

DdM

15

Didattica della matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

PiGame 2023: una *escape room* matematica
*Caterina Bassi, Domenico Brunetto,
Nicolò Cangiotti e Francesco Nappo*

Aperture a cambiamenti nel discorso:
il caso di Dario
Chiara Bonadiman e Elena Macchioni

Introduzione al problem solving
in una classe prima primaria
Caterina Seneci

L'influenza della disomogeneità linguistica
di numero nella decodifica di informazioni
geometriche: il punto di vista di studenti
della scuola elementare e media
*Silvia Sbaragli, Michele Canducci
e Silvia Demartini*

Insegnare matematica con il teatro:
apprendimento *embodied* ed emozioni
Caterina Erba

Ostacoli allo sviluppo dell'anticipazione
in contesto algebrico
Erica Fiorini e Andrea Maffia

Classe cooperativa e apprendimento
matematico individualizzato
con il piano di lavoro
Rita Di Ianni e Antonio Pellicori

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).
Dipartimento dell'educazione della cultura e dello sport (DECS),
Repubblica e Cantone Ticino.

Direzione scientifica:

Prof.ssa Silvia Sbaragli, responsabile Centro competenze didattiche della matematica (DDM)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI.

Comitato di redazione:

Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Locarno, Svizzera.
Michele Canducci, Amos Cattaneo, Corrado Guidi
(Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Locarno, Svizzera).

Comitato scientifico:

Gilles Aldon (S2HEP, École Normale Supérieure de Lyon, Francia).
Samuele Antonini (Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini", Università di Firenze, Italia).
Gianfranco Arrigo (Società matematica della Svizzera italiana, Lugano, Svizzera).
Anna Ethelwyn Baccaglini-Frank (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).
Marta Barbero (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Locarno, Svizzera).
Giorgio Bolondi (Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano, Italia).
Gemma Carotenuto (Università degli Studi di Salerno, Italia).
Cristina Coppola (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno, Italia).
Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia).
Emanuele Delucchi (Dipartimento tecnologie innovative, SUPSI, Lugano, Svizzera).
Pietro Di Martino (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).
Benedetto Di Paola (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo, Italia).
Pier Luigi Ferrari (Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica, Università del Piemonte Orientale, Italia).
Elena Franchini (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Locarno, Svizzera).
Athanasios Gagatsis (Faculty of Social Sciences and Education, University of Cyprus, Nicosia, Cipro).
Juan D. Godino (Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Spagna).
Telgia Juon (Pädagogische Hochschule Zürich, Svizzera; Alta scuola pedagogica dei Grigioni, Svizzera).
Colette Laborde (LIG, Université de Grenoble, Francia).
Salvador Llinares (Departamento Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, Spagna).
Mirko Maracci (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia).
Claire Margolinas (ACTé, Université Clermont-Auvergne, Francia).
Maria Alessandra Mariotti (Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Università di Siena, Italia).
Maria Mellone (Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università di Napoli Federico II, Italia).
Francesca Morselli (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova, Italia).
Monica Panero (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Locarno, Svizzera).
Alberto Piatti (Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Locarno, Svizzera).
Cristina Sabena (Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino, Italia).
George Richard Paul Santi (Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia, Italia).
Annarosa Serpe (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Calabria, Italia).

Grafica:

Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI.

Impaginazione:

Adamo Citraro
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI.



© 2024 by the author(s).

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

è distribuito con Licenza Creative Commons

Attribuzione 4.0 Internazionale

Maggio 2024

[Editoriale / Editorial](#)
I / III

Riflessione e ricerca

[Aperture a cambiamenti nel discorso:
il caso di Dario](#)

Chiara Bonadiman e Elena Macchioni

9

[Ostacoli allo sviluppo
dell'anticipazione in contesto algebrico](#)

Erica Fiorini e Andrea Maffia

32

[L'influenza della disomogeneità
linguistica di numero nella decodifica
di informazioni geometriche: il punto
di vista di studenti della scuola
elementare e media](#)

*Silvia Sbaragli, Michele Canducci
e Silvia Demartini*

51

Esperienze didattiche

[PiGame 2023: una *escape room*
matematica](#)

*Caterina Bassi, Domenico Brunetto,
Nicolò Cangiotti e Francesco Nappo*

73

[Classe cooperativa e apprendimento
matematico individualizzato con il
piano di lavoro](#)

Rita Di Ianni e Antonio Pellicori

92

[Insegnare matematica con il teatro:
apprendimento *embodied* ed emozioni](#)

Caterina Erba

116

[Introduzione al problem solving
in una classe prima primaria](#)

Caterina Seneci

136

[Recensioni](#)

163

Editoriale

La didattica della matematica è una disciplina in continua evoluzione, e può contare ormai su numerosi studi, di portata più o meno ampia, che nel corso dei decenni hanno prodotto teorie, costrutti, metodologie, strategie, utili ad analizzare situazioni di insegnamento-apprendimento o da applicare in classe per rendere l'esperienza di apprendimento significativa ed efficace. Questo insieme di strumenti, teorici e pragmatici, è in perenne aggiornamento, e così come in una cassetta d'attrezzi si trovano strumenti un po' datati, ma affidabili e indispensabili, insieme a strumenti nuovi e più efficaci nel trattare situazioni di bisogno, così anche la nostra disciplina si avvale di strumenti provenienti tanto dalla storia della didattica quanto dai suoi stimoli più attuali. Il quindicesimo numero della rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* presenta alcuni degli strumenti della cassetta degli attrezzi della didattica della matematica, e lo fa nella consueta duplice veste, teorica e applicativa, cercando di mostrare che teorie datate già qualche decennio sono ancora indispensabili per interpretare fenomeni d'aula, ma aprendo anche a nuovi costrutti, nuovi contesti, nuove forme comunicative.

Il primo articolo della sezione *Riflessione e ricerca* di questo numero affronta il caso di Dario, uno studente di scuola secondaria di secondo grado¹ con persistenti difficoltà in matematica e un'identità di fallimento in matematica; lo studio mostra come da una prospettiva teorica comognitiva si possa identificare un *profilo di apprendimento matematico* a partire dal quale implementare un percorso progettato ad hoc per il recupero di difficoltà in matematica; i risultati mostrano che l'esposizione a questo percorso abbia prodotto in Dario un'apertura al cambiamento, seppur di piccola entità, nel *profilo di apprendimento matematico*. Il secondo articolo di questa sezione si occupa del processo cognitivo dell'anticipazione nel contesto algebrico: dopo aver richiamato i riferimenti teorici, didattici e psicologici, soggiacenti al costrutto dell'anticipazione, viene presentato uno studio nel quale, attraverso la somministrazione di un questionario a studenti di scuola secondaria di secondo grado e il lavoro successivo in focus group, si mette in evidenza che lo sviluppo dell'anticipazione possa essere inficiato dall'emergere di ostacoli di tipo ontogenetico, epistemologico e didattico, ostacoli che potrebbero essere risolti con opportuni interventi didattici. Il terzo articolo presenta un'indagine che ha coinvolto allievi ticinesi e italiani di quarta elementare e di seconda media; l'obiettivo del contributo è quello di verificare che le disomogeneità linguistiche nella categoria grammaticale di *numero*, presenti nella trattazione degli enti dei poligoni in diversi libri di testo in uso a scuola, possano causare difficoltà nella ricezione ed elaborazione del testo da parte degli allievi, con conseguenti interpretazioni errate della numerosità degli enti di un poligono; in questo modo, viene confermato che elementi linguistici apparentemente minori hanno in realtà importanza per la costruzione del sapere.

Nella sezione *Esperienze didattiche* sono presenti quattro articoli. Nel primo articolo viene presentata un'esperienza didattica rivolta a studenti delle scuole secondarie di primo² e secondo grado italiane tramite la costruzione di una *escape room* virtuale; l'esperienza ha coinvolto oltre 50 scuole e 1500 studenti nell'occasione del Pi Day 2023, la Giornata Internazionale della Matematica; l'articolo si

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

concentra sull'idea progettuale dei problemi matematici presentati e sulle modalità di realizzazione di un contesto virtuale che riproduca fedelmente l'esperienza di gioco *escape room*, mettendo in evidenza come il ruolo dello strumento narrativo e degli indizi stimoli l'esercizio nella rappresentazione di problemi matematici e l'utilizzo di modelli e analogie nelle procedure di risoluzione. Il secondo articolo racconta l'esperienza dell'introduzione del piano di lavoro matematico in due classi quinte della scuola primaria,³ con riflessioni di contesto e di metodo; il contributo descrive i primi passi e l'implementazione dello strumento piano di lavoro, la sua articolazione negli spazi e nei tempi, e una riflessione riguardante l'evoluzione degli atteggiamenti dei bambini verso la matematica, con alcuni spunti sulle possibilità d'uso dello strumento anche dopo la scuola primaria. Il terzo articolo presenta una sperimentazione svolta in una classe seconda di scuola primaria utilizzando Mathemart, un approccio che si avvale del Teatro Sociale e di Comunità come metodologia per l'insegnamento dei concetti matematici; nel contributo vengono descritti le varie fasi dell'esperienza, analizzandone potenzialità didattiche e limiti, in particolare facendo riferimento agli aspetti affettivi e al ruolo dell'esperienza corporea. Infine, l'ultimo articolo descrive le attività più significative del percorso svolto da una classe prima di scuola primaria in merito a un percorso matematico incentrato sul problem solving; l'obiettivo principale della sperimentazione riguarda l'instaurarsi di un clima di apprendimento nel quale il problema matematico possa essere affrontato senza stereotipi e rigidità, con l'utilizzo e la condivisione di più strategie risolutive, e con lo stimolo della comunicazione e dell'argomentazione sia orale che scritta.

Auguriamo una buona lettura a tutti coloro che ci seguono, siano essi docenti, ricercatori, studenti, perché possano avere una cassetta di attrezzi con un numero sempre maggiore e variegato di strumenti con i quali vivere e interpretare il processo di insegnamento-apprendimento della matematica.

Prof.ssa Silvia Sbaragli

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

Editorial

Mathematics education is a constantly evolving discipline, and can now count on several studies, of varying scope, which over the decades have produced theories, constructs, methodologies, strategies, useful for analysing teaching-learning situations or to be applied in the classroom to make the learning experience meaningful and effective. This set of tools, both theoretical and pragmatic, is constantly being updated, and in the same way as a toolbox contains tools that are a little outdated, but reliable and indispensable, together with new tools that are more effective in dealing with situations of need. Therefore, our discipline makes use of tools from both the history of didactics and its most current developments. The fifteenth issue of the *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* journal presents some of the tools in the mathematics education toolbox in their usual double guise, theoretical and applicative, seeking to show that theories developed several decades ago are still indispensable for interpreting classroom phenomena, but also opening up to new constructs, new contexts, and new forms of communication.

The first article in the *Riflessione e ricerca* section of this issue deals with the case of Dario, a upper secondary school¹ student with persistent difficulties in mathematics and an failure identity in mathematics; the study shows how from a commognitive framework it is possible to identify a *mathematics learning profile* from which to implement an ad hoc designed pathway for the recovery of difficulties in mathematics; the results show that this pathway produced in Dario an openness to change, albeit of a small extent, in his *mathematics learning profile*. The second article in this section deals with the cognitive process of anticipation in the algebraic context; after recalling the theoretical, didactical and psychological references underlying the construct of anticipation, the article presents a study conducted through the administration of a questionnaire to upper secondary school students and subsequent focus group work; the results highlight that the development of anticipation can be affected by the emergence of ontogenetic, epistemological and didactical obstacles, which could be resolved with appropriate didactical interventions. The third article presents an investigation involving fourth and seventh grade students in the Canton of Ticino (Switzerland) and in Italy; the aim of the contribution is to verify that linguistic inhomogeneities in the grammatical category of *number*, present in the treatment of polygons in various textbooks in use at school, may cause difficulties in the students' comprehension and processing of the text, resulting in misinterpretations of the numerosity of a polygon entities; in this way, it is confirmed that apparently minor linguistic elements are in fact important for the construction of knowledge.

There are four articles in the *Esperienze didattiche* section. The first article presents an educational experience aimed at Italian lower² and upper secondary school students through the construction of a virtual escape room; the experience involved over 50 schools and 1500 students on the occasion of Pi Day 2023, the International Day of Mathematics; the article focuses on the design of the mathematical problems presented and on the methods used to create a virtual context that faithfully reproduces the escape room game experience; the authors highlight how the role of the narrative tool and clues stimulates exercise in the representation of mathematical problems and the use of models and analogies in the resolution process. The second article describes the experience of introducing the

1. The upper secondary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 9 to 13.

2. The lower secondary school in Italy lasts three years and corresponds to the grades from 6 to 8.

mathematical Work Schedule in two fifth-grade primary school³ classes, with reflections on context and method; the contribution describes the first steps and the implementation of the Work Schedule, its articulation in space and time, and a reflection on the evolution of children's attitudes towards mathematics, with some hints on the possibilities of using the tool also after primary school. The third article presents an experiment carried out in a second primary school class using Mathemart, an approach that employs Social and Community Theatre as a means to teach mathematical concepts; the contribution describes the various phases of the experience, analysing its teaching potential and limitations, in particular by referring to affective aspects and the role of bodily experience. Finally, the last article describes the most significant activities of the experience carried out by a first-grade primary school class on a mathematical path focused on problem solving; the main objective of the experimentation concerns the establishment of a learning environment in which the mathematical problem can be tackled without stereotypes and rigidity, with the use and sharing of several solving strategies, and with the stimulation of both oral and written communication and argumentation.

We wish a pleasant read to all those who follow us, whether teachers, researchers, students, so that they may have a toolbox with an increasing and varied number of instruments with which to experience and interpret the process of teaching-learning mathematics.

Prof.ssa Silvia Sbaragli

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI

3. The primary school in Italy lasts five years and corresponds to the grades from 1 to 5.

Riflessione e ricerca

DdM

Aperture a cambiamenti nel discorso: il caso di Dario

Openings to changes in discourse: the case of Dario

Chiara Bonadiman* e Elena Macchioni°

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Firenze – Italia

°Dipartimento di Matematica, Università di Pisa – Italia

✉ chiara.bonadiman@unifi.it, elena.macchioni@phd.unipi.it

Sunto / Usando la prospettiva comognitiva, l'articolo presenta la nozione di *profilo di apprendimento matematico* e mostra come possa essere identificato attraverso l'analisi di un'intervista. Inoltre, viene esplorata l'ipotesi della modificabilità di tale profilo, nel caso di identità di fallimento, tramite l'implementazione di un percorso di introduzione al pensiero algebrico, progettato per il recupero di difficoltà in matematica. Nello specifico, analizzeremo il caso di Dario, uno studente con una storia di persistenti difficoltà in matematica, frequentante la seconda classe della scuola secondaria di secondo grado.

Parole chiave: difficoltà; algebra; comognizione; routine; profilo di apprendimento matematico.

Abstract / This paper presents, in the commognitive framework, the construct of *mathematics learning profile* and illustrates how this profile can be identified through the analysis of an interview. Moreover, the hypothesis of the modifiability of this profile, in the case of a failure identity, is explored by implementing a sequence of activity to introduce algebraic thinking, designed to recover difficulties in mathematics. More specifically, we analyze the case of Dario, a tenth-grade student with a history of low achievement in mathematics.

Keywords: low achievement; algebra; commognition; routine; mathematics learning profile.

1 Introduzione

Da decenni la ricerca in didattica della matematica sta mostrando un crescente interesse per il tema delle difficoltà di apprendimento nel contesto scolastico (Heyd-Metzuyanim, 2013); un filone di ricerca si sta concentrando sulla scuola secondaria di secondo grado,¹ in particolare sull'apprendimento mediato dalla tecnologia (Baccaglini-Frank, 2021). Inoltre, alcuni studi hanno messo in luce come sia necessario tenere presente non solo gli aspetti cognitivi ma anche quelli affettivi quando si parla di difficoltà in matematica (Zan & Di Martino, 2007). Trattare il tema delle difficoltà vuol dire dunque inserirsi in un quadro complesso, in cui è necessario esplicitare i termini a cui si fa riferimento. Basti pensare che in letteratura vi sono molteplici interpretazioni della sola locuzione *difficoltà in matematica*; come scrive Zan (2007):

«come spesso succede per nozioni apparentemente semplici e immediate è estremamente difficile riuscire a formulare una definizione esplicita di *difficoltà in matematica* in grado di coglierne tutti gli aspetti, che vengono invece immediatamente evocati dall'espressione stessa».

(Zan, 2007, p. 8)

Nello studio presentato in questo articolo, senza la pretesa di voler fornire in tale maniera una definizione onnicomprensiva, indicheremo con studenti con difficoltà quegli studenti che sono protagonisti di una storia di persistente fallimento o di basso rendimento in matematica.

1.1 Difficoltà in algebra

L'algebra gioca un ruolo delicato nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, per questo molti studi si concentrano sui processi legati alla nascita del pensiero algebrico, per quanto questo costrutto ancora non abbia trovato una caratterizzazione comune (Kieran, 2022). Ad esempio, Sfard (2009) descrive l'algebra elementare come *meta-aritmetica*, ovvero come un'unione dell'aritmetica con il suo meta-discorso, ossia il discorso sulle relazioni e sui processi aritmetici. Seguendo questa prospettiva, appare evidente la complessità legata al passaggio dall'aritmetica all'algebra, e quindi al processo di nascita del pensiero algebrico. Da decenni la letteratura sottolinea come il tema risulti spinoso dal momento che coinvolge diversi e delicati aspetti fondamentali nell'attività matematica, a partire dall'idea di generalizzazione di relazioni numeriche per arrivare alla trattazione di espressioni simboliche e di relazioni tra le stesse (Kieran, 1992). In contesto scolastico, il senso del simbolo sembra essere messo in secondo piano per lasciare spazio a manipolazioni e memorizzazioni di procedure che spesso sono motivo di persistenti difficoltà per gli studenti (Arcavi, 1994). La recente ricerca ha messo in evidenza come, per molti studenti, l'algebra rimanga esclusivamente una manipolazione di simboli, risultando inaccessibile in particolare per studenti in difficoltà che spesso si rifiutano (o non riescono) di imparare a memoria e ripetere procedure a cui non assegnano alcun significato (Baccaglini-Frank, 2021; Xin et al., 2022).

In questo articolo ci concentreremo sul ruolo che possono ricoprire le tecnologie nella formazione e nell'evoluzione dei processi legati al pensiero algebrico, in particolare per studenti con una storia di difficoltà alle spalle. Infatti, l'uso delle tecnologie è risultato incisivo sia per promuovere diverse modalità di interazione, sia per incentivare l'uso di diverse rappresentazioni di oggetti matematici (Lisarelli, 2023). Più nello specifico, nel contesto dell'algebra, l'utilizzo di ambienti digitali si è rivelato efficace per favorire la costruzione del senso di concetti algebrici complessi anche per studenti con difficoltà (Robotti, 2017).

