglietti scelti a caso tra i 40 in ciascuna area. Per permetter a più gruppi di giocare, è stato riprodotto lo stesso gioco sostituendo i coniglietti con i tappi delle bottigliette di plastica di colore diverso.
Su ogni plancia giocano 5 bambini, ad ognuno dei quali vengono consegnate 5 carte-punto. Su ogni carta-punto sono raffigurate delle quantità di coniglietti, espresse in tre differenti registri semiotici: il disegno dei coniglietti nella numerosità della carta e il disegno della mano che mostra lo stesso

numero di dita alzate, il numero scritto in cifra e il numero scritto a parole (**Figura 1**). Sulla stessa carta sono indicati i punti-carota, assegnati in proporzione alla numerosità dei coniglietti presenti sulla carta, che permettono l'avanzamento del segnalino sul tabellone di gioco. Ogni punto-carota permette di avanzare di una posizione. Vince il gioco chi per primo raggiunge il traguardo dei 30 punti-carota.

Figura 1. Le carte del gioco e il tabellone di gioco de "Il prato dei conigli".

Il giocatore di turno inizia il gioco con il lancio di un dado sul quale sono raffigurati i 5 colori diversi, uno per famiglia di conigli, più un jolly, che gli consente di determinare il colore del proprio turno di gioco. Stabilito il colore, ad esempio blu, egli può giocare una o più carte indicanti il numero di coniglietti corrispondente al numero di tappi/coniglietti di quel colore, nel nostro caso blu, presenti in una stessa area di gioco. Prima di dichiarare quale carta o quali carte intende giocare, il giocatore di turno può effettuare uno spostamento tattico di 1 coniglio da un'area all'altra, al fine di creare la numerosità di conigli, che gli consenta di giocare la carta da lui scelta, conservando la numerosità di 10 tappi/coniglietti in ciascuna area. Tale spostamento evoca l'idea di ricorsività, nel passare da un numero al successivo o al precedente.
Se, ad esempio, si vuole formare il numero 5 nell'orto, dove compaiono 4 tappi/coniglietti del colore prescelto, si sposta un coniglietto dello stesso colore da un'altra area. Al contempo, dovendo mantenere la numerosità di 10 in ciascuna area, si deve spostare in questa area a sua volta un tappo/coniglietto di un altro colore. In questo modo si effettua una operazione del tipo +1 –1 per rendere valida la carta con cui giocare e accumulare i punti-carota.
Obiettivo del gioco è effettuare una corretta corrispondenza biunivoca tra i coniglietti sulla carta e il numero di tappi/coniglietti dello stesso colore presenti in una determinata area del prato.
Inoltre, il gioco induce ad ordinare le proprie carte prima di giocare per decidere quale strategia adoperare.

4.3 A spasso con NumberBot

Infine il gioco "A spasso con NumberBot" è stato realizzato su una striscia di carta numerata posta sul pavimento, utilizzata come riferimento dai bambini per programmare e far muovere il robottino sulla casella giusta dopo un certo numero di passi. La striscia di carta rappresenta la retta dei numeri costruita con i due artefatti precedenti. La necessità di programmare facendo fare al robottino un passo per volta, con la funzione "vai avanti" che corrisponde all'operazione +1 o "vai indietro" che corrisponde a –1 dell'aspetto ricorsivo, ha indotto gli alunni a mettere in atto sia l'aspetto ricorsivo (per esempio si sposta il robottino da 4 a 7 facendo ripetutamente +1), sia l'aspetto cardinale attraverso la corrispondenza tra il numero da raggiungere e il numero di passi da far eseguire al robottino.
In questo articolo presenteremo l'analisi dei personaggi e delle descrizioni degli elementi principali della storia (luoghi e ruoli dei personaggi) che gli alunni hanno creato, in connessione con l'analisi di

alcuni episodi riferiti al gioco de "Il prato dei conigli" e alcuni episodi avvenuti durante l'utilizzo degli altri due giochi per mettere in evidenza la sinergia che si è sviluppata.
Nel seguito si presentano le fasi delle attività sperimentali, nelle quali dettagliamo alcuni stralci delle discussioni condotte con la relativa analisi.

5 L'esperienza didattica: descrizione e analisi

5.1 Inventiamo una storia: la storia dei coniglietti

L'insegnante ha avviato la discussione in classe dando l'incipit di una storia denominata "Il prato dei conigli": «C'era una volta una famiglia di conigli che viveva in un prato…». È seguita un'attività di gruppo, guidata in modo dialogico dall'insegnante, nella quale i bambini sono stati invitati a continuare la narrazione della storia attraverso la descrizione dei personaggi della storia, i coniglietti, dell'ambiente in cui essi vivono e la formulazione di alcuni problemi che i protagonisti devono risolvere nella loro quotidianità. In questo processo di costruzione della storia si tiene conto di vari fattori: il tipo di storia, i personaggi coinvolti, le loro emozioni, il luogo e il tempo in cui si svolge la storia, le forme e dimensioni dei luoghi, le caratteristiche fisiche dei personaggi, i dialoghi tra di essi, gli oggetti presenti nella storia. Tali fattori favoriscono la creazione di un ambiente narrativo in cui possano emergere conflitti cognitivi laddove i bambini non hanno esperienze dirette perché presenti in uno spazio e in un tempo appartenenti alla loro immaginazione piuttosto che alla realtà.
In questa fase l'obiettivo dell'insegnante è quello di rendere i bambini creatori dei personaggi della storia, dell'ambiente in cui essi vivono e delle dinamiche che si sviluppano tra di loro, per permettere una familiarizzazione consapevole delle attività che saranno proposte nella fase successiva. Tale storia è stata interamente creata dai bambini, guidati dall'insegnante che ha fornito elementi introduttivi. La storia è stata interamente videoregistrata e successivamente trascritta dall'insegnante.
Di seguito si riportano alcune descrizioni di luoghi e personaggi emerse dai bambini:

1. Lu.: «… il prato era diviso in quartieri e in ciascun quartiere vivevano alcune famiglie di coniglietti…»
2. A.: «... in ogni quartiere c'era il coniglietto-vigile che faceva rispettare le regole a tutti gli abitanti…»
3. V.: «... c'era anche la coniglietta maestra che accoglieva tutti i coniglietti bambini nella stessa scuola al centro del paese…»
4. M.: «… ad un certo punto scompare un piccolo coniglietto, che tutti iniziano a cercare… dove sarà finito?»
5. Ins.: «In questo paese… scompare un piccolo coniglietto, e i vigili del quartiere scoprono che una strega cattiva lo ha rapito e rinchiuso in una torre che dista 30 passi dall'uscita del paese… come possiamo aiutare i suoi compagni a cercarlo?».

Spinti dalla richiesta dell'insegnante, gli studenti formulano alcune ipotesi, tra cui anche quella di far giocare i protagonisti delle loro storie. Dopo aver giocato al "Gioco del via!", durante il quale sono emersi gli aspetti del numero naturale in una prima versione non del tutto formalizzata, l'insegnante propone un gioco, con protagonisti dei coniglietti, richiamando la storia che i bambini avevano creato.
In questa fase l'insegnante propone ai bambini il gioco de "Il prato dei conigli", adattando le regole del gioco sopra descritto alla storia inventata dai bambini. Pertanto, obiettivo del gioco è diventato quello di liberare il coniglietto scomparso dalla torre localizzata al termine del percorso di gioco.
La suddivisione del tabellone in quadranti richiama la storia inventata dai bambini nella fase prece-

dente, permettendo agli stessi di immedesimarsi nel gioco come se fosse un oggetto reale ma creato a partire dalla loro immaginazione.
Da un sacchetto che contiene 60 conigli/tappi divisi in 5 colori differenti, vengono pescati 40 conigli, distribuiti casualmente, 10 su ciascuna area. I colori differenti rappresentano le diverse famiglie di coniglietti descritte nella storia inventata dai bambini. Inoltre, nello sviluppo del gioco, quando i bambini spostano i coniglietti da una zona all'altra, devono giustificare lo spostamento ambientando la motivazione nella storia.

5.2 L'ordinamento

L'insegnante divide la classe in gruppi da 5, chiedendo agli alunni di giocare a "Il prato dei conigli". Dopo aver condiviso le regole del gioco, in cui sono state utilizzate le narrazioni descrittive formulate dai bambini nella fase precedente per descrivere personaggi e luoghi, l'insegnante distribuisce 5 carte a ciascun giocatore e pone la prima domanda/problema: «Come possiamo disporre le carte in mano, per giocare e avere il controllo sulla giocata migliore?».

Un primo episodio significativo sull'ordinamento è il seguente:

1. E.: «… tipo 1, 2, 3».
2. Lo.: «8, 10».
3. E.: «7, 5».
4. Ins.: «Quindi, che vuol dire?»
5. Lu.: «Cioè, dobbiamo metterle per ordine, cioè le più alte con le più alte…»
6. I.: «Metterle in ordine di grandezza».
7. M.: «Dal più piccolo al più grande».
8. I.: «Dal numero più basso al numero più alto».
9. Ins.: «M., tu cosa stai facendo?»
10. M.: «Le sto ordinando».
11. Ins.: «Fammi vedere, come?»
12. M.: «[Esita un attimo, indica con il dito le carte facendo una specie di scala (Figura 2) e poi risponde] 1 coniglietto! Il coniglietto-vigile che è il più grande di tutti».
13. Ins.: «E poi? Continua…»
14. M.: «4 coniglietti, una famiglia di coniglietti!»
15. Ins.: «E…?»
16. M.: «6 coniglietti».
17. Ins.: «E poi?»
18. M.: «8 coniglietti».
19. Ins.: «E…?»
20. M.: «10 coniglietti!... una grandissima famiglia di coniglietti!»
21. Ins.: «Perché le hai messe in quell'ordine?»
22. M.: «[Indicando il 4] perché questa è la famiglia meno numerosa… e poi diventa sempre più grande [compiendo un gesto a scala, in ordine crescente]».

Figura 2. M. indica i coniglietti con il dito e poi mostra le carte in ordine crescente.

Il coinvolgimento dei bambini nella storia "Il prato dei conigli" conduce tutti loro a cimentarsi con l'ordinamento e si arricchisce di commenti legati alle vicende narrate nella storia. Infatti, si fa riferimento al coniglietto-vigile e quando si confrontano le numerosità dei coniglietti sulle carte non si parla semplicemente di numeri ma di famiglie più o meno numerose, attribuendo alla famiglia più "grande" di tutte la possibilità di liberare prima il coniglietto scomparso. Il gioco diventa così un momento in cui la storia e la rappresentazione delle famiglie di coniglietti sulle carte evocano l'idea di ordinamento.

Un altro episodio significativo di ordinamento è il seguente.

1. Ins.: «Allora E., perché le hai messe così?»
2. E.: «Perché è l'ordine, tipo 0, 1, 2.. dal più gra.. [si corregge subito]… dal più piccolo al più grande, perché qui [indica con il dito ciascuno dei 7 coniglietti presenti sulla carta con 7 coniglietti] i coniglietti sono di più e qui [indica con il dito la carta con 5 coniglietti] sono di meno».
3. Ins.: «E perché il 7 sta lì, non poteva stare prima del 5?»
4. E.: «[Fissa le carte, tocca il 5] No!»

[La maestra prende le carte e le dispone sul banco, rispettando l'ordine detto da E. Poi effettua uno scambio di posto tra il 5 e il 7.]

5. Ins.: «È così?»
6. E.: «No… perché il 7 è più grande del 5 e il 5 è più piccolo del 7. Infatti, la famiglia dei 7 coniglietti Rossi comprendeva anche i due nonni. Mentre nella famiglia dei 5 coniglietti Blu, i nonni non ci sono… il 5 è minore del 7…»
7. Ins.: «Va bene! Ma come fai a dire che 5 è minore di 7? Sei proprio sicuro?»
8. E.: «Sì, perché se conto da 5 e aggiungo uno, ho prima 6 e poi aggiungo ancora uno e ho 7… come quando abbiamo ordinato le buste bianche nel "Gioco del via!" confrontando le bustine trasparenti… per andare da 5 a 7 mancavano due cose…»
9. Lu.: «Sì maestra, nel mio sacchetto del 7 c'era una gomma e una matita in più rispetto a quello del 5. Infatti 7 è maggiore di 5, ha ragione E., è come quando aggiungiamo i coniglietti alle famiglie per ottenere il numero più grande».

Figura 3. E. riordina le sue carte.

E. nell'ordinare le sue carte (Figura 3), mette in atto la relazione d'ordine tra il 7 e il 5 e stabilisce che 5 è più piccolo di 7 attraverso l'operatore +1 dell'aspetto ricorsivo. Inoltre, nell'effettuare il confronto tra 5 e 7, E. dimostra di manipolare i numeri con familiarità e consapevolezza, infatti parte dal numero 5 senza la necessità di ricominciare a contare dal numero 1. Egli mette in sinergia i significati costruiti con il "Gioco del via!" con quanto accade con le carte nel gioco de "Il prato dei conigli", infatti, richiama il confronto e l'ordinamento effettuato tra le classi di equipotenza del gioco precedente. A supporto della sua argomentazione fa riferimento alla storia dei coniglietti, indicando la diversa numerosità delle famiglie di coniglietti, contando i componenti (due nonni in più). L'episodio sembra interessante anche per l'evoluzione dei segni che E. e Lu. mettono in atto passando dai segni artefatto "di più/di meno" e "più grande/più piccolo", attraverso i segni pivot "aggiungere", "confrontare" e "ordinare", al segno matematico "maggiore/minore". Questa evoluzione di segni è indicata nell'estratto con la sottolineatura.

In questa fase tutti i bambini hanno effettuato un confronto tra le carte e le hanno ordinate correttamente, in ordine crescente o decrescente, in modo del tutto autonomo. L'utilizzo delle carte da gioco, con la rappresentazione dei coniglietti, ha evocato l'idea di più grande o più piccolo rispetto alla numerosità delle immagini. Inoltre, con riferimento alla narrazione delle vicende delle famiglie dei coniglietti, spesso i bambini, come si evince da quanto dice E., fanno corrispondere la numerosità dei coniglietti presenti sulle carte, alla numerosità dei componenti familiari della storia inventata nella fase precedente.

5.3 La corrispondenza biunivoca: come scegliere opportunamente la carta da giocare e effettuare spostamenti

Dopo aver ordinato le carte, i bambini sono stati invitati a lanciare il dado e a scegliere quale carta giocare.

Questo tipo di richiesta pone l'accento sull'aspetto cardinale del numero, in quanto si richiede di effettuare un confronto tra la numerosità di tappi/coniglietti dello stesso colore presenti sul prato e la numerosità dei coniglietti presenti sulla carta scelta per giocare.

In questa fase del gioco la "corrispondenza" è un elemento ricorrente. Infatti, essa emerge nel momento in cui i bambini devono effettuare la scelta della carta più conveniente da giocare: in quel momento, al fine di ottenere il punteggio migliore, è necessario verificare che il numero presente sulla propria carta sia lo stesso numero dei tappi/conigli di un determinato colore, in un'area del tabellone di gioco.

In questo modo si chiede di effettuare un'operazione di corrispondenza tra la carta (e quindi il disegno dei coniglietti e il simbolo numerico) e i tappi/coniglietti presenti sul tabellone.

1. Lu.: «Posso giocare la carta con 2 coniglietti, perché nell'orto ci sono due coniglietti che qui sono tappi di colore bianco. Questi due coniglietti della carta corrispondono a questi due tappi [con le dita indica i due tappi effettuando una corrispondenza tra la carta, i tappi sul tabellone e le sue dita]».
2. F.: «Io invece posso giocare la carta 5, perché in collina ci sono 5 coniglietti blu e non devo spostare nulla».

Figura 4. Movimento delle mani di Lu.

Figura 5. Gioco di F.

Nella Figura 4 si distingue chiaramente il movimento delle mani di Lu. per indicare la corrispondenza tra il numero presente sulla sua carta e il numero dei conigli/tappi presenti sul tabellone; nella Figura 5 F. usa la sua carta per tenere il conto dei tappi blu che corrispondono al numero della carta che lui ha deciso di giocare (il numero 5).

Anche in questo breve episodio, sembra evidente una evoluzione di segni nelle parole di Lu., il quale passa dal segno artefatto "due coniglietti" presenti sulla carta, attraverso il segno pivot "nell'orto ci sono due coniglietti che qui sono tappi", al segno matematico "corrispondono". Il tutto supportato dal gesto (segno pivot) della sua mano, che indica i due tappi presenti sul tabellone. L'evoluzione di segni è indicata nell'estratto con la sottolineatura.

Il gioco continua e, nei turni successivi, anche gli altri bambini effettuano le loro scelte, spostando un coniglio da un'area all'altra, per poter giocare una determinata carta. Questa regola ha in sé il principio della ricorsività, ovvero aggiungere o togliere 1 al numero di conigli presenti in una determinata area. E., infatti, per ottenere il numero 5, ha spostato dall'orto alla collina un coniglio bianco. In questo modo ha effettuato due operazioni: ha aumentato di una unità i conigli bianchi nella collina, passando da 4 a 5 ($4 + 1 = 5$), riuscendo così a rendere valida la carta in suo possesso (il 5) e ha diminuito, contestualmente, il numero di conigli bianchi presenti nell'orto, effettuando di fatto una sottrazione ($2 - 1 = 1$). In questo modo ha reso valida anche la sua carta con il numero 1, giocata nell'orto, conquistando più punti.

Questo tipo di azione è richiesta ad ogni turno di gioco, per ciascun giocatore e permette a tutti di mettere in atto non soltanto competenze di carattere aritmetico (contare in senso progressivo e regressivo, effettuare semplici operazioni di addizione e sottrazione), ma anche competenze strategiche, per rendere valido il maggior numero di carte possibili e conquistare, così, il maggior numero di punti.

5.4 Contare i conigli e verificare la correttezza delle carte giocate

A conclusione di ogni turno di gioco, per rendere valide le proprie carte, bisogna che tutti i giocatori effettuino una verifica della validità delle carte scelte. In questa fase si richiede di mettere in campo la capacità di contare, ricorrendo all'aspetto cardinale del numero. Tale aspetto emerge nel momento in cui i bambini devono verificare la corrispondenza biunivoca tra il numero dei tappi/conigli di un determinato colore presenti in un'area e la carta da loro giocata. Inoltre, i bambini controllano i punti da registrare sul tabellone, per poter avanzare con il segnalino e vincere.

Nella Figura 6 si vede come F. conti i suoi punti, sommando i punti-carota riportati su ciascuna delle tre carte che ha giocato ($1 + 2 + 3$).

Figura 6. F. conta i suoi punti.

F. effettua con il dito una corrispondenza tra il numero pronunciato a voce e le carote presenti sulle carte che lui ha giocato.

Nel seguente episodio si mostra un esempio in cui entrano in gioco i tre aspetti del numero naturale:

1. Ins.: «Che carte avete deciso di giocare?»
2. Lo.: «Io gioco la 8… e la 5… anzi la 5 e la 8 in ordine!»
3. Ins.: «E dove la giochi la 5?»
4. Lo.: «Sull'orto… qui ci sono 5 conigli rossi… forse no…»
5. E.: «Sono 6!»
6. Lo.: «Sì sono 6, ma posso spostare questo coniglio rosso in collina (**Figura 7**). Infatti, papà-coniglietto raggiunge i suoi fratelli al mercato in collina, dopo aver raccolto le carote dall'orto e lascia la moglie e i figli a raccoglierne altre. Così qui [indica l'orto] diventano 5 e qui [indica la collina] 8, dove ce ne sono già 7».

Figura 7. Lo. sposta il tappo/coniglietto rosso.

Questo estratto evidenzia come Lo. sia in grado di controllare contemporaneamente la numerosità delle carte, le vicende nella storia e le strategie di spostamento per riuscire a conquistare un numero elevato di punti.
Questo sembra faccia emergere l'acquisizione del senso del numero, evidenziata dal fatto che Lo. mani-

pola mentalmente sia i numeri presenti nelle sue carte, sia le vicende dalla storia, sia i punti-carota senza la necessità di contare i coniglietti e trasferendo tale numerosità direttamente sul tabellone di gioco. Così facendo, Lo. sembra mettere in atto i tre aspetti caratterizzanti il numero naturale; infatti, riconosce la stessa cardinalità delle sue carte e dei coniglietti presenti nelle zone del tabellone; con lo spostamento dei coniglietti mette in atto l'aspetto ricorsivo passando da 6 a 5 togliendo un tappo/coniglietto e da 7 a 8 aggiungendo un tappo/coniglietto; infine gioca le carte in ordine crescente, mettendo in atto l'aspetto ordinale. Tutta l'operazione acquisisce senso attraverso la narrazione sulla vita quotidiana dei coniglietti.

6 La sinergia tra artefatti

Il gioco de "Il prato dei conigli" è stato effettuato dopo che gli alunni hanno inventato la storia e hanno giocato al "Gioco del via!" (Di Paola et al., 2023).
L'utilizzo di più artefatti ha permesso agli alunni di giustificare le strategie scelte nell'effettuare un gioco facendo riferimento all'altro gioco.
Infatti, quando agli alunni è stato proposto il gioco "Il prato dei conigli" ed è stato chiesto loro «Come possiamo disporre le carte, per non confonderci?», gli alunni hanno osservato le carte e le hanno ordinate. Interessante è il seguente stralcio di discussione:

1. Ins.: «M., tu cosa stai facendo?»
2. M.: «Le sto ordinando».
3. Ins.: «Fammi vedere, come?»
4. M.: «0… 4, 5, 7, 8».
5. Ins.: «Perché le hai messe in quell'ordine?»
6. M.: «[Indicando il 4] perché questa è più piccola… e poi diventa sempre più grande [compiendo un gesto a scala, in ordine crescente]».
7. [Nel gruppo si sente la voce di M. S. che dice ad A.] «Facciamolo anche noi!»
8. M.: «Le ho messe in ordine perché così è come con le buste, facciamo prima e non ci confondiamo. Così so qual è la carta più grande e gioco con quella, 8… devo cercare di fare 8».
9. A.: «Ordiniamo le carte come abbiamo fatto con le buste, dalla più piccola alla più grande».

In questo stralcio di discussione emerge chiaramente la sinergia tra l'artefatto "Gioco del via!" e "Il prato dei conigli". M. fa espresso riferimento all'ordinamento generato con le buste durante il "Gioco del via!" per giustificare l'ordinamento delle carte. A. rispecchia le parole di M. aggiungendo l'ordinamento crescente. Anche la corrispondenza è un elemento ricorrente, in questo gioco. Essa emerge quando gli alunni devono effettuare la scelta della carta più conveniente da giocare: in quel momento, al fine di ottenere il punteggio migliore, è necessario verificare che il numero presente sulla propria carta sia lo stesso numero dei conigli in un'area de "Il prato dei conigli". Anche in questo caso fanno esplicito riferimento al "Gioco del via!" con frasi tipo «questo corrisponde a questo» e «questa carta con 7 conigli equivale ai 7 conigli dell'orto... come i sacchetti del 7 che erano tutti di 7 oggetti. Quindi sono corrispondenti». Anche in questi interventi si coglie il riferimento diretto all'artefatto usato precedentemente richiamato a giustificare la propria affermazione.
A completamento dell'intero percorso sperimentale, i bambini hanno svolto il gioco "A spasso con NumberBot", attraverso il quale hanno potuto rappresentare la sequenza numerica sulla retta. La descrizione e l'analisi dell'attività svolta in questo gioco non sono oggetto di questo articolo.

7 Conclusioni

È evidente in tutta l'attività la complessità della conquista del concetto di numero, così come emerge nei vari aspetti. La scelta di utilizzare la narrazione e il gioco quali cornici di fondo per approcciarsi alla scoperta e alla costruzione di nuovi concetti matematici, unite all'utilizzo di artefatti, ha permesso di costruire il concetto di numero nella sua globalità mettendo in evidenza come gli alunni fanno riferimento implicito o esplicito ai diversi artefatti creando una relazione tra significati che emergono dal loro uso.

Attraverso la narrazione i bambini rivelano una grande capacità di creare realtà immaginarie di cose e di problemi che però gradualmente riconducono a strutture razionali di pensiero manifestando, in tal modo, l'avvenuto cambiamento di routine nell'apprendimento (Sfard, 2008) in quanto l'attività di produrre situazioni nate dall'immaginazione e dalla fantasia ha innovato le possibilità di apprendere anche attraverso attività di gioco e di sfida tra gli alunni.

La scelta di utilizzare una struttura narrativa come ambiente di apprendimento, tipico dello storytelling, sembra essersi rivelato una risorsa, permettendo ai bambini di organizzare le loro conoscenze, in chiave creativa, creando un continuo dialogo tra la storia, il gioco e i concetti matematici, e facendo emergere conflitti cognitivi la cui risoluzione è potuta avvenire nelle fasi dell'esperienza.

In questo processo, la contestualizzazione dei problemi nelle vicende e nei luoghi della storia sembra abbia consentito agli alunni di mettere in relazione una serie di fattori che hanno dato senso a idee astratte, come quella di numero.

Nelle attività gli alunni hanno completato i significati legati all'uso di uno degli artefatti attraverso i significati emersi dall'uso dell'altro, mettendo in atto una sinergia che contribuisce ad approfondire e tessere la rete semiotica connessa al significato matematico. Va sottolineata la spontaneità e la scioltezza con cui gli alunni sono intervenuti durante le discussioni. La TMS ha rivelato la sua efficacia attraverso una scelta fondamentale e opportuna degli artefatti che, in modo non casuale, ha permesso agli alunni una conquista graduale e completa del concetto di numero. L'artefatto "Il prato dei conigli", infine, ha consentito agli alunni di sperimentare in modo del tutto autonomo il senso complessivo del numero, nei suoi tre aspetti, cardinale, ordinale e ricorsivo. Giocare diviene un mezzo per costruire significati, divertendosi, senza distinguere i diversi aspetti, ma utilizzando il numero nella sua complessità, dal punto di vista qualitativo.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education – 2nd edition* (pp. 746–783). Routledge / Taylor & Francis Group.