1.2 Profili di apprendimento matematico

In letteratura sono, e sono stati, utilizzati diversi costrutti per trattare il tema delle difficoltà di apprendi-

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

mento in matematica, come *discalculia*, *arithmetical learning disabilities*, *mathematical learning disability/difficulty*. Lewis e Fisher (2016), in un'attenta revisione della letteratura, hanno messo in luce alcuni aspetti critici nell'uso di tali costrutti. Tra questi ricordiamo l'assenza di una definizione univocamente riconosciuta dalla comunità scientifica, la grande varietà di test diagnostici utilizzati nei differenti paesi, gli argomenti oggetto di questi test (in particolare il ruolo chiave ricoperto esclusivamente dall'aritmetica), ed anche l'assenza di un'indagine riguardo aspetti affettivi e socioculturali. Altri studi hanno sottolineato il ruolo che le "buone" pratiche didattiche hanno nel prevenire l'emergere di diffuse difficoltà in matematica (e sul lungo periodo anche di falsi positivi in discalculia), sollevando dunque alcune perplessità in merito agli attuali test diagnostici utilizzati. Commentano a tal proposito Baccaglini-Frank e Bartolini Bussi (2015):

«Ma se si può ridurre il numero dei bambini positivi ai test per la discalculia in modo così importante soltanto con una didattica attenta, c'è da chiedersi che cosa ci dicano davvero le prove che si usano quotidianamente per la diagnosi, e più in generale che cosa sia la discalculia. Queste sono questioni ancora aperte in diversi ambiti della ricerca. Poiché il raggiungimento di risposte certe è ancora lontano, in ambito didattico sembra che possa essere più fruttuoso smettere di cercare di scoprire chi siano i discalculici, per etichettarli e concentrare invece l'attenzione sul perché alcuni studenti falliscano in certi ambiti (quali?) della matematica e ricercare che cosa è possibile fare per evitare tale fallimento».

(Baccaglini-Frank & Bartolini Bussi, 2015, p. 180)

In linea con queste considerazioni si è sviluppato un filone di ricerca che si propone di identificare "profili di difficoltà" individuando gruppi di studenti con caratteristiche simili in differenti ambiti dell'apprendimento matematico. Gli studi portati avanti in questa direzione hanno consentito di sviluppare uno strumento (chiamato *MathPro Test*) per delineare profili multidimensionali di difficoltà, a partire da un modello teorico (il *modello dei quattro domini*) nato dalla revisione delle ricerche svolte in ambito cognitivo sul tema delle difficoltà (Baccaglini-Frank et al., 2020). Tale test, pur indagando in dettaglio i singoli processi cognitivi, non considera esplicitamente le componenti appartenenti alla sfera affettiva ed all'atteggiamento, che sappiamo invece essere fondamentali nell'apprendimento matematico (Zan & Di Martino, 2007). Dunque, per promuovere una didattica inclusiva che parta dai bisogni educativi degli studenti, è necessario sviluppare uno strumento che consenta la caratterizzazione di profili di apprendimento matematico, includendo anche aspetti affettivi e socioculturali. L'analisi condotta con tale strumento permetterebbe anche di progettare materiali specifici per ciascun profilo.

1.3 Progetto DynaMat

Per contribuire alla costruzione di un'educazione inclusiva e di qualità nel campo della matematica il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca ha finanziato il progetto triennale Prin DynaMat (2020BKWEXR), avviato nel 2022, che coinvolge studenti frequentanti il secondo anno di scuola secondaria di secondo grado. Il progetto si rivolge a studenti che dichiarano di avere una storia di difficoltà e fallimenti in matematica, o che vengono riconosciuti come tali dai loro insegnanti. Tra gli obiettivi che il progetto si prefigge di raggiungere vi è:

- La descrizione di *profili di apprendimento matematico* di studenti in difficoltà, che combinino aspetti cognitivi e affettivi.
- La progettazione e l'implementazione di attività nel campo dell'algebra che sfruttino le potenzialità offerte da ambienti digitali dinamici e interattivi.
- Lo studio dell'impatto che tali attività hanno sui profili precedentemente descritti.

In questo articolo presentiamo alcune riflessioni emerse dallo studio del caso di Dario,² uno studente

2. Per la tutela della privacy dello studente coinvolto, il nome è stato cambiato.

che ha partecipato al primo ciclo di sperimentazione del progetto. Discuteremo un'analisi del profilo di apprendimento matematico dello studente e alcuni episodi tratti dalla fase di implementazione delle attività, che ci sembrano identificare momenti di aperture a cambiamenti in tale profilo.

2 Quadro teorico

Abbiamo scelto di collocare la presente ricerca all'interno del quadro teorico della comognizione, la teoria socio-costruttivista elaborata da Sfard (2009). Il termine comognizione deriva dall'unione di comunicazione e cognizione, ed è stato coniato proprio per sottolineare l'assunzione di base della teoria, secondo cui processi comunicativi e cognitivi non sono processi distinti, bensì due facce della stessa medaglia.

Il *discorso* è un particolare tipo di comunicazione centrale nella teoria della comognizione. In quest'ottica, la *matematizzazione*, ovvero il "fare" matematica, consiste nella partecipazione al discorso matematico (il discorso riguardante gli oggetti matematici).

Sfard (2009) descrive i quattro aspetti caratteristici del discorso e in particolare del discorso matematico: le *parole specifiche e il loro uso* (per esempio equazione, o variabile), i *mediatori visivi* (oggetti visibili su cui opera il processo comunicativo), le *narrazioni approvate* (come enunciati di teoremi, o descrizioni di oggetti matematici) e le *routine* (pattern discorsivi, su cui ci soffermeremo con maggiori dettagli nel seguito). Gli oggetti matematici sono definiti come oggetti discorsivi, costituiti dal *significante* e dall'insieme di tutte le sue *realizzazioni*. Per esempio, una bilancia a due piatti in equilibrio e l'uguaglianza tra due espressioni algebriche possono essere due realizzazioni diverse della stessa equazione. L'esperto è in grado di compiere delle transizioni tra le diverse realizzazioni di uno stesso significante, ossia è in grado di costruire un discorso matematico sulla bilancia e di tradurlo in un discorso matematico sull'equazione. Dall'altra parte, per uno studente, una bilancia può non essere inizialmente una realizzazione di un'equazione, ma essere semplicemente un mediatore visivo.

Le realizzazioni ci consentono di distinguere *oggetti concreti* da *oggetti astratti*. L'uguaglianza tra due espressioni algebriche può dunque essere vista dagli studenti come un *oggetto concreto*, cioè come una stringa di simboli su cui compiere delle manipolazioni. In questo caso la scrittura non ha realizzazioni, non può essere "scritta in modi diversi" (in diversi contesti): è un oggetto concreto che rappresenta solo sé stesso e può essere manipolato esclusivamente in modi ben definiti. D'altra parte, la medesima uguaglianza tra espressioni algebriche può invece essere vista dagli studenti come (un significante di) un oggetto astratto. Questo accade quando, per uno studente specifico, l'equazione ha molte realizzazioni, ed in determinati contesti ci sono altre realizzazioni che possono essere considerate equivalenti a questa (Baccaglini-Frank, 2021).

Per comprendere cosa si intende con routine nel quadro della comognizione, è necessario fornire alcune definizioni preliminari. Da Lavie et al. (2019) *task situation* è una qualsiasi situazione in cui il soggetto sente di dover compiere delle azioni. Rientrano ovviamente in questa categoria tutte le situazioni in cui l'insegnante pone domande agli studenti in classe; non risulta sorprendente il fatto che studenti diversi agiscano in modo diverso davanti alla medesima *task situation* e che possa accadere che nessuna delle azioni effettuate corrisponda a quella che l'esperto aveva previsto. Uno studente, infatti, interpreta una data *task situation* e produce una routine definita come la coppia di task interpretata (sulla base di esperienze precedenti) e procedura (ciò che viene fatto, o detto, per risolvere la task interpretata). La routine messa in atto da un dato studente, dunque, è strettamente personale. Durante l'implementazione di una routine uno studente può sforzarsi, o meno, di dare senso alla *task situation* e ai processi che mette in atto. In particolare, si parla del *processo di attribuzione di senso* agli oggetti matematici esemplificandolo con la capacità di costruire una narrazione significativa su

tali oggetti (Baccaglini-Frank, 2021; Sfard, 2021). Il termine narrazione si riferisce a «una serie di enunciati, scritti o proferiti a voce, formulata come una descrizione di oggetti, di relazioni tra oggetti o di processi che si svolgono con o attraverso oggetti, e passibile di approvazione o rifiuto, cioè giudicabile vera o falsa» (Sfard, 2009, pp. 340–341) secondo le regole che guidano la produzione del discorso dalla comunità presa a riferimento. Una routine matematica può essere così collocata in un continuum alle cui estremità troviamo routine definite *rituali* e routine definite *esplorazioni*. Le prime sono implementazioni di procedure memorizzate, in cui chi le esegue non ha nessuna aspettativa rispetto al prodotto ottenuto ma è focalizzato esclusivamente sul processo, e sono spesso implementate per compiacere qualcuno (nel contesto classe, l'insegnante). Nelle esplorazioni l'attenzione è focalizzata sul prodotto: la domanda che le guida è *cosa voglio ottenere?* Secondo Baccaglini-Frank (2021) gli studenti che partecipano al discorso matematico in modo esplorativo tendono ad agire come risolutori di problemi, ingaggiandosi nella costruzione di narrazioni significative. In termini di *autonomia* gli studenti tendono cioè a prendere decisioni e proporre nuovi modi di agire. Recenti ricerche in didattica della matematica (Baccaglini-Frank, 2021; Cooper & Lavie, 2021) mostrano come studenti con una persistente storia di fallimento, incapaci di memorizzare procedure fini a sé stesse, o che semplicemente si rifiutano di farlo, possono essere ingaggiati nel discorso proponendo loro situazioni in cui possano dare significato agli oggetti matematici, ed avviare routine esplorative.

Istanze di attribuzione di senso possono essere rintracciate quando le routine sono vicine a quelle esplorative, e tra le caratteristiche che suggeriscono tale *processo di de-ritualizzazione*, definite da Lavie e colleghi (2019), vi sono: flessibilità, applicabilità e sostanzialità.³ In particolare, si fa riferimento alla flessibilità quando diverse procedure possono essere utilizzate per affrontare la medesima *task situation*; all'applicabilità quando una specifica routine può essere messa in atto per rispondere a una varietà di *task situation* e infine alla sostanzialità quando l'attenzione del solutore è focalizzata sul prodotto, egli può dunque valutare autonomamente la propria performance senza dover necessariamente ricorrere al parere di altri (per esempio, l'insegnante). La presenza (o l'assenza) di questi aspetti può essere interpretata come un indicatore chiave del tentativo dello studente di dare senso alla *task situation*. Le routine, in quanto pattern discorsivi, sono inoltre il risultato di complessi processi discorsivi guidati da regole. Sfard (2009) distingue due macro-categorie di regole discorsive: le *regole a livello oggetto* e le *meta-regole*. Le prime sono «narrazioni a proposito delle regolarità riscontrabili nel comportamento degli oggetti del discorso» (p. 238) e possono dunque anche avere la forma di narrazioni approvate su di essi come, per esempio, l'affermazione *in un triangolo isoscele gli angoli adiacenti alla base sono congruenti*. Le meta-regole invece riguardano le azioni dei partecipanti al discorso ed intervengono «quando ci occupiamo dell'attività ordinata di formulazione e convalida di queste regole a livello oggetto» (p. 237). L'evoluzione del discorso in matematica prevede cioè un'evoluzione anche delle meta-regole, che stabiliscono cosa sia accettabile in un dato contesto. Per esempio, nel passaggio dai numeri naturali ai numeri razionali non solo alcune regole di livello oggetto cessano di essere vere (*il prodotto di due numeri è sempre maggiore di ciascuno di essi*), ma è anche necessario un cambio nelle meta-regole che stabiliscono che cosa sia un numero (non più limitato a quantità che possono essere contate) (Cooper & Lavie, 2021). Nel complesso sistema delle regole che guidano il discorso matematico, vi sono tuttavia anche delle meta-regole che potrebbero non essere modificate durante tutto il percorso di apprendimento dello studente; ci riferiamo, per esempio, alle regole che codificano le norme socio-culturali ed i *beliefs* delle persone (Sfard, 2001). Queste specifiche meta-regole, come per esempio *in matematica è necessario avere una buona memoria*, influenzano fortemente le identità dei partecipanti al discorso. Per esempio, la meta-regola *in matematica bisogna essere molto veloci* unita alla percezione di uno studente di essere molto lento, potrebbe contribuire a consolidare un'identità di fallimento (Heyd-Metzuyanim, 2011).

3. Traduzione delle autrici dei termini *flexibility*, *applicability* e *substantiability*.

La teoria della comognizione fornisce strumenti per analizzare anche aspetti affettivi, attraverso il costrutto di *identità* (in questo caso parleremo di *individuazione*). L'identità è definita come una collezione di storie, costruite attraverso l'attività di *soggettivazione* (Sfard & Prusak, 2005). Si parla di soggettivazione quando il focus del discorso non è più sugli oggetti e sulle loro azioni ma sui partecipanti alla comunicazione. Le istanze di soggettivazione possono essere classificate in tre livelli principali, a seconda di quanto sia generale il messaggio che veicolano. Il primo livello riguarda una specifica performance (ad esempio, *non si ricordarmi ricordo come trovare gli zeri di questa funzione*), il secondo livello riguarda la performance di una routine (ad esempio, *non sa/so risolvere le equazioni*), mentre il terzo livello riguarda una proprietà di una persona (ad esempio, *non è/sono bravo in matematica*) (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012).

Sfard e Prusak (2005) hanno definito il concetto di identità in modo operativo, come una collezione di storie che sono *reificate*, *approvate* e *significative*. Una storia ha carattere reificato quando attribuisce proprietà stabili ad una persona. Questo può essere ottenuto con istanze di terzo livello di soggettivazione, ad esempio *non capisce* (indicheremo queste istanze come individuazione diretta), con istanze di primo o secondo livello di soggettivazione molto ricorrenti, ad esempio *non so risolvere questa equazione... non lo so ... forse, no non so*, o con istanze di terzo livello seguite da avverbi come *sempre* o *mai*, ad esempio *non ho mai capito come risolvere le equazioni* (indicheremo questi ultimi due casi come individuazione indiretta). Una storia è approvata quando colui che ha costruito la narrazione vi riconosce un quadro rappresentativo della realtà. Una storia è significativa se ogni suo cambiamento non lascia indifferente colui che ha costruito l'identità.

Sfard e Prusak (2005) hanno inoltre caratterizzato le identità tramite una terna dove A è la persona di cui è costruita l'identità, B è il costruttore di identità e C è colui che ascolta. Le storie in cui B coincide con A sono dette identità di prima persona, e sono quelle di cui ci occuperemo in questa ricerca. Utilizzeremo semplicemente il termine *identità* per indicare le identità di prima persona, ossia le storie che si riferiscono alla situazione attuale, così come è percepita dal costruttore di identità. Queste storie sono pertanto raccontate generalmente al tempo presente, come asserzioni. Nel seguito ci concentreremo sul carattere di successo o di fallimento di tali identità, costruite attraverso individuazione diretta e indiretta. Analizzare la matematizzazione e la soggettivazione degli studenti consente dunque di rintracciare elementi inerenti aspetti cognitivi ed affettivi dei profili di apprendimento matematico oggetto della presente ricerca.

2.1 Formulazione delle domande di ricerca

Alla luce di questa lente teorica, gli obiettivi di ricerca possono essere riformulati come domande di ricerca come segue:

1. a. Quali sono le caratteristiche della matematizzazione di Dario all'inizio del percorso?
- b. Quali sono le caratteristiche dell'individuazione di Dario all'inizio del percorso?
- c. Quali sono le meta-regole che governano il discorso di Dario all'inizio del percorso?
2. a. Cambia e come cambia, durante le attività proposte, la matematizzazione di Dario?
- b. Cambia e come cambia, durante le attività proposte, l'individuazione di Dario?
- c. Cambiano e come cambiano, durante le attività proposte, le meta-regole che governano il discorso di Dario?

3 Metodologia

In questo paragrafo viene descritto il contesto generale in cui si muove questa ricerca, a partire dal progetto DynaMat. Sono quindi illustrate l'intervista sottoposta agli studenti a inizio del percorso e le

attività progettate all'interno di alcuni ambienti digitali. In conclusione, si presenta lo schema analitico implementato per l'analisi dei dati.

3.1 Partecipanti e contesto della ricerca

La sperimentazione a cui ha partecipato Dario, la prima per il progetto DynaMat, si è svolta nell'autunno del 2022 e ha coinvolto dodici studenti di seconda superiore (14-15 anni), provenienti da istituti di tipo diverso (sia dal liceo che da istituti professionali). Tutti i partecipanti sono studenti con una storia di persistente fallimento in matematica riconosciuta da loro e dai loro insegnanti. Gli studenti, invitati dai propri docenti, hanno aderito come volontari, recandosi presso il centro di ricerca CARME (<https://www.carme.center/>) nel pomeriggio (al di fuori dell'orario scolastico). Ciascuno ha sostenuto un'intervista individuale iniziale e ha poi partecipato a cinque incontri di due ore, svolti, a seconda delle loro disponibilità, a coppie o individualmente (come nel caso di Dario). Sia le interviste sia la sequenza delle attività sono state condotte da ricercatori che gli studenti non avevano mai incontrato prima, in una stanza silenziosa con dispositivi di registrazione video e audio non invasivi.

Il processo di analisi dei dati raccolti è ancora in una fase preliminare e, fino ad ora, abbiamo affrontato solamente alcuni casi studio (circa il 25% dei partecipanti). Inizialmente il caso di Dario ha colpito la nostra attenzione per la sua partecipazione, durante l'intervista iniziale, caratterizzata da routine estremamente rituali e l'identità di fallimento chiaramente emergente. Inoltre, dalle prime analisi delle attività svolte da questo studente non sembravano emergere risultati particolarmente incoraggianti, tuttavia, la combinazione di tali analisi con l'individuazione del profilo di apprendimento matematico in entrata ci ha consentito di osservare interessanti aperture di Dario verso la partecipazione all'attività matematica. In particolare, abbiamo potuto osservare come il design delle attività abbia permesso a Dario di sfruttare i "punti di forza" individuati nel suo profilo, dandogli dunque la possibilità di avviare una diversa partecipazione al discorso matematico.

3.2 Intervista iniziale

L'intervista iniziale è stata costruita con l'obiettivo di ottenere informazioni sia sulle identità di prima persona degli studenti, sia sulla loro matematizzazione. Per questo motivo l'intervista è stata organizzata in due parti: la prima consisteva in quattro domande incentrate sul rapporto dello studente con la matematica, mentre la seconda prevedeva delle *task situation* inerenti all'ambito delle equazioni e delle funzioni. Durante questa intervista iniziale la ricercatrice leggeva ad alta voce le consegne, mostrandole contemporaneamente su uno schermo, stando in piedi dietro lo studente, rimanendo così fuori dal campo visivo dell'intervistato, per cercare di ridurre la sua influenza sull'interpretazione delle *task situation*. Per lo stesso motivo non ha fornito riscontro sulla correttezza o meno delle procedure attuate.