Butterworth, B. (1999). *Intelligenza matematica. Vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente.* Rizzoli.

Contardi, A., Pertichino, M., & Piochi, B. (2004). *Insegnare la matematica a studenti disabili.* Edizioni ETS.

Courant, R., & Robins, H. (1971). *Che cos'è la Matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi.* Boringhieri.

Crespi, M. (2012). Le funzioni della narrazione scientifica. In F. Cormi & T. Altiero (Eds.), *Atti del convegno Innovazione nella didattica delle scienze nella scuola primaria e dell'infanzia: al crocevia tra discipline scientifiche e umanistiche* (pp. 269–277). Universitas studiorum.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (2011). *Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica. Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere – Volume 4.* Pitagora editrice.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della Didattica della Matematica. Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere – Volume 2.* Pitagora editrice.

Di Paola, B., Montone, A., Fiorentino, M. G., & Ricciardiello, G. (2023). Il numero naturale nei suoi aspetti cardinale, ordinale e ricorsivo: giochi e artefatti in sinergia per la scuola primaria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *46*(1), 69–92.

Dibattista, L., & Morgese, F. (2014). Narrare la scienza a scuola con il digital storytelling storico-scientifico: Una sperimentazione sul campo. In F. Cormi & T. Altiero (Eds.), *Atti del terzo convegno Innovazione nella didattica delle scienze nella scuola primaria e dell'infanzia: al crocevia tra discipline scientifiche e umanistiche* (pp. 279–290). Universitas studiorum.

Dunlap, J. C., & Grabinger, R. S. (1996). Rich environments for active learning in the higher education classroom. In B. G. Dalam Wilson (Ed.), *Constructivist learning environments: Case studies in instructional design* (pp. 65–82). Educational Technology Publications Engelwood Clifs.

Maffia, A., & Maracci, M. (2019). Multiple artifacts in the mathematics class: A tentative definition of semiotic interference. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education IGPME* (Vol. 3, pp. 57–64). PME.

Mariotti, M. A., & Montone, A. (2020). The potential synergy of digital and manipulatives artefacts. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*(2), 109–122. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00064-6

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione.* https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Villani, V. (2003). *Cominciamo da zero: Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Aritmetica e Algebra).* Pitagora.

Recensioni

DdM

Recensioni[1]

50 albi illustrati fra italiano e matematica: un particolare formato di *storytelling*

Silvia Demartini e Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

Introduzione

Già nella *Poetica* di Aristotele l'essere umano viene caratterizzato come un essere propriamente narrante (non a caso in tempi recenti si è diffusa l'espressione *homo narrans*). In continuità con questa lunga tradizione, quella che oggi è comunemente nota come pratica dello *storytelling* è qualcosa che, in realtà, affonda le sue radici in un istinto umano atavico e profondissimo: quello di narrare (Gottschall, 2014). Istinto che, fra le altre cose, da quando ha potuto esprimersi, ha permesso all'essere umano di acquisire un notevole vantaggio evolutivo, poiché ha promosso il passaggio memorabile di informazioni, la cooperazione, la comprensione reciproca, l'adattamento all'ambiente. Pian piano, l'umanità si è resa conto del fatto che porre dei contenuti in forma narrativa, anche in forma esplicitamente didattica (si pensi alla poesia didascalica), era una carta vincente; poi, nel tempo, questa prassi ha via via perso, almeno in parte, mordente per il pubblico adulto, mentre è rimasto un modo di fare molto convincente per parlare a bambine e bambini (nonché a tutte quelle persone "più grandi" che non hanno smesso di sorprendersi, con mente aperta, per ciò che trovano tra le pagine di un libro). Nei decenni più recenti, l'idea che la forma narrativa sia un veicolo vincente per imparare a tutte le età è tornata in auge, grazie anche a studi che hanno confermato come interesse, curiosità e coinvolgimento siano motori fondamentali per l'apprendimento, e siano senz'altro attivati da consapevoli e variate pratiche di *storytelling* (come, per esempio, McQuiggan et al., 2008 e Glaser et al., 2009).
Gli albi illustrati sono un particolare genere di testo rivolto prevalentemente, ma non solo, a un pubblico di bambine e bambini, caratterizzato da un particolare formato, e soprattutto dalla coesistenza dialogica di testo e immagini, in interazione. Negli albi, infatti, sono proprio le immagini a non poter assolutamente mancare: non a caso, esiste la grande famiglia dei *silent book*, in cui tacciono le parole ma non le immagini. A questo genere, negli ultimi decenni, sono dedicati molti studi anche in contesto italofono, che ne approfondiscono la storia, le caratteristiche tipologiche e le potenzialità d'uso (in particolare si può rinviare a Campagnaro e Dallari, 2013; Capetti, 2019; Fornara, 2021; Grilli, 2019, 2023; Terrusi, 2012, 2017, 2019).
Quelli di cui qui offriamo alcune recensioni hanno una caratteristica in comune: in essi è presente la matematica, e può esserlo in molti modi, più o meno espliciti. Può essere protagonista palese, può essere ricavata dalla narrazione, può non esserci apparentemente affatto, ma vi sono albi che si prestano comunque ad avviare situazioni incentrate su aspetti cruciali in matematica (come, ad esempio, alcuni testi la cui trama si snoda intorno al confronto fra punti di vista e alla discussione). Va poi detto che ogni albo ha una dinamica interna e una struttura diverse: ci sono albi propriamente narrativi e altri enciclopedici (che offrono informazioni e curiosità), o addirittura albi interattivi con chi legge (con cui interagire), come diverse sono le dimensioni e le modalità di lettura. Queste recensioni vanno intese come continuazione di una precedente raccolta formata da 100 albi, pubblicata sempre su

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

questa rivista (Demartini & Sbaragli, 2021), e sono organizzate per temi (di cui, prima delle recensioni, sono offerte le sintesi; per un approfondimento delle tematiche indicate si rimanda a Demartini e Sbaragli, 2023). I temi sono i seguenti: *A caccia di numeri e lettere!*, *Tanti numeri e conteggi*, *Il nostro sistema decimale posizionale e il ruolo dello zero*, *Linea dei numeri*, *Operazioni tra numeri*, *Misuriamo tutto!*, *Il tempo e noi*, *Tanti problemi*, *Questioni di punti di vista!*, *Geometria e narrazione*.
All'interno delle sezioni tematiche, le recensioni sono proposte in ordine di gradualità dell'argomento matematico o per attinenza tematica, anche se vengono comunque indicate le età di riferimento proposte dalle diverse case editrici. Va considerato che alcuni albi potrebbero rientrare in tematiche diverse (aspetto che viene, in alcuni casi, esplicitamente indicato): vanno dunque lette le varie recensioni per poter comprendere il modo migliore di proporre gli albi in sezione o in classe.

1. A caccia di numeri e lettere!

La realtà che ci circonda è piena di numeri e di lettere che hanno tante funzioni e che si trovano su vari supporti, scritti in vari formati; in molti casi balzano all'occhio: li vediamo su righelli, calendari, tram e autobus, sui tabelloni orari, nei libri, nei volantini dei supermercati, sulle magliette dei giocatori e delle giocatrici di calcio o di pallavolo (ad esempio), sulle confezioni dei prodotti ecc. In altri casi possono essere più nascosti: le forme delle cose evocano quelle dei numeri e delle lettere, come mostrano i due albi che presentiamo qui di seguito e che possono essere uno stimolo aggiuntivo per utili attività di "caccia al numero" e "caccia alle lettere" alla scuola dell'infanzia e all'inizio della scuola elementare (da effettuare in occasioni diverse, dentro e fuori dalla scuola, per scoprire pian piano i due "mondi" e le loro caratteristiche). "Cacciare" numeri e lettere significa non solo aguzzare lo sguardo, individuando i codici qua e là (fotografandoli, ritagliandoli, riproducendoli), ma anche iniziare a interrogarsi sulla loro funzione, cioè su quello a cui servono; bambine e bambini di scuola dell'infanzia e all'ingresso della scuola elementare potranno, così, sfruttare la loro curiosità e le loro intuizioni per approfondire il processo di alfabetizzazione emergente che stanno vivendo, anche in chiave italmatica.

Imapla (2011). *Numeri nascosti*. Pulce.
Età: dai 3 anni.

Quest'albo, semplice e coloratissimo, è incentrato sulla forma dei simboli dei numeri, cercati e colti nella realtà. La forma dei numeri, così come quella delle lettere, può infatti ricordare la forma di oggetti del reale (un simile processo analogico ha avuto un ruolo anche nella storia dei numeri: per alcuni popoli, infatti, i nomi dei numeri erano tratti dai nomi di oggetti a essi associati; ad esempio l'otto veniva chiamato *formica*, perché ricordava la forma di una formica). Presentati in rima («Due è una paperella / che allegra saltella») e tramite semplici immagini vicine anche ai più piccoli, in questo testo i numeri possono essere scoperti con occhi nuovi da bambine e bambini, che li cercheranno attorno a loro (realizzando autentiche "Cacce al numero" e, in abbinamento al successivo albo, "alle lettere") e li disegneranno in nuovi contesti. Per poter poi lavorare sulla scrittura corretta delle cifre si può fare riferimento ai seguenti materiali del progetto *MaMa-matematica per la scuola elementare*: le due pratiche didattiche "Memorizzare la forma corretta delle cifre" e "Impariamo a scrivere le cifre" e il supporto "Schede guida per il corretto grafismo delle cifre" (Sbaragli et al., 2021).

Imapla (2011). *Lettere nascoste.* Pulce.
Età: dai 3 anni.

Quest'albo fa il paio con quello precedente, ma è incentrato sulla forma delle lettere. In questo testo, scritto in rime che si snodano su due pagine («E la B dove è andata? / È la nuvola sopra la lepre bagnata»), tutte le lettere scritte in stampatello assomigliano a qualcosa della realtà che ci circonda: le bambine e i bambini potranno divertirsi a cercarle nelle pagine, rafforzando così (al momento giusto) la memorizzazione, e potranno poi aguzzare la vista cercando intorno a loro altre lettere nelle cose di tutti i giorni (che poi potranno anche disegnare e abbinare a un breve testo, eventualmente dettato all'adulto). Allo stesso tempo le lettere possono essere considerate come figure geometriche, che possono essere riprodotte tramite linee curve, dritte, chiuse ecc.

Guèry, A., & Dussutour, O. (2012). *1 2 3 D'arte. Numeri nascosti nei quadri.* Franco Cosimo Panini.
Età: dai 5 anni.

A volte, a saper guardare bene, possiamo trovare i numeri nascosti anche dove proprio non ce li aspettiamo, ad esempio in famosi dipinti. Nello specifico, questo albo propone all'osservazione del lettore 21 opere dipinte da celebri artisti di varie epoche e correnti, come Leonardo, Matisse, Van Gogh, Warhol, in cui è possibile incontrare i numeri da 0 a 20, che appaiono inizialmente nascosti. Per individuare i numeri (impresa spesso ardua) occorre osservare attentamente l'opera, cosa che spesso può riuscire meglio a uno sguardo bambino che a uno adulto; l'albo diventa, così, occasione di incontro con l'arte, ma anche un possibile materiale per allenarsi a descrivere in modo spontaneo o più consapevole il quadro che si sta guardando.

Guèry, A., & Dussutour, O. (2011). *A B C D'arte. Lettere nascoste nei quadri*. Franco Cosimo Panini.
Età: dai 5 anni.

Con lo stesso principio di *1 2 3 D'arte*, quest'altro libro-gioco, interattivo con chi lo sfoglia, ci accompagna in un viaggio attraverso l'arte e l'alfabeto: in 26 quadri dal XIII secolo fino alla contemporaneità (Giotto, Manet, Chagall, Picasso, Mondrian e tanti altri), infatti, si nascondono i 26 grafemi in uso per trascrivere l'italiano (inclusi segni come *x* o *y*), tutti da rintracciare e da scoprire, con occhio attento e curioso. L'incontro di arte e alfabeto rivela, così, una magia di fondo, che incentiva lo sguardo acuto di bambine e bambini a continuare questa sfida anche in altri quadri, in altri materiali o in oggetti della quotidianità. Per ampliare ulteriormente le prospettive, si consiglia ad esempio la raccolta di versi di Carminati (2020).

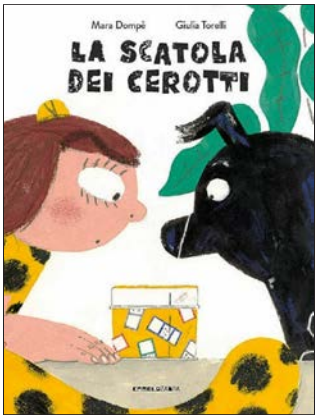
2. Tanti numeri e conteggi

Sin dall'antichità, le persone hanno avuto l'esigenza di tenere la contabilità di oggetti per loro importanti (beni, animali, cibi da conservare o barattare…), percorrendo la lunga strada che ha portato l'essere umano dalla corrispondenza biunivoca rappresentata tramite tacche su ossa di lupo, fino al conteggio che oggi conosciamo. Lavorare sui numeri, sulle loro diverse rappresentazioni e funzioni, e sulle diverse componenti del conteggio (corrispondenza biunivoca, enumerazione, conta orale e loro coordinazione) è molto importante e lo si può fare piacevolmente attraverso gli albi illustrati, che propongono a volte numeri più semplici fino ad arrivare a numeri grandi e complessi, intriganti anche per bambine e bambini piccoli, sebbene debbano ancora comprenderli a fondo. Inoltre, il conteggio è utilissimo anche unito ad attività tipicamente linguistiche, come quelle fonologiche (per esempio segmentare e contare sillabe e fonemi).

Mejuto, E., & Mora, S. (2002). *La mosca Fosca*. Kalandraka.
Età: dai 5 anni.

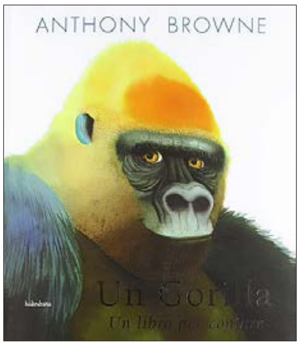
L'albo (adattamento tratto di un racconto popolare russo raccolto dal folclorista Alexander Afanásie) inizia così: «C'era una volta una mosca fosca che viveva nel bosco. Stufa di ronzare e di girovagare, decise di mettere su casa. "Potrò dormire in un letto, starmene al calduccio, preparare dolci squisiti e invitare tanti amici"». Per inaugurare la sua nuova casa, la protagonista prepara una deliziosa torta di more e sistema sette sgabelli e sette piatti sul tavolo, favorendo così attività di corrispondenza biunivoca a tavola. Il profumo della torta attira sette animali, dal più piccolo al più grande, che trovano una scusa per farsi invitare. Il primo ad arrivare sarà lo scarabeo, seguito dal pipistrello, poi dal rospo, e via così fino al lupo. L'albo presenta una sorta di "rituale", sia linguistico sia numerico, tipico del racconto popolare, ritmico e caratterizzato da nomi che si prestano a giochi fonologici (la stessa Mosca Fosca presenta un'assonanza). Viene proposta la successione dei numeri da 1 a 7 espressi sia in senso ordinale (primo, secondo, terzo ecc.), sia in forma cardinale: «E tutti e sette molto contenti si accinsero a fare merenda». I numeri sono anche evidenziati in grassetto. Quando finalmente stavano per mangiare la torta, però, spuntò «l'orso rissoso, golosone e litigioso. Della torta prelibata mi ci faccio un'abbuffata! E con l'orso ghiottone, la storia finisce… in un boccone!».

Dompè, M., & Torelli, G. (2022). *La scatola dei cerotti*. Camelozampa.
Età: dai 4 anni.



Questo albo è molto originale e divertente, poiché è incentrato su una bambina piena di risorse e appassionata di… cerotti. Sì, proprio di quei cerotti che bambine e bambini solitamente non amano, in quanto ricordano loro le cadute e i graffi che si sono procurati, ma che in realtà rappresentano per lei l'occasione di raccontare avventure delle quali va molto fiera: «Sopra la mia pelle c'è un cerotto, un po' colorato e un po' trasparente. Sotto c'è il graffio. È mio e ci tengo. Quel graffio è un segno delle mie avventure», dice la protagonista. Non per niente il libro finisce con la frase: «Ferite e capitomboli non mi fate paura!»; nel corso dell'albo la protagonista li racconta uno per uno, citando i 9 cerotti che teneva gelosamente nella scatola "quadrata" che le avevano regalato, e che ora decorano la sua pelle (va detto che sarebbe stato corretto chiamare la scatola con il vocabolo esatto, ossia *cubo* e non *quadrato*; si poteva usare il termine *quadrato* eventualmente per il solo coperchio della scatola). Il primo cerotto, quello numero 1, se lo è messa dopo una caduta il primo giorno in cui ha usato lo skateboard: primo giorno, primo cerotto (si noti l'uso del numero in senso ordinale); il secondo se lo è messo per un graffio del suo gatto Luminol e via così, in una lunga carrellata di avventure e di cerotti, cadenzata dai numeri da 1 a 10, scritti e citati in senso progressivo: solo uno resta nella scatola, il decimo, che la bambina non vede l'ora di appiccicarsi addosso. L'albo, oltre alle possibilità legate ai numeri, offre anche l'occasione per parlare di noi, delle nostre cadute, dei nostri tagli, delle nostre cicatrici. Perché durante le attività più appassionanti può capitare di farsi male, ma l'importante è continuare a divertirsi e non perdere mai il gusto per l'avventura!

Browne, A. (2011). *Un gorilla. Un libro per contare*. Kalandraka.
Età: dai 3 anni.

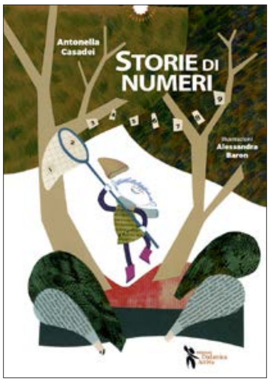


Quest'albo di grande formato è semplicissimo ed è composto da pochissime parole, ma interessanti: tutti nomi di primati (1 Gorilla, 2 Oranghi, 3 Scimpanzé… fino a 10 Lemuri, tutti rappresentati sulle pagine), che accompagnano la scoperta dei numeri da 1 a 10 e di questi tipi di animali. I numeri li vediamo rappresentati, pagina dopo pagina, sia in forma indo-araba sia in forma pittorica, tramite i vari animali, che, alla fine, scopriremo essere parte della grande famiglia cui appartiene anche l'essere umano e in particolare la nostra famiglia. Un'occasione di arricchimento lessicale e di scoperta enciclopedica, con cui eventualmente introdurre e affrontare anche l'affascinante storia dell'evoluzione umana.

Terzaghi, M., & Zürcher, M. (1997). *Undici gatti paracadutisti*. Edizioni AER.
Età: dai 4 anni.

Un aereo decolla e poco dopo ecco piovere dal cielo 11 gatti paracadutisti rappresentati in due pagine, così da poter essere enumerati o contati. A terra, alcune persone si godono lo spettacolo e aspettano che atterrino tutti assieme, ma le cose non andranno proprio così, perché il vento sparpaglia i gatti nei posti più strani: chi su un prato, chi fra i girasoli, chi in groppa a un asinello… ciascuno col suo numero identificativo addosso. Eh, sì, perché quest'albo, nella dinamica della semplice storia, accompagna bambine e bambini alla scoperta dei numeri, da 1 a 11, e sarà proprio il gatto 11 a essere il più originale di tutti: questo, infatti, si è fermato su una nuvola, pronto a fare il giro del mondo. Un testo semplice, con illustrazioni che ricordano la tecnica del *collage*, il cui finale aperto si presta a essere proseguito, magari pensando a un nuovo lancio dei gatti 12, 13, 14, 15… e così via.

Casadei, A. (2023). *Storie di numeri*. Edizioni didattica attiva.
Età: dai 4 anni.



Il racconto contenuto in quest'albo riprende qualcosa dell'andamento delle fiabe classiche: un folletto, infatti, viene punito per aver disperso nel bosco tutti i numeri contenuti in uno scrigno (lasciandone dentro 0) e deve partire all'avventura per recuperarli spronato dalla richiesta di una maestra. Ma dove saranno? Nel suo percorso incontra, nella realtà o nel sogno, le quantità di ogni numero (1 albero, 2 suoi amici folletti, 3 piccoli porcellini, 4 zampe del gatto Leone ecc., fino a 9) e riesce, alla fine, a riportarli nello scrigno di partenza, chiedendo scusa alla maestra per quello che aveva fatto. Una bella occasione per discutere anche in sezione o in classe dell'importanza di saper chiedere scusa e sul ruolo degli scherzi, che per essere tali devono piacere a chi li fa, ma anche a chi li riceve! Una storia semplice ma ben costruita, per conoscere i numeri e scoprirli negli elementi del nostro quotidiano: la storia, infatti, potrebbe essere riraccontata o riscritta in un contesto diverso, vicino al vissuto delle allieve e degli allievi, sfruttando oggetti o elementi della realtà presenti nella numerosità indicata dalla storia (1 come la nostra testa, 2 come gli occhi, 3 come i colori del semaforo ecc.) o in una numerosità differente. Si segnala, però, una pecca e cioè che i numeri rappresentati nell'ultima pagina iniziano da 1: manca dunque lo 0, e sono disposti in ordine casuale, ma questa può essere una bella occasione per ricreare un cerchio con tutte le 10 cifre (da 0 a 9) disposte in ordine crescente, che si tengono per mano come proposto dal testo. Se si vuole far vivere questa situazione con il corpo, si potrebbero individuare 10 bambine o bambini della sezione/classe ai quali consegnare a ciascuno una cifra da 0 a 9, per poi creare un cerchio, o ancora meglio una fila, mettendosi in ordine di grandezza numerica.

Girón, M. (2024). *Cinque topolini*. Kalandraka.
Età: dai 3 anni.

Un albo illustrato incentrato su cinque topolini, che si rifà ai racconti tradizionali orali con l'uso di formule di ripetizione ritmate e di personaggi che vengono eliminati o progressivamente incorporati nell'azione (sottrazione-aggiunta). È l'ora della merenda e i cinque cugini topolini si mettono insieme alla ricerca di qualcosa da mangiare. Uno dopo l'altro si fermano in particolari luoghi, attirati da qualcosa di buono: Frida da una caramella, Fabi dai popcorn, Fiore dalle fragole, Fede dai biscotti, infine Felice, rimasto senza nessun cugino, è pronto per gustarsi il formaggio. «Ma all'improvviso tutto inizia a girare» e Felice finisce nella pancia di un gatto. Per fortuna, grazie a un rutto del gatto, Felice salta fuori e fugge a perdifiato con il formaggio e lo stesso faranno anche gli altri topolini usciti dalla tana. Si ritroveranno poi tutti e 5 i topolini nella tana con il proprio cibo preferito. Quest'albo, incentrato sul trionfo dell'audacia e del piccolo contro il grande, rappresenta anche una bella occasione per contare da 5 a 1 in modo decrescente, per poi farlo in modo crescente nella seconda parte del testo.

D'Angelo, S. (2008). *Mai contare sui topi*. Topipittori.
Età: dai 5 anni.

Un albo pensato per conoscere i numeri da 10 a 1. Si parte infatti da 10 simpatici topini, ma in realtà nella pagina se ne contano 9. Dove è finito il decimo topino? Il decimo topo non si vede più, è un tipo distratto che ha perso il treno. Un topo inaffidabile, anche se corretto. Uno dopo l'altro i topi calano, perché impegnati in altre faccende: corso di valzer, mazurka e tango argentino, un altro ha festeggiato l'inizio della primavera, e così via. I numeri vengono citati nel testo usando a volte la forma ordinale (primo, secondo, terzo ecc.), altre volte citando il nome convenzionale del numero (uno, due, tre ecc.). Non tutti i numeri sono rappresentati in forma indo-araba nelle varie pagine che si susseguono; ciò crea un po' di discontinuità nelle raffigurazioni, ma si ritrovano poi in ordine sequenziale da 1 a 10 nell'ultima pagina. Un libro che può essere dunque usato per parlare dei numeri da 1 a 10 in senso decrescente e crescente, analizzando dal punto di vista linguistico i vari nomi e modi di scrittura.

Montgomery, R., & Warburton, S. (2021). *Dieci maestri deliziosi*. Lapis edizioni.
Età: dai 5 anni.

Un altro albo per imparare i numeri da 10 a 1 in modo decrescente, partendo da una buffa situazione: dieci maestri, usciti da scuola, perdono per un soffio l'ultimo bus. Il problema, a questo punto, è… come tornare a casa? Il signor Baldo propone di prendere la scorciatoia nel bosco. Pessima idea! Quel bosco è pieno di mostri affamati che non vedono l'ora di mangiarsi qualcuno… E infatti, uno dopo l'altro, i dieci maestri cadranno nei trabocchetti dei mostri. Così, da 10, diventano 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1… Ma c'è un limite a tutto. L'ultima rimasta, la maestra Guerrina, quella che «insegna alla materna» e quindi «niente la ferma», di certo non si lascerà mangiare. È abituata a classi movimentate e imprevedibili: che cosa saranno mai per lei solo 10 mostriciattoli? È ora di insegnare loro un po' di educazione (e, già che ci siamo, anche a contare da 1 a 10 in ordine crescente e decrescente). Entrando in questa situazione, bambine e bambini potranno contare maestre e maestri che compaiono nelle pagine, e anche i mostri; il testo è ritmato e prevalentemente in rima, anche se occorre prestare attenzione: le rime non sempre sono perfette, ma spesso sono assonanze, come "scuola-finora".