3.3 Progettazione delle attività

Le attività sono state progettate con l'obiettivo di promuovere il pensiero algebrico, con particolare focus sul tema delle equazioni e sugli aspetti che ad esse si legano, quali l'idea di incognita, di variabile, del segno uguale, di soluzione di un'equazione e del primo principio di equivalenza per le equazioni. Abbiamo progettato degli artefatti dinamici e interattivi all'interno della piattaforma online Desmos, elaborandoli a partire dal modello bilancia, una metafora già utilizzata in letteratura per parlare di equazioni lineari, che consente di trattare quantità note e non note, relazioni tra esse (maggiore, minore, uguale) e il segno uguale come relazione tra quantità e non come operatore (Otten et al., 2019). Il nostro obiettivo è promuovere la nascita e l'espansione di un discorso legato all'ambiente bilancia che possa essere un punto di partenza per un discorso algebrico.

Il lavoro di design ha portato all'elaborazione di due diverse tipologie di artefatto-bilancia. Il primo

coinvolge una bilancia a due piatti e un riquadro blu dove gli studenti hanno a loro disposizione pesi di forme e colori diversi, alcuni dei quali con valore noto, corrispondente al numero inserito all'interno, altri con valore non noto (Figura 1). La bilancia in questione assume o meno una posizione di equilibrio in relazione agli oggetti che vengono posti sui due piatti. L'utilizzatore ha la possibilità di agire trascinando gli oggetti sulla bilancia o al di fuori di essa, ricevendo un feedback immediato in risposta alla sua azione. Ad esempio, in Figura 1 possiamo vedere sulla sinistra una bilancia in equilibrio e sulla destra una bilancia non in equilibrio a seguito del sollevamento di un peso dal piatto di sinistra. Da esperti vediamo questa bilancia come realizzazione della relazione di uguaglianza o disuguaglianza tra somme di valori noti ed eventualmente non noti. Inoltre, il peso di valore non noto, è una realizzazione dell'oggetto matematico incognita, dove con incognita intendiamo un valore specifico e non noto che rende uguali due espressioni algebriche.

Le *task situation* proposte in relazione a questo artefatto sono state formulate come segue:

La bilancia che vedi è in equilibrio. Se possibile, aggiungi/togli 3 oggetti tra quelli a disposizione in modo che alla fine sia ancora in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.

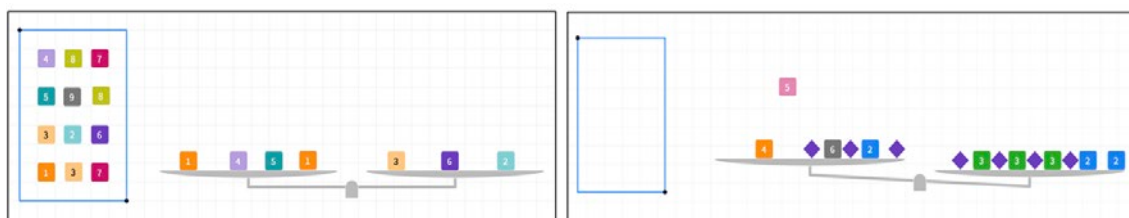


Figura 1. Il primo artefatto-bilancia.

La ricercatrice, durante l'attività, è intervenuta per chiedere di motivare le proprie scelte e azioni, e anche per modificare la *task situation* (p.e. variando il numero di oggetti da aggiungere/togliere, chiedendo di scoprire il valore del peso non noto quando presente). Queste *task situation* sono state progettate con l'obiettivo di promuovere la nascita di narrazioni significative sull'artefatto bilancia, che possono poi essere messe in relazione con le procedure risolutive delle equazioni (in particolare con il primo principio di equivalenza per le equazioni).

Il secondo artefatto (Figura 2) è costituito da due bilance affiancate. A destra è presente quella che abbiamo chiamato "bilancia-test", una bilancia bloccata con un lucchetto, sulle cui braccia si trovano dei pesi noti colorati e dei pesi non noti, di colore bianco. La bilancia-test è corredata da un campo di inserimento, in questo caso denominato "peso del quadrato", dove l'utilizzatore può inserire il valore numerico che vuole assegnare al peso non noto (in questo caso il quadrato). Con il pulsante "Proviamo/Riproviamo" la bilancia-test si muove pendendo a destra o a sinistra, oppure assumendo la posizione di equilibrio, in base al peso assegnato dall'utilizzatore ed al posto del lucchetto compare una X rossa (disequilibrio) oppure una spunta verde (equilibrio). A sinistra è presente quella che abbiamo chiamato "bilancia fissa": l'immagine di una bilancia in equilibrio, con gli stessi pesi di quella di destra, ed i cui pesi non noti sono colorati. L'utilizzatore può interagire con questa bilancia fissa scrivendo sopra l'immagine. La *task situation* è riportata in alto a sinistra e corrisponde alla richiesta di trovare il valore del peso non noto che consente alla bilancia di stare in equilibrio.

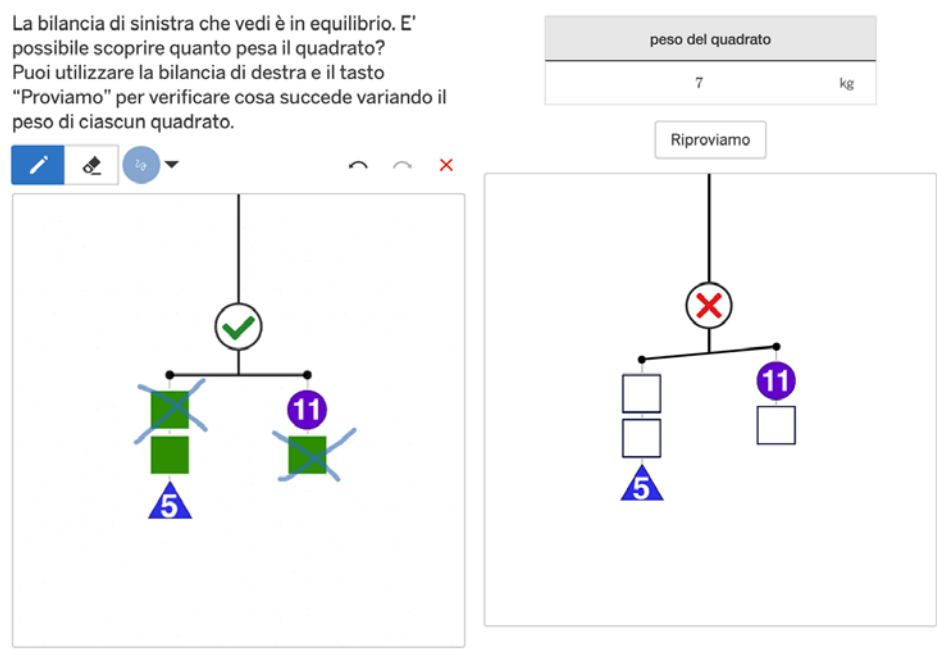


Figura 2. Il secondo artefatto-bilancia.

L'accostamento di queste due bilance permette di coinvolgere simultaneamente realizzazioni di oggetti matematici diversi. Nello specifico, la bilancia di sinistra identifica la condizione di uguaglianza tra due espressioni algebriche e, quindi, per l'esperto può essere la realizzazione di un'equazione, dove il peso non noto è una possibile realizzazione di incognita, avendo un valore specifico ma appunto non noto. Nella bilancia di destra, invece, il peso non noto è una possibile realizzazione di variabile (assume un valore che cambia a seconda delle scelte dell'utilizzatore); in questo modo, la bilancia e la sua posizione realizzano la relazione tra le due espressioni algebriche in funzione del valore scelto.

3.4 Schema analitico

Di seguito riportiamo lo schema analitico che è stato elaborato in accordo con i costrutti presentati nel quadro teorico. Esso è stato sviluppato a partire da alcune domande guida in relazione agli aspetti che ci interessava analizzare, per ognuno dei quali abbiamo individuato anche dei possibili indicatori.

Aspetti da analizzare	Domande guida	Indicatori
Tipo di identità sviluppata (di successo o di fallimento)	Quali espressioni di individuazione sono utilizzate nell'intervista iniziale? E durante lo svolgimento delle attività?	Espressioni di terzo livello di soggettivazione. Espressioni di secondo livello di soggettivazione seguite da avverbi come "sempre" e "mai". Espressioni di primo livello e secondo livello di soggettivazione molto ricorrenti. Uso di tempi presenti.

Aspetti da analizzare	Domande guida	Indicatori
Oggetti matematici	Il discorso è incentrato su oggetti e loro proprietà o su simboli non realizzati e azioni su essi? Sono emerse realizzazioni dello stesso significante? Ci sono transizioni tra diverse realizzazioni?	Significanti menzionati: riguardo il risultato di una routine o riguardo step procedurali memorizzati. Realizzazioni diverse di uno stesso significante e transizioni tra realizzazioni.
Task interpretata (dallo studente)	La procedura implementata a quale <i>task situation</i> potrebbe rispondere (secondo l'esperto)?	Riformulazioni esplicite della <i>task situation</i>. Riferimento a procedure memorizzate.
Processi di de-ritualizzazione	Quali caratteristiche ha la routine eseguita? È esclusivamente manipolativa e fine a sé stessa oppure è orientata alla costruzione di una narrazione?	Sono utilizzate procedure diverse per affrontare la stessa <i>task situation</i> (flessibilità). La procedura svolta per una specifica <i>task situation</i> è utilizzabile in un'altra <i>task situation</i> (applicabilità). Alla fine della procedura il prodotto è utilizzato per tornare alla <i>task situation</i>; c'è un passaggio di attenzione dal processo al prodotto ottenuto (sostanzialità).
Autonomia	Sono prese delle decisioni indipendenti? Quali?	Proposte (anche nuove) per la risoluzione. Riferimenti alla memoria o a procedure memorizzate in precedenza. Tentativi di costruire narrazioni e non solo di ripetere procedure memorizzate. Come sono raccontate le procedure (in prima persona o in terza, prevalgono verbi passivi, utilizzo del verbo "dovere" o del verbo "potere").
Meta-regole	Cosa può essere formulato/fatto in un particolare dominio matematico? Quali meta-regole descrittive sono esplicitamente formulate dallo studente? Quali possono essere inferite dal suo discorso?	Forme impersonali e in terza persona (ad esempio, "in matematica si usa la calcolatrice"). Pattern discorsivi ricorrenti messi in atto dallo studente.

Tabella 1. Schema analitico.

4 Analisi del profilo in ingresso

Dario (D.) durante l'intervista iniziale costruisce un'identità di fallimento, come emerge dal seguente estratto (l. indica l'intervistatrice):⁴

1. l.: «C'è una cosa che ti piace della matematica?»
2. D.: «[sospira] Mmm la matematica fino alle elementari mi garbava, più che altro per i calcoli. Mmm insomma ero bravo, poi vabbè negli anni poi è diventato [sorride] un problema e tutto... [...] Fino alle elementari mi garbava però, cioè cercavo di farne anche a meno sinceramente. Quel poco che sapevo mi bastava, ecco».
3. l.: «C'è invece una cosa che proprio non ti piace?»
4. D.: «La geometria [...] La geometria in generale, anche le formule, tutte quelle robe là... mi sembrano complicate sinceramente per come sono io».
5. l.: «Ti senti bravo in matematica?»
6. D.: «No, no, no. Ora come ora no. [...] Sono una frana in matematica».

L'identità di fallimento è costruita attraverso un'individuazione diretta (interventi 2 e 4, ma anche 6). Nell'intervento 4 vi è anche una soggettivazione di terzo livello, riconoscibile dall'uso del verbo essere: Dario sembra riconoscere un'incompatibilità tra ciò che secondo lui caratterizza una parte della matematica (ossia le formule) e la sua persona («mi sembrano complicate per come sono io»). Vi è però un'eccezione, un dominio in cui Dario si riconosce competente, che è quello relativo al calcolo (intervento 2: «ero bravo»).

Più avanti l'identità di fallimento è confermata anche dall'individuazione indiretta, che si sviluppa mentre Dario affronta le *task situation* proposte. Nell'estratto seguente, mentre risolve la *task situation* relativa alla risoluzione di $13 - a = 13 + 11$, troviamo infatti una soggettivazione ricorrente di primo livello (sottolineato nell'estratto successivo):

7. l.: «Hai mai visto scritto così?» [l'intervistatrice mostra l'equazione $13 - a = 13 + 11$]
8. D.: «Mmm vabbè una somma ed una sottrazione, quindi mmm a penso che sia il risul[tato], cioè...non lo so. Penso che sia il risultato, penso. Quindi boh... Cioè devo calcolarlo, o ...? [...] Vista così mi verrebbe in mente di fare 13 a uguale 13 più 11, però... [ride imbarazzato]. 13 più 11 mi sembra fa lo stesso 24, 13 meno a mmm... non lo so, forse spostato il risultato dall'altra parte con la a [...] Si boh, penso insomma... eh...eeeh... Non sto ragionando, ma sto cercando insomma di pensare ad... un metodo del tipo, boh insomma se spostato lo stesso la a di là, 13 più 11 fa 24, meno 13... no non mi tornerebbe. Mmm, boh non lo so».
9. l.: «La domanda è se 13 meno a uguale 13 più 11, ha delle soluzioni. Se ci sono se sai trovarle, o eventualmente spiegare perché secondo te non ci possono essere».
10. D.: «[ride] Mmm... Un calcolo del genere, boh, cioè... non penso proprio niente [ride]. È quello il problema... eh... di sicuro 13 meno a, cioè non saprei come spiegarlo, cioè... o è un monomio, quindi si fa 13 a, però... 13 più 11 mmm... cioè 13 meno a è uguale a 13 più 11. Bisogna scoprire che cosa è a. [...] Eh secondo me la a è il risultato di 13 più 11, secondo me è... quindi... penso, poi...»
11. l.: «Ok, quindi ti verrebbe da dire che questa cosa ha delle soluzioni?»
12. D.: «Cioè... mmm... eh si, penso che sia... vabbè, a parte 13 più 11 che fa 24... secon-

4. L'intervistatrice è la ricercatrice E. Macchioni.

do me andrebbe fatto, cioè... [...] Sto pensando ad un calcolo [...] Eh non mi viene in mente nessun calcolo... eh... mm... che faccio 24 eh... secondo me, 24 più 13... però, cioè 24 più 13 che fa 37, quindi se si fa 13 meno 37 dà 24. Penso è... [...] lo penso che andrebbe fatto così, poi non lo so. Posso sapere se ho fatto bene, o no?»

In questo estratto l'individuazione si intreccia fortemente con la matematizzazione, ed il continuo riferimento ad un «calcolo» (interventi 8 e 10, ma anche 12) nel discorso matematico può essere collegato con le meta-regole discorsive sviluppate da Dario. In particolare, possiamo inferire una meta-regola discorsiva sulla partecipazione al discorso matematico simile a *per partecipare al discorso matematico è necessario svolgere dei calcoli*. Le meta-regole sono sviluppate a partire dalle interazioni sociali e dalle esperienze passate, possiamo dunque ipotizzare anche che la persistenza di questa specifica meta-regola sia legata a quella che Dario riconosce come una (delle poche, se non uniche) esperienze di successo sperimentate in matematica. Abbiamo già infatti osservato come fin da subito il dominio del calcolo sembra sfuggire alla sua identità di fallimento (intervento 2), ma ne troviamo traccia anche in altri passaggi dell'intervista (come «Nella vita reale, cioè nella vita fuori della scuola, se devo fare i calcoli, del tipo sono al supermercato, compro qualcosa e devo fare il resto e tutto, riesco»). In altre parole, senza padroneggiare le routine legate alle equazioni – non solo il *come* ma anche il *quando* applicare queste routine (Sfard, 2009) –, Dario è costretto a provare ad impiegare al meglio le sole routine con cui sente di riuscire a costruire narrazioni significative, ovvero quelle legate al calcolo.

Non è immediato capire quale sia la task interpretata da Dario tuttavia, alcune descrizioni verbali come «bisogna scoprire cosa è *a*» e «la *a* è il risultato di 13 più 11» (intervento 10), ci portano ad inferire non solo che non sia coerente con la *task situation* proposta dell'esperto, ma anche che questa non coerenza sia dovuta ad una non attribuzione di valore relazionale al simbolo uguale. Nonostante la *task situation* sia in contesto algebrico, ogni riferimento nel discorso di Dario è legato esclusivamente al contesto aritmetico, facendoci ipotizzare che il delicato cambio di meta-regole previsto nel passaggio dall'aritmetica all'algebra non sia avvenuto.

Il discorso di Dario sembra inoltre essere puramente ritualistico, concentrato sulle procedure (in questo caso calcoli), senza riferirsi in alcun modo al prodotto che si desidera ottenere al termine della procedura. Gli oggetti del discorso sono principalmente numeri e lettere (intervento 10), ma non c'è alcun riferimento ad altre realizzazioni di questi oggetti (concreti) che rimangono dunque simboli non realizzati. Alcune esplicite dichiarazioni come «non sto ragionando, sto cercando di pensare ad un metodo» (intervento 8), o «non mi viene in mente» (intervento 12) ci portano ad ipotizzare che anche la memoria giochi un ruolo chiave nelle meta-regole discorsive sviluppate da Dario. Questo può essere messo in relazione con il fatto che molte routine (come quelle relative al calcolo letterale) non siano mai state de-ritualizzate, avendo infatti scarsa applicabilità. Per Dario, ogni *task situation* può essere vista come un caso isolato in cui è necessario ricordare come operare, e se questo non avviene non è possibile proseguire. Per esempio, nell'intervento 10 affermazioni quali «13 meno *a*, cioè non saprei come spiegarlo, cioè... o è un monomio, quindi si fa $13a$, però...» o anche «forse spostato il risultato dall'altra parte con la *a*» sembrano poter trovare riscontro solo in procedure memorizzate. Osserviamo inoltre che, poiché Dario interpreta la *task situation* come l'esecuzione di una sequenza memorizzata, non vi è spazio per prendere decisioni. La strada da intraprendere è, in larga misura, già stabilita («devo calcolarlo?»), e non vi è alcun tentativo di costruzione di narrazioni significative. Questa interpretazione trova conferma anche nel fatto che Dario non prova nemmeno a controllare l'adeguatezza della procedura (nuovamente l'attenzione è sul processo, non sul prodotto). Dario sembra dunque non avere strumenti per stabilire la validità delle sue affermazioni (indice di scarsa sostanzialità). Infatti, conclude la risoluzione della *task situation* con «posso sapere se ho fatto bene?» (intervento 12). Possiamo dunque inferire un'altra meta-regola discorsiva che guida la matematizzazione di Dario, simile a: *per partecipare al discorso matematico è necessario ricordare molte cose a memoria. Quando questo non accade non ci sono alternative per procedere*. Tale meta-regola trova riscontro anche in altri momenti

dell'intervista, in cui la procedura implementata viene interrotta: in una *task situation* successiva, nel calcolare cinque alla seconda Dario afferma «Di sicuro deve essere... no boh... eh... però non mi ricordo se era moltiplicato per 2, o per lo stesso numeratore... cioè non me le ricordo, aspetta... cioè se era 5 alla seconda era 5 per 5, o 5 per 2» o ancora nel calcolare tre per zero «Non... cioè... come ho detto, non so se.. o torna 0 per 3 uguale 3, però con lo zero non... ad esempio con il diviso appunto, se fosse 0 per 3 farebbe sempre 0. Perché non si potrebbe dividere mi ricordo. Però non mi ricordo se questa regola era anche con il per... mmm... ». Questi dubbi bloccano Dario che sembra incapace di procedere oltre, nonostante gli sia anche stata messa esplicitamente a disposizione una calcolatrice: l'unica possibilità sembra essere fermarsi e guardare l'intervistatrice, attendendo da lei una risposta. Avendo analizzato separatamente la matematizzazione e l'individuazione di Dario si possono mettere ulteriormente in luce alcuni elementi chiave che riguardano l'interazione di queste due dimensioni, mostrandone una visione più olistica (Figura 3). Il ciclo in grigio, sulla sinistra, rappresenta ciò che possiamo inferire sia accaduto in passato. Il ciclo in blu, più grande, rappresenta invece il profilo di apprendimento matematico di Dario alla luce dell'intervista iniziale.