McGuire, R. (2001). *The orange book. 1, 2 ... 14 arance*. Corraini Edizioni.
Età: dai 3 anni.

Questo albo inizia con l'immagine di un albero in cui sono rappresentate in modo disordinato 14 succose arance. Un bel modo per iniziare con un'attività di enumerazione: passare da ogni elemento una e una sola volta, o di conteggio vero e proprio se le competenze di allieve e allievi lo permettono. Uno dopo l'altro, i destini delle quattordici arance vengono raccontati nelle varie pagine del libro: la prima è stata portata a un amico malato, la seconda è stata usata da un giocoliere, la terza ha posato in una scuola d'arte, mentre la quinta è stata divisa in parti (che possono essere anch'esse contate) e servita insieme ai biscotti della fortuna, la decima è stata mangiata da un famoso pianista… E la quattordicesima? È stata comprata da qualcuno che conosci... e potrebbe essere la prossima che mangerai. A livello lessicale, l'albo presenta i termini riferiti ai numeri associati alla funzione ordinale (primo, secondo, terzo ecc.), mentre lo stile grafico riprende gli albi americani della prima parte del Novecento. Vediamo, dunque, come si presenta (va ricordato che ha vinto la medaglia d'oro della Società degli Illustratori!): ogni arancia è colorata di arancione su uno sfondo semplice ed essenziale, con pochi colori, disegnato a matita blu e popolato di personaggi e situazioni di tutti i giorni; su di esso le arance risaltano creando un collegamento visivo ed espressivo continuo per tutto il libro. A livello generale, quest'albo apre prospettive sulla casualità degli eventi, sulle possibilità e sulle circostanze, e su come ogni momento della vita quotidiana sia il risultato inconsapevole del loro intrecciarsi.

Ohmura, T. (2024). *Un volo spaziale*. Babalibri.
Età: dai 4 anni.

In quest'albo, veramente ben curato e divertente, ben 50 uccelli di diversi tipi e di varie dimensioni si incontrano all'imbarco per salire su un aereo che li porterà nello spazio, comparendo sulle pagine dal più piccolo (il colibrì) al più grande (lo struzzo), ciascuno con il suo numero espresso in ordine decrescente (n° 50, n° 49, n° 48 e via dicendo fino al n° 1). Una volta saliti tutti, le pagine dell'albo raddoppiano e se ne possono vedere 4 insieme aprendone 2: su di esse c'è un aereo enorme, e, dai finestrini, sono visibili le sagome degli animali, che questa volta possono essere contati da 1 a 50. In questo simpatico albo, tutti gli uccelli sono riprodotti con fedeltà, mantenendo le loro caratteristiche e, alla fine del testo, è dato anche un elenco aggiuntivo dei loro nomi, per agevolare attività sul testo informativo o descrittivo, e l'arricchimento lessicale, e consentire così di imparare anche qualcosa nel campo dell'ornitologia.

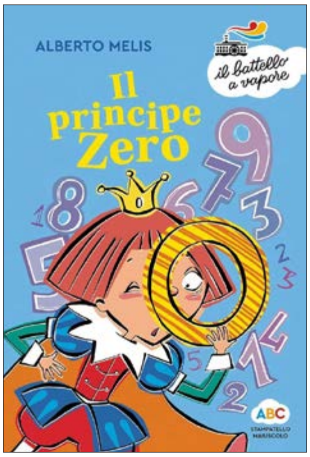
Romanyshyn, R., & Lesiv, A. (2019). *Numeri, stelle e mucche di mare*. Jaca Book.
Età: dai 6 anni.

Quest'albo inizia presentando a lettrici e lettori Dora, una bambina che «cerca di contare ogni cosa attorno a sé»: i chicchi di riso, i pois sul vestito, le foglie al parco, le formiche che vanno in ogni direzione… persino strani animali come le mucche di mare. Anche per addormentarsi, complici gli insegnamenti di mamma e papà, conta le cose più strane, così come quando rientra a casa costeggiando un laghetto non può non chiedersi quante gocce esso contenga. Insomma, quella di Dora per i numeri sembra una vera passione, quasi un'ossessione, presentata nel testo tramite situazioni iperboliche e sfide impossibili (vorrebbe persino contare tutte le stelle in cielo!); anche il fatto che abbia un coniglietto di nome Pitagora e che vicino a lei abiti il gatto Borges lascia intuire che viva in un mondo molto, molto matematico. Esplorare questo "mondo" e accendere la curiosità è la sfida di quest'albo, dallo stile particolare anche dal punto di vista grafico, che accosta immagini del quotidiano a numeri e formule.

3. Il nostro sistema decimale posizionale e il ruolo dello zero

Questi albi sono pensati per parlare del nostro sistema decimale; un sistema che ha la caratteristica di essere posizionale, in cui cioè il valore del numero dipende dalla posizione delle cifre. Queste peculiarità ne fanno un sistema complesso, al quale è bene avvicinarsi per gradi e in forma ludica. Un ruolo chiave in questo sistema di numerazione è dato dalla cifra 0, che ha almeno due ruoli importanti: il valore cardinale "zero" (ad esempio *zero mostri nella stanza!* Oppure *0 unità, 0 decine* ecc.) e lo 0 come cifra, ossia come simbolo (che distingue ad esempio 1 da 10, 16 da 106). Si tratta di funzioni non solo di estrema utilità, ma anche di assoluto fascino: non a caso lo zero è frequentemente protagonista anche di narrazioni e poesie, affascinante proprio per le sue caratteristiche di essere "niente", ma di essere anche fondamentale, cose che lo rendono vicino a noi e interessante da conoscere.

Melis, A. (2019). *Il principe Zero*. Il battello a vapore.
Età: dai 4 anni.



Questo testo, incentrato tutto sui numeri, ha un formato che ricorda il racconto, ma può essere considerato un albo in quanto è caratterizzato da un legame inscindibile fra il testo e le immagini. Il protagonista di questa storia è lo zero in forma di principe. Questo numero ha sempre affascinato l'essere umano e ha spesso esercitato un fascino particolare sia nella letteratura per l'infanzia sia per i più grandi. In particolare, nel testo si parla del principe Zero, l'ultimo nato dopo 9 fratelli (ciascuno chiamato come il numero: Uno, Due, Tre, fino a Nove, mostrando così la funzione "etichetta" del numero, che in questo caso è anche "ordinale", dato che i nomi rispettano l'ordine di nascita), che ricevono sempre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cose da mangiare (puntando in questo caso sulla "cardinalità" del numero). Perché il principe Zero è molto più magro dei suoi 9 fratelli? Ovvio: il cuoco di corte gli dà sempre zero ciambelle, zero canditi, zero biscotti ecc. Il re, però, dopo aver fissato un biscotto stretto e lungo e una ciambella col buco, trova una geniale soluzione! Il 10! Se il fratello 1 e il fratello 0, i più mingherlini, si presentano a braccetto a tutti i pasti, avranno 10 di tutto: si scoprono così, all'avanzare della storia, la risoluzione del problema narrativo (Zero prenderà peso e crescerà), ma anche la straordinaria funzione dello 0 del nostro sistema posizionale di numerazione. Chiude il testo una breve sezione di giochi.

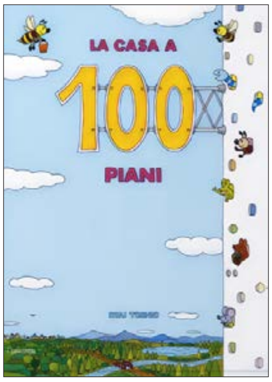
Richardson, S., & Antonori, A. (2022). *Il polpo ha zero ossa*. Editoriale Scienza.
Età: dai 7 anni.

Questo albo dal taglio enciclopedico inizia proprio dallo zero, numero affascinante, che, preso da solo, rappresenta il nulla, il "non esserci" di qualcosa. Oltre al numero delle ossa di un polpo (zero!), lo zero viene osservato in varie situazioni del mondo che ci circonda: la pioggia e la neve che cadono nelle Valli secche dell'Antartide sono zero da due milioni di anni, il numero di pigmenti verdi nelle ali delle farfalle Tecla del rovo è zero… e sono zero tanti altri elementi e avvenimenti (che chi legge può immaginare). Lo zero viene anche trattato per il ruolo che ha nel nostro sistema decimale: se messo dopo un 1, infatti, diventa 10, mentre, mettendone due, si ottiene il 100 e così via. Il testo passa poi a trattare l'1, con interessanti informazioni che lo riguardano (ad esempio, noi abbiamo un cuore ma il polpo ben 3!), e il numero che si ottiene mettendo di seguito uno 0 (10); segue il 2, per poi trattare il numero 200 (due zeri dopo il 2) e le curiosità che lo riguardano (sono gli anni di vita di una balena della Groenlandia!); si passa poi al 3 e al 3'000, il numero che si ottiene mettendo tre zeri dopo il 3, al 4 e al 40'000, e così via fino a 8 e 800'000'000, e a 9 e 9'000'000'000 (il numero di anni trascorsi dal Big Bang alla nascita del Sole e del nostro Sistema Solare). Questo grande numero permette agli autori di concludere l'albo facendo anche cenno all'infinità dei numeri naturali. Insomma, questo testo è ricco di numeri, piccoli e grandi, ma non solo, anche di immagini che veicolano curiose informazioni sullo straordinario mondo che ci circonda, e che permettono di capire come la matematica sia davvero dappertutto. Le parole, poi, permettono di accostarsi al tipo testuale espositivo in modo accattivante e non noioso.

4. Linea dei numeri

La linea dei numeri è una rappresentazione degli insiemi numerici che si basa sull'ordine crescente di grandezza e che è ormai entrata nella prassi didattica fin dalla scuola elementare; se si considera l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ (0, 1, 2, 3, 4, 5…), la linea dei numeri parte dal primo numero 0 e prosegue senza fine. È possibile dunque rappresentare questo insieme su una semiretta. Questa rappresentazione serve a visualizzare l'ordinamento dei numeri: il primo numero naturale e i numeri successivi che si ottengono aggiungendo sempre 1. L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è discreto come l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, ossia esiste sempre un precedente e un successivo, questa volta di ogni numero (in $\mathbb{N}$ tutti i numeri hanno un precedente e un successivo tranne il primo numero, 0). L'insieme è formato dai seguenti elementi: …, –2, –1, 0, 1, 2, … e si può rappresentare questa volta su una retta. Perché allora non vedere parti di queste rappresentazioni in curiosi albi illustrati?

Toshio, I. (2023). *La casa a 100 piani*. L'ippocampo.
Età: dai 6 anni.



Un giorno, Tochi, un bambino appassionato di stelle, riceve per posta un misterioso invito a visitare una casa alta 100 piani. Spinto dalla curiosità, Tochi entra nell'edificio e inizia a salire le numerose scale, incontrando uno a uno i simpatici abitanti di ogni piano (il testo accompagna, accanto alle immagini, la salita). Nei primi dieci piani vivono i topi, seguiti dagli scoiattoli nei successivi dieci, poi arrivano le rane, le coccinelle e molti altri. Al centesimo piano, Tochi incontra la regina dei ragni, che lo invita a osservare le stelle attraverso un telescopio, regalando al bambino un momento magico, come se potesse toccare il cielo. *La casa a 100 piani* è un albo affascinante, che (diversamente dal solito) si apre in verticale, invitando a contare man mano che si scoprono i piani. Il conteggio è favorito dai numeri presenti in ogni piano. Ogni doppia pagina mostra dieci piani della casa in sezione, rivelando una vivace moltitudine di scenette irresistibili tutte da esplorare, descrivere e raccontare, offrendo bellissime occasioni per creare percorsi italmatici (che stimolano, sul fronte della lingua, le competenze di costruzione testuale e l'arricchimento lessicale). Unica pecca, data dalla nostra convenzione: il piano terra non è indicato dal numero 0 ma da 1; aspetto, questo, che va compreso e trattato con attenzione in classe.

Toshio, I. (2023). *La casa a 100 piani sotto terra*. L'ippocampo.
Età: dai 6 anni.

Un albo che segue il precedente, caratterizzato dalla stessa modalità grafica, è *La casa a 100 piani sotto terra*, scritto dallo stesso autore seguendo lo stesso stile; questa volta, però, il testo si basa sull'esplorazione di minuscole case costruite nelle profondità della terra. La piccola Kū, mentre si rilassa serenamente nella sua vasca da bagno, scorge nell'acqua una strana creatura che, con una vocina delicata, le sussurra: «Ciao Kū! Dove abito io, al centesimo piano sotto terra, ci sarà una festa. Ti va di venire?». Evocando modi e situazioni di un celebre viaggio fantastico (quello di *Alice nel Paese* *delle Meraviglie*), anche questo libro si sfoglia girando le pagine verso l'alto, andando a scoprire le meravigliose storie nascoste proprio sotto i nostri piedi! Si tratta di un'originale soluzione narrativa e materiale (propria dell'oggetto albo) per parlare questa volta dei numeri negativi da –1 a –100, che sono rappresentati in modo sequenziale nelle varie pagine. Ad attenderla al piano –100 ci sarà… una tartaruga centenaria, per la quale è stata organizzata una festa di compleanno.

5. Operazioni tra numeri

Le quattro operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) sono importanti per leggere e comprendere il mondo che ci circonda, interagendo consapevolmente con esso. Queste operazioni si ritrovano in molte situazioni quotidiane: quando si aggiungono o si tolgono elementi a una raccolta, quando si stabilisce quanto manca per arrivare a un certo numero, quando occorre distribuire qualcosa in parti uguali ecc. Se si parte da dei begli albi illustrati, le occasioni da cui prendere spunto possono essere davvero molte, così che lo stimolo, più o meno esplicito, dato dal testo prenda vita in situazioni didattiche legate al vissuto di ciascuno.

Lallemand, O., & Frossard, C. (2019). *Il viaggio di Piccola Talpa*. Auzou. Gribaudo.
Età: dai 3 anni.

La Piccola Talpa protagonista di questo albo (e di altri di una serie) parte per un viaggio in Scozia per andare a trovare il suo grande cugino. Inizialmente crede di partire sola, ma bussa alla porta Ciccio Riccio, che decide di andare con lei e presto diventano «Io più te fa 2». Un modo intuitivo per introdurre semplici addizioni, anche sotto forma di conteggi. Quest'albo può quindi rientrare anche nel tema *Tanti numeri e conteggi*.
Lungo la strada incontrano molti amici nella foresta: il coniglio Gianni con il quale diventano «Io più Ciccio fa 2, più te fa 3!», l'uccellino Milly Cincia e così «Io più Ciccio fa 2, più Gianni fa 3, più Milly fa 4!», lo scoiattolo Giulio Scoiattoli e così «Io più Ciccio fa 2, più Gianni fa 3, più Milly fa 4, più Giulio fa 5!» e via così fino all'orso Egidio Orsi, con cui si arriva a 9. Sarà proprio Egidio a prestare una slitta che contenga tutti, così da poter scendere dalla montagna, ripercorrendo tutti i numeri e i personaggi da 1 a 9. L'occasione di arrivare a 10 giunge quando incontrano una marmotta su una barca: tutti saltano a bordo e il signor Gufo, che è l'undicesimo, li segue volando verso la Scozia. Alla fine incontrano il grande cugino (un cugino davvero sorprendente), ma… dove sono finiti tutti? E perché? Un finale a sorpresa, che allena previsioni e ipotesi, in un libro dalla struttura rassicurante, adatto anche ai più piccoli. E perché non rivivere la storia in classe con le allieve e allievi come protagonisti, uno dopo l'altro?

Mühle, J. (2019). *Due a me, uno a te*. Terre di mezzo editore.
Età: dai 4 anni.

Un albo molto piacevole, adatto per i più piccoli, ma non solo. L'orso trova tre funghi e la donnola li cucina, ma quando si mettono a tavola per mangiarli cominciano a litigare su chi sarà tra loro a mangiare il terzo fungo che rimane dopo averne dato uno a testa: «Uno a me, uno a te...», «E il terzo?». I motivi possono essere tanti per ricevere il terzo fungo e ciascuno di loro mette al centro le sue caratteristiche o esigenze personali, cercando di portare argomenti a sostegno: «Io sono più grosso e quindi ho più fame» afferma il grande orso, «Io sono piccola e devo ancora crescere», risponde la piccola donnola. «Io ho apparecchiato!», «E io ho cucinato!»: ogni volta ciascuno ha, in effetti, ragione e potrebbe meritare il terzo fungo; basta cambiare il punto di vista. Chi la spunterà? Per fortuna arriverà una volpe che, mentre i due stanno litigando, si mangia tranquillamente il terzo fungo, consentendo ai due contendenti di terminare il pasto in una cordiale amicizia. Questa situazione, inscenata dall'albo, può servire per riflettere sul sapersi mettere nei panni altrui, adottando un punto di vista che non è il proprio, e sull'importanza di trovare una mediazione (perché non dividere il terzo fungo a metà?). Quest'albo può quindi rientrare anche nel tema *Questioni di punti di vista!*
Per quanto riguarda la matematica, è possibile riflettere con i più piccoli sulla corrispondenza biunivoca, sul concetto di metà e con i più grandi sulla divisibilità per 2 e sui numeri pari e dispari: quand'è che tra due pretendenti ci si trova in questa situazione in cui rimane un solo fungo? Linguisticamente, il testo offre spunti per la discussione, e per l'avvio all'argomentazione e al dialogo argomentativo.

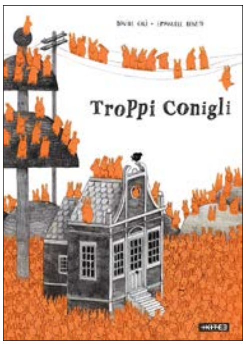
Borando, S. (2024). *Se ti dessi mezza mela*. Minibombo.
Età: da 4 anni.

Questo albo, con poco testo ma ricco di immagini, come è tipico della casa editrice Minibombo, affronta il tema della *metà* in modo divertente e accattivante. Tutti sanno che quando si ha qualcosa è meglio tenersela per sé! O almeno questo è quello che crede lo scoiattolo protagonista di questa storia, che durante un picnic nel bosco si trova a dover affrontare la richiesta di un elefante di passaggio: concedergli metà della mela che sta per mangiare. In quel caso, però, a lui ne resterebbe solo metà, e per lui sarebbe davvero troppo poca… Che fare allora? L'idea è di dividere a metà la metà, ma non gli sembra ancora sufficiente, e così pensa di dargli metà della metà della metà, e così via. Questa suddivisione è accompagnata anche da immagini di spicchi di mela sempre più piccoli. Nell'intenzione di dare all'elefante sempre meno mela (la metà della metà della metà della metà della metà della metà… della metà!), lo scoiattolo perde l'occasione di dividere una gustosa e grande torta con l'elefante: in questo senso il libro, oltre a favorire riflessioni sul concetto di metà, ma più in generale sulla divisibilità, sul concetto di frazione e sulle frazioni di frazioni, permette di riflettere e di discutere sulla generosità e su quanto questa preziosa caratteristica possa portare a tante cose positive nella propria vita.

Cardon, L. (2016). *Storie di un pollaio. Battibecchi da cortile*. Sassi.
Età: dai 5 anni.

La serie di albi "Storie di un pollaio" propone in questo testo una narrazione stimolante a vari livelli: oltre a presentare una vicenda divertente, curiosa e scritta con cura, offre vari spunti per favorire la discussione e per accostarsi a contenuti matematici. La storia è quella di un problema: dal pollaio, popolato da tre gruppi di galline (bianche, rosse e nere), sono scomparsi un gallo bianco e una gallina rossa. Un vero problema da risolvere! La caccia al colpevole inizia subito così come iniziano le discussioni per organizzare la difesa in vari schieramenti; ma nessun gruppo è contento di nessuna disposizione, finché Noemi, acuta gallina bianca, dopo vari calcoli propone una soluzione basata su coesione dei gruppi e rimescolamento dei diversi piumaggi. Matematicamente, le immagini e i dialoghi permettono di lavorare su diversi aspetti: con i più piccoli sul conteggio favorito direttamente anche dal testo («E così, anche tra le galline nere ci si conta e ci si riconta») e sul ruolo che ha la disposizione spaziale degli elementi per poterlo effettuare nel migliore dei modi (in particolare, si potrà riflettere sulla disposizione ordinata per righe e colonne di galline, che facilita certamente l'enumerazione degli elementi); con i più grandi è possibile parlare di moltiplicazione, grazie ai simpatici schieramenti di galline di vari tipi ben illustrati nel testo. Quest'albo può quindi rientrare anche nel tema *Tanti numeri e conteggi*.
La storia narrata in quest'albo, con un simpatico finale a sorpresa, promuove non solo la discussione e il dialogo argomentativo (da sperimentare anche coi più piccoli), ma anche il valore della tolleranza e della collaborazione in gruppo (competenza trasversale oggi tanto evocata), per capire quanto le guerre possano essere inutili e dannose. Le due pagine che precedono quelle conclusive, inoltre, sono perfette per lavorare sulla costruzione di ipotesi sul finale.

Calì, D., & Benetti, E. (2021). *Troppi conigli*. Kite.
Età: dai 4 anni.



I due fratelli della storia, Owen e Zoey, sono riusciti dopo vari mesi a convincere il loro papà ad andare in un negozio di animali a comprare un coniglietto. Ma nel negozio c'è un'offerta speciale irresistibile… comprare due coniglietti al prezzo di uno. Un'occasione davvero imperdibile! Già questa situazione narrativa iniziale può rappresentare una bella occasione didattica per parlare di offerte e dei vari modi di esprimerle, dal punto di vista sia linguistico sia matematico. Così i personaggi della storia decidono di comprare un maschio e una femmina al prezzo di uno, senza pensare che poi nasceranno conigli, conigli, e ancora conigli: ben 210! Così il papà decide di distribuire conigli, iniziando da 1, poi 2 insieme, 3 in una volta, e via così in modo numerico progressivo fino a dare via gli ultimi 20 coniglietti in un colpo solo. Dal punto di vista matematico può essere l'occasione per affrontare i primi 20 numeri naturali, per enumerare o contare i coniglietti rappresentati in arancione su un disegno in bianco e nero, per addizionare i conigli fino al numero 210 (dato che la somma dei primi 20 numeri fa proprio 210!), per visualizzare conigli nella pagina (ad esempio: «Chi trova per primo il coniglietto con gli occhiali da sole nella copertina?»), o altro ancora. La struttura narrativa (con finale ricorsivo ma aperto) è interessante: verso la fine del libro, infatti, i protagonisti si accorsero che di coniglietti non ne rimaneva più nessuno; tuttavia, nel negozio videro una nuova occasione: comprare due furetti al prezzo di uno! Come andrà a finire questa volta?

Garilli, A., & Tanco, M. (2005). *200 amici (e anche di più) per 1 sola mucca*. Edizioni ARKA.
Età: dai 5 anni.

I bambini hanno spesso un'innata capacità di trovare soluzioni brillanti a problemi che sembrano irrisolvibili. La protagonista di questo albo, che racconta la storia in prima persona, vive in una fattoria con un solo animale: una mucca, che ha chiamato Carmen. Questa mucca appare triste e annoiata, così la bambina decide di trovare un modo in apparenza spiazzante per procurarle degli amici, e cioè venderla in cambio di 2 pecore (1 maschio e 1 femmina). Dopo aver spiegato la sua idea al padre, quest'ultimo accetta di venderla. Quest'albo può quindi rientrare anche nel tema *Tanti problemi*,

perché è possibile chiedere alle bambine e ai bambini che soluzioni avrebbero potuto trovare loro per non vedere la loro mucca triste e annoiata, prima di proporre la soluzione data dall'albo.
La madre, però, non è d'accordo con la vendita della mucca, perché Carmen le manca. Da qui iniziano vari scambi: dalla vendita delle 2 pecore si acquistano 4 maiali, che a loro volta vengono scambiati con 8 anatre, seguite da 16 conigli. A questo punto, la madre comprende il valore degli scambi e propone di vendere i conigli per acquistare 32 galline. Sempre il doppio del numero precedente. La fattoria si riempie di uova, e le prelibatezze cucinate diventano sempre più numerose. Dopo la schiusa delle uova, da cui nascono 192 pulcini, continuano altri scambi fino ad avere 8 tacchini, poi 2 struzzi, che destano grande curiosità tra i vicini. Alla fine nasce un piccolo struzzo, e i suoi genitori vengono scambiati di nuovo con... la mucca Carmen! Ora la mucca non è più sola, ma circondata da tanti amici. Un albo coinvolgente per parlare della successione dei numeri ottenuti come prodotto dei numeri naturali per 2, ma anche l'occasione per proporre problemi aritmetici su una coinvolgente e originale narrazione. L'ultima scena risolve la narrazione, mostrando tutti gli animali in festa con la famiglia che li osserva felice, visibili in una serie di illustrazioni piene di dettagli divertenti che celebrano il legame tra la bambina e i suoi compagni di avventura. Le pagine iniziali includono la tabellina del due fino a 32 × 6 = 192 e le pagine finali presentano le divisioni coinvolte, offrendo anche uno strumento didattico.