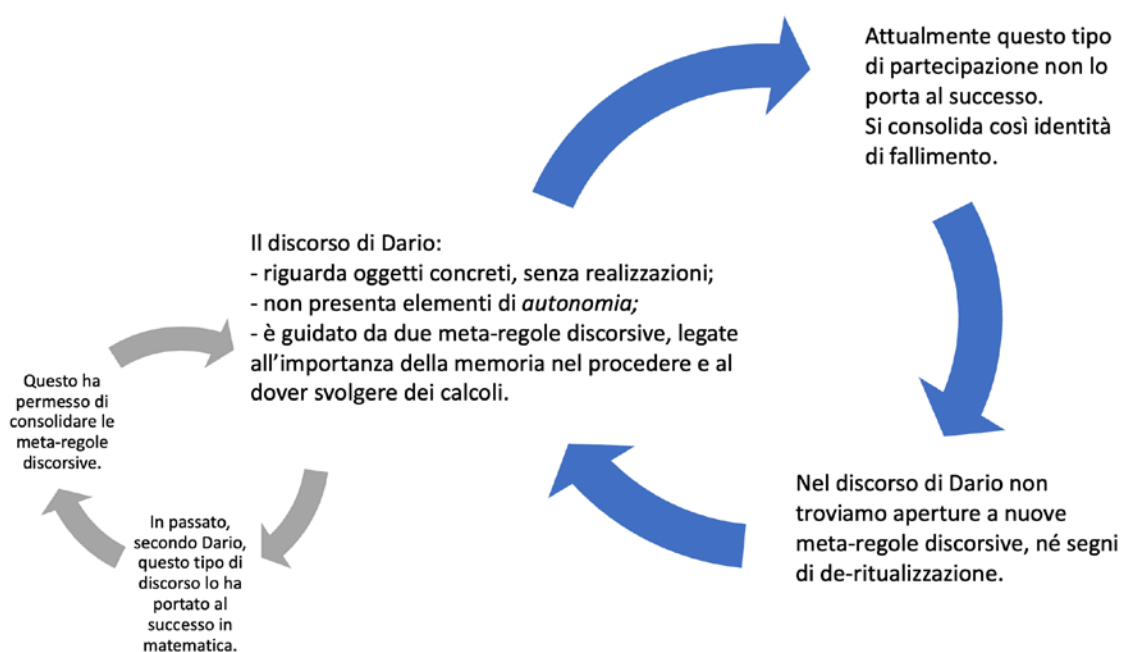


Figura 3. Profilo di apprendimento matematico di Dario.

Al cuore di questo doppio ciclo troviamo il discorso matematico di Dario, un discorso che riguarda oggetti concreti, senza realizzazioni, caratterizzato da routine estremamente rituali. Tale discorso è guidato da (almeno) due meta-regole discorsive riguardanti il ruolo centrale rivestito dal calcolo e dalla memoria. In relazione a ciò osserviamo nel discorso di Dario una scarsa autonomia: non vi è spazio per prendere decisioni su come procedere, tutto è demandato alla memoria.

Dalle parole di Dario possiamo inferire che almeno una delle due meta-regole discorsive (ci riferiamo in dettaglio a quella relativa al calcolo) sia stata sviluppata e consolidata già durante i primi anni di scuola, anni in cui Dario racconta di aver avuto esperienze di successo. Attualmente però questo tipo di discorso non lo porta al successo in matematica, anzi, e questi risultati consolidano la sua identità di fallimento. Dario dichiara di essere «una frana» e che parte della matematica è troppo complicata «per come sono io», e queste affermazioni sembrano risuonare come una dichiarazione di resa, un desistere da ogni tentativo. Nel suo discorso non troviamo dunque nessuna apertura a nuove meta-regole, né elementi di de-ritualizzazione, che potrebbero invece (a nostro avviso) portarlo a speri-

mentare nuovamente esperienze di successo.

Alla luce delle analisi svolte è possibile rispondere alla prima domanda di ricerca. Possiamo affermare che Dario ha sviluppato un'identità di fallimento in matematica. Inoltre, il suo discorso è caratterizzato dalla manipolazione di *simboli irrealizzati*, non ci sono riferimenti a realizzazioni degli oggetti manipolati, né a transizioni tra realizzazioni. Le analisi hanno inoltre mostrato come la matematizzazione di Dario sia guidata dalle seguenti meta-regole discorsive:

- per partecipare al discorso matematico è necessario svolgere dei calcoli;
- per partecipare al discorso matematico è necessario ricordare molte cose a memoria: quando questo non accade non ci sono alternative per procedere.

5 Analisi degli estratti delle attività

All'inizio del percorso Dario lavora con le bilance a due piatti. Le prime attività riguardano bilance con soli pesi noti e le richieste che gli vengono fatte consistono nell'aggiungere o togliere un numero specifico di oggetti dai piatti in modo che la bilancia si mantenga in equilibrio. In queste prime *task situation*, in cui il calcolo numerico gioca un ruolo rilevante, Dario agisce in maniera autonoma, accompagnando le procedure attuate con una narrazione volta a giustificare le sue azioni («Perché appunto qui mi sembra che era il 7, quindi ho fatto togli il 7, 5 e 2 fa 7 e li ho tolti tutti e due appunto ed era in equilibrio, togliendo tre numeri, tre oggetti»). Si osserva come, il dover svolgere dei calcoli non blocchi Dario, come è accaduto invece per altri studenti che hanno partecipato alla sperimentazione, bensì sembra coinvolgerlo e stimolarlo. Sembrano dunque essere stati raggiunti gli obiettivi di queste prime attività, ovvero prendere familiarità con l'ambiente digitale e costruire routine costituite dalla *task situation*:

Aggiungi/togli degli oggetti in modo che la bilancia sia ancora in equilibrio

e dalla procedura aggiungere/togliere lo stesso peso a destra e a sinistra, anche sommando più pesi, per mantenere la bilancia in equilibrio.

Quando Dario si trova di fronte alla prima bilancia con pesi non noti (Figura 4) il suo discorso cambia.

La bilancia che vedi è in equilibrio. Se possibile, aggiungi 3 oggetti tra quelli a disposizione in modo che alla fine sia ancora in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.

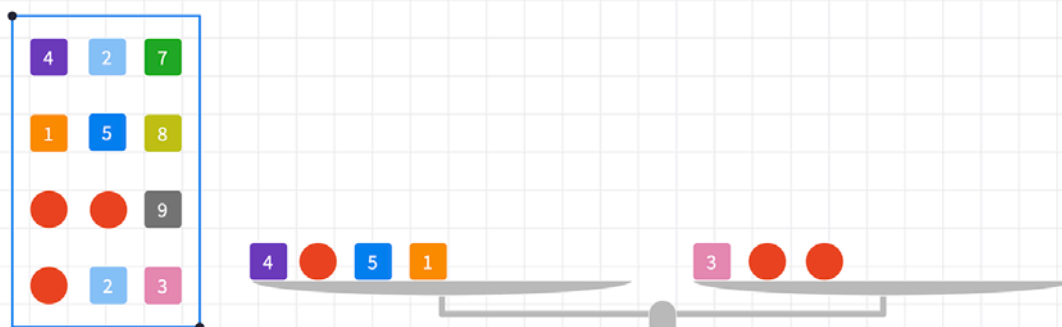


Figura 4. Prima *task situation* con pesi non noti.

13. D.: «Allora... mmm... aggiungi tre oggetti. A parte che andrebbe capito le palline che peso hanno».
14. T.: «Ok. Quindi vorresti sapere che peso hanno queste palline rosse?»
15. D.: «Sì allora... [...] c'è non lo so, provare a capire perché qui c'è un 3 e due palline, cioè soprattutto capire cosa fanno queste due palline».

Come si nota dall'estratto (in cui T. indica la tutor),⁵ subito dopo aver letto la richiesta (aggiungere 3 oggetti tra quelli a disposizione in modo che la bilancia alla fine sia in equilibrio), Dario afferma «Andrebbe capito le palline che peso hanno» (intervento 13, ma anche 15). In questo caso la task interpretata da Dario è costituita da due parti, dove la prima è funzionale alla seconda: inizialmente scoprire il valore dei pesi non noti e solo in un secondo momento aggiungere gli oggetti (come richiesto dalla *task situation*). Dopo qualche minuto in cui Dario rimane in silenzio senza compiere azioni, la tutor cerca di ritornare alla richiesta iniziale. A questo punto, anche se Dario è ancora concentrato sulla necessità di scoprire il peso della pallina rossa, aggiunge degli oggetti utilizzando la strategia già messa in atto precedentemente e risponde dunque alla richiesta. Dopo che Dario ha esplorato diverse procedure per rispondere alla *task situation*, la tutor ritorna sull'esigenza dello studente di scoprire il valore del peso non noto. Alla richiesta di una possibile strategia per determinare tale peso, Dario decide di provare a sostituire dei valori numerici (prima dieci nell'intervento 16, poi sei nell'intervento 21).

16. D.: «Boh io ho provato a fare, che ne so, forse è 10, 10, che ne so, una pallina vale 10... [...] 10 e 10, 23... 10, 15, 20...»
17. T.: «Ok, quindi assegnando valore 20, 10 scusami, al peso della pallina rossa, cosa succederebbe?»
18. D.: «Cioè non tornerebbe in equilibrio».
19. T.: «Ok».
20. D.: «Perché da una parte farebbe 20 e dall'altra 23».
- [...]
21. D.: «Oppure provando a fare 6 e 6, 12 più 3, 15 però pur sempre non tornerebbe perché qui farebbe 16, cioè...»

Pur riflettendo sulla relazione tra i due piatti (per esempio negli interventi 18 e 21), Dario non procede con ulteriori tentativi, tenendo in considerazione quelli già fatti, che potrebbero portarlo alla soluzione del suo problema.

Nell'estratto successivo, poco dopo quello appena presentato, Dario si trova di fronte alla *task situation* in Figura 5.

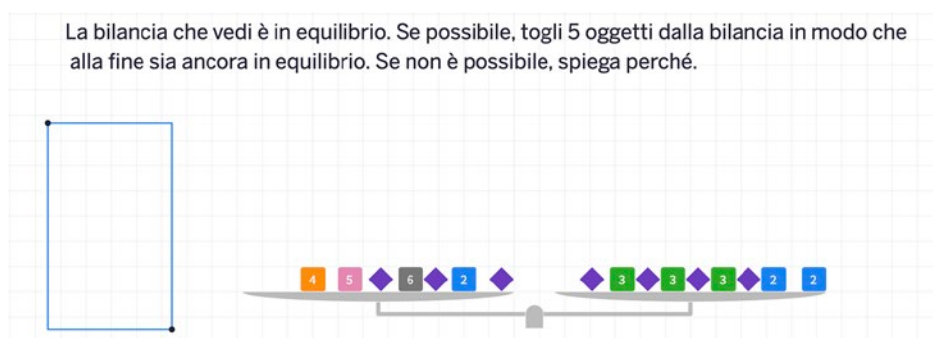


Figura 5. Seconda *task situation* con pesi non noti.

5. Indichiamo con tutor la persona che ha condotto i cinque incontri. La tutor è la ricercatrice C. Bonadiman. Come già specificato, l'intervistatrice cerca di interferire il meno possibile con la matematizzazione dello studente. La tutor invece prende parte al discorso matematico.

Lo studente soddisfa la richiesta proponendo diverse combinazioni di pesi. Tornando a riflettere sugli oggetti di peso non noto, Dario inizialmente dice che non riesce a scoprirne il valore, poi afferma «Boh proverei a fare... questa cosa qui» (intervento 22) e inizia a sollevare tutti i pesi dai piatti. A questo punto procede “pesando” il peso non noto: posiziona il quadrato viola sul piatto di sinistra e aggiunge o toglie pesi nel piatto di destra.

22. D.: «Boh proverei a fare... Questa cosa qui» [toglie tutti i pesi da entrambi i piatti].
23. T.: «Quindi stai togliendo tutto...»
24. D.: «Cioè allora proverei a, per capire [posiziona il peso non noto sul piatto di sinistra] va be insomma questo è normale, che la parte sinistra sia più bassa, provo a mettere il 3...» [posiziona un peso di valore 3 nel piatto di destra].
25. T.: «E che succede?»
26. D.: «Che è maggiore di 3... Rispetto al lato destro. Proviamo a metterci un altro 3 [aggiunge un altro peso di valore 3 nel piatto di destra]... ed è maggiore anche di 6... [...] Col 2... anzi no aspetta proviamo col 3 [aggiunge un altro peso di valore 3 nel piatto di destra]... è anche maggiore di 9... [aggiunge un peso di valore 2 nel piatto di destra] Eh! [esclama]».
27. T.: «Che è successo?»
28. D.: «Che... che la somma di 3, 6, 9... c'è 3, 3 e 3 e 2 che fa 11 è, cioè 11 uguale a rombo che è insomma...»
29. T.: «Ok, cioè quindi, perché dici che è uguale?»
30. D.: «Perché appunto è in equilibrio, la bilancia, soltanto con nel lato sinistro la forma viola e nel lato destro invece undici pesi».
31. T.: «Ok».
32. D.: «Cioè 11... quattro oggetti che formano 11».

In questo estratto la task interpretata da Dario è, come nel caso precedente, scoprire il valore del peso dell'oggetto viola. Diversamente da prima però trova dei modi per agire. Usa il verbo “provare” in diverse occasioni (interventi 22, 24, 26) mostrando autonomia nel risolvere la *task situation*.

La procedura messa in atto coinvolge aspetti numerici, questo sembra dargli fiducia, ed infatti procede in modo autonomo senza cercare alcuna conferma da parte della tutor.

A questo punto Dario torna all'attività precedente (Figura 4), e svuota la bilancia lasciando il peso non noto sul piatto di destra.

33. T.: «Ok allora vediamo... che cosa succede? Che mi dici?»
34. D.: «Che vabbè allora [posiziona un peso di valore 4 sul piatto di sinistra], la pallina rossa è maggiore di 4... oppure proviamo a fare 6 [toglie il peso di valore 4 e posiziona un peso di valore 5 e un peso di valore 1 sul piatto di sinistra], è maggiore di 6».
35. T.: «Ok».
36. D.: [aggiunge un peso di valore 3 sul piatto di sinistra] «Però minore di 9... Andiamo a rubare di qua un numero...» [toglie il peso di valore 3 e aggiunge un peso di valore 2 sul piatto di sinistra]. [...]
37. D.: «5, 1, 6 e 2, 8 e si può notare che 8 è maggiore della pallina rossa, quindi secondo me il numero è 7 [toglie il peso di valore 2 e aggiunge un peso di valore 1 sul piatto di sinistra]... il numero è 7 appunto, quindi una pallina è 7».

Nell'estratto, Dario prende decisioni indipendenti su come procedere e le accompagna con una narrazione significativa sui numeri. Questo continuo monitorare il prodotto della procedura in relazione alla *task situation* è indice di sostanzialità.

Successivamente, Dario affronta l'attività riportata in Figura 6, in cui per rispondere alla *task situation* è necessario sollevare anche oggetti non noti.

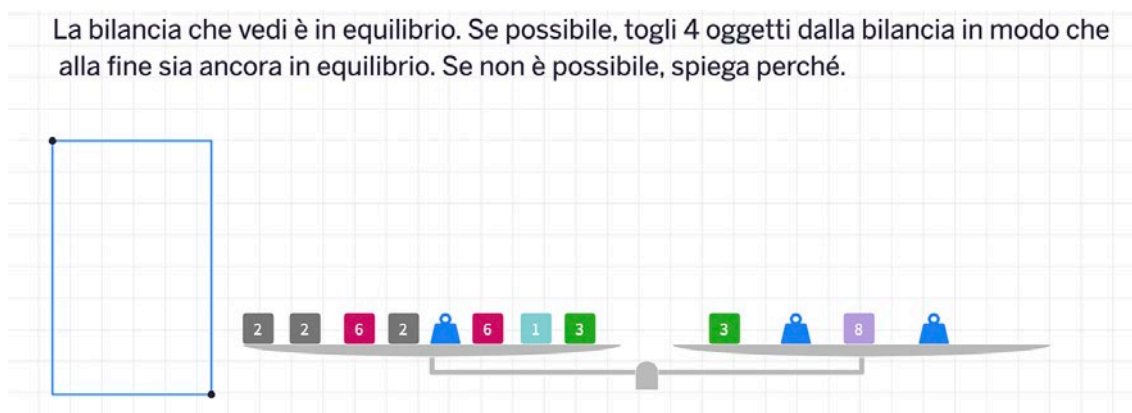


Figura 6. Task situation in cui Dario è costretto a interagire con i pesi non noti.

Dopo un primo momento in cui la richiesta sembra metterlo in difficoltà, procede come segue:

38. D.: «Oppure si aspetta... Potrei provare a fare una cosa».
39. T.: «Cosa faresti?»
40. D.: «Togliere questo... cioè insomma la forma blu di qua e di qua [solleva un peso non noto da entrambi i piatti], tornerebbe uguale, poi toglierei sia il 3 di qua che il 3 di qua [solleva un peso di valore 3 da entrambi i piatti], pur sempre ho tolto quattro oggetti togliendo lo stesso, le stesse forme, gli stessi...»
41. T.: «Ok, perché la richiesta era togli quattro oggetti... quindi tu ne hai sollevati effettivamente quattro, ok e perché funziona?»
42. D.: «Perché pur sempre la forma blu è uguale all'altra forma blu e il 3 è uguale, c'è il peso 3 è uguale al peso 3».

Questa *task situation* forza Dario a interagire con i pesi non noti: mentre nelle *task situation* precedenti i pesi non noti non venivano spostati, in questo caso è necessario farlo per soddisfare la richiesta. Dario sembra dunque aver introdotto una nuova routine nel suo discorso e dall'intervento 42 possiamo notare che la accompagna con una narrazione significativa. Inoltre, questa nuova routine viene subito reinvestita per scoprire il valore del peso non noto (mostrando flessibilità):

43. T.: «Sappiamo quanto vale il peso blu?»
44. D.: «No però si potrebbe capire adesso dal fatto che qui c'è un 8 e qui c'è un peso blu, quindi qua c'è 2, 4, 6, anzi, no, facciamo 6 e 2 e quindi questi due [...] E quindi fa 8, è come se tornasse questo... invece 6 e 1, 7, 9 e 11 e il peso tornerebbe 11».