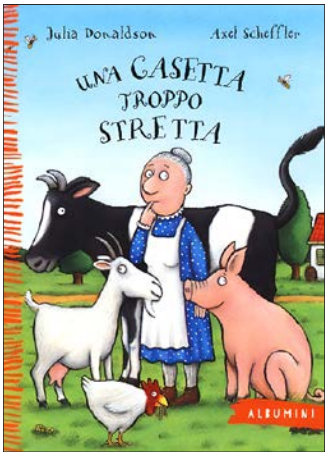
6. Misuriamo tutto!

La misura è un tema fondamentale da affrontare in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola elementare, poiché aiuta a comprendere il mondo e le sue grandezze. Inizialmente, bambine e bambini si avvicinano alla misura attraverso percezioni e parole (usando aggettivi come "alto" e "basso", "grande" e "piccolo" in modo soggettivo); per rendere le osservazioni più oggettive, pian piano si iniziano a effettuare confronti e, con il tempo, nasce l'esigenza di quantificare le proprietà misurabili attraverso unità di misura, dapprima come passi o palmi, e poi convenzionali, come il metro. Gli albi che permettono di accostarsi a questo tema in modo più o meno diretto sono vari, e offrono anche occasioni per discutere e per scambiarsi idee e intuizioni. Dentro questo tema rientra anche la grandezza *tempo*, per la quale abbiamo scelto di creare un'esplicita sessione (*Il tempo e noi*) inserita più avanti.

Lambert, A. (2018). *Passi da gigante*. Pulce.
Età: da 2 anni.

Una mattina, un bambino si avventura nel giardino di casa, trasformando la sua esplorazione in un'esperienza incredibile e piena di meraviglia. Attraverso i suoi occhi tutto diventa grandissimo: i ciuffi d'erba diventano immense foreste, piccoli insetti grandi lottatori, le castagne si trasformano in mostri spinosi, le formiche in una carovana in marcia, i tronchi degli alberi prendono le sembianze di elefanti e tanto altro. Il bambino è tutto intento a occhi chiusi, steso a terra a sognare e a immaginare; a un certo punto, un "gigante" lo sorprende, inizialmente lo insegue, lo solleva da terra e lo accompagna a casa: è l'adulto che lo accompagna in questa avventura di scoperta e crescita. Un albo prezioso, che, con un linguaggio semplice e poetico, svela ai più piccoli le meraviglie della natura e ricorda ai più grandi che, con il giusto incoraggiamento, i bambini possono compiere *passi da gigante*. Dal punto di vista matematico può essere anche usato per parlare del passo dei bambini diverso dal passo di un adulto o addirittura di un gigante, avviando così il concetto di lunghezza e di unità di misura non convenzionale. Quest'albo può rientrare anche nel tema *Questioni di punti di vista!*

Donaldson, J., & Scheffler, A. (2003). *Una casetta troppo stretta*. Emme Edizioni.
Età: da 3 anni.



Un albo in rima, come lo sono sempre quelli di Julia Donaldson (tradotti in italiano con cura lessicale e con rispetto per la metrica), che parla delle relazioni spaziali *dentro-fuori*, inserendole in una cornice narrativa accattivante. Il testo inizia infatti con la lamentela di una vecchina che vive tutta sola in una piccola, bella casetta piena di oggetti: «Guarda che strazio, questa casetta, non ci si gira da tanto è stretta!»; la vecchina non la smetteva di brontolare: «Qui non mi posso neanche girare!». Allora un vecchio saggio pensò un poco a come aiutarla, poi disse: «No, non serve un trasloco! Con tanti animali a disposizione ecco trovata la soluzione!». L'andamento dell'albo è interessante, perché procede in modo concatenato attraverso la stessa dinamica: fare entrare prima la gallina, poi la capra, poi il maiale e così via fino alla mucca; ogni animale combina qualche simpatico guaio, e la casetta inizia davvero a essere troppo stretta, ma allo stesso tempo, con i vari disastri successi, si libera di tanti oggetti. Finché… ecco come risolvere tutti i problemi: farli uscire uno a uno. «Infine andò fuori la mucca altezzosa. "Guarda guarda, che casa spaziosa!"»: in fondo, la casetta non era per niente stretta, ma ingombra di cose, e una volta liberata dagli animali che vi erano entrati (e senza più alcuni oggetti), sembra spaziosissima! Questione di punti di vista. Coi più piccoli, oltre a imparare semplici nomi e aggettivi e lavorare sulle relazioni spaziali *dentro-fuori*, si possono contare gli ingressi e poi le uscite degli animali e lavorare sul concetto di spazio occupato. Quest'albo può rientrare anche nei temi *Tanti numeri e conteggi* e *Questioni di punti di vista!*

Antonioni, R., & Sala, B. (2021). *La casa perfetta*. Zoolibri.
Età: dai 3 anni.

Nella città di Chissadove, in via Cercalabene, ci sono quattro case tutt'altro che perfette per chi le abita. Quella dell'orso è troppo stretta, quella della topolina è troppo alta, quella della giraffa è davvero troppo bassa, per non parlare di quella della coniglietta, dove c'è fin troppo spazio! In pratica nessuno è contento di quello che ha, come spesso avviene nella vita. L'albo offre un bel modo per affrontare diversi aggettivi qualificativi legati a grandezze: alta, stretta, bassa, grossa, ma non solo, anche per parlare dei numeri scritti in modo ordinale (prima, seconda, terza, quarta). Che fare, allora? Uno scambio di case può essere un'idea: l'orso grosso va nella casa alta, la topina bassa va nella casa grossa, la coniglietta smilza va nella casa bassa e la giraffa alta va nella casa stretta. Ma forse non basta: non è facile trovare la soluzione perfetta! Ancora una volta i personaggi della storia non sono felici e si scambiano nuovamente le case. Un'occasione dal punto di vista matematico per vedere tutte le combinazioni possibili, ma anche un'occasione espressiva di discussione e confronto. La strada per la casa perfetta non è facile da trovare, ma la risposta forse c'è: andare tutti ad abitare nella casa grossa, che è troppo grossa per l'orso grosso, dato che si sente piccolo e solo là dentro. Una soluzione per vivere insieme, un po' felici e un po' scontenti, come spesso ci capita di essere. Quest'albo può rientrare anche nel tema *Questioni di punti di vista!*

Sonato, A. (2024). *A volte sono…* Sabir Editore.
Età: dai 5 anni.

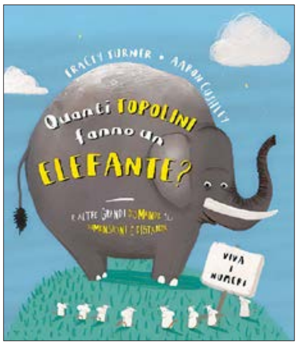
Il libro affronta la relatività dei concetti "piccolo"/"grande" (che prendono forma di aggettivi), mettendo in primo piano l'individuo in varie situazioni. A volte in effetti ci sentiamo piccoli o piccolissimi, mentre altre volte ci sentiamo grandi o addirittura grandissimi (in ogni doppia pagina compare una parte testuale che inizia proprio con «A volte sono…», con accanto l'illustrazione stilizzata della scena). L'albo presenta un viaggio alla scoperta di quello che ci circonda e di come ci rapportiamo con il mondo.

Se pensiamo all'Universo, infatti, ci sentiamo davvero piccolissimi, e sempre molto piccoli ci sentiamo rispetto al deserto, a montagne e a mari, ma un po' meno piccoli ci sentiamo rispetto agli autobus, alle macchine o agli alberi. Se poi ci confrontiamo con altre persone, potremmo sentirci né piccoli né grandi, ma quasi uguali come dimensioni, mentre ci si sente grandi se ci si confronta con un libro o con una bottiglia o un fiore, e ancora più grandi rispetto a una farfalla, o rispetto ai minuscoli granelli di sabbia. Possiamo così scoprire che si può essere *grandi* ma allo stesso tempo *piccoli*, in un cambio continuo di proporzioni e relazioni con il mondo in cui viviamo. Il libro termina affermando che tutto è in mutamento e che ciò che conta è come si vive, in una continua relazione con l'altro. Il vero finale, però, è in poche ma interessanti pagine, in cui vengono riportate le grandezze di alcune cose che ci circondano (mettendole in scala), dalle persone, alle giraffe, fino alla Tour Eiffel, e poi viene proposto «Il gioco delle coppie»… tra il grande e il piccolo. Questo testo permette di trattare a livelli diversi di profondità i concetti relativi di *grande* e *piccolo* e, più in generale, l'ambito *Grandezze e misure*; è anche una miniera di spunti per produzioni linguistiche orali o scritte giocate sulle proprie percezioni, sui confronti, sulla lettura della realtà e di noi stessi. Quest'albo può rientrare anche nel tema *Questioni di punti di vista!*

Gomel, S. (2020). *Un metro*. Orecchio acerbo.
Età: dai 5 anni.

Chi l'ha detto che i libri devono avere sempre il solito formato? Non è proprio così, anzi! Soprattutto con i più piccoli è molto arricchente esplorare la varietà delle possibilità dell'albo illustrato anche a questo livello. Questo breve albo illustrato, di piccole dimensioni, è lungo 1 metro (proprio ciò di cui parla, prendendo spunto dal metro di distanza sociale che ci aveva imposto la pandemia nel 2020) e si apre a fisarmonica. In un mondo in cui occorre stare distanziati, il libro inizia ricordando che un metro è 10 decimetri, 100 centimetri e 1'000 millimetri, aiutando così le conversioni tra le unità di misura di lunghezza. Ma… un metro quant'è, concretamente? L'albo aiuta a farsene un'idea sia tramite la dimensione del libro aperto sia tramite curiosi confronti (prima di tutto con l'altezza dei bambini e poi con altri elementi come «Dentro a un metro ci stanno tre gatti, due cani e almeno cento formiche in fila indiana»; ovviamente, dipende dalle dimensioni degli animali citati, ma la riflessione si può espandere anche in questo senso). Dopo aver rigirato il libro, i metri iniziano gradatamente a consumarsi, 10 centimetri alla volta, consentendo alle persone di avvicinarsi di nuovo un un po' alla volta. Un bel modo didattico per lavorare concretamente con questo strumento di misura. Alla fine del libro, tutti tornano a contatto tenendosi finalmente per mano: il metro di distanza non c'è più, ma c'è una lunga linea umana che gira attorno alla Terra, e che è certamente lunga tanti, tanti metri.

Turner, T., & Cushley, A. (2020). ***Quanti topolini fanno un elefante? E altre grandi domande su dimensioni e distanza*****. Ide e Ali.**
Età: dai 5 anni.



Quest’albo enciclopedico, dotato anche di un sommario per orientarsi nei contenuti, propone un’avventura nel mondo dei grandi numeri, alla scoperta delle risposte a incredibili domande (come quella del titolo) su varie dimensioni e su quante volte una cosa sta dentro un’altra. Oltre a quanti topolini occorrono per fare un elefante, è infatti possibile scoprire anche quanti pianeta Terra stanno dentro al Sole, o quanti cubetti di ghiaccio fanno un iceberg, quanti alberi di Natale fanno una sequoia, quanti palloni riempierebbero lo stadio più grande del mondo, o ancora quanti salti in alto servono per raggiungere la luna e molto di più! Un modo per allenare la stima di grandi numeri, che potrà essere verificata tramite le informazioni riportate nel libro, per rispondere a curiose domande matematiche («Che cos’è più lungo, un milione di secondi o 1 anno?», con un uso un po’ insolito dell'aggettivo “lungo”), per effettuare calcoli, per risolvere i diversi problemi incentrati su grandezze proposti nel testo («Supponiamo che un panificio produca 873 pacchetti di biscotti, e ogni pacchetto contenga 23 biscotti. Quanti biscotti avremo in tutto? L’operazione è 873 × 23. Quale pensi sia la risposta corretta?», si mostrano poi quattro numeri con ordini di grandezza diversi tra i quali scegliere); insomma, un modo curioso e interessante per affrontare tanta matematica inaspettata. Nel testo è riportata anche una guida alle diverse unità di misura. Le pagine sono dense di informazioni e di immagini: coi più piccoli, la lettura va sicuramente guidata, mentre coi più grandi si tratta di un buono stimolo per affascinare sui grandi numeri, avviare ricerche e per redigere testi informativi (enciclopedici). Per le sue caratteristiche, quest’albo può rientrare anche nel tema *Tanti numeri e conteggi*.

Gifford, C. (2018). ***Misuriamo il mondo. Confrontiamo ciò che ci circonda*****. Ediz. a colori.**
Età: dai 6 anni.

Uno straordinario libro per bambine e bambini curiosi, incentrato sui paragoni di metrica. Un modo per affrontare l’ambiente e le sue sorprendenti meraviglie, in particolare le grandezze, e, allo stesso tempo, l'occasione per esplorare un testo ricco di immagini e di belle descrizioni. Il libro inizia con due opossum pigmei della Tasmania riprodotti nelle loro dimensioni reali: misurano solo 5 cm e così, insieme, uno sopra l'altro, sono più corti di un cucchiaino. Alcune cose che esistono al mondo ci appaiono grandi, come la piramide di Giza: sono così grandi che non si possono quasi immaginare; altre cose sono così piccole che si possono osservare solo con un microscopio. Dai più piccoli ai più grandi, dai più lenti ai più veloci, dai più leggeri ai più pesanti, in quest'albo enciclopedico e informativo si trovano centinaia di paragoni sorprendenti e di informazioni affascinanti, e tantissime grandezze (quantità, lunghezze, massa, energia, velocità ecc.). Il testo offre, quindi, una preziosa occasione per scoprire grandezze legate alla vita reale o anche per trasformare in problemi le informazioni scientifiche in esso contenute, se si considera che il libro è pieno di numeri riferiti a tanti aspetti che ci circondano. Dopo aver letto quest'albo non guarderemo più il mondo nello stesso modo e avremo voglia di trovare altre curiosità! Quest'albo può quindi rientrare anche nel tema *Tanti numeri e conteggi*.

7. Il tempo e noi

Il tempo è un'altra fondamentale grandezza che ci accompagna fin da piccoli e che è quindi importante esplorare sin dalla scuola dell'infanzia, dentro e fuori di noi. È allo stesso tempo un tema estremamente complesso e impregnato di emotività, che, per questo, va introdotto con sensibilità e con gradualità. Gli albi di questa sezione lavorano in quest'ottica, aiutando bambine e bambini a sviluppare consapevolezza di loro stessi e del mondo, a sapersi situare, partendo dalle routine quotidiane fino ad affrontare concetti più ampi e complessi come la fretta e l'attesa (e qui il tempo è soggettivo), il susseguirsi degli eventi che non ritornano e quelli che sono invece ciclici (come l'alternarsi di dì e notte, e il ritornare dei giorni della settimana, dei mesi e delle stagioni, degli anni); insomma, il tempo che scorre in tutte le sue sfaccettature, e in cui viviamo immersi.

Wise Brown, M. (2022). *Buonanotte luna*. Nord-Sud Edizioni.
Età: dai 2 anni.

Quest'albo è un classico senza età: sebbene sia stato edito per la prima volta nel 1947, non smette mai di parlare all'emotività di piccoli e meno piccoli. In esso si fa notte pagina dopo pagina (nel senso che le pagine diventano via via più scure) e, per questo, può anche essere un primo strumento per affrontare con bambine e bambini la ciclicità delle ore di luce e di quelle di buio, che, per quanto possano fare paura, sono sempre nuovamente seguite da una nuova alba. La storia, di fatto, è la storia dell'addormentarsi di un coniglietto, *alter ego* del lettore, il quale, per prendere sonno e vincere le sue paure, dà la buonanotte a tutte le cose intorno a lui. Quest'albo ha accompagnato e accompagna nel sonno generazioni di ascoltatrici e ascoltatori, ma i suoi usi possono essere anche altri: per conciliare il sonno, è un testo che va letto consapevolmente con la voce che scende pian piano di volume, mentre per riflettere su ciò che accade nell'alternanza notte/dì, che ritorna in modo ciclico, il testo va letto e fatto comprendere discutendone con bambine e bambini, per capire che cosa accade, ma anche, magari, per portarli a condividere le loro paure.

Morstad, J. (2023). *Che cos'è il tempo?* Terre di mezzo editore.
Età: dai 4 anni.

Questo albo parte con la concretizzazione più intuitiva del tempo, il tic tac dell'orologio e i numeri e le parole che scorrono sul calendario, per poi aprirsi a considerare aspetti più inaspettati e complessi, che a volte ci sfuggono. Il tempo è una delle tante cose che evolvono, quindi in alcune pagine l'albo mostra una visione lineare del tempo, che passa e non ritorna, come un seme che si trova al buio e che domani sarà un fiore, e che prima o poi appassirà. Ma il tempo è anche un sassolino, che un milione di anni fa era una montagna. È un dentino che dondola, un viso che cambia, un sole che tramonta e tanto altro ancora. Fra le pagine si affronta, così, il concetto di *prima e dopo* (anche se, va ricordato, alcuni esempi sono anche ricorsivi, ossia ritornano, come il sole che sorge e tramonta); quelli della linearità e della ricorsività sono due aspetti ripresi alla fine dell'albo con una rappresentazione lineare e una a forma di cerchio. Nell'albo viene poi messa in evidenza anche la soggettività del tempo, a volte percepito come lento, altre volte come velocissimo. Un albo poetico e divertente per esplorare una delle grandezze più complesse e dalle tante sfaccettature, che da sempre coinvolge, affascina ed emoziona piccoli e grandi, rispetto alla quale è semplice e spontaneo dire e raccontare qualcosa di noi stessi.

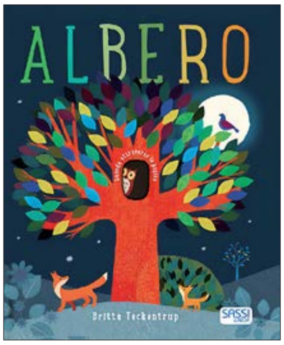
Perrin, C. (2019). *Presto presto presto.* Franco Cosimo Panini.
Età: dai 5 anni.

Questo bell'albo ha un formato particolare (le pagine sono rettangolari, ma con il lato lungo in basso rispetto a chi legge), così come particolare è la storia che presenta, vorticosa prima, calma poi. Esso contiene inizialmente la giornata fatta di frenetiche avventure del bambino protagonista, che corre sin dal mattino quando si alza, per prepararsi, prendere il bus e fare tante cose con amiche e amici (attività che diventano sempre più incredibili e vorticose)… eppure, la velocità non è mai sufficiente per fare tutto: ci si perde sempre qualcosa (come dare i baci alla mattina prima di uscire, fare pipì, fare il bagno in mare e tanto altro). Anzi! L'albo insegna che si rischia di perdere molto, e ce lo esprime in diversi modi nella seconda parte della lettura, quando il ritmo cambia e le frasi, che prima erano un flusso rapido scandito da sole virgole (scritto in basso nella pagina), diventano onde calme, linee curve, con ampi spazi bianchi che le separano: la "folle corsa" precedente si ferma e il bambino riesce finalmente a vedere con attenzione ciò che lo circonda: una coccinella che svolazza, un lombrico che si attorciglia, il silenzio infinito in mezzo agli alberi, il dolce dondolio della barca e tanto altro. Con lo spirito del calligramma (secondo cui anche la disposizione delle parole sul foglio mima ciò che esse dicono), quest'albo ci parla del tempo vissuto, spesso correndo troppo a tutte le età, e, al contempo, ci insegna parole e sensazioni, trasmesse sfruttando al meglio il potenziale dato dal formato del libro. Il finale è aperto: dopo essersi gustato con infinita lentezza una fetta di pane squisitamente dolce, il protagonista chiude gli occhi per godersi appieno questo momento delizioso e… nelle ultime due pagine senza immagini (bianche), dove sono presenti solo poche parole, si stimolano le lettrici e i lettori, per bocca del protagonista, a trovare altre idee su ciò che si può ancora realizzare in un tempo più lento del solito.

Cognolato, L., & Paschetta, M. (2024). *L'uomo che vendeva il tempo.* Terre di mezzo editore.
Età: dai 5 anni.

Nel negozio del signor Vettore, in cui quest'albo è ambientato, ciascuno trova il tempo di cui ha bisogno: dieci minuti per il marinaio che vuole salutare la fidanzata; sei ore per la manager alle prese coi tanti lavori che deve finire; mezz'ora di gioco in più per i bambini. Tutti sono sempre in cerca di tempo e Vettore lavora da mattina a sera; il tempo che gli avanza lo regala a chi non può comprarlo. Vettore il tempo lo soppesa con un bilancino di precisione, lo incarta in bustine azzurre con un fiocco giallo, ed è molto preciso e accurato in questo compito. Si prende cura del tempo di tutti, fuorché di quello per sé e per le sue cose. Un giorno, a causa del brutto tempo (un altro "tempo" su cui riflettere), accade che le mongolfiere trasporta-tempo non riescano ad arrivare al negozio: tutti continuano a chiedere tempo, ma le scorte sono esaurite; Vettore stesso, a un certo punto, avrebbe bisogno di tempo per aggiustare la sua casa in rovina, ma, purtroppo, scopre di aver finito completamente le scorte. Non c'è più tempo! E ora come si fa? Qualcuno bussa alla porta con la soluzione… ciascuno di coloro che aveva ricevuto tempo da Vettore gliene rende un pochino, così che possa avere tempo per sistemare la sua casa. Un albo per riflettere, in modo lirico e sognante, sul tempo inteso come qualcosa che tutti vorremmo, e che non possiamo dare per scontato; un albo che ci ricorda che è giusto non dimenticarsi di sé quando si pensa agli altri, ma anche che se si ha dato molto agli altri, loro non si dimenticheranno di noi nel momento del bisogno… Quest'albo può servire anche ad avviare percorsi legati a situazioni di compravendita al mercato o al supermercato.

Teckentrup, B. (2016). *Albero*. Sassi.
Età: dai 3 anni.



Questo albo incentrato sul racconto di un albero propone in rime ben fatte l'evoluzione delle quattro stagioni e degli elementi che le caratterizzano. Si parte dall'inverno e dall'ambientazione più tradizionale: «Nella foresta ogni cosa è ghiacciata: nel gelo d'inverno, cristallizzata», senza dimenticare che, sotto il manto nevoso, il germoglio cresce silenzioso. Arriva poi la primavera, con la sua frizzante brezza e le sue gemme che si schiudono, e con tutta la natura che sembra risvegliarsi. Esplode poi l'estate, con il suo sole rovente di giorno e le tante stelle di notte. Ma poi la calura si allontana e lascia spazio all'autunno, al cadere delle mele dall'albero e alle gocce di rugiada sull'erba mattutina. Si ritorna poi in modo ricorsivo all'inverno e alle sue caratteristiche, quindi al tornare della neve. Il libro termina parlando delle stagioni che «arrivano e poi se ne vanno, così inizia un nuovo anno» e la rinascita di vari elementi della natura. Un bel modo per parlare della ciclicità del tempo e degli aspetti che lo caratterizzano: il giorno e la notte, i giorni della settimana, le stagioni, i mesi, gli anni.

Duprat, G., & Charbonnel, O. (2021). *Il libro dei tempi*. L'ippocampo.
Età: dai 6 anni.

Un bel libro animato, da vivere anche manipolando la carta (fra elementi *pop-up*, ruote che girano e finestrelle apri e chiudi), pensato per esplorare i diversi aspetti del tempo, da quello oggettivo, dato dal tempo misurato dagli strumenti di misura che ci circondano, fino a quello soggettivo, legato alla nostra percezione. Si tratta di un testo attento agli aspetti linguistici, che inizia con alcune frasi che di frequente gli adulti dicono, nel loro abituale "correre dietro" al tempo: «Non c'è tempo!», «Hai visto che ore sono?», «Dai, spicciati»… è sempre questione di tempo: un concetto difficile da afferrare, ma che quotidianamente rincorriamo (anche se una nuvoletta in basso a destra ricorda «Non correre, prenditi il tuo tempo…»). Nell'albo si parla del tempo che ci circonda (orologi, sveglie, cellulari, computer…), ma anche del tempo che viviamo nel corpo, nella vita, dentro di noi e nella nostra testa. Il tempo viene raccontato nel testo tramite descrizioni incentrate su curiosità e aneddoti scientifici e storici, giocati tra parole, numeri e illustrazioni. I numeri arricchiscono le curiosità proposte, alcune più conosciute, come la vita media di un uomo (81) e di una donna (85), la vita media di un'ape (43 giorni), di un gatto (15 anni), o di un roseto (10 anni), arrivando a curiosità inaspettate, come il numero di battiti del cuore di una vita media intera, pari a circa 3 miliardi, o il primo uomo moderno comparso in Africa, circa 300'000 anni fa. L'albo diventa così un modo efficace per trattare piccoli e grandi numeri che hanno riguardato la nostra storia e il nostro presente, unendo curiosità scientifiche, matematiche, storiche e linguistiche, il tutto armonizzato da una materialità accattivante che rende prezioso il testo. Il libro termina parlando del «tempo delle proprie emozioni», quindi della soggettività del tempo, e dei propri sogni, senza però dimenticare anche in questo caso gli aspetti numerici: «Se una vita dura all'incirca 82 anni, allora si dorme più o meno per 28 anni e si sogna per 7!». L'insieme è un testo ricco e davvero prezioso. Quest'albo può quindi rientrare anche nel tema *Tanti numeri e conteggi*.