Il discorso di Dario, combinando le parole con le azioni che compie sulla bilancia ci permette di osservare un cambio di routine spontaneo che lo avvicina alla routine che un esperto attua nel risolvere un'equazione.

Successivamente Dario affronta la prima *task situation* con il secondo artefatto-bilancia, in Figura 7.

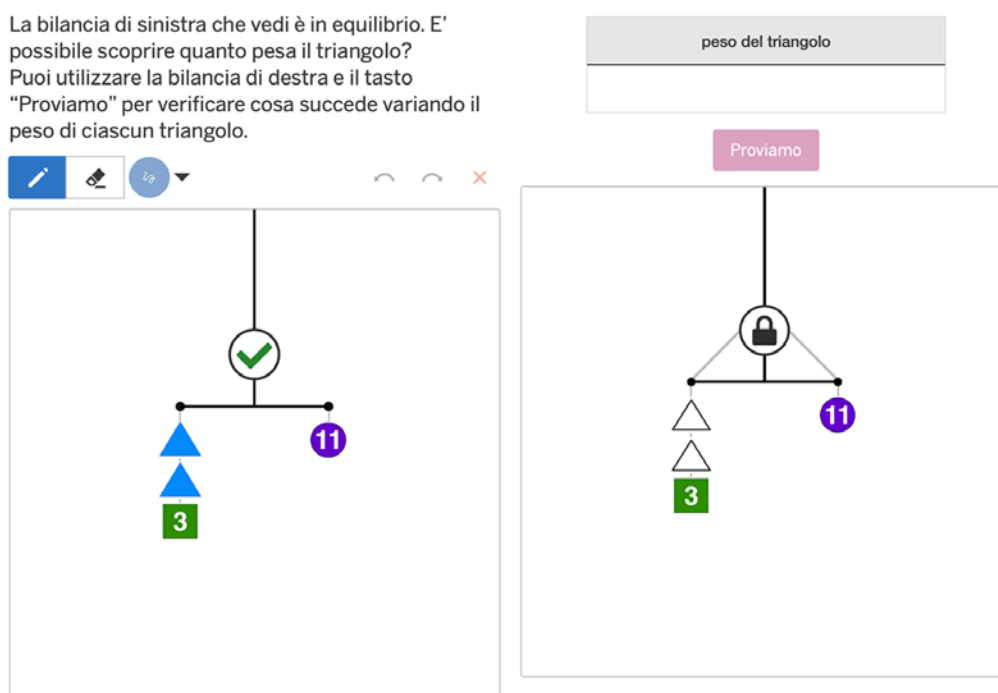


Figura 7. Prima *task situation* con il secondo artefatto-bilancia.

45. D.: «Quindi mi sarei già fatto un'idea».
46. T.: «Ok, che idea ti sei fatto?»
47. D.: «E allora posso dire che ho provato a fare $11 - 3$, i due numeri che si vedono. E, appunto, fa 8. E appunto che sono due triangoli. eh.. diviso, 4 e 4. 4 e 4, 8, +3, 11 e 11 dall'altra parte appunto è equilibrio, è in equilibrio».
48. T.: «OK, perfetto. Quindi hai fatto 11 meno 3».
49. D.: «Sì».
50. T.: «Come mai?».
51. D.: «Eh, perché appunto secondo me essendo che sono gli unici due numeri è come fare, non lo so, proprio per dire, $x + x + 3$ uguale 11».

In questo primo scambio, Dario racconta quanto ha «provato a fare» che lo ha effettivamente portato alla soluzione corretta per la *task situation*. Quando arriva a dire che i due triangoli hanno valore 4, fa una verifica arrivando a concludere che con tale valore la bilancia starebbe in equilibrio. Alla richiesta di motivare alcune scelte, Dario utilizza parole appartenenti al discorso algebrico, che nella sperimentazione non erano state introdotte, ma che evidentemente Dario ha utilizzato a scuola. Alla richiesta di ulteriori chiarimenti da parte della tutor prosegue:

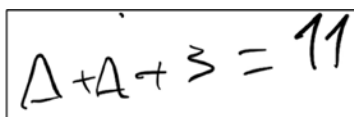
52. D.: «Vabbè, io pensavo che ne so... I triangoli, quindi, che ne so... x alla seconda più 3 è uguale, cioè x più x intendo... aspetta perché x alla seconda non mi ricordo se era x per x o x più x . Eh vabbè» [scrive come in Figura 8].

$$x^2 + 3 =$$

Figura 8. Mediatore visivo che Dario produce per supportare il suo discorso.

I mediatori visivi che introduce, così come le parole, appartengono al discorso algebrico anche se il suo uso del termine x^2 non è in linea con il discorso matematico dell'esperto. Dario, nell'introdurre questo mediatore, si blocca: non ricorda se x^2 «era x per x oppure x più x ». In questo estratto emerge nuovamente una delle meta-regole evidenziate nell'intervista iniziale: *la memoria sembra necessaria per poter partecipare al discorso*. Dario, in questo caso, si mostra in grado di trovare un'alternativa per procedere, mostrando quello che potremmo interpretare come un cambiamento della sua meta-regola legata alla memoria (intervento 53):

53. D.: «Cioè... Facciamo prima, a fare così, allora facciamo triangolo più triangolo più 3»
[scrive come in Figura 9].
54. T.: «Ok e qui stai scrivendo, cioè, rispetto alla tua bilancia?»
55. D.: «Che triangolo più triangolo più 3 è in equilibrio con 11, quindi è uguale a 11».
56. T.: «Ok».
57. D.: «Perciò ho pensato di fare... 11, ovvero i due numeri che si vedono, -3 uguale, si scopre cosa sono questi due triangoli».
[...]
58. D.: «A me mi torna 4».



A rectangular box containing the handwritten mathematical expression: $\Delta + \Delta + 3 = 11$. The symbols are drawn in a simple, hand-drawn style.

Figura 9. Mediatori visivi che Dario produce come supporto al suo discorso.

Inizialmente, Dario manipola simboli algebrici concreti, privi di realizzazioni; sceglie di tornare a mediatori visivi che per lui sono realizzazioni di componenti dell'artefatto-bilancia. Probabilmente questi per Dario non sono ancora realizzazioni dell'oggetto matematico incognita, ma possono diventarlo. Egli, dunque, produce una narrazione significativa e mostra di mettere in relazione l'equilibrio della bilancia con l'uguaglianza tra due espressioni in cui compaiono termini non noti (intervento 55), utilizzando anche un mediatore visivo (Figura 9) come supporto alla sua narrazione. Prosegue mettendo in atto una procedura che riconosciamo coerente con la procedura risolutiva per le equazioni lineari e conclude «A me mi torna 4». La narrazione prodotta mette in relazione la procedura con il prodotto, indicando ancora una volta sostanzialità (intervento 57).

L'analisi proposta ci permette di rispondere alla seconda domanda di ricerca. Infatti, dall'analisi degli estratti sembra emergere una nuova partecipazione al discorso matematico da parte di Dario. Il discorso matematico è caratterizzato da oggetti che non sono puramente concreti e su cui Dario compie delle manipolazioni accompagnate da narrazioni significative. Nelle routine che lo studente produce abbiamo individuato diversi episodi in cui emergono le caratteristiche del processo di de-ritualizzazione quali flessibilità, autonomia del solutore e sostanzialità, tutte istanze di attribuzione di senso. Dario quindi sembra aperto, almeno nel contesto delle nostre *task situation*, alla possibilità di cambiare la sua matematizzazione. Inoltre, possiamo notare nell'estratto (intervento 45), un episodio in cui Dario si mostra sicuro di poter rispondere al quesito; durante l'intervento vi sono anche altre istanze di soggettivazione di questo tipo, che seppur non siano abbastanza ricorrenti da poter essere considerate come istanze di individuazione, mostrano possibili aperture al cambiamento anche in questa direzione. Tutto ciò concorre all'apertura verso un cambio delle meta-regole che Dario potrebbe avere; in particolare, i diversi episodi in cui prende decisioni coerenti con la *task situation* e non deve ricorrere alla memoria potrebbero essere il punto di partenza per passare dalla meta-regola *per partecipare al discorso matematico è necessario ricordare molte cose a memoria: quando questo*

non accade non ci sono alternative per procedere a una nuova meta-regola in cui il soggetto non ha bisogno di ricordare a memoria ma può egli stesso agire e costruire narrazioni significative.

6 Discussione e conclusioni

L'analisi dell'intervista iniziale di Dario rivela un profilo matematico di apprendimento fortemente caratterizzato da un'identità di fallimento. La matematizzazione di Dario è guidata da due principali meta-regole discorsive: da un lato l'esigenza di "fare dei conti", dall'altro la necessità di ricordare a memoria regole e procedure. Questa centralità della memoria pare inibire l'autonomia dello studente, che non sembra produrre narrazioni significative. Abbiamo messo in luce dei cambiamenti in questo profilo, osservati mentre Dario affronta le *task situation* all'interno degli ambienti digitali. Anche se inizialmente incontra delle difficoltà, vi sono numerose istanze di autonomia (Dario propone nuovi modi per procedere) ed assistiamo anche alla costruzione di narrazioni significative, grazie alle quali il prodotto del processo è messo in relazione con la task (*situation* o interpretata). Questo, in particolare, è un risultato che sembra aprire le porte a nuove ricerche. Infatti, l'interazione con l'ambiente digitale appropriatamente progettato, ha fornito a Dario mediatori visivi grazie ai quali ha potuto mettere in atto routine in cui rintracciamo elementi di de-ritualizzazione. Alla luce di ciò possiamo dunque avanzare l'ipotesi, in linea con altri studi in ambito comognitivo (Baccaglini-Frank, 2021; Cooper & Lavie, 2021) che studenti con difficoltà possano sviluppare un discorso matematico che sia fin da subito caratterizzato da routine esplorative.

L'analisi degli estratti proposti sembra dunque mostrare un'apertura di Dario alla possibilità di abbracciare una nuova e diversa partecipazione al discorso matematico caratterizzata da istanze di de-ritualizzazione, con un particolare focus sull'autonomia. Mettere in luce come il profilo di apprendimento di uno studente possa cambiare, anche in un periodo di tempo relativamente piccolo (come durante le nostre attività), contribuisce a evitare un discorso sui deficit (parlare cioè di ciò che uno studente non sa fare, o non è). Ci consente inoltre di aprire nuove direzioni rispetto alla personalizzazione delle attività (Baccaglini-Frank & Di Martino, 2021; Xin et al., 2022).

Seppur le aperture ai cambiamenti che la nostra analisi ha evidenziato siano particolarmente significative, viste le difficoltà dello studente, certamente occorre sottolineare che per quanto riguarda l'identità dello studente si tratta di piccoli cambiamenti. Questo non deve sorprendere: il percorso è stato relativamente breve mentre l'identità di fallimento descritta è invece stata costruita (e co-costruita) in molti anni di (non) partecipazione al discorso matematico. Per questo motivo, in questo specifico contesto, le sole istanze di soggettivazione "positiva" osservate, in cui lo studente risponde con tono sicuro, producendo narrazioni coerenti con il discorso dell'esperto, ci sembrano un'apertura importante a futuri e più consistenti cambiamenti.

Siamo consapevoli che quanto qui mostrato sia solo un primo passo: il discorso di Dario ha effettivamente mostrato aperture verso il discorso algebrico, ma, durante l'intero percorso di 10 ore, è rimasto fortemente legato agli artefatti digitali con cui ha interagito. Ulteriori ricerche sono quindi necessarie per comprendere come queste prime aperture possano essere ulteriormente reinvestite per la costruzione di un discorso matematico non legato al contesto specifico dell'artefatto.

Quella presentata è inoltre una ricerca di base, svolta in un contesto particolare e diverso rispetto a quello scolastico, risulterà dunque necessario approfondire e delineare l'azione didattica in riferimento a questi primi risultati. Riteniamo tuttavia che il caso di Dario metta in luce alcuni aspetti che possono essere ritenuti interessanti anche dal punto di vista della pratica didattica. Infatti, le attività con gli ambienti digitali sono risultate essenziali nel fornire a Dario strumenti con i quali supportare

la costruzione di narrazioni significative, come mostrato nell'episodio riguardante l'artefatto-bilancia in **Figura 7**. Questo può dare indicazioni in merito alla necessità, soprattutto di studenti con difficoltà, di trovare dei protagonisti delle proprie narrazioni che, almeno inizialmente, possano essere legati ad ambienti digitali.

A conclusione di questo studio, una domanda sorge spontanea: quale caratteristica del percorso ha permesso le aperture al cambiamento descritte sia in termini di matematizzazione, sia di individuazione. Abbiamo un'ipotesi di lavoro, che trova risposta nella relazione tra il tipo di attività proposto ed il profilo di apprendimento iniziale. Crediamo infatti che il design delle attività abbia permesso a Dario di partecipare al discorso sfruttando nuovamente con successo le routine legate al calcolo; è proprio il poter risolvere le prime *task situation* reinvestendo queste routine che sembra dargli fiducia, e renderlo progressivamente disponibile a costruirne di nuove. Come già accennato questa è ancora un'ipotesi, che intendiamo approfondire confrontando il percorso di Dario con quello di altri studenti il cui profilo matematico in entrata presenta meta-regole discorsive analoghe.

Ringraziamenti

Ringraziamo di cuore Anna Baccaglini-Frank e Samuele Antonini per la loro guida.

Lo studio condotto è parte del progetto Prin DynaMat (2020BKWEXR) finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. La raccolta dati è stata condotta a CARME (www.carme.center), UNISER Pistoia Srl, Italia.

Riconosciamo il supporto del MIUR tramite il Progetto Dipartimento di Eccellenza assegnato al Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, CUP I57G22000700001.

Questa ricerca è stata supportata dal Gruppo GNSAGA dell'INdAM-2023.

Bibliografia

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Baccaglini-Frank, A. (2021). To tell a story, you need a protagonist: How dynamic interactive mediators can fulfill this role and foster explorative participation to mathematical discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 291–312. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10009-w>
- Baccaglini-Frank, A., & Bartolini Bussi, M. G. (2015). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: Il progetto "PerContare". *Form@re - Open Journal Per La Formazione in Rete*, 15(3), 170–184. <https://doi.org/10.13128/formare-17182>
- Baccaglini-Frank, A., & Di Martino, P. (2021). Socio-cultural differences and sensitivities in the mathematics classroom. In D. Lucangeli (Ed.), *Understanding dyscalculia* (pp. 120–149). Routledge.
- Baccaglini-Frank, A., Karagiannakis, G., Pini, C., Terme, C., & Girelli, L. (2020). Identificare profili di apprendimento matematico di bambini tra 6 e 12 anni: La standardizzazione italiana della batteria MathPro. *RicercaAzione*, 12(1), 19–51. <https://doi.org/10.32076/RA12109>
- Cooper, J., & Lavie, I. (2021). Bridging incommensurable discourses: A commognitive look at instructional design in the zone of proximal development. *The Journal of Mathematical Behavior*, 61, 100822. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100822>

- Heyd-Metzuyanim, E. (2011). *Emotional aspects of learning mathematics - how the interaction between identifying and mathematizing influences the effectiveness of learning* [Doctoral dissertation]. Technion - Israel Institute of Technology. <https://doi.org/10.13140/2.1.2879.2649>
- Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics – teacher-student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 341–368. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9457-z>
- Heyd-Metzuyanim, E., & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: on learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research*, 51–52, 128–145. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.015>
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54(6), 1131–1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 153–176. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4>
- Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 338–371. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.4.0338>
- Lisarelli, G. (2023). Transition tasks for building bridges between dynamic digital representations and cartesian graphs of functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 9, 31–55. <https://doi.org/10.1007/s40751-022-00121-2>
- Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 6(1), 1–21. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0183-2>
- Robotti, E. (2017). Designing innovative learning activities to face difficulties in algebra of dyscalculic students: Exploiting the functionalities of A/NuSet. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks. Mathematics Education in the Digital Era* (vol. 8, pp. 193–214). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_10
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1/3), 13–57. <https://doi.org/10.1023/A:1014097416157>
- Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico: il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo*. Erikson. (Titolo originale: *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing* pubblicato nel 2008).

- Sfard, A. (2021). Taming fantastic beasts of mathematics: Struggling with incommensurability. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1–33. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00156-7>
- Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14–22. <https://doi.org/10.3102/0013189X034004014>
- Xin, Y. P., Thur, R., & Thouless, H. (2022). *Enabling mathematics learning of struggling students*. Springer.
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Springer.
- Zan, R., & Di Martino, P. (2007). Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. In B. Sriraman (Ed.), *The Montana Mathematics Enthusiast* (Monograph 3, pp. 157–168). The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Ostacoli allo sviluppo dell'anticipazione in contesto algebrico

Obstacles to the development of anticipation in algebraic context

Erica Fiorini e Andrea Maffia

Università di Bologna – Italia

✉ erica.fiorini3@studio.unibo.it, andrea.maffia@unibo.it

Sunto / L'anticipazione è un processo cognitivo che agisce in numerose consegne matematiche, incluso il trattamento di espressioni algebriche. Tuttavia, alcuni studenti mostrano difficoltà nello sviluppo di questo tipo di abilità che possono essere ricondotte ad ostacoli di diversa natura: ontogenetico, epistemologici e didattici. Attraverso la somministrazione di un questionario e dei successivi focus group, si mette in evidenza che, nello sviluppo dell'anticipazione per studenti di scuola secondaria, intervengono ostacoli di tutti e tre i tipi e si suggerisce che alcuni di questi (quelli didattici in particolare) potrebbero essere prevenuti o risolti con opportuni interventi didattici.

Parole chiave: anticipazione; senso della struttura; algebra; scuola secondaria di secondo grado.

Abstract / Anticipation is a cognitive process acting in various mathematical tasks, including the treatment of algebraic expressions. However, some students show difficulties in developing this type of skill which can be traced back to obstacles of different natures: ontogenetic, epistemological and didactical ones. Through the administration of a questionnaire and subsequent focus groups, this research highlights that, in the development of anticipation for secondary school students, obstacles of all three types intervene and it is suggested that some of these (the didactical ones in particular) could be prevented or resolved with appropriate educational interventions.

Keywords: anticipation; structure sense; algebra; upper secondary school.

1 Introduzione

Ormai da molti decenni la ricerca in didattica della matematica (e non solo) ha messo in evidenza l'importanza di svariati processi cognitivi e metacognitivi all'interno di attività complesse come il problem-solving. Azioni di pianificazione e monitoraggio dell'attività sono fondamentali quando si svolge una consegna matematica, specialmente quando sono richiesti diversi passaggi. Se questo è sicuramente vero per i problemi più complessi, questioni analoghe possono valere anche per esercizi più di routine, i quali non prevedono esclusivamente uno svolgimento procedurale e/o meccanico. Per esempio, Arcavi (1994) nota come spesso, quando si utilizza un'equazione per risolvere un problema, il legame tra i simboli utilizzati e il contesto del problema viene perso durante la fase di trattamento simbolico, ma un solutore esperto può ricostruire il significato di ciascuno dei passaggi in relazione al contesto del problema (sia esso intra- o extra-matematico).