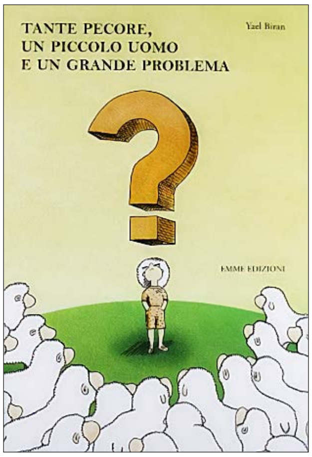
8. Tanti problemi

"Problema" è una parola decisamente polisemica, cioè una parola che veicola più significati, non sempre con connotazioni positive: gli albi illustrati si prestano benissimo per aprire discussioni e confronti in tal senso. Bambine e bambini sanno certamente che cos'è un problema nel quotidiano (ma è interessante discutere su ciò che vivono come tale) e, pian piano, a scuola, scoprono anche quel particolare genere di testo che è il problema matematico; inoltre, la ricerca in didattica della matematica ha approfondito vari tipi di problemi, che può essere interessante esplorare con allieve e allievi più grandi. Partire dalla lettura di un albo può essere un ingresso delicato e particolare in questa dimensione.

Calì, D., & Somà, M. (2022). ***Abbiamo un problema!*** **Kite Eidzioni.**
Età: dai 5 anni.

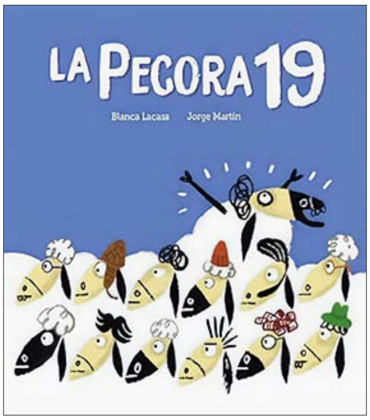
Questo albo affronta la relatività della parola *problema*: a volte un episodio o un avvenimento ci sembrano un gran problema, difficile da risolvere, ma, guardandoli da un'altra prospettiva e senza preconcetti, si potrebbe scoprire che le cose non stanno proprio così. Nel testo viene presentata una ingarbugliata situazione: un giorno un oggetto enorme e misterioso cade dal cielo in un prato e, a quel punto, tutti gli abitanti del luogo cercano di capire di che cosa si tratta, per quale ragione sia arrivato e soprattutto come spostarlo da lì. Come spesso purtroppo avviene, una cosa nuova, diversa, spesso fa paura e deve essere rimossa. Il problema appare però insormontabile: pur con vari tentativi il grande oggetto non si riesce proprio a rimuovere; forse la soluzione non è così lontana come potrebbe sembrare: basta cambiare il punto di vista! Un pezzo alla volta, il succoso "problema" viene mangiato e fatto sparire. Sì, proprio così, perché si scopre che quell'oggetto è un cibo prelibato. Un albo divertente, con illustrazioni dettagliate e dallo stile particolare, che fa riflettere sull'arte di saper guardare le cose da altre prospettive, di saper risolvere problemi con creatività, imparando anche a guardarli senza paura, ma anche una bella occasione per riflettere tutti insieme su che cosa sono per noi i problemi (matematici e non); queste ragioni fanno rientrare l'albo anche nel tema *Questioni di punti di vista!*

Biran, Y. (2013). *Tante pecore, un piccolo uomo e un grande problema*. Emme edizioni.
Età: dai 6 anni.



Un albo adatto a trattare il tema dei problemi in modo trasversale. Un vecchio e famoso detto dice e suggerisce che, quando un problema non ci lascia dormire, non ci rimane che *contare le pecore*. L'origine di quest'espressione è lontanissima e risale al mondo contadino, ma trova riscontro anche nel *Novellino* (celebre raccolta di novelle toscane del Duecento), in cui si narra la vicenda di Ezzelino da Romano, che, soffrendo d'insonnia, pretendeva che un cantastorie gli raccontasse storie per tutta la notte; questi, stanco di non dormire, raccontò la vicenda di un lungo passaggio di pecore da una sponda all'altra di un fiume, esortando l'ascoltatore a completare il trasbordo nella sua mente (lasciandolo, così, riposare). L'albo presenta, quindi, anche l'occasione per una raccolta di detti, intervistando i genitori e i nonni. Anche il piccolo uomo protagonista di questa storia, che non riesce a dormire, conosce questo detto, ma le pecore che lui conta gli creano, in realtà, un problema in più, perché si mettono a fare cose strampalate. Le pecore disordinate e che giravano a caso erano difficili da contare, e cerca dunque di ordinarle facendole passare a una a una da una staccionata, ma ognuna lo fa a modo suo, complicando la situazione. Passano tutte le pecore, tranne una, che si ferma, fa un passo indietro e scopre che a volte ci sono strade più semplici per oltrepassare un ostacolo, ossia aggirarlo (aggirando così con furbizia il problema). L'uomo, intanto, pensando alle pecore e alle loro caratteristiche, a un certo punto finalmente si addormenta. Le immagini nere e stilizzate su fondo giallo non sono particolarmente accattivanti, ma sono utili a scoprire quel che accade, anche solo in modo visivo (una pecora alla volta). Inoltre, il testo può essere adatto per affrontare i concetti di enumerazione e conteggio e per dare l'avvio alla discussione su che cos'è un problema. Quest'albo può rientrare anche nel tema *Tanti numeri e conteggi*.

Lacasa, B., & Martin, J. (2024). *La pecora 19*. Ediz. a colori.
Età: dai 4 anni.

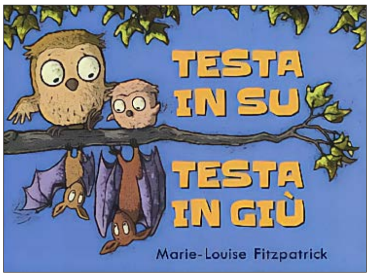


Come già emerso dall'albo precedente, si sa: contare le pecore serve per addormentarsi. Anche la signora Ofelia si addormenta tutte le sere dopo aver contato esattamente 18 pecore: così facendo, però, la pecora 19 ha provato un sacco di volte il salto della staccionata, eppure il suo turno non arriva mai… Pecora 1, 2, 3, 4… e così via, fino alla pecora 18; dopo di lei, Ofelia cade nel sonno più profondo, riuscendo anche a "ronfare". Le 18 pecore sono ben rappresentate su due pagine e possono essere facilmente contate dalle lettrici e dai lettori. La pecora 19, Ramona, rimane quindi sempre lì in attesa, a fare riscaldamento, senza saltare mai; decide però di non rinunciare, così inizia a progettare fantasiosi piani e travestimenti per poter saltare anche lei la staccionata (travestirsi da cane da pastore, vincere la pettorina della pecora 13, Florinda, giocando a carte, cancellare l'1 dalla pettorina ecc.). E come lei ci pensano le sue compagne, la pecora 20, 21, 22, 40, 75 e tutte le altre: la soluzione per saltare un po' tutte si troverà, ma dovranno ingegnarsi e collaborare (saltare in coppia, uscire in ordine inverso ecc.). Un albo divertente, per trovare soluzioni originali a problemi, per lavorare sull'orologio presente nella prima pagina, per contare e per scoprire i numeri, via via più grandi all'avanzare del testo, per trovare ordinamenti diversi dei numeri, anche casuali. Quest'albo può rientrare anche nel tema *Tanti numeri e conteggi.*

9. Questioni di punti di vista!

L'idea di lavorare sui punti di vista sia in italiano sia in matematica è accattivante e ben si presta a essere avviata anche con gli albi illustrati. Sapersi porre da un punto di vista che non è il proprio, in un dialogo o anche in una situazione di realtà in cui si guarda qualcosa, è, infatti, una competenza sociale e relazionale trasversale di grande utilità, che deve evolvere nel corso della scolarità per allenare creatività, disponibilità all'ascolto, ragionamento e capacità di argomentazione. Gli albi che recensiamo rispetto a questo tema hanno al centro, in modi diversi, proprio il confronto fra differenti punti di vista. Come indicato nelle specifiche recensioni, va precisato che tanti altri albi presentati in questa rassegna possono rientrare anche in questa sezione, cioè prestarsi a un lavoro su discussioni e punti di vista.

Fitzpatrick, M. L. (2016). *Testa in su testa in giù*. Lapis edizioni.
Età: dai 2 anni.



Quest'albo è un *silent book* cartonato di formato piccolo, in cui, come si vede già dalla copertina, sono protagoniste due famigliole (un adulto e tre piccoli), una di gufi e una di pipistrelli. I due gruppetti abitano sullo stesso ramo, ma lo occupano in modo diverso, ciascuno secondo la modalità che le è propria: i gufi stanno appollaiati, mentre i pipistrelli sono appesi per le zampette. Inevitabilmente, un gruppo vivrà a testa in su e l'altro a testa in giù, guardandosi con sospetto per quelle che sono reciprocamente viste come stranezze; solo un cucciolo di gufo è disponibile a provare ad andare dai pipistrelli, appendendosi come loro, ma l'adulto sembra dissuaderlo con una sola occhiata. La convivenza pare difficile, finché una folata di vento porta scompiglio, i piccoli sono portati via e urge mettersi a cercarli, ma tutto finisce bene: i cuccioli vengono ritrovati e iniziano a giocare insieme, mentre gli adulti li osservano (senza, però, cambiare posizione e punto di vista). Un albo semplice ma curato nei dettagli iconici (le espressioni dei personaggi), che stimola un lavoro di lettura per anticipazione e di comprensione delle inferenze, nonché un momento di discussione sui diversi punti di vista e sull'incontro con chi percepiamo come "diverso da noi".

Ramos, M. (2022). *Il mondo a testa in giù*. Babalibri.
Età: dai 4 anni.

Questo testo del 1995, ma tradotto in italiano solo nel 2022, racconta la storia di Remì, un topolino che vede il mondo… sottosopra, e per questo è diverso da tutti gli altri. Un giorno, a scuola, sente la maestra raccontare che la terra è una sfera: allora, pensa Remì, da qualche parte qualcuno cammina sulle mani, a testa in giù, e vede le cose come le vede lui! Inizia così il lungo viaggio di Remì, che desidera trovare qualcuno che veda il mondo proprio come lui (insomma, che lo capisca): cammina cammina, attraversa oceani e deserti finché (dopo aver trovato un uomo che davvero, volutamente, si trova a testa in giù), con un finale a sorpresa, tornerà a casa, riuscendo finalmente a integrarsi con gli altri. Quest'albo – in cui le immagini sono in gran parte rappresentate al contrario rispetto alle parole (come si vede sin dalla copertina) – stimola la fantasia e il pensiero divergente in bambine e bambini, incentiva la considerazione delle alterità e permette di discutere sui diversi modi di vedere le cose, sfidando addirittura le leggi della gravità. Si tratta quindi di una buona partenza anche per avviare discussioni spontanee orientate a comprendere fenomeni scientifici apparentemente misteriosi.

Abbatiello, A. (1998). *La cosa più importante*. Fatatrac.
Età: dai 3 anni.

Un bell'albo legato al tema dell'accettazione dei diversi punti di vista e dell'importanza del confronto, anche verbale. La vicenda ha al centro, infatti, una divertente e sorprendente discussione tra gli abitanti di un bosco, che battibeccano su quale sia la caratteristica più importante per un animale: orecchie lunghe, aculei, collo lungo, ali, una lunga e bella proboscide, piedi palmati, denti grandi, il colore verde. Di pagina in pagina, ognuno esprime un'opinione, di fatto "imponendo" agli altri la propria particolarità come superiore, realizzando una carrellata di divertenti trasformazioni tutte da scoprire nelle doppie pagine che si aprono a sorpresa, con immagini semplici ma incisive. Alla fine, si scoprirà che «TUTTE queste cose sono importanti», dato che «Ognuno di noi ha qualcosa di importante». Sarà alla fine un gufo a risolvere la questione: l'importanza di ognuno sta proprio nelle differenze che lo rendono unico. Dal punto di vista matematico può essere l'occasione per affrontare le grandezze che ci caratterizzano e per riflettere sui diversi punti di vista, mentre, per gli aspetti linguistici, ci si trova immersi in una situazione favorevole per valorizzare le caratteristiche di ciascuno, per parlare di sé tramite nomi e aggettivi, e per imparare l'arte di confrontarsi con gli altri.

Tessaro, G. (2011). *Foto di gruppo*. Lapis edizioni.
Età: dai 4 anni.

Questo bell'albo, con una grafica accattivante, si svolge nella Savana, dove una scimmia non trova altro da fotografare se non una piccola pulce e si convince che non ci può essere nulla di meglio.

Ma quando sta per scattare, ecco che, uno dopo l’altro, arrivano tanti animali che esigono di entrare nell’inquadratura per caratteristiche diverse (da osservare anche a livello descrittivo): un bel collo lungo come quello della giraffa, di quasi tre metri, un bel corno come quello del rinoceronte, delle belle macchioline come quelle del ghepardo, le bellissime piume di uno struzzo e così via. Di volta in volta la scimmia è costretta a indietreggiare sempre di più per far stare tutti nell’immagine. Riuscirà a scattare la foto di gruppo? Una storia divertentissima, che si può anche vivere (simulandola) in classe, con una carrellata di personaggi che sembra non finire mai e un buffo finale a sorpresa. Tutto ciò può servire a parlare delle caratteristiche personali di ogni bambina e di ogni bambino, delle loro grandezze e degli aggettivi che più si prestano alla descrizione di come siamo, ma anche per avviare attività sui diversi punti di vista, cercando il punto dal quale guardare una costruzione o scattare una fotografia.

10. Geometria e narrazione

La geometria offre preziosi spunti per narrare, partendo dagli enti più semplici (punto, linea, piano) fino a figure sempre più articolate. L’essenzialità delle diverse figure apre mondi fantastici, che sono anche favoriti dalla possibilità di giocare con i colori, con le dimensioni e con gli orientamenti che possono avere sul foglio. Questa grande varietà stimola molteplici idee che aiutano ad apprendere in modo intuitivo gli enti e le caratteristiche delle figure. Gli albi illustrati che giocano con la geometria sono numerosi e lo fanno in modo diverso, come mostrano quelli qui descritti o quelli riportati nella raccolta precedente, che variano dall’essere più metaforici (accostando geometria e sentimenti umani) all’essere più propriamente narrativi, con ambientazioni e personaggi più classici (ma geometrici). Semplici fogli e matite per lasciare tracce oppure vari ritagli di carta sono materiali semplicissimi per provare a replicare (riscrivendoli) o a inventare nuovi albi “geometrici”.

Gülsah, Y. (2022). *Una linea*. Sassi.
Età: dai 3 anni.

«Ciao!», inizia l’albo, «Mi piace tanto disegnare linee»; questo è ciò che afferma il personaggio che si può vedere in copertina. Linee lunghe, corte, grosse, sottili, di tutti i colori... E con le linee il protagonista disegna anche cerchi, triangoli, quadrati, rettangoli, per poi passare alla scia di un aereo, a gomitoli arrotolati, righi musicali, disegni (e sogni) di ogni sorta, semplici o sempre più articolati. «E tu cosa riesci a fare con una linea?», chiede il testo direttamente a chi legge, nel finale, lasciando poi spazio a una pagina in cui iniziare a disegnare, favorendo il coinvolgimento diretto e sperimentale. Un albo interattivo che stimola la fantasia, la verbalizzazione e il lessico (dire che cosa si sta disegnando, descrivendo e parlando di sé), ma anche l’avvicinamento all’arte tramite la produzione di autentici quadri, sempre partendo dall’ente geometrico “linea”, con le sue diverse caratteristiche (curva/dritta/mistilinea, aperta/chiusa, semplice/intrecciata…) tutte da scoprire, sperimentare e approfondire.

Carminati, C. (2023). *Cerca cerchi.* Lapis edizioni.
Età: dai 3 anni.

Le pagine di quest'albo sono quadrate, ma contengono una ricca galleria di… cerchi! Di che cosa si tratta? Di riproduzioni fotografiche di oggetti ritrovati nella realtà, grandi o piccoli, ben visibili o nascosti, autentici cerchi (superfici di cilindri), oppure sfere che vediamo come cerchi se scattiamo una fotografia (2D). Nelle varie pagine, su fondo bianco, un indovinello in rima chiede a chi legge di cercare il cerchio giusto tra quattro immagini («Cerca il cerchio che ti sveglia / con dolcezza ogni mattina / manda baci alla vaniglia / e profuma la cucina»; la fotografia giusta è quella di una ciambella tonda). A volte la soluzione non è semplicissima e occorre osservare attentamente, oppure possono esserci più soluzioni: ciò che conta è allenarsi a guardare bene le cose, a individuare cerchi, e a capire in profondità le parole e le situazioni, nella prospettiva di continuare la "caccia ai cerchi" o ad altre figure, realizzando anche nuove raccolte in rima.

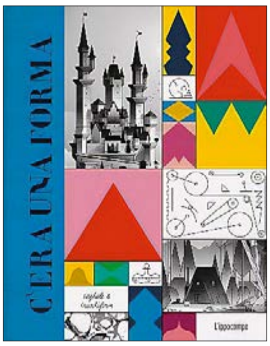
Crocicchi, S. (2023). *Quello che basta.* Artebambini.
Età: dai 4 anni.

Quest'albo è costruito in modo particolare: si può leggere in entrambi i versi (dall'inizio alla fine o al contrario), diventando, così, un autentico libro-gioco da vivere. La riflessione sottesa è decisamente profonda e adulta (qual è la giusta misura delle cose? Il troppo? Il poco? Come queste cose dipendono da come ci sentiamo?), anche se combina semplici figure geometriche (cerchi e quadrati). L'albo narra due storie opposte: leggendo in un verso, troviamo un personaggio che cerca di riempire il suo vuoto accumulando un mucchio di cose (parole, scarpe, cappelli, la Luna nel pozzo e tanto altro), ma poi si sente sovrastato da tutto. Basta però cambiare il punto di vista e cercare il proprio equilibrio con quello che basta! A questo punto, il libro sprona a iniziare la lettura partendo dall'altra copertina. L'altro personaggio vuole fare ordine e buttare via tutto (sassolini, soprammobili, macchie del tappeto ecc.), ma poi si è sentito vuoto e solo come la pagina bianca raffigurata. Basta anche questa volta trovare l'equilibrio e ricominciare il libro dall'altra copertina. Il messaggio e l'identificazione coi due personaggi può avviare discussioni non banali, per pensare a quando anche noi ci siamo sentiti come l'uno o l'altro, e a che cosa abbiamo fatto. Dal lato matematico è possibile lavorare geometricamente sulle figure illustrate e sfruttare questo albo quando si parla di equilibrio trattando il tema della massa. Questo testo può rientrare, però, anche nel tema *Questioni di punta di vista!*

Lupi, G., & Garner, M. (2024). *Sono io, sono proprio io.* Corraini Edizioni.
Età: dai 3 anni.

In quest'albo, piuttosto lungo, tutto comincia con un semplice cerchio bianco su fondo bianco (il contorno è nero, come quello che si trova sulla copertina). Il cerchio, nella sua semplicità, viene via via arricchito con linee e forme di vari tipi e diversi colori, pagina dopo pagina, cominciando a parlare di noi, acquisendo vari dettagli a seconda di come ci si sente e delle emozioni che proviamo (ad esempio «quando mi sento felice e… quando mi sento triste»), ma anche di che cosa si osserva e di che cosa si fa (guardare il cielo, riconoscere le costellazioni, giocare, stare con un amico…). Una bella occasione didattica per trattare il tema dei diversi tipi di linee (curve/dritte/miste, aperte/chiuse, semplici/intrecciate ecc.) a seconda dell'emozione che si prova, ad esempio rappresentando un volto felice o triste formato da sole linee. La stessa attività può essere riproposta anche con poligoni o altre figure. La parte relativa alle costellazioni consente di parlare anche di punti e di linee che le uniscono creando diverse forme. Tutto ciò è reso dalle parole della voce narrante e da accurati giochi grafici e cromatici, che affollano via via le pagine di colori, linee e punti che accompagnano emozioni e sensazioni. Un bell'albo per agganciare esperienze grafico-pittoriche alla scoperta di elementi geometrici e per parlare di noi, di come ci sentiamo, ma anche degli altri.

Cruschiform, & Gazhole (2022). *C'era una forma*. L'ippocampo.
Età: dai 4 anni.



L'albo narra le fantastiche vicende del castello D'or-ben-ti-sta, abitato da una Regina e da un Re molto rigidi, "appuntiti", pieni di vertici, i quali hanno un problema: vorrebbero un erede dagli angoli retti, ma per, destino, concepiscono soltanto figli rotondi, ossia formati da linee curve... Riusciranno un giorno a generare un poligono che potrà regnare? La trama è accattivante e la realizzazione grafica (che combina figure e parole scritte con vari font, a volte rappresentate su piani cartesiani) è molto efficace, e fa venire voglia di proporre lavori di riscrittura "italmatici", in cui i personaggi di matrice tradizionale sono riletti in chiave geometrica, acquisendo anche alcuni tratti caratteriali richiamati, nel sentire comune e nel lessico, dall'aspetto. Un modo diverso per parlare di figure e in particolare di poligoni. Attenzione, però: diffidare dagli stereotipi! Inoltre, attenzione anche ad avere uno sguardo accorto sulla terminologia matematica (non sempre precisa) e su certi usi (ad esempio, associare "acuto" a "limitata apertura mentale"; *acuto*, nel parlare comune, vuol dire invece *essere sveglio e arguto*). Rimane però un'occasione per parlare di diversi tipi di figure del piano, che possono essere descritte e trasformate come suggerisce il testo.

Bibliografia

Campagnaro, M., & Dallari, M. (2013). *Incanto e racconto nel labirinto delle figure. Albi illustrati e relazione educativa.* Erickson.

Capetti, A. (2019). *A scuola con gli albi. Insegnare con la bellezza delle parole e delle immagini.* Topipittori.

Carminati, C. (2020). *Occhio ladro.* Lapis edizioni.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2021). 100 albi illustrati fra italiano e matematica: una bibliografia con spunti didattici. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *9*, 169–232. https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/149

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2023). *Parole, numeri, figure. Percorsi interdisciplinari tra scuola dell'infanzia e primaria.* Carocci editore.

Fornara, S. (2021). *Lettere a una maestra. Sull'insegnamento (non solo) dell'italiano.* Einaudi.

Glaser, M., Garsoffky, B., & Schwan, S. (2009). Narrative-based learning: Possible benefits and problems. *Communications*, *34*(4), 429–447. https://doi.org/10.1515/COMM.2009.026

Gottschall, J. (2014). *L'istinto di narrare. Come le storie ci hanno reso umani.* Bollati Boringhieri. (Titolo originale: *The Storytelling Animal: How Stories Make us Human* pubblicato nel 2012).

Grilli, G. (2019). L'utopia realizzata. Gli albi illustrati non-fiction per l'infanzia e l'intreccio esemplare tra scienza e arte. In S. Barsotti & L. Cantatore (Eds.), *Letteratura per l'infanzia. Forme, temi e simboli del contemporaneo* (pp. 185–201). Carocci editore.

Grilli, G. (2023). I nuovi albi illustrati di divulgazione per l'infanzia: La conoscenza come esperienza attiva, dialogica, estetica. In M. Fiorucci, I. Loiodice & M. Ladogana (Eds.), *Scuola, democrazia, partecipazione e cittadinanza in occasione dei 100 anni dalla nascita di Mario Lodi* (pp. 58–69). Pensa Multimedia.

McQuiggan, S. W., Rowe, J. P., Lee, S., & Lester, J. C. (2008). Story-based learning: The impact of narrative on learning experiences and outcomes. In B. P. Woolf, E. Aïmeur, R. Nkambou & S. Lajoie (Eds.), *ITS '08: Proceedings of the 9th International Conference on Intelligent Tutoring Systems* (pp. 530–539). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-69132-7_56

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021). *MaMa: matematica per la scuola elementare – Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport.

Terrusi, M. (2012). *Albi illustrati. Leggere, guardare, nominare il mondo nei libri per l'infanzia.* Carocci editore.

Terrusi, M. (2017). *Meraviglie mute. Silent book e letteratura per l'infanzia.* Carocci editore.

Terrusi, M. (2019). L'albo illustrato: una panoramica fra storia, visioni e contemporaneità. In S. Barsotti & L. Cantatore (Eds.), *Letteratura per l'infanzia: forme, temi e simboli del contemporaneo* (pp. 167–183). Carocci editore.

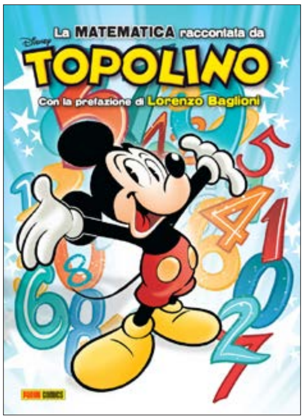
Narrativa matematica per giovani lettori

Alberto Saracco
Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma – Italia

Introduzione

Il formato più tipico della divulgazione scientifica in generale, e matematica in particolare, è quello del saggio. È però innegabile che il saggio è una forma letteraria più adatta agli adulti, mentre bambini, ragazzi e giovani adulti sono più attratti dai racconti e dalle storie.
Anzi, non facciamone un mistero: da adulti possiamo imparare a leggere e ad apprezzare o perfino ad amare opere saggistiche, ma l'attrazione che si prova nel leggere o sentire raccontare una storia con protagonisti di cui possiamo sperimentare l'immedesimazione, è qualcosa di ancestrale. In epoca preistorica, prima della scrittura, l'unico modo per trasmettere informazioni e insegnamenti era quello della comunicazione orale. Spesso, per permettere agli insegnamenti di attecchire più facilmente, il nucleo dell'informazione o dell'insegnamento morale era inserito all'interno di un racconto, che passava di generazione in generazione.
Come esseri umani siamo naturalmente attratti dalle storie. Ecco perché in questa breve raccolta di recensioni di testi divulgativi matematici voglio concentrarmi sul genere della narrativa matematica, in cui all'interno della storia si nascondono uno o più messaggi matematici. Come sempre quando si tratta di lettura, e ancora di più quando si tratta di divulgazione matematica (data l'ostilità con cui spesso è percepita la materia), è difficile classificare come adatto ad un'età specifica un racconto o un romanzo. Provo comunque a procedere in ordine crescente di età consigliata, spaziando dagli 8 ai 16 anni, con l'idea che comunque ogni lettore è diverso.