Ci si può domandare come queste abilità descritte da Arcavi possano essere sviluppate, quali pratiche didattiche possano supportare studenti e studentesse nell'approcciarsi al trattamento di espressioni algebriche in modo consapevole. Secondo Boero (2001), questo avviene solo quando le trasformazioni standard (formule conosciute) sono integrate da processi di anticipazione e, a suo parere, la pratica scolastica è sbilanciata verso le formule a sfavore dello sviluppo dell'anticipazione.

In questo contributo, dopo un primo inquadramento teorico su quello che si intende quando si parla di "anticipazione", ci concentreremo su possibili ostacoli che si possono presentare agli studenti nello sviluppo di questa capacità, con un particolare riferimento alla scuola secondaria.¹ L'analisi di protocolli raccolti in due classi di prima liceo scientifico italiane servirà a mostrare la varietà nella natura di tali ostacoli.

2 Anticipazione in matematica

Il costrutto di "anticipazione" viene introdotto in ambito psicologico, contesto di ricerca in cui viene largamente utilizzato (a volte si parla anche di "previsione" – *forecasting* in inglese). Uno dei lavori seminali è sicuramente quello degli psicologi della Teoria dell'Attività, che introducono il concetto di "riflessione anticipatoria sulla realtà". Per esempio, nell'opera di Anokhin (1962/1978) troviamo descritto come ogni organismo possa anticipare gli eventi del mondo esterno sulla base dell'iterazione di eventi che fungono da parametro di misura per il tempo stesso. In particolare, *homo sapiens* è in grado di notare che alcuni eventi avvengono in concomitanza e/o in sequenza in un determinato ordine. La ripetizione di certi eventi coincide con la ripetizione di stimoli sensoriali e quindi in specifiche sequenze di reazioni (biochimiche, in senso pavloviano) e, nel tempo, nella possibilità di prevedere la presenza dell'ultimo stimolo della sequenza quando si è in presenza del primo. Anokhin propone un modello per descrivere i differenti processi cognitivi alla base dell'anticipazione; presentiamo di seguito tale modello così come è descritto in inglese da Tooméla (2015; Figura 1) ed evitando il ricorso a molti termini tecnici.

Un soggetto che è motivato a soddisfare un certo bisogno recupera dalla memoria tutte le informazioni connesse alla soddisfazione di tale bisogno nelle proprie esperienze passate. La selezione delle informazioni è fatta anche sulla base delle risorse disponibili in quel momento e analizzando quali

1. In Italia, la scuola secondaria si suddivide in scuola secondaria di primo grado, che dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino, e scuola secondaria di secondo grado, che dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

elementi dell'ambiente permettono o inibiscono l'uso di tali risorse. Sulla base di queste informazioni, il soggetto prende una decisione sul proprio comportamento (*decision-making*). Quando il comportamento deciso viene messo in atto, l'azione porta a un risultato sul soggetto o sull'ambiente. Tale cambiamento viene percepito e confrontato con il risultato atteso sulla base delle informazioni che erano presenti in memoria. Se le due informazioni coincidono il comportamento viene fermato (o in caso di una sequenza di azioni si passa al prossimo passaggio). Invece, se il risultato non coincide con le attese, un nuovo comportamento viene attivato per raggiungere il risultato atteso.

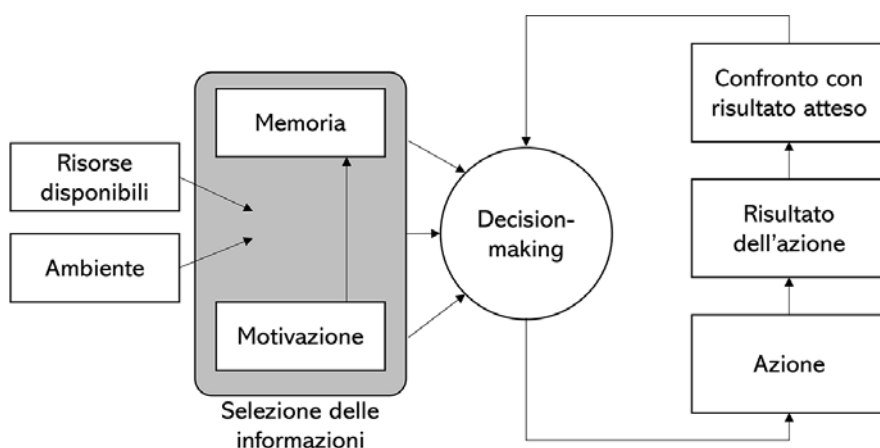


Figura 1. Schema semplificato del modello di Anokhin come presentato da Tooméla (2015).

Nel contesto della didattica della matematica il termine “anticipazione” viene introdotto da Boero (2001) proprio in riferimento al trattamento di espressioni algebriche. In particolare, Boero definisce l'anticipazione come «il processo mentale attraverso il quale un soggetto prevede la forma finale (e/o i passaggi intermedi) di un'espressione algebrica utile a risolvere un problema e la direzione generale delle trasformazioni necessarie per arrivarci» (p. 110).

Per meglio esplicitare questa definizione, facciamo riferimento a un esempio tratto dallo stesso lavoro di Boero: consideriamo la soluzione di un'equazione goniometrica come $\sin^2 x + \cos^2 2x = 3/2$. Per risolverla, possiamo pensare di trasformarla in $\sin^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 3/2$ da cui possiamo ottenere $\sin^2 x + (1 - 2 \sin^2 x)^2 = 3/2$ che equivale a $4 \sin^4 x - 3 \sin^2 x - 1/2 = 0$, che diviene un'equazione di secondo grado nell'incognita y sostituendo $y = \sin^2 x$. In queste trasformazioni si applicano trasformazioni standard, come sostituire $\cos^2 2x$ con $\cos^2 x - \sin^2 x$, ma questo viene fatto anticipando la possibilità di ricondursi a un'equazione che abbia come sola incognita $\sin^2 x$, un'equazione per la quale abbiamo delle procedure standard di soluzione. L'esperienza che uno studente può aver già acquisito con equazioni di questo tipo, la forma iniziale della particolare equazione considerata e la conoscenza delle trasformazioni standard possibili guidano il processo risolutivo nelle diverse anticipazioni necessarie.

Secondo Boero (2001, p. 110),

«diversi elementi concorrono a questo processo: la memoria del passato; trasformazioni che hanno avuto successo fatte in situazioni simili (ovvero l'esperienza); l'intuizione di possibili forme finali o intermedie dell'espressione algebrica suggerite dalla sua forma attuale; la capacità di mettere in relazione la forma di una possibile espressione trasformata con la soluzione del problema».

Vari autori in ambito psicologico riconducono l'efficacia dell'anticipazione sia alla memoria episodica (ovvero il ricordo di quanto in passato è avvenuto in particolari situazioni) sia a quella semantica (conoscenza generale sul mondo). Boero (2001) parla di una dialettica tra due poli opposti: l'uso di

trattamenti standard, ovvero l'applicazione di formule note, e l'anticipazione di nuove forme di trattamento specifiche per il particolare problema che si sta affrontando. Seguendo il modello di Anokhin presentato precedentemente (Figura 1) possiamo interpretare le trasformazioni standard note come risorse disponibili in memoria; il processo di decision-making sarà informato da queste conoscenze, ma sarà nell'iterazione di confronto tra risultati attesi e risultati ottenuti che verrà a generarsi l'anticipazione utile (o meno) a risolvere il problema. Analizziamo l'esempio precedente sulle equazioni goniometriche con il modello di Anokhin per esplicitare il possibile legame tra questo e la definizione di Boero: lo studente desidera risolvere l'equazione (motivazione) e tale desiderio attiva nella memoria tutte le informazioni che sono associate al suo soddisfacimento (Tooméla, 2015), quelle che Boero chiama "la memoria del passato". Il richiamo dalla memoria è supportato o vincolato dalle risorse disponibili e dall'ambiente in cui ci si trova (interpretiamo in questo senso il riferimento a "situazioni simili" fatto da Boero). Per esempio, avere a disposizione delle tavole per le formule goniometriche potrebbe permettere di richiamare alcune esperienze in cui certe formule sono state efficacemente impiegate. La sintesi delle informazioni evocate dalla memoria (l'esperienza fatta in passato) suggerisce un piano di azione (decision-making) che include «cosa, come e quando farlo» (Tooméla, 2015, p. 3) si ha così un'intuizione sulla forma finale (come direbbe Boero), ovvero un'attesa sul risultato – nel modello di Anokhin. Nel nostro esempio, il piano potrebbe consistere nel trasformare l'equazione in una in cui non compaiano altre incognite rispetto a $\sin^2 x$ per poi trasformare l'equazione goniometrica in una polinomiale. Si avvia quindi il piano d'azione applicando una trasformazione che in passato è stata usata con successo per ottenere il risultato atteso o che ci si aspetta possa permetterlo ($\cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$); successivamente si verifica se la trasformazione ha avuto come risultato l'effetto desiderato, ovvero si mette «in relazione la forma di una [...] espressione trasformata con la soluzione [attesa] del problema» (Boero, 2001, p. 110). Nel nostro esempio, non abbiamo ancora ottenuto l'esito anticipato perché compare ancora un termine che coinvolge il coseno. Si ritorna al processo di decision-making: si analizza la nuova forma e le risorse (conoscitive e materiali) a disposizione per affrontarla, eventualmente tra quelle già recuperate inizialmente. Viene quindi sviluppato un nuovo piano d'azione: si realizza una nuova trasformazione ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$) e, solo quando si sarà ottenuto il risultato desiderato, si procederà ad attivare la prossima fase del piano stabilito – in questo caso la sostituzione per ottenere un'equazione polinomiale in una sola incognita.

Notiamo che l'anticipazione è un processo cognitivo che svolge un ruolo importante nella soluzione anche di consegne algebriche non troppo complesse come il trattamento di espressioni algebriche o aritmetiche. Chiaramente l'anticipazione (in senso psicologico) non è un fenomeno che riguarda unicamente il trattamento di espressioni algebriche e ben si applica anche ad altri contesti matematici (si veda, ad esempio, Miragliotta, 2022). Tuttavia, qui ci concentriamo sulle manipolazioni algebriche e, nel chiederci quali ostacoli possano insorgere nello sviluppo del processo di anticipazione stesso, decidiamo di concentrarci sulle più semplici, quelle che in Italia sono generalmente introdotte nei primi anni della scuola secondaria di secondo grado per risolvere equazioni polinomiali di primo grado o per fattorizzare polinomi di grado maggiore.

Il modo in cui gli studenti approcciano questo tipo di esercizi è stato studiato in letteratura. Per esempio, la differenza tra una soluzione meccanica ed esclusivamente procedurale di equazioni e l'anticipazione di manipolazioni utili alla soluzione stessa è ben descritta nel lavoro di Hoch e Dreyfus (2004) che propongono a studenti di grado 9 e 10 equazioni del tipo:

$$\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 7 + \frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}.$$

Gli autori notano che, tra gli studenti da loro intervistati, la percentuale di coloro che ricorrono alla cancellazione del termine che compare in ambo i lati dell'uguaglianza è molto bassa (nel loro lavoro meno di uno studente su 4 per le equazioni più semplici) rispetto a quella di coloro che eseguono trattamenti tra le frazioni algebriche e numerosi calcoli prima di arrivare a una soluzione (corretta o errata che sia). I diversi comportamenti possono essere interpretati, rispettivamente, come istanze

(nel contesto del trattamento delle espressioni algebriche) di quelle che Skemp (1976) identifica come comprensione relazionale e comprensione strumentale (a volte detta anche procedurale) della matematica.

Appare evidente che la capacità di anticipare trasformazioni utili al trattamento di un'espressione algebrica non è necessariamente diffusa e sembra quindi lecito interrogarsi su quali siano i fattori che ne inibiscono lo sviluppo. Come visto in precedenza, questo può dipendere dalle esperienze e conoscenze pregresse, ma ci chiediamo se il richiamo dalla memoria sia l'unica fase del processo di anticipazione in cui possono presentarsi ostacoli. Per contemplare la possibile varietà di ostacoli che possono presentarsi, faremo riferimento alla teoria degli ostacoli di Brousseau che presentiamo nella sezione successiva.

3 La teoria degli ostacoli

Brousseau (2006) indica come ostacolo, qualcosa che si frappone alla costruzione cognitiva di un concetto. Sebbene lui stesso sostenga che sia impossibile individuare l'origine di un ostacolo in uno solo dei poli del sistema didattico (chiamato anche triangolo della didattica, studente-insegnante-sapere secondo Chevallard), è possibile identificare quali cambiamenti nel sistema didattico potrebbero permettere di ovviare all'ostacolo. Si possono quindi classificare i vari ostacoli all'apprendimento in tre categorie principali, in relazione ai poli protagonisti del triangolo della didattica. Si possono evidenziare, rispettivamente, *ostacoli didattici* relativi al polo dell'insegnante, *ostacoli ontogenetici* (o cognitivi), legati all'allievo (in relazione al docente e al sapere proposto) e infine *ostacoli epistemologici* riferiti alla sfera del sapere.

Gli ostacoli di tipo ontogenetico hanno radice nelle difficoltà specifiche dello studente (per es. di tipo neuropsicologico o cognitivo) in base allo specifico momento dello sviluppo. Se assumiamo la prospettiva vygotskiana, uno studente può apprendere un nuovo concetto (oggetto o procedura) solo se questo si trova nella sua zona di sviluppo prossimale (Vygotskij, 1980). Un intervento didattico al di fuori della zona di sviluppo prossimale dello studente è inefficace. Pertanto, gli ostacoli di questo tipo fanno riferimento alla sfera delle conoscenze e delle abilità accessibili ad uno studente in un determinato momento.

Gli ostacoli di natura didattica sono quelli che sembrano dipendere soprattutto dalle scelte del sistema educativo (Brousseau, 2006). Può trattarsi di scelte a livello sistemico (di curriculum), a livello di strumenti (libro di testo o altri materiali didattici) o delle pratiche didattiche del singolo insegnante. A livello di singola classe possono dipendere dalle particolari aspettative che l'insegnante ha sui propri allievi o che loro hanno nei confronti del docente, ovvero sul contratto didattico (Brousseau, 2006) sia esso implicito o esplicito. Il contratto didattico, infatti, regola l'insieme di comportamenti attesi dagli studenti nei confronti dell'insegnante e dall'insegnante nei confronti degli studenti, i quali contribuiscono a dettare anche regole non scritte, implicite (Brousseau, 2006).

Gli ostacoli di tipo epistemologico sono generalmente inevitabili perché si tratta di quelli che hanno avuto un ruolo nella formazione stessa del concetto. Come spiegano Gagatsis e Alexandrou (2022, p. 12):

«La ricerca [in storia della matematica] indica che molti concetti matematici sono stati “segnati” dalle difficoltà dei grandi matematici. È ragionevole supporre che molte delle difficoltà che a un certo punto hanno fermato gli scienziati più ispirati, devono ancora preoccupare i nostri studenti».

Chiaramente questo non significa che particolari interventi didattici non possano aiutare quantomeno a non amplificarne l'effetto (Brousseau, 2006).

La natura degli ostacoli che possono presentarsi nella formazione di processi di anticipazione è varia. Possiamo quindi specificare meglio la nostra domanda di ricerca chiedendoci quali tipologie di ostacoli intervengano nel processo di anticipazione (articolato secondo il modello di Anokhin) e quali aspetti dell'anticipazione ne siano influenzati.

4 Metodi

Al fine di indagare gli ostacoli allo sviluppo del processo di anticipazione si è scelto di sottoporre alcune domande a studenti di due classi prime di un liceo scientifico di Bologna. Volendo indagare la natura degli ostacoli, piuttosto che la loro generalità o frequenza, si è deciso di ricorrere a un'analisi qualitativa e non quantitativa.

La scelta del grado di istruzione degli studenti è stata pensata in relazione al fatto che l'introduzione della manipolazione algebrica avviene in Italia proprio a cavallo tra la scuola secondaria di primo e secondo grado. La scelta della prima classe (nella parte finale dell'anno scolastico) ci assicura che tutti gli studenti siano già stati introdotti alla manipolazione algebrica, ma contemporaneamente possano ancora non avere molta familiarità con essa. Chiaramente, il calcolo algebrico non è stato affrontato da questi studenti solo nella classe che frequentavano al momento della nostra raccolta dati, ma anche durante la scuola media. In questo senso, appare lecito supporre che l'argomento appena affrontato in prima liceo abbia avuto un'impostazione diversa rispetto al grado scolare precedente.

4.1 Modalità di somministrazione e raccolta dati

L'attività proposta agli studenti è stata suddivisa in due fasi: una prima fase di somministrazione di un questionario scritto, separatamente nelle due classi, e una seconda parte organizzata in forma di focus group.

4.1.1 Questionario

Per quanto riguarda la prima fase, è stato costruito un questionario composto da cinque esercizi a risposta aperta. La scelta dei quesiti è stata fatta con l'obiettivo di comprendere se gli studenti mettessero o meno in atto il processo di anticipazione in compiti di fattorizzazione/semplificazione di espressioni letterali e nella soluzione di equazioni di primo grado (argomenti da poco trattati in classe). Seguendo l'esempio presentato prima di Hoch e Dreyfus (2004) si sono scelte espressioni letterali che permettessero diverse possibili tipologie di soluzione, cercando di proporre consegne che portassero gli studenti a soffermarsi sulla struttura della consegna proposta e che li spingessero a trovare il metodo di svolgimento più efficace, principalmente attraverso l'uso di prodotti notevoli piuttosto che eseguire tutti i calcoli.

A seguito di ciascun esercizio si è pensato di introdurre una richiesta aggiuntiva: «Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, quale? Se no, perché?». Lo scopo di questa domanda è quello di osservare se, leggendola, lo studente riesce a vedere nell'esercizio proposto una struttura diversa da quella che aveva in mente alla prima lettura e, magari, a ripensare allo svolgimento proposto, trovando delle alternative.

Si è deciso di presentare agli studenti degli esercizi non complessi né lunghi dal punto di vista del calcolo, in modo che non emergessero difficoltà legate a procedure troppo complicate, poiché lo scopo della ricerca non era quello di indagare le capacità di manipolazione simbolica degli studenti. Per stabilire quali quesiti proporre, tra le varie alternative pensate, è stata creata una prima bozza di compito, con quelli che sembravano maggiormente adatti al fine della ricerca, ipotizzando a priori i vari tentativi di risoluzione che ci si poteva aspettare dagli studenti, riflettendo su quali potessero es-

sere i possibili errori in cui potevano incorrere durante lo svolgimento della prova e i possibili ostacoli che sarebbero potuti emergere.

Dopo questa fase, c'è stato un allineamento con i docenti delle classi: è stato chiesto loro se le richieste fossero in linea con ciò che gli studenti avevano affrontato in classe e se il numero di quesiti fosse eccessivo o scarso per svolgere la prova nel tempo concordato di un'ora.

Questo ha aiutato a ripensare la struttura del compito, riducendo il numero di esercizi inizialmente ideati e tenendo conto delle modalità di svolgimento delle prove di valutazione proposte solitamente dai docenti, in modo da non presentare agli studenti un questionario fuori dalla loro portata o che li destabilizzasse ancor prima di cominciare. Di seguito riportiamo i quesiti che, proprio per il desiderio di utilizzare consegne simili a quelle usualmente svolte in classe, fanno riferimento ad attività intrinsecamente procedurali (si noti che infatti sono tutte introdotte da verbi all'infinito presente che indicano atti direttivi). Come suggeriremo di seguito nell'analisi a priori dei cinque quesiti, tali attività possono acquisire una valenza di tipo relazionale proprio nei processi di anticipazione che possono guidare le trasformazioni algebriche per lo svolgimento del compito.