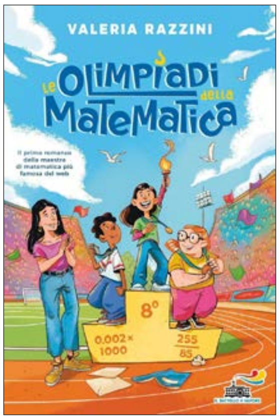
AA.VV. (2022). *La matematica raccontata da Topolino*. Panini Comics.



Adatto a partire dagli 8 anni (ma anche prima, dato che la lettura di fumetti Disney è alla portata di ogni bambino).
A partire dal 2016 su Topolino sono iniziate ad apparire storie scientifiche scritte da Francesco Artibani e Fausto Vitaliano, sceneggiatori storici del settimanale, in collaborazione con scienziati italiani: il ciclo *Topolino Comic&Science* (il ciclo è considerabile uno spin off disneyano del progetto *Comics&Science* di Andrea Plazzi e Roberto Natalini, recensito in questa rivista nel presente numero). Ogni storia del ciclo è una classica storia Disney, con protagonisti paperi e topi e le loro avventure e disavventure,

ma con all'interno un forte tema scientifico curato nei dettagli per essere divulgato ai giovani lettori.
All'interno del ciclo *Topolino Comic&Science* sono state realizzate tre storie a tema matematico, pubblicate prima (tra il 2017 e il 2019) nel settimanale e poi confluite in questo TopoLibro dedicato alla matematica insieme ad una quarta storia dello stesso periodo, non facente parte del ciclo, ma in un certo senso con un forte tema matematico. Ho curato personalmente questa raccolta e scritto le brevi introduzioni matematiche alle quattro storie e la postfazione, mentre la prefazione è stata scritta da Lorenzo Baglioni, cantautore laureato in matematica e attivo soprattutto nel campo della divulgazione attraverso la musica.
Paperino e i ponti di Quackenberg (Artibani et al., 2017) racconta il classico problema dei ponti di Königsberg che ha portato alla nascita della teoria dei grafi. Paperino è alle prese con il compito di attraversare tutti i ponti della cittadina una e una sola volta, compito che Eulero nel 1736 ha dimostrato essere impossibile. All'interno della storia è presente anche una paperizzazione di Eulero, interpretato da Pico de' Paperis per l'occasione e – un unicum nella storia del fumetto Disney – viene enunciato e interamente dimostrato un teorema: il teorema di Eulero sui grafi. Questa storia può essere usata efficacemente per parlare di teoria dei grafi a vari livelli diversi, dalla scuola primaria all'Università (in tal senso è stata usata in un corso di teoria dei grafi a Bologna, e in un corso di didattica della matematica a Napoli).
Topolino e la biblioteca infinita (Zemelo & Usai, 2017) è la storia "fuori ciclo" basata sul racconto *La biblioteca di Babele* di Borges (il quale a sua volta è ispirato a *La biblioteca universale* di Lasswitz): Topolino e Eta Beta vengono coinvolti nel piano di un criminale e proiettati all'interno della fantastica biblioteca infinita. All'interno della storia sono presenti numerosi accenni alla combinatoria e ai numeri grandissimi che vengono facilmente generati da combinazioni di pochi elementi.
Zio Paperone e il cavatappi quadridimensionale (Artibani et al., 2019) vede la partecipazione straordinaria di Alessio Figalli, fresco della medaglia Fields, nella sua versione paperizzata Phil Gallis. All'interno della storia sono numerosissimi gli spunti matematici: dalla teoria del trasporto ottimale di Monge, alla quarta dimensione e la bottiglia di Klein, fino all'importanza degli errori nella matematica.
Topolino e i numeri del futuro (Artibani et al., 2018) racconta la storia di uno dei primi super-computer giunti in Italia, a Roma nel 1955, all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del CNR, allora guidato da Picone (presente nella storia) e ora da Natalini. Grazie alla macchina del tempo, Topolino, Pippo e il Dottor Marlin arrivano a Roma nel 1955 pronti a sventare un misfatto. La storia racconta della paura dell'uomo di vedersi reso inutile e sostituito dai computer o dalle macchine. Alla fine, il Dottor Marlin enuncia a chiare lettere il fatto che le nuove tecnologie, che all'inizio spaventano, possono fornire spunti per grandi avanzamenti della conoscenza e racconta come, nel caso specifico del computer, la matematica applicata abbia fatto passi da gigante e sia presente in tantissimi ambiti diversi.
Le storie sono a tutti gli effetti classiche storie di paperi e topi, scritte da affermati professionisti: divertenti, comiche e avventurose. Possono essere una piacevole lettura anche per bambini della primaria. Al contempo i contenuti matematici sono del tutto non banali e pertanto tali storie, con la guida di un adulto, possono fornire valido materiale per l'apprendimento.

Razzini, V. (2024). *Le olimpiadi della matematica*. Il battello a vapore.



Secondo mio figlio decenne «è bello, ma forse è meglio leggerlo nelle vacanze dopo la quinta [lui l'ha letto tra la quarta e la quinta], come ripasso, perché alcune delle cose non le abbiamo ancora fatte». Per tipologia di racconto (semplice e con varie illustrazioni) e come contenuto matematico può essere adatto dai 10 ai 12 anni.

La copertina definisce l'autrice «la maestra di matematica più famosa del web» e, in effetti, Valeria Razzini su Instagram ha oltre 50mila follower del suo profilo @matematica_ingioco.

Nella V C della scuola di un piccolo paesino ci sono solo 9 alunni, intelligenti e affiatati, ma timorosi e insicuri quando si tratta di matematica. Come un fulmine a ciel sereno arriva alla classe l'invito a partecipare al MateCamp a fine scuola, insieme ad altre 3 classi quinte della primaria e a 4 classi prime della secondaria di primo grado, per sfidarsi a colpi di problemi di matematica. Il libro racconta degli allenamenti dei ragazzi della classe, sotto la guida della loro maestra Marcella, in un ripasso, capitolo dopo capitolo, di vari argomenti svolti negli ultimi due anni della scuola primaria (potenze, notazione posizionale, numeri razionali, numeri primi, numeri relativi, geometria piana e solida…). A intervallare la storia ci sono vari problemi (o meglio esercizi, ma ci tornerò dopo) proposti al lettore per consolidare le proprie conoscenze matematiche. Alla fine si arriva alla gara, con i nostri eroi che si sentono già vincitori a prescindere da quello che sarà il risultato, perché hanno imparato a collaborare e a temere di meno questa materia durante l'anno di allenamenti. Resta da capire come finirà la gara e da risolvere il mistero di chi li abbia invitati a partecipare, ma per scoprirlo dovete leggere il libro.

L'idea alla base di questo breve romanzo è molto simpatica: c'è un mistero (chi ha invitato la classe a partecipare al MateCamp) e una crescita dei personaggi che man mano imparano a temere meno la matematica. Sicuramente è un metodo per far passare la pillola (il ripasso di matematica) con una buona dose di zucchero (la storia).

C'è un però, secondo me molto grande. Si poteva sfruttare questa bella idea per proporre testi di problemi stimolanti: ce ne sono molti di adatti, dal Kangarou della Matematica ai Giochi della Bocconi, fino ai Campionati di Giochi Matematici del Mediterraneo, tutte gare con anche delle sezioni rivolte a bambini della primaria. O – ancora meglio – il Rally Matematico Transalpino, che ha proprio un centrale aspetto didattico e si concentra sull'uso dei problemi matematici nella didattica di tutti i giorni in aula. I problemi del Rally si concentrano sul ragionamento e sulla risoluzione di situazioni diverse da quelle già viste in precedenza, ponendo l'accento sul processo e non sul risultato. Invece i "problemi" proposti nel libro, ai 9 della V C e ai lettori, non sono altro che esercizi – banali applicazioni delle formule appena dette – e lo scopo principale è "fare i conti giusti". Non c'è assolutamente nulla di scoperta individuale. Ciò rafforza l'idea della matematica come una ripetizione di formule e algoritmi imparati precedentemente, che è proprio l'immagine della matematica che si dovrebbe combattere, a scuola e nella divulgazione. Mi è sembrata un'occasione persa. Peccato.

Castellani, T. (2017). *Il professor Z e l'infinito*. Edizioni Dedalo.

Adatto a partire dai 12 anni, ma davvero interessante per tutti, anche per gli adulti: un bel giallo accattivante in cui la matematica è davvero protagonista, non in maniera banale. L'autore ha un dottorato in fisica teorica e si è occupato di didattica e comunicazione della scienza. Ora è insegnante.

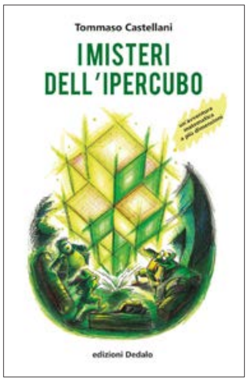
«Quando hai dodici anni, la notizia che il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti può non essere l'informazione decisiva a cui stai aspirando». Il romanzo inizia così, con Giulio che usa un eufemismo per dirci che ai ragazzini di seconda media come lui del teorema di Pitagora non è che interessi un granché.

Se non fosse che il misterioso Professor Z riesce a creare un'aura di mistero attorno alla matematica, a questo teorema e al concetto di infinito, facendo appassionare Giulio, il suo amico Ivano e i loro compagni di classe. Inoltre improvvisamente scompare Michele dalla classe: non si fa più vedere e nessuno sa dove sia finito. Giulio e Ivano iniziano a sospettare che sia stato rapito e si mettono a indagare. La loro recente passione per la matematica e le lezioni del Professor Z saranno fondamentali per la risoluzione del mistero.

Moltissima matematica non banale fa capolino nella storia: frazioni continue, serie infinite, numeri irrazionali. In maniera del tutto naturale si alternano le lezioni del Professor Z, che lasciano sempre qualcosa di non detto, qualcosa da scoprire ai nostri giovani studenti, e le indagini sulla misteriosa scomparsa di Michele.

Il romanzo è rivolto ai coetanei di Giulio e Ivano, che possono rivedersi nelle situazioni dentro e fuori dall'aula, ma anche agli adulti. Dopotutto il narratore della storia è proprio Giulio stesso, ormai adulto, che ricorda il periodo della sua scuola media. Ed è un libro da leggere, che abbiate 12 anni e paura della matematica o 40 e la amiate. È un libro per tutti, scritto molto bene, con una bella trama e in cui la matematica non è affatto inserita in modo forzato, ma è a tutti gli effetti parte integrante della storia.

Castellani, T. (2020). *I misteri dell'ipercubo*. Edizioni Dedalo.



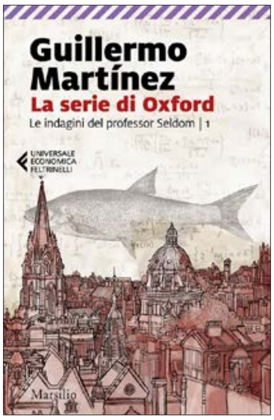
Giulio e Ivano sono cresciuti e sono in campeggio in vacanza estiva tra la seconda e la terza media. Tommaso Castellani prosegue con il racconto dell'esplorazione della matematica da parte dei due dodicenni. In vacanza con loro non c'è il Professor Z (che infatti è assente nel titolo del secondo volume della trilogia), e i due ragazzi ne sentono la mancanza: potrebbe aiutarli con problemi misteriosi tra cui la lunghezza della costa del loro campeggio (ed ecco fare capolino concetti come misura, lunghezza, frattali…).
La permanenza di un mese al campeggio si tinge di giallo quando i due, insieme a svariati nuovi amici, devono scoprire l'identità di un misterioso Giustiziere che appiana le piccole ingiustizie della vita di tutti i giorni. Neanche a dirlo, anche questa volta i misteri matematici (anche a più dimensioni) si intrecciano con quelli delle indagini sul Giustiziere.
A metà tra il romanzo di avventura e il giallo, è forse il libro della trilogia che mi è piaciuto meno, ma è comunque divertente e si legge con gusto.

Castellani, T. (2022). *Il Professor Z e il segreto del triangolo*. Edizioni Dedalo.

Giulio e Ivano iniziano la terza media. Ed è bene che i lettori di questo libro siano almeno loro coetanei per poterne apprezzare le avventure matematiche.
I nostri eroi si sono appassionati alla matematica così tanto che ora frequentano un laboratorio di matematica pomeridiano, tenuto dal Professor Z, insieme ad altri tre ragazzi della scuola. Il Professor Z continua con la sua abitudine di porre loro domande strane, che lascia senza risposta, e a dire frasi

ancora più strane, come «Non siate ossessionati dal capire. Se le cose si capissero così, non servirebbero i professori, né tantomeno le scuole. Capire non è poi così importante». L'importante, infatti, è incuriosire e far sì che lo studente abbia voglia di capire, di indagare e di approfondire. E così il Professor Z guida pian piano i suoi studenti alla scoperta della logica e delle geometrie non euclidee, dove «non è sempre vero che la somma degli angoli di un triangolo è 180°».
Nel frattempo la scuola va avanti e i cinque compagni del laboratorio di matematica si iscrivono a un concorso di fumetto: ogni settimana devono pubblicare una tavola del loro fumetto. Per il racconto decidono di sfruttare le strane cose che imparano nel laboratorio del Professor Z. Ma anche questa volta la matematica si intreccia ad un mistero: un altro gruppo di ragazzi in ogni singola tavola che presenta sembra aver copiato qualche idea dal quintetto di matematici… Ma come è possibile?
La trilogia si conclude così. Ma con il fatto che gli eventi narrati si concludono prima delle vacanze di Natale della terza media, c'è forse la speranza che Castellani metta Giulio e Ivano davanti a un nuovo mistero, alle prese con qualche altro argomento matematico.
La trilogia è molto bella e propone davvero tantissimi spunti matematici, per parlare con i giovani lettori che – attirati dalle vicende dei loro coetanei – si imbattono in vari temi di matematica che, presentati alla maniera del Professor Z, non sembrano poi così noiosi e poco interessanti.

Martínez, G. (2021). *La serie di Oxford. Le indagini del professor Seldom. Vol 1.* Marsilio.



Come Tommaso Castellani, anche Guillermo Martínez, argentino, ha un dottorato di ricerca, su argomenti di Logica Matematica, conseguito ad Oxford. In effetti anche in questa serie di libri la matematica si mescola in maniera naturale con la storia.
Non è un caso che decida di ambientare i gialli della serie *Le indagini del Professor Seldom* proprio nella cittadina universitaria inglese. Gli argomenti matematici e forse ancor di più i caratteri di crudezza dei delitti presenti nei due libri fanno sì che siano una lettura per ragazzi più grandi, direi dai 16 anni. Tra la scrittura del primo e del secondo libro della serie passano oltre 15 anni (Martínez, 2003, 2019) e solo dopo il secondo vengono entrambi pubblicati da Marsilio.
Martin è al primo anno di dottorato, alle prese con la scelta del relatore e dell'argomento di ricerca, quando due eventi sconvolgono la sua vita: la scoperta del cadavere della sua affittuaria e l'annuncio della dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat da parte di Andrew Wiles nella vicina Cambridge. Le vicende matematiche e criminose si intrecciano tra di loro e solo l'acume di Martin e del professor Seldom riusciranno a districare quelli che nel titolo originale sono definiti "crimini impercettibili".

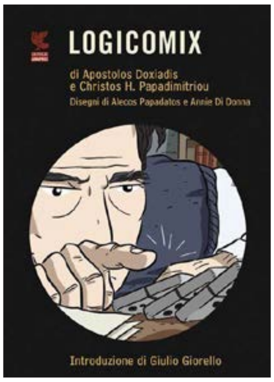
Martínez, G. (2021). *I delitti di Alice*. Marsilio.

Nel secondo libro della serie Martin è ora al secondo anno di dottorato, quando una nuova serie di delitti sconvolge Oxford. Questa volta i delitti sono collegati alla confraternita dedicata al matematico e scrittore Lewis Carroll e al suo libro *Alice nel paese delle meraviglie*. I paradossi logici, gli indovinelli di Carroll e le citazioni letterarie dal paese delle meraviglie condurranno Martin e il Professor Seldom attraverso un labirinto per trovare la soluzione.

La formazione accademica di Martínez, oltre alla grande conoscenza personale di Oxford e della sua università, è più che evidente. L'autore, inoltre, si diletta a incrociare le sue storie con personaggi altamente rilevanti della matematica inglese: Andrew Wiles nel primo volume e Lewis Carroll (Charles Dodgson, al secolo, matematico proprio dell'Università di Oxford) nel secondo. La logica matematica è l'indiscussa protagonista dei suoi gialli.

Tuttavia, a differenza dei gialli di Tommaso Castellani, dove la matematica presente è alla portata del lettore e ha un grande spazio, così che il lettore la possa imparare o almeno incuriosirsi a sufficienza per poter porre le domande giuste, in questi la matematica è troppo elevata per poter essere appresa davvero dal lettore. I due romanzi sono da intendersi più come piacevole lettura a sfondo matematico che come metodo per imparare della matematica.

Doxiadis, A., & Papadimitriou, C. (2010). *Logicomix*. Guanda.



Abbiamo iniziato il nostro viaggio con un fumetto e terminiamo con un altro fumetto o – meglio – con una graphic novel che racconta in maniera brillante e coinvolgente la storia della logica. Mentre i fumetti Disney erano indicati anche a bambini di 8 anni, per godere al meglio di questo libro è sicu-

ramente necessario avere già visto delle dimostrazioni matematiche vere e proprie e quindi, diciamo, aver affrontato almeno due anni delle scuole superiori.
Il racconto spazia tra diversi piani temporali che si intrecciano tra loro: in uno gli autori del fumetto (tra cui l'informatico teorico Papadimitriou), nella Grecia di oggi, ci raccontano la genesi del fumetto stesso che stiamo leggendo; in un altro Bertrand Russell tiene una conferenza sulla logica in Inghilterra agli albori della seconda guerra mondiale (e il racconto della logica si intreccia con le decisioni da prendere sull'imminente guerra); in un terzo siamo all'interno del racconto di Russell, dove la storia della logica si intreccia con la storia della sua vita. Oltre a scoprire la logica, nel racconto scopriamo anche Bertrand Russell come persona, filosofo e pacifista.
Nel racconto si incontrano figure fondamentali della storia della matematica (a partire da Euclide) e della logica. Facciamo conoscenza con Cantor, Frege, Wittgenstein, Whitehead, Gödel e molti altri. Il racconto fa procedere svelti nella lettura, ma la densità di contenuto matematico di altissimo livello costringe ogni tanto a fermarsi, per riflettere un po'.
Alla fine del fumetto, per approfondire, ci sono decine e decine di pagine dedicate ai matematici (e ai concetti matematici) menzionati nel fumetto.
Logicomix (un'epica ricerca della verità, recita il sottotitolo originale) è un libro bellissimo, che coniuga un racconto accattivante, della matematica di altissimo livello, una chiarezza espositiva e dei disegni belli ed evocativi. Una lettura obbligata per chiunque ami la matematica e voglia sapere di più sulla logica e sulla ricerca dei fondamenti della matematica di inizio Novecento.

Bibliografia

Artibani, F., Figalli, A., Natalini, R., & Mottura, P. (2019). Zio Paperone e il cavatappi quadridimensionale. *Topolino*, *3336*, 47–76.

Artibani, F., Mazzarello, M., & Saracco, A. (2017). Paperino e i ponti di Quackenberg. *Topolino*, *3232*, 105–134.

Artibani, F., Natalini, R., & Held, V. (2018). Topolino e i numeri del futuro. *Topolino*, *3279*, 47–76.

Martínez, G. (2003). *Crímenes imperceptibles.* Planeta.

Martínez, G. (2019). *Los crímenes de Alicia.* Planeta.

Zemelo, P., & Usai, L. (2017). Topolino e la biblioteca infinita. *Topolino*, *3208*, 73–104.

Matematica a parole: l’unione di due mondi in un concorso letterario

Simone Fornara
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI – Svizzera

Introduzione

Malgrado la didattica odierna cerchi il più possibile di incentivarne il dialogo, cultura scientifica e cultura umanistica sono spesso viste come due mondi in contrapposizione fra loro.
A dispetto di questo luogo comune (anzi: con l’idea di contribuire a smantellarlo) è nato il progetto triennale FNS Agora *Italmatica per tutti: la lingua italiana a favore dell’insegnamento-apprendimento della matematica*, con l’intento di focalizzarsi sugli intrecci fra matematica e lingua italiana: intrecci “italmatici”, pensati per stimolare la curiosità e l’ampliamento di prospettive in chi si appresta a scoprirli. Il progetto, iniziato a settembre 2021 e conclusosi ad agosto 2024, si colloca in continuità con il progetto FNS *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* (2018-2021) e mira a promuovere il dialogo tra le discipline umanistiche e quelle scientifiche attraverso la produzione e la diffusione di materiali che uniscano l’apprendimento della matematica e dell’italiano, e tramite l’organizzazione di una serie di iniziative che incentivino il dialogo e mostrino le connessioni tra queste due discipline. Tra i materiali prodotti si trovano ad esempio i seguenti: *A spasso con i numeri naturali*, una raccolta di canzoni sui numeri naturali e le loro proprietà e di giochi a esse collegate; *Italmatica in pillole*, brevi video per scoprire e assaporare la forza dell’unione della matematica con la lingua italiana nel trattare temi per l’apprendimento dei bambini dai 3 ai 7 anni; *Un mondo di figure*, una raccolta di storie, filastrocche e canzoni di figure geometriche accompagnate da attività da vivere in classe dai 4 ai 10 anni; *Ludolinguistica*, una serie di proposte ludolinguistiche concentrate su tipi diversi di giochi come rebus, giochi di parole e cruciverba, pensati per tutte le età. Tra le iniziative invece troviamo *Incontri con l’italmatica*, una serie di incontri finalizzati a promuovere il dialogo tra la matematica e l’italiano, e, infine, *Matematica a parole*, un concorso letterario a tema matematico suddiviso in due sezioni (prosa e poesia) e cinque categorie di fasce d’età (3-7 anni; 8-10 anni; 11-14 anni; 15-18 anni; oltre i 18 anni). Proprio quest’ultima iniziativa ha riscosso un grande successo e ha condotto alla redazione dei documenti qui recensiti.

1. Tre fascicoli di riflessioni e spunti didattici

Sono tre i fascicoli nati nel contesto della preparazione al concorso letterario *Matematica a parole* (edizione 2023), ma che poi hanno acquisito vita e fruizione autonoma per chiunque volesse avvicinarsi al sempre affascinante tema dell’unione fra matematica e letteratura. Si tratta dei documenti

Sezione prosa (Demartini & Sbaragli, 2023a), *Sezione poesia* (Demartini & Sbaragli, 2023b) e *Matematica in rima* (Demartini & Sbaragli, 2023c). I materiali, infatti, offrono numerosi spunti sull'amplissimo tema dei possibili legami e rapporti tra matematica e forme della letteratura (in prosa e in versi), e un saggio di concretizzazione poetica (il fascicolo *Matematica in rima*). Certo non hanno pretesa di esaustività, ma semplicemente si propongono di dare una cornice di senso alle possibili connessioni fra i due "mondi", arricchita di qualche idea da proporre a scuola e da qualche esempio tratto dalla storia letteraria, e da autrici e autori di oggi.