La scelta di diminuire il numero di quesiti è stata dettata anche dal voler lasciare agli studenti tutto il tempo necessario per poter riflettere sulle risposte, in modo che non si presentassero svolgimenti incompleti o assenti a causa del tempo. Tra i cinque quesiti proposti nel questionario, erano presenti due equazioni da risolvere, due fattorizzazioni e un'espressione algebrica da semplificare. In particolare, si è richiesto di:

- semplificare $(x + 2)(2x + 3)(x - 2)$;
- scrivere come prodotto di fattori $2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$;
- scrivere come prodotto di fattori $4a^6 - 16b^4$;
- risolvere l'equazione $(x + 1)^2 - (x + 2) = (x + 1)(x + 1)$;
- risolvere l'equazione $4x - x^2 + 5(4 - 2x) = (3 - x)(3 + x)$.

In tutti i casi proposti è possibile svolgere per esteso i calcoli oppure notare la possibilità di raccogliere un fattore comune, utilizzando un raccoglimento totale o parziale; notare la presenza di una differenza di quadrati o di un quadrato di binomio per semplificare lo svolgimento. Nel primo quesito ci si aspetta che lo studente che attiva un processo di anticipazione osservi l'intera espressione prima di procedere con lo svolgimento, notando la presenza di una somma per una differenza da poter svolgere come primo passaggio, agevolando poi il prodotto con il terzo fattore.

Uno svolgimento automatico dei prodotti nell'ordine in cui sono scritti porterebbe invece a svolgere prima $(x + 2)(2x + 3)$ e poi il prodotto di ciò che si ottiene con il fattore $(x - 2)$.

Nel secondo quesito il risultato atteso da parte di chi non anticipa è lo svolgimento dei prodotti in ordine e la successiva somma di monomi simili: $2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x = 6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x = 16x$, presupponendo la mancata osservazione a priori del fattore $2x$, comune ai due addendi dell'espressione, da poter raccogliere inizialmente.

Per quanto riguarda il terzo esercizio, ciò che si voleva testare era il riconoscimento della differenza di quadrati da parte di chi anticipa. In alternativa all'immediato riconoscimento del prodotto notevole, ciò che ci si poteva aspettare era il raccoglimento iniziale di un fattore 2 o 4, eventualmente seguito dal riconoscimento della differenza di quadrati.

Gli ultimi due esercizi riguardano la risoluzione di equazioni con lo scopo di osservare se gli studenti ragionino sulla struttura, rilevando la presenza di termini uguali nei due membri dell'equazione nel caso della prima e di un prodotto notevole nella seconda.

Ci si aspetta che una manipolazione meccanica preveda lo svolgimento di tutti i calcoli del primo e

secondo membro e una procedura di risoluzione "standard" di questo tipo:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x+2) &= (x+1)(x+1) \\ x^2 + 2x + 1 - x - 2 &= x^2 + x + x + 1 \\ x^2 + x - 1 &= x^2 + 2x + 1 \\ x^2 + x - x^2 - 2x &= 1 + 1 \\ -x &= 2 \\ x &= -2\end{aligned}$$

senza il riconoscimento dell'uguaglianza tra $(x+1)^2$ e $(x+1)(x+1)$, che porta alla risoluzione della più semplice equazione $-(x+2) = 0$.

Il questionario è stato somministrato agli studenti durante l'orario di lezione, in presenza dell'insegnante di matematica, in un tempo massimo per svolgere la prova di un'ora. Prima dell'inizio della prova è stato ribadito che i questionari sarebbero stati oggetto di analisi per motivi di ricerca, con una breve descrizione del suo contenuto e di come sarebbero stati usati i risultati delle prove, in modo che gli studenti fossero a conoscenza di cosa stessero facendo.

Durante lo svolgimento della prova ci sono state richieste di chiarimento rispetto alle consegne degli esercizi da parte degli studenti e osservazioni sulla domanda aggiuntiva, la quale è subito risultata inconsueta e non in linea con le loro aspettative su un usuale compito in classe. A tali domande non è stata data risposta per non alterare il risultato delle prove. Il tempo della prova è stato sufficiente per far completare tutti gli esercizi e il livello di difficoltà è stato percepito in generale come non eccessivo in confronto a ciò a cui gli studenti erano abituati.

Il questionario era anonimo, ma è stata esplicitata la richiesta di scrivere un *nickname* su ciascun foglio in modo che lo studente potesse riconoscere il proprio elaborato in un successivo momento. Questo è stato utile per la seconda fase della raccolta dati, dove sono stati organizzati dei focus group, separatamente in ognuna delle due classi, durante i quali si sono raccolte informazioni relativamente alle motivazioni delle risposte degli studenti ad alcuni dei quesiti del questionario e si è cercato di capire quali fossero le ragioni che stavano dietro alle modalità di svolgimento degli esercizi.

4.1.2 Focus group

Per la seconda fase si è pensato di organizzare un'attività di gruppo, preferendola all'intervista singola di ogni studente, utilizzando la tecnica del focus group.

I focus group sono una forma di intervista di gruppo finalizzata a raccogliere dati qualitativi in un tempo piuttosto breve, moderata da un intervistatore e basata sull'interazione tra i membri dello stesso, che mira a produrre una visione collettiva di un certo argomento che si sta trattando, piuttosto che una sua visione individuale (Manion et al., 2007); da tale interazione emergono poi i dati della ricerca. Questa seconda fase è stata pensata, infatti, con lo scopo di stimolare un dialogo tra pari su ciò che era emerso dagli elaborati degli studenti, in modo che essi fossero liberi di esprimere le proprie idee, senza il timore di un giudizio da parte dell'insegnante, come spesso accade in classe.

Si sono formati gruppi di 4-5 persone in modo da lasciare spazio ad ogni studente, suddividendo gli studenti in modo da evidenziare le peculiarità di ogni compito emerse dall'analisi, inserendo nello stesso gruppo coloro che in particolari esercizi avevano risposto in modo diverso (completo o incompleto, corretto o meno). Si è cercato quindi di formare gruppi che fossero rappresentativi di diverse tipologie di risposte al questionario (includendo sia istanze di anticipazione che risoluzioni più procedurali), seppur all'interno dei limiti contingenti del contesto (orario scolastico, studenti presenti ecc.).

Per raccogliere i dati sui focus group, si è realizzata una registrazione audio in modo da poter poi trascrivere fedelmente le parole degli studenti e analizzare le loro frasi in modo dettagliato come supporto alla ricerca. I focus group si sono svolti circa una settimana dopo il questionario, durante le ore di lezione mattutine, prendendo a piccoli gruppi (circa 4-5 persone) gli studenti di ogni classe per circa trenta minuti

per gruppo. I focus group sono stati formati facendo riferimento ai nickname, dopo aver chiesto il consenso degli studenti per associare l'identità al compito svolto. Ogni studente ha visionato il proprio elaborato senza correzioni, e successivamente gli è stato chiesto di spiegare le ragioni per le quali avesse scritto un certo tipo di procedimento e quali ragionamenti avesse messo in atto per svolgerlo. Tutti gli studenti hanno acconsentito alla partecipazione.

Di seguito, per esemplificare i risultati ottenuti, mostreremo alcuni elaborati ed estratti della trascrizione dei focus group.

5 Risultati

All'interno di questa sezione ci proponiamo di analizzare i risultati ottenuti dallo svolgimento dei quesiti da parte degli studenti e dalle relative riflessioni emerse dai dialoghi nell'attività di gruppo. Procediamo con l'analisi di alcuni protocolli ritenuti paradigmatici, individuando i possibili ostacoli incontrati dagli studenti nello svolgimento, tenendo conto delle tre tipologie descritte nella sezione 3 ed evidenziando parallelamente la presenza (o meno) di processi di anticipazione. Ciascuna delle seguenti sezioni fa riferimento a una delle tre tipologie di ostacoli; tuttavia, occorre specificare che, nella nostra classificazione, alcuni protocolli sono stati associati a più di una categoria, mostrando il profondo intreccio tra i diversi tipi di ostacolo. In particolare, in diversi casi il ruolo della didattica (dell'insegnante attuale o dei precedenti) può essere particolarmente rilevante.

5.1 Ostacoli ontogenetici

Iniziamo prendendo in esame una risoluzione al terzo quesito del questionario (Figura 2).

$$\begin{aligned}
 &\text{Es. 3} \\
 &4a^6 - 16b^4 \\
 &4(a^6 - 4b^4) \\
 &4(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2) \\
 &4(a^3 + 2b^2)(a+b)(a^2 - 2b) \\
 &4(a^3 + 2b^2)(a+2)(a-b)
 \end{aligned}$$

Figura 2. Risposta di uno studente al terzo quesito del questionario.

Nella risposta si nota come la studentessa riesca a richiamare dalla memoria una trasformazione che ha avuto successo in situazioni precedenti e riscriva l'espressione come prodotto di una somma di monomi per la loro differenza. Successivamente perde il controllo del senso del trattamento e prosegue iterando lo stesso procedimento con qualsiasi binomio, anche quando non vi è la presenza di una differenza di quadrati. Durante la discussione di gruppo, afferma: «Sono partita con $(a + b)$ e $(a - b)$, poi mi sono convinta che bastava che ci fosse il più e meno e quindi ho continuato all'infinito e ho fatto una confusione immensa». Riteniamo che in questo caso che la difficoltà risieda nel processo di decision-making: la studentessa avvia il loop azione-risultato-confronto, ma sembra che il parametro da lei utilizzato per valutare i passaggi intermedi sia errato. In questo caso, l'inefficacia delle trasformazioni avviate potrebbe dipendere da una mancanza di conoscenza o da una misconcezione. Prendiamo ora in esame la risoluzione di una delle equazioni della prova assegnata (Figura 3).

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

~~$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1) \cdot 0$~~

~~$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$~~

~~$-x-2=0$~~

~~$-x=+2$~~

~~$x=-2$~~

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì,

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

~~$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$~~

~~$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$~~

~~$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$~~

~~$-x-2=0$~~

~~$-x=+2$~~

~~$x=-2$~~

Figura 3. Risposta di uno studente al quarto quesito del questionario.

Innanzitutto, possiamo osservare che lo studente è riuscito a prevedere la possibilità di cancellare i termini $(x+1)(x+1)$ e $(x+1)^2$ senza dover sviluppare queste espressioni; sembra sia avvenuta quindi un'anticipazione: lo studente non ricorre all'uso di trattamenti standard (lo sviluppo del quadrato di binomio) ma a trattamenti legati allo specifico problema. Così come suggerisce Boero (2001), la forma attuale dell'equazione suggerisce possibili trasformazioni. L'analisi del compito – e in particolare il riconoscimento dell'equivalenza tra $(x+1)(x+1)$ e $(x+1)^2$ – richiama dalla memoria processi che hanno avuto successo in passato (la cancellazione di termini uguali ai due membri dell'uguaglianza). Tale processo viene interrotto quando non vi sono più termini uguali ai due membri e si avvia quindi la seconda parte del piano d'azione. Vediamo però che successivamente compare una serie di passaggi per giungere alla soluzione, potenzialmente evitabili: analizzata la nuova forma, in cui non compaiono più parentesi, lo studente non riesce ad identificare il valore dell'incognita dall'equazione $-x-2=0$, ma svolge altri due ulteriori passaggi al fine di riportarsi alla forma $x=2$. Potrebbe trattarsi di un ostacolo ontogenetico, legato a una difficoltà nella gestione dell'incognita o nell'interpretazione dell'equazione come uguaglianza che deve essere verificata, o ancora da alcune incertezze su come manipolare l'equazione (probabilmente lo studente si sente "più sicuro" a scrivere ogni passaggio per non commettere errori nella gestione dei segni). Potremmo però pensare che tutto ciò dipenda dalla richiesta tipica dell'insegnante di "non saltare i passaggi" nello svolgimento, che porta lo studente a scrivere più passaggi possibili per far vedere che riesce ad arrivare alla soluzione attraverso una procedura e non "indovinando" la soluzione: potrebbe trattarsi quindi di un ostacolo didattico. Osserviamo che lo studente ripete gli stessi passaggi anche nella seconda proposta di risoluzione. La difficoltà potrebbe quindi collocarsi nella relazione tra ambiente-motivazione-memoria. Come esplicitato da Tooméla (2015), l'ambiente può fungere da fattore limitante per le risorse selezionate e questo dipende dalle motivazioni dominanti. Se per lo studente la motivazione dominante è quella di soddisfare le aspettative del docente, si limiterà ad attivare quei piani d'azione che fanno uso di risorse che si ritiene che il docente consideri accettabili. Su questo torneremo in seguito nell'analisi degli ostacoli didattici.

5.2 Ostacoli epistemologici

Dall'analisi dei questionari, si riscontra una difficoltà generale di comprensione della consegna nella quale si richiede agli studenti di riscrivere l'espressione data come prodotto di fattori. Sembra che l'espressione "prodotto di fattori" risulti particolarmente complessa da interpretare. Infatti, durante la discussione nei focus group, gli studenti hanno esplicitato di avere avuto molta difficoltà nel capire cosa significassero la parola "prodotto" e la parola "fattori" (termini sicuramente già noti a loro in contesto aritmetico) nell'ambito dei polinomi.

In Figura 4 riportiamo un esempio di risoluzione di uno dei quesiti che includevano tale richiesta.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

⇒ $2x[3 + \cancel{4x} + 1 - \cancel{4x} + 4]$

⇒ $2x[8]$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Posso svolgere le moltiplicazioni e alla fine risolvere l'espressione

⇒ $6x + 8x + 2x - 8x + 8x$

⇒ $16x$

NO

Figura 4. Risposta di uno studente al secondo quesito del questionario.

In questo caso lo studente, come emerge dal dialogo all'interno dei focus group che riportiamo di seguito, non ha chiaro cosa sia un prodotto di fattori. Infatti, quando gli viene chiesto di spiegare il motivo per cui, nel secondo svolgimento all'esercizio, ha scritto «NO», risponde così:

- L.: «Qui avevo svolto le moltiplicazioni, però poi sono arrivato al risultato $16x$ che non era un prodotto di fattori come chiedeva l'esercizio; quindi, ho cancellato».
- I.: « $2x \cdot [8]$ secondo te è un prodotto di fattori?»
- L.: «Sì».
- I.: «E $16x$ è un prodotto di fattori? [L. non risponde, gli altri membri del gruppo dicono di sì]».
- I.: «L. non sei d'accordo con questa affermazione?»
- L.: «No, io intendevo come se fosse una scomposizione e $16x$ non è una scomposizione. Mentre $4 \cdot 4x$ è una scomposizione».
- I.: «Quindi $16x$ non andava bene secondo te?»
- L.: «Sì, forse sì».

[Il dialogo continua con una discussione in cui sono coinvolti anche gli altri membri del gruppo e alla fine lo studente si convince del fatto che siano entrambi prodotti di fattori].

In generale emerge in modo evidente il tentativo di anticipare: lo studente, sulla base delle esperienze fatte, si è creato un'immagine mentale sull'aspetto che il "risultato" dell'esercizio dovrebbe avere. Sembra che la sua attesa sia quella di avere almeno il prodotto (indicato) tra due monomi; (due) parti, ben evidenziate da delle parentesi e/o dal simbolo di moltiplicazione, come si nota nel primo caso, dove scrive come fattorizzazione finale $2x \cdot [8]$, lasciando addirittura delle parentesi spontaneamente aggiunte all'inizio dello svolgimento. Il ricorso a una trasformazione nota (il raccoglimento a fattor comune) sembra portare al risultato atteso (la forma finale prevista) e quindi il loop azione-risultato-confronto viene interrotto con soddisfazione. La seconda richiesta inibisce l'uso della trasformazione anticipata dallo studente chiedendone una ulteriore. Facendo riferimento a compiti analoghi nella sua passata esperienza, lo studente identifica un nuovo piano d'azione (svolgere i prodotti tra monomi e binomi tra parentesi) e ottiene come risultato il monomio $16x$, che però sembra vedere come un'unica entità inscindibile, che dal suo punto di vista non può essere interpretata come prodotto di fattori. La difficoltà risiede quindi nel confronto tra il risultato ottenuto e quello atteso, cioè nel mancato riconoscimento della loro equivalenza.

In questo caso, sembra che lo studente non riesca a ricondurre il significato degli oggetti che stava manipolando ai corrispondenti significati aritmetici, concentrandosi esclusivamente sulla manipolazione algebrica di simboli, non considerando che il monomio rappresenta proprio un prodotto per come è definito. Possiamo interpretare questa difficoltà come frutto di un ostacolo di tipo epistemologico, perché ha le sue radici nel passaggio (anche storicamente molto complesso) dall'aritmetica all'algebra intesa come meta-aritmetica (Caspi & Sfard, 2012; Linchevski & Livneh, 1999). È possibile che questo tipo di difficoltà abbia le proprie radici anche in ostacoli di tipo didattico: gli studenti potrebbero non aver strumenti interpretativi per le parole "fattore" e "prodotto" in contesto algebrico sia perché non precedentemente educati a riconoscere, per esempio, 2×8 come rappresentazione (non canonica, si veda Navarra, 2022) del prodotto tra i fattori 2 e 8 – vedendola solo come una operazione da svolgere – sia perché non guidati a riconoscere le analogie tra il calcolo aritmetico e il calcolo algebrico (Linchevski & Livneh, 1999). Ipotizziamo quindi la presenza di ostacoli didattici, che possono derivare da una mancata riflessione collettiva sui significati dei termini, degli oggetti, delle proprietà, i quali probabilmente vengono dati per scontati e acquisiti in precedenza, ma che in realtà non sono stati ancora interiorizzati da gran parte degli studenti.

Comportamenti simili emergono dal dialogo con altri studenti, che sottolineano come siano stati sempre abituati a vedere come risultato di una scomposizione "più parentesi moltiplicate", suggerendo quindi ancora una volta anche la possibile origine didattica di questo tipo di ostacolo. Osserviamo, per esempio, il dialogo seguente, dove si richiede agli studenti quale sia la differenza tra scrivere $2x \cdot 8$ e scrivere $16x$.

- G.: «Eh perché, se scrivi $16x$ poi come fai a trasformarlo all'indietro? Cioè, a me $16x$ sembra proprio tipo un risultato».
- I.: «Perché vuoi trasformarla all'indietro?»
- G.: «Eh perché l'esercizio era scomponi in fattori».
- I.: « $16x$ non è un prodotto di fattori?»
- G.: «Ah 16 per x . Mi ha confuso il fatto che era un risultato così piccolo; di solito abbiamo più parentesi moltiplicate».

Come ulteriore conferma, riportiamo il seguente estratto di un focus group che ribadisce che molti studenti pensano che un prodotto debba essere costituito necessariamente da tanti termini, preferibilmente racchiusi tra parentesi, e non possa essere costituito di "un solo termine".