Il fascicolo *Sezione prosa* è suddiviso in tre capitoli, secondo una progressione che non trascura la sequenzialità necessaria per rendere la trasposizione didattica fondata su solide basi (cioè dalla teoria alla pratica, passando per l'analisi di esempi e modelli testuali di riferimento): 1. *Narrazione e matematica per piccoli e per grandi*; 2. *Qualche spunto per produrre testi*; 3. *Idee per la didattica*.
Il primo capitolo fornisce un inquadramento generale sull'importanza del narrare per l'essere umano, con una costante rilettura della narratologia in prospettiva matematica, cosa che rende queste pagine rare e preziose, e non solo dal punto di vista delle implicazioni didattiche. Grazie alle considerazioni proposte, infatti, è possibile contestualizzare il pensiero di studiosi come Jerome Bruner e Jeremy Gottschall, le cui teorie sono fondate sul potere della narrazione come tratto peculiare dell'essere umano, nel mondo della matematica, cosa che consente di avere maggior consapevolezza nel cogliere le potenzialità dei rapporti tra la letteratura e la matematica. La matematica, infatti, può offrire alla letteratura temi, contenuti ed elementi di ispirazione, così come la letteratura può dare alla matematica forme e parole nuove per parlare di sé, e farsi conoscere e comprendere. Certo le modalità e gli equilibri possono essere vari ed è utilissimo conoscerli anche in prospettiva didattica: le narrazioni possono essere racconti brevi o romanzi articolati, e in essi la matematica può comparire in vari modi; non basta, infatti, inserire qualche riferimento per produrre storie davvero matematiche, ma occorre pensare al contenuto e padroneggiarlo, per poi progettare *come* renderlo parte della storia (è un elemento che fa procedere la narrazione? È il contenuto matematico stesso a essere protagonista?).
Il secondo capitolo è strutturato come un'antologia commentata di testi in cui la matematica ha un ruolo importante per lo sviluppo della narrazione. I sottocapitoli chiariscono bene di quale tipo di ruolo si tratta, cioè in che misura la matematica entra in dialogo con la dimensione narrativa. Ci sono quindi *testi tra matematica e realtà* (2.1), *testi con la matematica protagonista* (2.2), *testi con la matematica come parte dell'"ingranaggio" narrativo* (2.3). Tra i primi (2.1), vanno annoverati alcuni racconti di Gianni Rodari, in particolare tratti dalla sua notissima raccolta *Favole al telefono* (1962), come *Promosso più due* o *Abbasso il nove* (in quest'ultimo, ad esempio, un'espressione tipica di una procedura matematica diventa l'occasione per creare una narrazione divergente, a partire dal significato del modo di dire *abbasso*: il numero nove, antropomorfizzato e dunque capace di provare sentimenti ed emozioni umane, non può essere contento, dal momento che tutti mostrano di denigrarlo); Rodari stesso viene qui presentato come un autore assai attento al rapporto tra scienza e fantasia e ai virtuosi influssi reciproci, oltre che un efficace esempio da cui trarre ispirazione per creare brevi narrazioni che partono da "scintille" matematiche. Tra i secondi (2.2), cioè tra i testi in cui la matematica diventa l'oggetto tematico della narrazione, oltre ai lavori di diversi autori e di diverse autrici magari meno conosciuti al grande pubblico ma non privi di spunti e di idee interessanti, non si possono non menzionare i libri di Anna Cerasoli, autrice il cui nome è indissolubilmente legato agli intrecci italmatici, anche per la capacità di proporre contenuti attendibili e precisi dal punto di vista disciplinare, unendoli alla dimensione narrativa in maniera sempre accattivante ed efficace. Tra i suoi moltissimi libri, il fascicolo ne prende in esame tre, per esemplificare in modo chiaro in quale maniera la matematica può essere trattata attraverso il narrare: *I magnifici dieci. L'avventura di un bambino nella matematica* (2001), *La grande invenzione di Bubal* (2012) e *Matematica amica* (2016). Tra i terzi (2.3), cioè tra i testi in cui la matematica diventa una parte centrale dell'ingranaggio narrativo, oltre ad alcuni titoli ancora di Anna Cerasoli pensati per un pubblico di giovane età – *È logico!* (2015) e

Gatti neri, gatti bianchi (2011) – troviamo alcune produzioni appartenenti alla grande letteratura per il pubblico adulto, dovute alla penna di nomi come Umberto Eco, Dino Buzzati e Jorge Luis Borges. Nel complesso, il capitolo si rivela utilissimo per avere degli esempi che fungano da modello per creare nuove narrazioni matematiche, ed è quindi funzionale non solo al contesto del concorso per il quale il fascicolo è nato, ma per ogni occasione di trasposizione didattica dell'idea alla base del concorso stesso.
E infatti, il terzo capitolo segna il passaggio alla dimensione più didattica, grazie a una rassegna di idee didattiche tutte corroborate da esempi concreti. I titoli dei diversi sottocapitoli sono eloquenti, e già di per sé sufficienti per capire lo spunto didattico di volta in volta descritto: *Dai personaggi matematici alle narrazioni* (3.1), *(Mate)binomi fantastici per narrare* (3.2), *A riscrivere le storie* (3.3), *Dalla matematica alla narrazione* (3.4), *Matematica a fumetti* (3.5).
Da non dimenticare – come di consueto per tutte le pubblicazioni italmatiche, compresi gli altri due fascicoli qui recensiti – la bibliografia conclusiva, ampia e aggiornata, e che fornisce utili indicazioni per approfondire tutti gli aspetti toccati.

Il fascicolo *Sezione poesia* presenta la stessa struttura tripartita del fascicolo dedicato alla prosa, con minime variazioni nei titoli dei capitoli: 1. *Poesia e matematica per piccoli e grandi*; 2. *Qualche spunto per produrre testi*; 3. *Idee per la didattica*. L'efficacia della progressione è confermata dall'analisi dei contenuti, che forniscono un chiaro punto di riferimento per ogni insegnante che volesse cimentarsi nel non banale tentativo di far produrre alla propria classe testi in versi intrecciati con la matematica. Il primo breve capitolo definisce il campo di interesse (che cos'è la poesia), soffermandosi poi in particolare – e opportunamente – sulla distinzione tra poesia e filastrocca, e sul confine non sempre netto tra le due, cosa che non di rado genera incertezza nell'insegnante e che, di conseguenza, può essere all'origine di dubbi e incomprensioni nelle allieve e negli allievi. La filastrocca, considerata «un sottogenere specifico di testo poetico» (p. 22), si caratterizza soprattutto per rivolgersi al mondo della prima infanzia, e proprio con il pubblico più giovane esprime al meglio le sue potenzialità in termini di apprendimento, facilitando, ad esempio, l'avvicinamento ai suoni della lingua e favorendo la memorizzazione e il suo esercizio. Da non trascurare, poi, quanto gli studi delle neuroscienze hanno messo in evidenza: come chiariscono i lavori di Maryanne Wolf (in particolare, 2007), infatti, si è notato che «bambini più assiduamente e precocemente esposti ad ascolto, ripetizione, invenzione di filastrocche saranno facilitati nell'entrata nella lettoscrittura, in quanto avranno maturato più solide competenze fonologiche» (p. 4). Anche solo queste poche considerazioni sgombrano il campo dal luogo comune che vedrebbe le filastrocche come testi banali e di poco valore, e ne giustificano dunque l'utilizzo didattico.
Il secondo capitolo offre diverse prospettive per avviare bambine e bambini alla composizione di poesie e filastrocche a tema matematico, considerando soprattutto il contenuto tematico e la scelta dello stile da seguire: *Testi tra matematica e realtà* (2.1); *Testi con la matematica in primo piano* (2.2); *Testi per la memoria: la conta orale e le tabelline* (2.3); *Filastrocche ricorsive* (2.4); *Filastrocche indovinello* (2.5). La prima proposta (2.1) parte dall'analisi di filastrocche a tema matematico di Gianni Rodari, Luca Tozzi e Bruno Tognolini, in cui gli elementi della matematica si combinano con quelli della realtà, senza l'intento di affrontare in maniera diretta o di spiegare i contenuti matematici, bensì di trovare analogie e differenze con il reale; in questo caso, come avvertono opportunamente le autrici del fascicolo, il segreto è di trovare un giusto equilibrio tra le due componenti, senza travisare o banalizzare i contenuti disciplinari. La seconda proposta (2.2), collegata in modo abbastanza stretto alla prima, è incentrata su testi che hanno un più marcato intento didascalico, nel senso che affrontano temi matematici in maniera più esplicita, a volte presentandoli in modo completo (come le due filastrocche iniziali, dedicate rispettivamente a definire la distinzione tra numeri pari e numeri dispari, e a spiegare che cos'è la proprietà commutativa), a volte proponendo anche di "fare qualcosa", come risolvere indovinelli o affrontare semplici compiti a carattere matematico. La terza proposta (2.3) porta al cuo-

re della filastrocca, cioè al suo legame con l'oralità e alla sua funzione di facilitatore della memoria, caratteristiche entrambe che si rivelano assai utili per imparare a contare o per imparare e memorizzare le tabelline, come viene dimostrato con il consueto ricorso a diversi esempi creati *ad hoc* o assai noti nel mondo della scuola (in particolare della prima infanzia). La quarta proposta (2.4) riguarda un particolare tipo di filastrocca, quella cioè che trae linfa vitale dalla ciclicità degli eventi di cui parla (come la successione dei giorni della settimana, dei mesi, delle stagioni), o dalla propria struttura, che finisce ritornando al punto di partenza. Infine, la quinta proposta (2.5) prende in considerazione le filastrocche finalizzate a far indovinare qualcosa, in questo caso un argomento matematico: si tratta di indovinelli che risultano più accattivanti di quelli non in versi poiché la risoluzione è guidata dalle rime, e in questo senso facilitano il compito, permettendo però nel contempo di riflettere in maniera induttiva sulla matematica e sui suoi contenuti specifici.
Facendo tesoro delle prospettive fin qui illustrate, il terzo e conclusivo capitolo guida l'insegnante verso la trasposizione didattica, per inquadrare alcune efficaci strategie da proporre in classe per avvicinare bambine e bambini al testo poetico, portandoli a comporre testi in versi dalle caratteristiche semplici e ben definite, ed evitando nel contempo di complicare troppo il discorso e il compito, cosa che renderebbe questi primi esercizi poetici controproducenti invece che utili in termini di apprendimento. Il pregio maggiore di queste pagine è la progressione proposta, che non trascura i livelli di scolarità successivi alla scuola dell'infanzia e alla scuola primaria, ovviamente con attenzione alla complessità degli stimoli e all'adeguamento dei contenuti disciplinari all'età delle allieve e degli allievi. Preziosi anche i rimandi bibliografici indispensabili per approfondire strategie e tecniche funzionali agli scopi individuati, con un ruolo di primo piano (com'è giusto che sia) all'arricchimento del vocabolario e alla precisione del lessico. Insomma, si parte dalle filastrocche di Rodari per finire ad applicazioni didattiche legate alla *Commedia* di Dante, passando per le canzoni di un insegnante-cantautore come Lorenzo Baglioni.

La serie di fascicoli legati al concorso si chiude con il terzo quaderno, intitolato *Matematica in rima*, che ha provato a raccogliere la sfida di concretizzare, in versi, alcuni contenuti matematici: si offre, così, un esempio concreto, sfruttabile sia in quanto tale (per affrontare alcuni temi matematici), sia come modello per realizzare nuove poesie su altri contenuti, con allieve e allievi (a vari livelli di complessità). La sfida, che a conti fatti risulta vinta in modo del tutto convincente, è stata quella di far lavorare assieme matematici ed esperti di lingua, per muoversi al meglio tra la precisione dei contenuti (per lo più legati al mondo dei numeri: pari e dispari, operazioni, proprietà…) e l'efficacia della forma; nessuna delle due parti coinvolte, infatti, deve perdere qualcosa, ma entrambe si auspica che traggano ricchezza l'una dall'altra, senza rinunciare anche al genuino piacere della lettura e dell'ascolto delle produzioni.
Sulla scia dei modelli letterari richiamati e della prova offerta nel fascicolo *Matematica in rima*, l'auspicio è che i tre materiali possano incentivare allieve, allievi e docenti (dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di secondo grado e oltre) a cimentarsi in un'attività di scrittura che è anche profondamente matematica, perseguendo la realizzazione di testi con contenuti esatti e forme linguistiche coerenti ed efficaci. In tal modo, si mobiliteranno competenze disciplinari e linguistiche (lessico, sintassi) in maniera davvero sinergica e trasversale, e, perché no, anche curiosa e originale. Esperienze individuali o a più mani (magari a coppie o a gruppetti), con l'aiuto dell'insegnante chiamato a mettersi in gioco, possono portare a piccole raccolte poetiche o a racconti di una certa complessità, in cui la matematica prende vita in una veste nuova, accattivante e inedita.

2. L'esito del concorso: il successo di una sfida difficile

Anche grazie alla guida costituita dai fascicoli qui recensiti, il concorso ha avuto riscontri assai positivi, sia per ciò che riguarda i numeri (in termini di partecipanti), sia per ciò che riguarda la qualità dei testi prodotti, ovviamente tenendo conto della difficoltà del compito e dell'età delle autrici e degli autori. Dal punto di vista dei numeri, la giuria, presieduta da Anna Cerasoli e costituita da Francesca Antonini (linguista, esperta in didattica dell'italiano), Luca Crivelli (esperto di matematica per la scuola dell'obbligo), Daniele Dell'Agnola (esperto di italiano per la scuola dell'obbligo e scrittore), Silvia Demartini (linguista, esperta in didattica dell'italiano), Elena Franchini (matematica, esperta in didattica della matematica), Adolfo Tomasini (pedagogista, già direttore delle scuole comunali), Silvia Sbaragli (matematica, esperta in didattica della matematica e responsabile del progetto) e Matteo Viale (linguista, esperto in didattica dell'italiano), ha valutato 520 elaborati, prodotti da oltre 1400 partecipanti tra allieve e allievi di tutti gli ordini scolastici e adulti, oltre a quasi 200 docenti che hanno lavorato in classe e oltre a 150 istituti scolastici provenienti dal Canton Ticino e dall'Italia. Dal punto di vista della qualità dei testi prodotti, se ne può avere un'idea precisa grazie ai file reperibili online che ne contengono una significativa selezione, costituita dai testi che hanno vinto le diverse sezioni e categorie, con l'aggiunta di quelli segnalati (ma non premiati) dalla giuria stessa (AA.VV., 2023a, 2023b). Dalla lettura di questi testi appare evidente che la sfida, nonostante la sua complessità e la sua divergenza (si è trattato in ogni caso di un tentativo nuovo e innovativo), è stata affrontata da chi ha partecipato (insegnanti, allieve e allievi, e grande pubblico di tutte le età) con grande serietà e con profondo impegno, dimostrando così che il dialogo tra due discipline erroneamente considerate distanti l'una dall'altra è invece non solo possibile, ma proficuo e utile per rinnovare in modo efficace la didattica "combinata" di italiano e matematica e, più in generale, di letteratura e scienza.

Bibliografia

AA.VV. (2023a). Racconti (3-7 anni; 8-10 anni; 11-14 anni; 15-18 anni; oltre i 18 anni). In S. Sbaragli, L. Crivelli, E. Franchini & S. Demartini (A cura di), *Matematica a parole.* Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/produzioni-prosa/

AA.VV. (2023b). Poesie (3-7 anni; 8-10 anni; 11-14 anni; 15-18 anni; oltre i 18 anni). In S. Sbaragli, L. Crivelli, E. Franchini & S. Demartini (A cura di), *Matematica a parole.* Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/produzioni-poesia/

Cerasoli, A. (2001). *I magnifici dieci. L'avventura di un bambino nella matematica.* Editoriale scienza.

Cerasoli, A. (2011). *Gatti neri, gatti bianchi.* Editoriale scienza.

Cerasoli, A. (2012). *La grande invenzione di Bubal.* Emme edizioni.

Cerasoli, A. (2015). *È logico!* Emme edizioni.

Cerasoli, A. (2016). *Matematica amica.* Feltrinelli.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2023a). Sezione "prosa". In S. Sbaragli (A cura di), *Matematica a parole.* Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. https://www.matematicando.supsi.ch/media/Matematica-a-parole_Sezione-prosa.pdf

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2023b). Sezione "poesia". In S. Sbaragli (A cura di), *Matematica a parole.* Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. https://www.matematicando.supsi.ch/media/Matematica-a-parole_Sezione-poesia.pdf

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2023c). Matematica in rima. In S. Sbaragli (A cura di), *Matematica a parole*. Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. https://www.matematicando.supsi.ch/media/Matematica-a-parole_Matematica-in-rima.pdf

Rodari, G. (1962). *Favole al telefono*. Einaudi.

Wolf, M. (2007). *Proust e il calamaro. Storia e scienza del cervello che legge*. Vita e pensiero.

Albano, G., Polo, M., Fiorentino, G., Coppola, C., Dello Iacono, U., Pierri, A., Tortora, R., Marsico, G., & Mollo, M. (2020). ***Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a competence-based social approach.*** **https://sites.google.com/unisa.it/dist-m/**

> «Federico è un ragazzo creativo e curioso, tanto che è lui che nel suo gruppo di amici e amiche prende sempre l'iniziativa lanciando sempre nuove idee quando la situazione è bloccata. Oggi, Federico ha trovato un dispositivo elettronico che sta cercando di far funzionare, quando ad un certo punto capta un segnale che sembra provenire dallo spazio profondo. Forse gli alieni? Immediatamente si mette a trascrivere il messaggio, ma sul più bello il dispositivo si spegne e il messaggio rimane incompleto. Così corre a raccontare cosa è successo ai suoi amici: Marco, scrupoloso, preciso e attento agli altri, Sofia un'amante della scrittura e Clara sempre scettica e dubbiosa».

Questo è l'inizio di una storia. Ma non di una storia qualunque, è una delle storie interattive per lo sviluppo di competenze matematiche del progetto *Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a competence-based social approach* (DIST-M).
Il progetto DIST-M nasce da una visione pioneristica e innovativa di un gruppo di ricercatori italiani guidati dalla prof.ssa Giovannina Albano: integrare le nuove tecnologie digitali e lo sviluppo delle competenze matematiche attraverso il gioco di ruolo. Questa idea si concretizza grazie al progetto finanziato attraverso il PRIN 2015 (Progetto di Ricerca di Interesse Nazionale – Bando 2015 – Prot. 20155NPRA5), che ha coinvolto l'Università di Salerno, l'Università di Cagliari e l'Accademia Navale di Livorno.
Ma di cosa si tratta? DIST-M è un progetto di ricerca in didattica della matematica che integra la ricerca in psicologia dell'educazione e nell'apprendimento online. Lungi dall'essere uno di quei progetti che volano alti senza guardare alla pratica didattica, DIST-M è uno strumento metodologico e tecnico da utilizzare in classe coinvolgendo in modo concreto insegnanti e studenti (Polo et al., 2022).
Cerchiamo di capire meglio di cosa si tratta, soffermandoci su una parte del titolo del progetto *Interactive Storytelling*. In generale lo *storytelling* è quella pratica di narrazione di una storia durante la quale una persona ascolta o racconta quella storia, ma l'aggettivo *interactive* vuole andare oltre questa dinamica rendendo la persona partecipe. Nel contesto didattico, quindi, lo studente non è colui che ascolta la storia, non è colui che la riceve e non è nemmeno colui che la costruisce bensì è colui che interagisce con la storia in maniera attiva assumendo uno dei ruoli dei personaggi ed è in grado di modificarla a seconda dei propri interventi (Albano et al., 2017; Albano et al., 2021). La dimensione digitale si manifesta attraverso l'uso di una piattaforma online che integra alcuni strumenti

di facile utilizzo; in questo modo si crea un unico ambiente didattico digitale per lo sviluppo di attività matematiche orientate alle competenze, che si basano su interazioni sociali virtuali nell'ambito di una storia (Albano et al., 2017).
L'ambiente di apprendimento e le attività proposte sono frutto di una profonda e fine ricerca che mette a sistema teorie didattiche, psicologiche e tecnologiche grazie alle quali è stato possibile non solo progettarle e svilupparle ma anche validarne l'efficacia didattica (Albano, Capobianco & Dello Iacono, 2020; Dello Iacono et al., 2021; Marsico et al., 2019).
Tornando al concreto della pratica d'aula e del fare matematica, capiamo cosa DIST-M mette a disposizione da un punto di vista metodologico. A tal fine, vediamo insieme la storia *Arrivano gli alieni*, la storia che ci ha accolto all'inizio di questa recensione, dove da subito incontriamo quattro personaggi che sono paradigmatici di quattro atteggiamenti o meglio "ruoli" che gli studenti devono rivestire a turno all'interno del racconto: il Promoter (Federico), la Blogger (Sofia), la Peste (Clara), il Boss (Marco).[1] Questi ruoli permettono agli studenti di assumere un atteggiamento ben preciso all'interno della storia in modo da farla avanzare non solo dal punto di vista narrativo ma anche matematico. Torneremo più avanti su questo importante e delicato aspetto.
La storia si articola in 5 episodi. Il primo è l'incontro con un altro personaggio (Gianmaria, lo zio di Federico), al quale i quattro amici chiedono aiuto. Infatti, Gianmaria, che riveste il ruolo del Guru, ha la funzione sia dell'esperto che media, sia della saggezza (la conoscenza disciplinare) a cui ci si rivolge in caso di *impasse*. Gianmaria aiuta il gruppo attraverso domande del tipo: «Cosa volevi dire?», «Intendevi dire questo o quello?», «Puoi spiegare/chiarire/elaborare questo concetto/pensiero/affermazione?».
Il primo episodio (**Figura 1**) vede tutti i personaggi in campo, ed è solo in questo momento che viene reso noto il messaggio (**Figura 2**) trascritto da Federico.

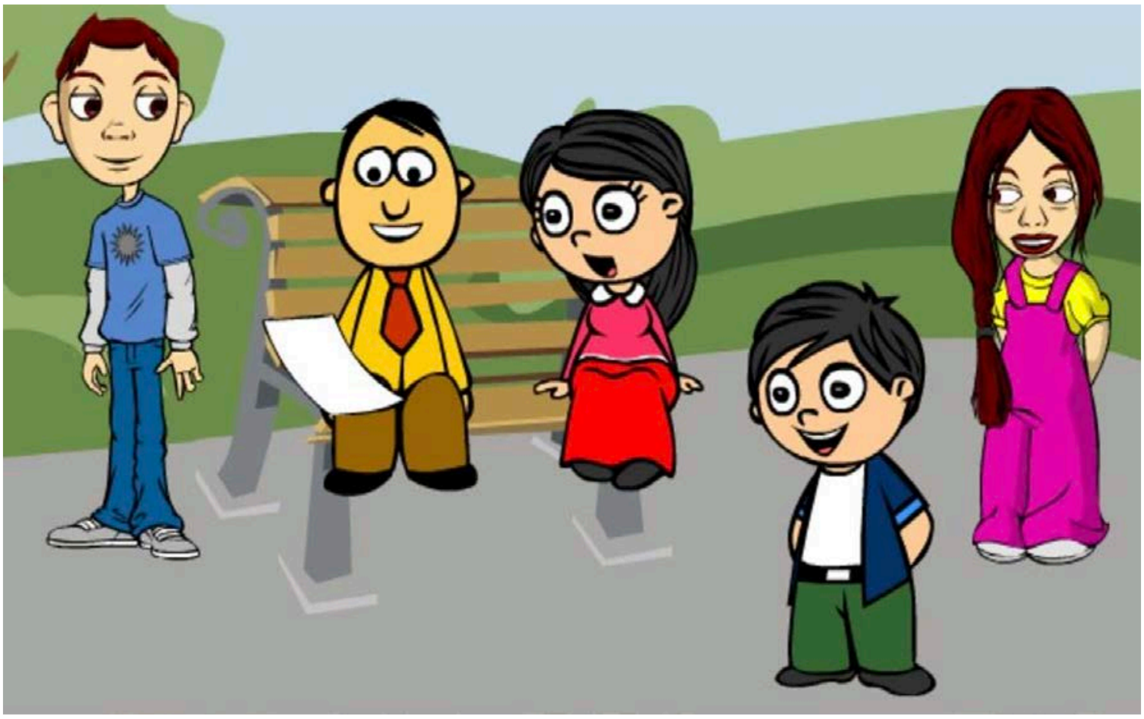


Figura 1. I protagonisti della storia "Arrivano gli alieni".

1. Il lettore e la lettrice attenti avranno notato che la scelta dei generi associati ai ruoli e alle caratteristiche risulta poco in linea rispetto all'attuale e urgente tema *gender-balance,* ma è sufficiente riadattare i nomi per superare questo unico difetto del progetto.

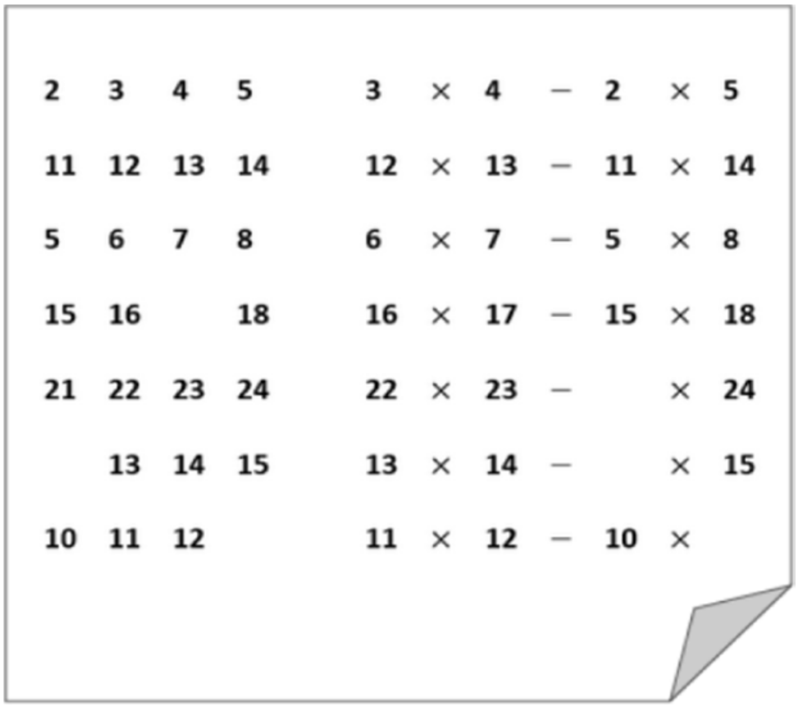


Figura 2. Il messaggio trascritto da Federico.

La nostra storia continua con altri 4 episodi che permettono di ripercorrere, nel tempo, le tappe del processo di dimostrazione: prima proveranno a interpretare il significato del foglietto (episodio 2), successivamente riceveranno altri messaggi dagli alieni (episodio 3), ma le risposte date dal gruppo di amici non soddisferanno gli alieni (episodio 4), che ripartiranno dopo una risposta soddisfacente anche se rimarrà da risolvere il mistero del messaggio iniziale (episodio 5).
È evidente che il progetto vuole anche promuovere il lavoro di gruppo, visto che il numero di ruoli è 4 (più uno per il Guru). Questo implica, dal punto di vista didattico, l'organizzazione di gruppi formati da 4 (o massimo 5) studenti con i rispettivi ruoli e azioni: il Boss che gestisce e organizza il lavoro di gruppo sia dal punto di vista cognitivo che sociale sollecitando gli altri studenti a interagire e partecipare con il proprio ruolo; la Peste che insinua continuamente dubbi, pone delle domande, chiede spiegazioni e chiarimenti, è un ruolo fondamentale per la dinamica della storia dal punto di vista del *problem-solving*, e può essere attribuito a un altro studente nel momento in cui il gruppo dovesse essere costituito da 5 componenti e non 4; la Blogger che sintetizza il lavoro del gruppo, quindi raccoglie gli interventi da parte di ciascuno scrivendo e formalizzando una risposta condivisa da mandare poi direttamente all'esperto (il Guru); il Promoter che avvia l'attività di *problem-solving*, e che inoltre è responsabile di superare una eventuale situazione di stallo (per fare questo il Promoter ha un rapporto privilegiato con l'esperto – il Guru). Il Guru infine è il ruolo rivestito dall'insegnante o da un esperto del problema; ha il compito di gestire il lavoro di gruppo attraverso la comunicazione con il Promoter.
Una volta formati i gruppi e assegnati i ruoli, a ogni episodio un gruppo avrà il compito di protagonista, cioè di interagire con la storia, mentre gli altri gruppi sono osservatori e hanno il compito di prendere nota di quello che l'omologo personaggio protagonista sta facendo in quell'episodio. Concluso l'episodio, un secondo gruppo diventerà protagonista ma prima i ruoli dei personaggi saranno scambiati: se ad un episodio uno studente è un Promoter protagonista, al successivo episodio quello stesso studente diventerà osservatore con un altro ruolo, per esempio Peste.
Questa scelta consente a ciascuno studente di giocare attivamente almeno un ruolo e di osservare tutti gli altri perché i ruoli e le azioni sono predefinite e progettate con uno specifico obiettivo didattico (Albano et al., 2021). Infatti, i ruoli sono definiti in corrispondenza di funzioni cognitive individuate

nel *problem-solving* e nell'argomentazione e le loro azioni sono guidate da come queste funzioni entrano in gioco in tali processi. Per favorire l'appropriazione di tali funzioni cognitive, il DIST-M prevede che ogni studente sperimenti tutti i ruoli, in accordo a un approccio vygotskiano in cui l'apprendimento viene prima socializzato e poi interiorizzato (Albano, Dello Iacono & Fiorentino, 2020).
Il progetto DIST-M ha come obiettivo didattico principale quello di sviluppare la competenza argomentativa. In particolare, nella storia che stiamo raccontando, i protagonisti (gli studenti) sono chiamati a esplorare le regolarità tra le quaterne, congetturare qual è il risultato delle operazioni, formalizzare la congettura e dimostrarla. Nel fare questo, la storia richiede:

1. la rappresentazione algebrica di una quaterna generica di numeri consecutivi, ad esempio: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$;
2. la "traduzione" della richiesta nel linguaggio matematico in modo pertinente rispetto alla rappresentazione algebrica scelta, ad esempio: $(n + 1)(n + 2) – n(n + 3)$;
3. la "manipolazione" algebrica della formulazione trovata, che porta a ottenere la costante 2 (verifica della congettura);
4. la "giustificazione" della verifica attraverso opportune proprietà algebriche utilizzate nella manipolazione algebrica che convalidano la congettura e concludono la dimostrazione (validazione della congettura).

Come anticipato, la storia viene veicolata attraverso un ambiente di apprendimento basato su Moodle che integra alcuni strumenti e risorse digitali di facile utilizzo come GeoGebra, fogli di calcolo condivisi e chat (Albano et al., 2017).
La storia proposta e le modalità interattive sono gli elementi di una attività didattica che propone in modo innovativo e originale un problema matematico in forma di attività aperta che consente di attivare la sequenza "esplorazione, selezione dei dati osservati, congettura, formulazione, dimostrazione, verifica/validazione".
Ma pur focalizzandosi sulla competenza matematica, il progetto ha uno sguardo più ampio che lavora su altri fronti: la comunicazione nella madrelingua, la competenza digitale, imparare a imparare, e la consapevolezza ed espressione culturale.
Il progetto DIST-M, anche se formalmente chiuso, rimane attivo e coinvolge ancora oggi gli insegnanti di tutta Italia (e non solo) nelle proprie attività. Trovate tutti i dettagli per partecipare come protagonisti o osservatori sul sito del progetto che contiene oltre agli approfondimenti e alle pubblicazioni scientifiche, altre storie e problemi, le linee guida per implementare in autonomia le attività e un modulo di contatti per entrare nella grande comunità del *Digital Interactive Storytelling in Mathematics*.

Bibliografia

Albano, G., Capobianco, G., & Dello Iacono, U. (2020). An online environment for promoting mathematical argumentation in primary school. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *9*(3), 185–206. https://www.learntechlib.org/primary/p/213814/

Albano, G., Coppola, C., & Dello Iacono, U. (2021). What does 'Inside Out' mean in problem solving? *For the Learning of Mathematics*, *41*(2), 32–36. https://www.jstor.org/stable/27091202

Albano, G., Dello Iacono, U., & Fiorentino, G. (2017). Digital Interactive Storytelling In Matematica: Un approccio sociale basato sulle competenze. In G. Fiorentino (Ed.), *Atti del MoodleMoot Italia 2017* (pp. 34–38). Sapienza – Università di Roma & Associazione Italiana Utenti Moodle.

Albano, G., Dello Iacono, U., & Fiorentino, G. (2020). A Technological Storytelling Approach to Nurture Mathematical Argumentation. In H. Chad Lane, S. Zvacek & J. Uhomoibhi (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Computer Supported Education (CSEDU 2020)* (Vol. 1, pp. 420–427). SciTePress. https://doi.org/10.5220/0009416904200427

Dello Iacono, U., Pierri, A., & Polo, M. (2021). An online collaborative approach for fostering argumentative thinking in mathematics. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *28*(3), 153–162. https://doi.org/10.1564/tme_v28.3.05

Marsico, G., Mollo, M., Albano, G., & Pierri A. (2019). Digital Storytelling and Mathematical Thinking: An educational Psychology Embrace. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *7*(6), 36–44. https://doi.org/10.30722/IJISME.27.06.004

Polo, M., Concas, A., Pierri, A., & Coppola, C. (2022). The engagement of teachers and students in e-learning environment: Digital interactive storytelling in mathematics. In E. Gola, A. Volterrani & F. Meloni (Eds.), *Communication, digital media and future: new scenarios and future changes. Proceedings of 6th World Conference on Media and Mass Communication 2020+1* (pp. 147–155). Unica Press.

Domenico Brunetto
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano, Italia

AA.VV. (2021-2024). *Collana Comics&Science*. Feltrinelli Comics. www.comicsandscience.it

Comics&Science nasce nel 2012 come sezione della programmazione culturale del festival *Lucca Comics&Games.* Dal 2013 diventa una serie di pubblicazioni a fumetti e nel 2016, sotto la cura di Symmaceo Communications, si trasforma in una collana di CNR Edizioni, etichetta editoriale del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR).
L'obiettivo è promuovere il rapporto tra scienza e intrattenimento, nella convinzione che entrambi costituiscano momenti formativi importanti per la crescita dell'individuo e del cittadino.
Alla collana regolare, composta da due nuovi titoli all'anno, si affianca una collana Spin-off di albi speciali, nati in collaborazione con aziende, enti e istituti.

1. Raccontare la matematica con i fumetti: un'esperienza
La comunicazione della matematica è una delle esperienze più difficili per un comunicatore scientifico, sia perché verte su argomenti astratti e poco visibili, sia perché la matematica spesso cancella le tracce dei processi che hanno portato ai vari concetti e teorie elaborati nel corso dei secoli. Capire come si risolvono certe equazioni, o l'uso dei numeri complessi, o ancora le nozioni di base del

calcolo infinitesimale, può risultare difficile in assenza della comprensione di un quadro generale di riferimento e soprattutto di sfondi narrativi a questi argomenti che ci permettano di trovare con essi un aggancio anche emotivo.

Proprio partendo da queste riflessioni è nato *Comics&Science*, un progetto di comunicazione realizzato in collaborazione da CNR Edizioni e dallo studio editoriale Symmaceo, che dal 2012 utilizza il fumetto per veicolare idee e fatti della matematica e, più in generale, della cultura scientifica.

Nato come una serie di incontri all'interno della programmazione culturale di *Lucca Comics&Games*, il più importante festival europeo dedicato a ogni forma d'intrattenimento, *Comics&Science* ha iniziato da subito a ramificarsi in attività collaterali: editoriale (produzione di pubblicazioni a fumetti scritti e disegnati per l'occasione dai principali autori italiani: Leo Ortolani, Tuono Pettinato, Silver e poi tanti altri, come Claudia Flandoli, Giuseppe Palumbo, Sergio Ponchione, Zerocalcare, Silvia Ziche), *reading* e rappresentazioni dal vivo di adattamento delle produzioni a fumetti (una sul manoscritto perduto di Archimede e una su Vito Volterra), allestimento di mostre. Tra chi scrive vi sono i due curatori: un matematico accademico e uno di formazione, passato all'editoria dopo alcuni anni di lavoro in centri di ricerca pubblici e privati. È quindi naturale che all'inizio *Comics&Science* si concentri su matematica e scienze "dure", per poi altrettanto naturalmente differenziarsi a mano a mano che l'interesse riscontrato produce occasioni in altri ambiti di studio e di ricerca (chimica, biologia, paleontologia, storia).

2. Filosofia comunicativa e scopi

Lo scopo dichiarato del progetto è il coinvolgimento del maggior numero di lettori possibile, da quelli "puri" di fumetti a quelli in ambito più strettamente scientifico, storicamente molto attento al fumetto come lettura privilegiata (questo è ancor più vero nei paesi francofoni, dove notoriamente il fumetto, o *bande dessinée*, è una lettura universalmente diffusa e quasi del tutto al riparo dalla diffidenza culturale mai del tutto superata nel nostro paese).
Più formalmente le finalità "statutarie" del progetto, come riportate nelle comunicazioni ufficiali, sono le seguenti:

> «*Comics&Science* ha come obiettivo la promozione del rapporto tra scienza e intrattenimento, nella convinzione che entrambi costituiscano momenti formativi importanti per la crescita dell'individuo e del cittadino. I "*comics*" del titolo rimandano a un linguaggio privilegiato, quello del fumetto, omaggiato anche dalle scelte di formato e confezione, reminiscenti a un tempo del classico e popolare "giornalino" italiano e del moderno *comic book* anglosassone».

3. Filosofia narrativa

Il denominatore comune delle pubblicazioni e di tutte le produzioni derivate di *Comics&Science* è la scelta consapevole del fumetto come linguaggio d'elezione per l'intrattenimento di qualità, evitando didascalismi e un approccio didattico, avvertito come più proprio della divulgazione in senso stretto.
I fumetti di *Comics&Science* non *spiegano* i fatti o le nozioni della scienza, ma li utilizzano come "motori narrativi" per storie che si muovono su vari registri, stili grafico-narrativi e generi tra i più diversi: umorismo, fantascienza, fantasy, avventura, horror e così via. Storie che soprattutto divertano e attraggano il pubblico per quello che sono: fumetti interessanti e artisticamente validi.
In pratica e più semplicemente, l'obiettivo di *Comics&Science* è parlare di scienza – ad alto livello e non di rado su argomenti di punta della ricerca – con storie realizzate da autori di primo piano, a cui viene affiancato un preciso apparato redazionale, composto da articoli che approfondiscono i temi sullo sfondo delle storie, in un linguaggio non specialistico e con un'attenzione particolare al rigore e alla chiarezza espositiva.

4. Sviluppi e adattamenti

La scelta del fumetto come linguaggio di riferimento è stata fatta anche perché presenta il vantaggio di essere un dispositivo adattabile con pochi sforzi a formati diversi da quello originale. Un esempio tipico è la storia di 24 pagine *Archimede Infinito 2.0*, pubblicata su *Comics&Science* nel 2017, per i testi e i disegni di Giuseppe Palumbo (Palumbo, 2017). L'anno precedente lo stesso autore aveva realizzato la quasi omonima *Archimede Infinito* (Palumbo, 2016), pubblicata come chiaro omaggio alla rivista di matematica *Archimede*, sulle cui pagine inaugurava una rubrica di "fumetti matematici" che prosegue tuttora. La storia era un distillato estremamente sintetico – due sole pagine – della complessa e affascinante vicenda del *Palinsesto C*, l'unico documento esistente a riportare il testo originale del *Metodo dei teoremi meccanici*, opera fondamentale del genio di Siracusa creduta perduta per secoli, fino a divenire semi leggendaria. Il lavoro preliminare svolto in quelle due pagine aveva poi semplificato la stesura di una trama più lunga e articolata, senza contare un certo numero di importanti *character design* (gli studi preliminari di ambienti e personaggi della storia, come la Siracusa greca, Cicerone e ovviamente lo stesso Archimede).
Quasi in contemporanea, i materiali esistenti e testi aggiuntivi redatti appositamente, hanno permesso di realizzare una semplice drammaturgia in quattro parti per uno spettacolo dal vivo rappresentabile da tre persone: l'autore che disegna in diretta sullo sfondo di musiche d'ambiente, alternato a una voce narrante commentata dalla proiezione di immagini tratte dal fumetto, con un monologo finale, dove uno "specialista" sviluppa e meglio spiega al pubblico il contenuto storico e matematico della rivoluzione rappresentata dal *Metodo*. Un formato facilmente adattabile alle esigenze dei luoghi e degli eventi – festival culturali, mostre di fumetto, aule universitarie, musei – presso i quali è stata rappresentata a tutt'oggi una quindicina di volte.

5. Spin-off

La filosofia comunicativa e narrativa di *Comics&Science* è sposata anche da progetti terzi, nati su richiesta di società, istituzioni e accademie interessate ad applicarla ai loro contenuti.
Nel 2018 le Edizioni della Normale della Scuola Normale Superiore pubblicano *Speciale Normale* (AA. VV., 2018), una pubblicazione prodotta da Symmaceo che ospita un fumetto di Leo Ortolani sulla storia dell'istituzione e articoli di approfondimento a contorno.
Nel 2020, in collaborazione con CNR – Consiglio Nazionale delle Ricerche, il marchio Feltrinelli Comics di Feltrinelli Editore pubblica *La funzione del mondo – Una storia di Vito Volterra* (Bilotta & Grillotti, 2020), un romanzo a fumetti scritto da Alessandro Bilotta e disegnato da Dario Grillotti. L'occasione sono gli 80 anni dalla scomparsa del grande matematico Vito Volterra, fondatore dello stesso CNR.
Nel 2023, sempre Feltrinelli Comics pubblica *La medusa immortale* (Frongia & Cajelli, 2023), un volume a fumetti dedicato alla vita e all'opera di Anton Dohrn, figura chiave nella storia della biologia marina e fondatore dell'attuale ente di ricerca SZN – Stazione Zoologica Anton Dohrn Napoli. L'occasione sono i 150 anni della fondazione della Stazione, che decide di dedicare tempo e risorse adeguate alla comunicazione al grande pubblico della propria storia e della propria attuale importanza, scegliendo tra i vari strumenti quello del fumetto in chiave *Comics&Science*.

6. Dall'intrattenimento al LABoratorio

I fumetti di *Comics&Science*, sebbene pensati in origine per i giovani frequentatori dei festival del fumetto come *Lucca Comics*, si sono rivelati adatti a una platea abbastanza eterogenea, in linea di principio "generalista", come quella dei tanti festival scientifici ed editoriali a cui il progetto contribuisce regolarmente con presentazioni e incontri con gli autori. Più recentemente, il progetto ha avuto l'occasione di rivolgersi a pubblici diversi e più specifici (bambini e ragazzi delle scuole primarie, secondarie inferiori e superiori),[1] il che ha portato a una riorganizzazione dei materiali già prodotti, con uno scopo duplice:

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

da un lato rivolgersi agli insegnanti, suggerendo loro le potenzialità didattiche del fumetto; dall'altro, rivolgersi agli studenti, ai quali suggerire la possibilità di esprimersi col fumetto in maniera autonoma.
Nasce da qui *Comics&Science LAB*, un format che prevede la partecipazione di uno o più autori di fumetti e di uno o più redattori di *Comics&Science*. L'approccio è informale e orientato all'intrattenimento, con ampio uso di aneddoti, esempi grafici e giochi a video. Ogni incontro prevede un primo momento dedicato al glossario del fumetto, per familiarizzare il pubblico a un linguaggio un po' più tecnico e non ovvio anche nei termini più semplici (quanti sanno che, nel contesto di una storia a fumetti, la pagina disegnata è la "tavola"?). Successivamente, si introducono argomenti di carattere matematico che si prestano particolarmente a essere presentati sotto forma di gioco, come per esempio il paradosso di Monty Hall o quello dei compleanni (il calcolo delle probabilità è notoriamente ricco di problemi formulabili in termini elementari e non tecnici), che in passato sono stati oggetto di brevi storie apparse sulla rivista *Archimede*. In seguito, si passa a mostrare come gli argomenti trattati, spesso astratti, possano essere raccontati/descritti/riformulati in narrazioni a fumetti. L'intero incontro è sempre accompagnato da immagini, *slide* e da un commento grafico dal vivo: un disegnatore sviluppa in tempo reale e davanti ai presenti il percorso logico dell'incontro, riportandone i concetti fondamentali a mano a mano che vengono esposti, con vignette, illustrazioni ed elementi di testo, come frasi, parole o intere nuvolette, nel contesto di brevi fumetti. Infine, si cerca di far passare il messaggio che il fumetto è uno strumento ideale per raccontare storie, anche su argomenti molto astratti, perché permette di visualizzare facilmente idee complesse in poco spazio e che, soprattutto, non è necessario saper "disegnare bene" per poterne realizzare uno. L'importante, come al solito, è aver ben chiaro cosa si vuole comunicare, a chi e perché, e saperlo rendere in modo efficace creando una narrazione coinvolgente.
Da qui a costruire delle storie che funzionano il passo non è necessariamente breve, ma crediamo che sia un'esperienza da continuare, che potrebbe permettere a tante persone, attualmente poco motivate verso le scienze "dure", di avere un accesso "più amichevole" a certi contenuti astratti e fornire ai docenti uno strumento in più per coinvolgere i propri allievi.

Bibliografia

AA.VV. (2018). *Speciale normale. Gli anni di Pandora.* Edizioni della Normale.

Bilotta, A., & Grillotti, D. (2020). *La funzione del mondo. Una storia di Vito Volterra.* Feltrinelli Editore.

Frongia, F., & Cajelli, D. (2023). *La medusa immortale.* Feltrinelli Editore.

Palumbo, G. (2016). Archimede infinito. *Archimede*, *1*, 38–41.

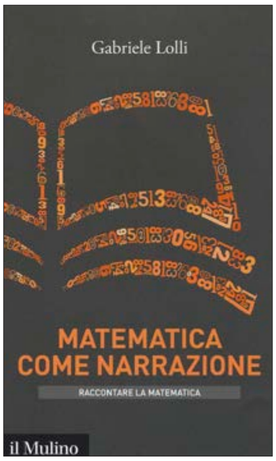
Palumbo, G. (2017). Archimede Infinito 2.0. *Comics&Science, The Archimedes Issue* (2), 9–30.

Roberto Natalini
Istituto per le applicazioni del Calcolo "Mauro Picone"
Consiglio nazionale delle ricerche, Italia
Direzione editoriale *Comics&Science*

Jacopo Peretti Cucchi
Redazione *Comics&Science*

Andrea Plazzi
Direzione editoriale *Comics&Science*
Symmaceo Communications

Lolli, G. (2018). *Matematica come narrazione*. il Mulino.



Di questo lavoro abbiamo già parlato qualche tempo fa: era il 2018, la rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* era al termine del suo secondo anno di vita (questo numero invece conclude l'ottavo anno; come vola il tempo…), e Stefano Beccastrini e Maria Paola Nannicini ci regalarono un'appassionata recensione di questo libro di Lolli. Se abbiamo deciso di proporne un'altra, a cura di Domingo Paola, è soprattutto per l'aderenza, evidente già dal titolo del volume, con il tema di questo numero speciale e per l'importanza che ha questo magnifico testo. L'interesse e la levatura scientifica del libro di Lolli hanno infatti portato il MIT (Massachusetts Institute of Technology) a richiederne la possibilità di traduzione e stampa, cosa assai rara per un libro italiano. Il testo tradotto è stato pubblicato da The MIT Press nel 2022 col titolo *The Meaning of Proofs. Mathematics as Storytelling.* Buona lettura!

Comitato redazionale DdM

Come fa osservare Yuval Harari, ciò che ha permesso a *Homo sapiens* di cooperare e, di conseguenza, di far emergere tradizioni commerciali e artistiche sono state le abilità linguistiche che «hanno dato ai Sapiens l'attitudine a raccontare e a credere a storie di fantasia e a commuoversi profondamente per esse. Invece di costruire una rete di catene da uomo a uomo – come facevano, per esempio, i Neanderthal – le storie hanno fornito a *Homo sapiens* un nuovo tipo di catena: le catene da uomo a storia. Per cooperare, i Sapiens non dovevano più conoscersi personalmente, ma solo conoscere la stessa storia» (Harari, 2024, p. 56).
L'importanza del racconto, della narrazione, per dar senso all'attività matematica è oggetto di particolare attenzione nel libro di Gabriele Lolli, *Matematica come narrazione*.
In un articolo che ebbe grande risonanza anche al di fuori dell'ambito strettamente accademico (*On Proof and Progress in Mathematics*), William Thurston, medaglia Fields nel 1982, scrisse che uno dei principali doveri del matematico è provare a spiegare il senso del proprio lavoro. Gabriele Lolli, nella premessa a *Matematica come narrazione*, si chiede: «Non potrebbe un matematico raccontare storie per dare un senso al suo lavoro? Se prova a esprimerne il senso, non può che iniziare una narrazione nella quale si mescolano intenzioni, obiettivi, progetti, desideri, conoscenze, azioni, convenzioni, interpretazioni. Queste sono le passioni che lo guidano» (p. 11). E così il primo capitolo del libro di Lolli si occupa di tratteggiare alcuni grandi racconti della matematica: la teoria degli insiemi, in cui si racconta come nasce l'intero universo della matematica; il programma di Erlangen, che unificò le nuove

geometrie, pensandole come studio degli invarianti di un determinato gruppo di trasformazioni; il programma di Hilbert, una storia che narra dei tentativi di fondare su basi sicure e certe la matematica, minacciata dalle antinomie e «tormentata dalle discussioni sull'infinito» (p. 30); il programma di Langlands che ha lo scopo di cercare di unificare teorie matematiche che fanno attualmente parte di settori non solo differenti, ma che a causa della forte specializzazione, sembrano non avere nessun rapporto reciproco. Il secondo capitolo riguarda il *senso* delle dimostrazioni. Lolli presenta e discute le dimostrazioni di tre teoremi ("se un angolo con vertice in un cerchio insiste su un semicerchio, allora è un angolo retto"; "non esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e i numeri naturali"; "i numeri primi sono infiniti") per poi offrire al lettore profonde riflessioni sulle dimostrazioni. Di queste mi piace accennare al paragone che propone tra le fiabe e le dimostrazioni, in particolare all'osservazione che in entrambi i tipi di produzione si prescinde dal significato dei termini. Come in una dimostrazione formale si deve prescindere dal significato dei termini coinvolti, così nelle fiabe «si prescinde dal significato dei termini; cosa è un orco? Raramente lo si definisce […] ma gli sono associati elementi caratteristici ricorrenti: fa paura, brutto, cattivo, antropofago […] Così gli altri personaggi o elementi delle fiabe, il re, il principe, la strega […] non sono mai descritti, sono simboli, segnaposti con una precisa funzione nell'economia della storia» (p. 88). Il terzo capitolo si occupa di corroborare la congettura che la dimostrazione sia (o derivi da) un racconto. Il quarto capitolo riguarda il peso che la tradizione, in particolare il pensiero di Platone e Aristotele, ha avuto sulla filosofia della matematica. Il quinto propone alcune riflessioni sulle caratteristiche del linguaggio matematico. Il sesto capitolo riguarda le origini dell'argomentazione e il settimo il confronto della struttura delle dimostrazioni di Euclide con certe strutture narrative, poetiche e, in particolare, retoriche arrivando alla conclusione che «dopo averlo meditato, non ci sembra più tanto assurdo pensare che la dimostrazione derivi alla lontana dalla letteratura» (p. 171).

Matematica come narrazione, come sempre accade per i libri di Lolli, propone riflessioni profonde, che richiedono attenzione e impegno nella lettura, ma che consentono anche di scoprire e apprezzare nuove prospettive e significati a ogni rilettura. Per chi si occupa di didattica della matematica, sollecita una domanda interessante: non potrebbe essere opportuno dare più spazio, nell'insegnamento-apprendimento della matematica, alla dimensione narrativa?

Bibliografia

Harari, Y. N. (2024). *Nexus. Breve storia delle reti di informazione dall'età della pietra all'AI.* Bompiani.

Lolli, G. (2022). *The Meaning of Proofs. Mathematics as Storytelling.* The MIT Press. (Titolo originale: *Matematica come narrazione. Raccontare la matematica* pubblicato nel 2018).

Domingo Paola
Laboratorio di Didattica della Matematica
Università di Genova, Italia