- I.: «Nell'esercizio sei arrivato a scrivere $16x$. Secondo te questo è un prodotto di fattori come richiedeva il testo?»
 L.: «No, questo no».
 I.: «Perché?»
 L.: «Perché c'è solo un termine!»
 I.: «Siete d'accordo?»
 G.: «No».
 D.: «No, no. $16x$ è il risultato di una moltiplicazione: è 16 per x !»
 L.: «Ah allora era giusto...»

Qui si nota di nuovo come lo studente pensi che il monomio $16x$ sia un'entità unica (usa il termine "risultato", che suggerisce un'interpretazione procedurale) che non può essere ulteriormente scomposta in nessun modo. Ciò potrebbe dipendere anche dalla tipologia di esercizi che sono stati proposti agli studenti in classe (e/o presenti sul libro di testo), ovvero potrebbe trattarsi di ostacoli didattici. Sebbene quindi la reinterpretazione delle relazioni aritmetiche in ambito algebrico possa portare all'insorgere di ostacoli epistemologici, ci si chiede se tali ostacoli possano, quantomeno, essere stati accentuati dalle pratiche didattiche.

5.3 Ostacoli didattici

Infine, analizziamo alcuni ostacoli che sembrano dipendere quasi esclusivamente dalle scelte didattiche attivate in classe, sottolineando ancora una volta la loro forte dipendenza dal contratto didattico che si è instaurato all'interno in classe, luogo in cui si dovrebbe attivare il processo di anticipazione. Per quanto riguarda lo studente, egli è portato a interpretare la situazione nella quale si trova, i quesiti che gli vengono posti e le informazioni date in modo consapevole o meno, creandosi delle regole che definiscono i rapporti all'interno della classe (Baccaglini-Frank et al., 2018).

Una strategia didattica che si può utilizzare per portare alla luce aspetti sconosciuti all'interno della classe è la rottura del contratto didattico, da noi messa in atto attraverso l'introduzione della domanda aggiuntiva per ogni quesito che richiedeva uno svolgimento alternativo, richiesta non usuale per gli studenti intervistati. La rottura del contratto ha provocato un primo ostacolo per gli studenti, con manifestazioni di insicurezza nello svolgere la prova: spesso non hanno neanche tentato approcci risolutivi meno usuali per paura di incorrere in errori. È emerso che, in generale, gli studenti tendono a proporre risoluzioni che hanno visto frequentemente, pensando che esse siano più corrette rispetto ad altre meno utilizzate, arrivando a volte a pensare che la soluzione di solito svolta in classe sia l'unica corretta da eseguire, come possiamo vedere dai protocolli nelle Figure 5-9. L'ambiente – in questo caso il fatto che l'esercizio sia svolto in classe – sembra agire come forte fattore inibente nella selezione delle risorse (conoscitive e materiali) da impiegare. Il desiderio di "far bene" secondo le aspettative del docente potrebbe agire come motivazione dominante, limitando così il richiamo dalla memoria e inibendo il ricorso ad altri piani d'azione – appresi, per esempio, in contesto aritmetico o risolvendo altre tipologie di equazioni.

Esercizio 4
 Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

[Handwritten student work showing a flawed algebraic derivation:]

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 - x - 2 &= x^2 + x + 1 \\ 2x - x - 2 &= x + 1 \\ 2x - x - x - x &= +2 \\ -x &= +2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?
 no, perché le equazioni si possono risolvere solo in un modo.

Figura 5. Risposta di uno studente al quarto quesito del questionario.

Nel protocollo in Figura 5 si nota come sia radicata l'idea che l'equazione si possa risolvere solo in un modo e non si possa trovare una soluzione alternativa, senza darne una motivazione precisa. Altri studenti riportano invece giustificazioni del motivo per cui non possa esistere un procedimento alternativo, in modo molto dettagliato, elencando precisamente l'ordine dei passaggi che vanno eseguiti per risolvere l'equazione. Ne vediamo un esempio in Figura 6.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$(x^2 + 1 + 2x) - x - 2 = (x^2 + x + x + 1)$$

$$x^2 + 1 + 2x - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{2}{-1}$$

$$x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, non penso di poterla eseguire in altro modo. Questo perché hanno eseguito le operazioni via parentesi. Come prima cosa e successivamente non si può scambiare l'ordine dei fattori essendo in mezzo somme e sottrazioni.

Figura 6. Risposta di un altro studente al quarto quesito del questionario.

Apparentemente questo studente è in grado di anticipare il risultato atteso (della forma $x = N$ come nel caso mostrato in Figura 3) e di avviare un piano d'azione che tuttavia è l'unico possibile e non sembra dipendere dalla particolare forma dell'equazione analizzata. Sembra che lo studente non solo svolga ogni operazione in ordine, ma veda le parentesi come indicatori dell'ordine in cui gli oggetti vadano trattati piuttosto che come strumenti per mettere in evidenza sotto-strutture nell'espressione. Comportamenti analoghi si riscontrano non solo nella soluzione di equazioni, ma anche nelle altre tipologie di quesiti (Figure 7 e 8).

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$4(a^6 - 4b^4)$$

$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché per scomporlo devo usare per forza il raccoglimento totale e poi applicare le regole della scomposizione di binomi.

Figura 7. Risposta di uno studente al terzo quesito del questionario in cui emerge un ostacolo didattico.

Nel caso mostrato in Figura 7, si ipotizza che sia presente un ostacolo dovuto (in modo più o meno esplicito) all'azione didattica che ha portato lo studente a convincersi della necessità di eseguire certe manipolazioni in un certo ordine. Si potrebbe comunque pensare che lo studente possa invece aver effettuato un'anticipazione prevedendo che un diverso ordine nelle manipolazioni avrebbe portato allo stesso esito finale.

Un altro esempio di "regola" che gli studenti hanno espresso è quella per cui per semplificare una data espressione si debbano necessariamente "svolgere le operazioni in ordine" (Figura 8).

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(2x^2+3x+4x+6)(x-2) =$$

$$(2x^2+7x+6)(x-2) =$$

$$2x^3-4x^2+7x^2-14x+6x-12 = 2x^3+3x^2-8x-12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

No, è una semplificazione e si possono solo svolgere in ordine le operazioni

Figura 8. Risposta di uno studente al primo quesito del questionario in cui emerge un ostacolo didattico.

In questo caso lo studente sembra aver appreso questa procedura come regola da seguire ogni volta che incontra un'espressione da semplificare, non preoccupandosi dunque della struttura della specifica espressione oggetto di analisi, ma iniziando a svolgere l'operazione che trova per prima, proseguendo in questo modo finché non ha terminato di svolgere tutte le operazioni successive.

L'interpretazione data dei protocolli suggerisce che questi studenti non abbiano sviluppato la capacità di anticipare nel senso che le loro decisioni sul piano d'azione da attuare non dipendono in nessun modo dall'analisi della struttura dell'espressione per comprendere cosa ci si potrebbe aspettare come risultato finale: appaiono "ingabbiati" in una risoluzione strettamente procedurale focalizzata sulla corretta esecuzione delle operazioni (in un determinato ordine) fino ad arrivare al risultato finale.

I focus group confermano come alcuni studenti seguano delle regole in modo molto rigido, le quali li portano ad effettuare procedure in modo meccanico, senza analizzare ciò che stanno facendo nell'insieme, prevenendo così la possibilità di richiamare dalla memoria strategie alternative tra le quali scegliere il piano d'azione da realizzare. Dai dialoghi con gli studenti emergono queste loro convinzioni, probabilmente dovute al tipo di trasposizione didattica da parte del docente attuale o frutto dell'esperienza con docenti precedenti.

Queste azioni meccaniche e procedurali che gli studenti mettono in atto sono da collegare a un comportamento passivo nei confronti della risoluzione di un quesito e ciò potrebbe dipendere in buona misura dall'insegnamento. Verosimilmente, già dai gradi scolari precedenti, gli studenti non sono abituati ad utilizzare consapevolmente le parentesi come strumenti per organizzare la struttura dell'espressione e ad analizzare le mutue relazioni tra le sotto-strutture che esse individuano.

Dai focus group emerge come alcuni studenti entrino in confusione quando si chiede loro di trovare un modo alternativo per svolgere l'esercizio, poiché è radicata la convinzione che la matematica sia una sola e che essa detti delle regole ben precise e uniche per risolvere esercizi o problemi; non vedono la necessità di trovare strade alternative per arrivare alla soluzione e, mancando la motivazione, non attivano le risorse cognitive previste nel modello di Anokhin. Per esempio una studentessa,

commentando l'utilità della domanda aggiuntiva, dichiara: «A me mandava in confusione perché, se avevo trovato un modo, non capivo perché ci doveva essere un altro».

L'interpretazione che possiamo dare è che sia mancato l'incentivo da parte del docente ad utilizzare diverse strategie, a cercare di creare una base di esperienze pregresse su "procedimenti corretti e non" in modo tale che gli studenti possano sentirsi autorizzati ad utilizzarne più d'uno e, soprattutto, che siano resi consapevoli che possono individuare trasformazioni corrette anche se non coincidenti con lo svolgimento con cui l'insegnante procede abitualmente. Si osserva, però, che negli stessi esercizi, altri studenti delle medesime classi hanno utilizzato procedimenti alternativi, per esempio cambiando l'ordine dei fattori da moltiplicare o sfruttando l'uso del raccoglimento totale o parziale in base a ciò che ritenevano utile ai fini di raggiungere la forma anticipata e non seguendo determinate regole: hanno manifestato quello che Hoch e Dreyfus (2004) definiscono "senso della struttura". Questo suggerisce che questi ostacoli didattici possano esercitare il loro effetto solo in determinate condizioni, forse in interazione con ostacoli di altra natura, come notato nelle sezioni precedenti.

Nei focus group sono risultati interessanti i dialoghi tra studenti che cercavano di convincere altri sul fatto che l'insegnante non aveva fornito loro delle regole rigide da seguire, ma aveva semplicemente consigliato di svolgere determinati passaggi prima di altri; per esempio, in merito al fatto di controllare se si può fare il raccoglimento totale appena si osserva un'espressione, alcuni studenti affermano:

L.: «Boh mi hanno sempre detto che si doveva fare prima il [raccoglimento] totale e allora ho fatto il [raccoglimento] totale».

I.: «Quindi la professoressa ve l'ha data come regola di fare prima il [raccoglimento] totale?»

L.: «Sì!»

A.: «No, come regola proprio no!»

M.: «No».

A.: «No non ce l'ha mai detto, ha detto di farlo se possibile perché poi dopo è molto più facile trovare altri modi, ma non è obbligatorio farlo».

L.: «Sì però dice sempre che, se c'è [la possibilità di fare il raccoglimento] totale, si deve fare».

I.: «Diciamo che quindi vi consiglia di guardare prima se c'è da fare un raccoglimento totale e poi parziale e successivamente scomposizioni?»

L.: «Sì, esatto».

Si potrebbe quindi pensare che gli studenti interpretino le stesse parole dell'insegnante di matematica in modo diverso attribuendo ad esse, in molti casi, un significato coercitivo sulla base di convinzioni consolidate in gradi scolari precedenti o in contesti extra-scolastici.

6 Discussione e conclusioni

Ci siamo chiesti quali tipologie di ostacoli incontrano gli studenti di scuola secondaria nello sviluppo dell'anticipazione in contesto algebrico e come questi influenzino il processo di anticipazione stesso. L'analisi dei dati raccolti mediante la somministrazione di questionari e la realizzazione di focus group ci ha permesso di notare ostacoli di tipo ontogenetico, epistemologico e didattico probabilmente in stretta relazione tra loro, e che possono rendere il processo di anticipazione più o meno efficace.

Gli ostacoli di tipo ontogenetico sono legati allo sviluppo del singolo studente e abbiamo visto che possono effettivamente inficiare la correttezza del decision-making, per esempio quando si fa rife-

rimento a una manipolazione nota ma errata (si veda la Figura 2). Tuttavia, abbiamo anche visto che ostacoli di tipo ontogenetico non precludono necessariamente l'anticipazione (Figura 3). Se le manipolazioni risultassero inefficaci, gli interventi volti a far riflettere, soprattutto, sul loro senso (a livello della componente "azione" del modello di Anokhin), e un confronto sui risultati attesi potrebbero permettere di rimuovere questo tipo di ostacoli.

Potrebbe sicuramente essere più complesso affrontare gli ostacoli che emergono dal mettere in relazione la terminologia che gli studenti hanno già incontrato in contesto aritmetico con le operazioni di trattamento algebrico richieste. Questi ostacoli sembrano agire nel momento in cui lo studente deve confrontare il risultato ottenuto con quello atteso (come si è visto nel caso dei prodotti di fattori), bloccando il loop azione-risultato-confronto e fermando quindi il processo risolutivo. Questo tipo di difficoltà è ben noto in letteratura e sono altrettanto note le strategie didattiche volte a colmare questo gap epistemologico che, come abbiamo osservato, potrebbe essere esacerbato dalle pratiche didattiche. Questa osservazione ci porta a sostenere la posizione dei ricercatori che ritengono che attività di *early algebra* possano supportare lo sviluppo dell'anticipazione (si veda, ad esempio, Malara, 2009). Facendo riferimento ad alcuni degli esempi mostrati, sicuramente gli interventi didattici a supporto del recupero del significato del simbolo di uguaglianza o centrati sulle rappresentazioni non canoniche dei numeri (si veda, ad esempio, Navarra, 2022) possono supportare l'ampliamento dei possibili piani d'azione richiamati dalla memoria a supporto del processo di decision-making, oltre che evitare difficoltà legate alla mancanza di riconoscimento dell'equivalenza tra il risultato ottenuto in un passaggio intermedio e il risultato atteso (Figura 4). Come sostiene Radford (2010), per aiutare gli studenti nella fase di confronto del risultato ottenuto con quanto anticipato, occorre supportarli in quel lento processo di "addomesticamento" dell'occhio che permette di arrivare a vedere e riconoscere le cose secondo mezzi culturali efficienti; quel «processo che converte l'occhio (e gli altri sensi umani) in un sofisticato organo intellettuale – un "teorico"» (Radford, 2010, p. 4).

Tali tipologie di intervento potrebbero essere utili a prevenire gli ostacoli che sembrano avere radice nella didattica. Abbiamo visto come vari studenti manifestino la convinzione che in matematica le procedure siano rigide sia nei passaggi da effettuare che nell'ordine in cui questo deve avvenire. Queste convinzioni appaiono particolarmente problematiche per lo sviluppo dell'anticipazione perché inibiscono completamente l'avvio del ciclo di anticipazione già dalla fase di recupero delle informazioni: tale recupero avviene in base alle motivazioni dominanti che sembrano spesso essere quelle di soddisfare un certo contratto didattico piuttosto che trovare la soluzione del compito. Come sottolineato nel modello di Anokhin l'ambiente può stimolare il recupero di certe risorse (cognitive e materiali) o inibirlo. Gli studenti appaiono convinti della totale mancanza di necessità di decision-making da parte loro e ripetono pedissequamente i passaggi mostrati dall'insegnante, convinti che quella sia l'unica strada possibile. Abbiamo attribuito queste convinzioni a un contratto didattico (Brousseau, 2006) instaurato con il docente di classe attuale o con quelli precedenti. L'insorgere di clausole (implicite o esplicite) del contratto didattico di questo tipo potrebbe essere prevenuto con un insegnamento che stimoli la riflessione metalinguistica e metacognitiva. Si noti che il campione del nostro studio è costituito da studenti di liceo scientifico, ovvero studenti che hanno deliberatamente scelto una scuola in cui la matematica è più presente che in altri indirizzi scolari. Pertanto, si ritiene che la natura delle difficoltà presentate non sia principalmente attribuibile (quantomeno nella sua generalità) a incapacità, difficoltà cognitive o disinteresse verso la disciplina quanto piuttosto all'abitudine a risolvere senza riflettere sui significati (dei termini, delle frasi, delle consegne) o a confrontare strategie argomentando interpretazioni e congetture.

Chiaramente tali tipologie di intervento possono e dovrebbero iniziare molto presto (Navarra, 2022). Quando lo studente ha già maturato tali convinzioni, appare comunque possibile avviare un processo di devoluzione che potrebbe essere innescato proprio dalla rottura di alcune clausole di contratto didattico. La domanda aggiuntiva «Potresti seguire una procedura diversa?» sembra avere un alto potenziale in questo senso. In particolare, nel contesto dei focus group, la discussione su tale domanda

ha portato molti studenti a cambiare la propria posizione. Il confronto con i compagni ha modificato l'ambiente di svolgimento della consegna che, occasionalmente, ha portato a ripensare la propria posizione sui processi messi in atto.

La natura didattica di questi ostacoli suggerisce che potrebbe essere possibile prevenirli ma, quando ormai certe convinzioni si sono formate, sembra che un approccio socio-costruttivista all'apprendimento dei trattamenti algebrici possa permettere di intervenire. La limitata indagine illustrata in questo articolo già mette in evidenza che piccole variazioni dell'ambiente come le consegne (una domanda aggiuntiva nel nostro caso) e il setting d'aula (da lavoro individuale a discussione di gruppo) possano mostrare degli effetti. Ulteriori ricerche possono essere portate avanti per comprendere quali altre consegne potrebbero risultare efficaci (anche in termini quantitativi) per risolvere – o prevenire – gli ostacoli che qui siamo riusciti a mettere in evidenza e descrivere. In particolare, Boero (2001) mette in luce che uno degli elementi costitutivi dei processi di anticipazione è il significato attribuito alle espressioni algebriche che si stanno manipolando. Nel nostro caso, si sono utilizzati quesiti che facevano riferimento a manipolazioni fini a sé stesse. Diversamente, il significato di un'espressione algebrica può riferirsi al contesto di un problema o ai concetti condensati nelle rappresentazioni simboliche impiegate per congetturare, argomentare e dimostrare. Il modello di anticipazione presentato in questo contributo potrebbe essere utilizzato per analizzare consegne di tipo diverso per osservare come i contesti di argomentazione e problem solving influiscano sulla motivazione del solutore e quindi sul richiamo di possibili piani d'azione anche a seconda del significato che lo studente riesce a dare al contesto del problema (ovvero al quadro concettuale attivato nei termini di Arzarello et al., 2001). In particolare, in compiti in cui risulta centrale l'interpretazione (o meglio la significazione) di espressioni algebriche, il risultato atteso – determinato dal significato che è motivo della manipolazione – può informare il decision-making all'interno di tutto il loop azione-risultato-confronto.

Bibliografia

- Anokhin, P. K. (1978). Anticipating reflection of actuality. In F. V. Konstantinov, B. F. Lomov & V. B. Schvyrykov (Eds.), *Philosophical Aspects of the Functional System Theory* (pp. 7–26). Nauka. (Titolo originale: *Ope-rezhajuscheje otrazhenije deistvitel'nosti* pubblicato nel 1962 in *Filosofskie Aspekty Teorii Funktsional'noi Sistemy*).
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 61–81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_4
- Baccaglini-Frank, A. E., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolino, G. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori università.
- Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 99–119). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_6
- Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Springer Science & Business Media.

- Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, 51, 45–65. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.006>
- Gagatsis, A., & Alexandrou, M. (2022). Una revisione della ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi: una "ricerca-azione" sull'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 11, 9–32. <https://doi.org/10.33683/ddm.22.11.1>
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 49–56). PME.
- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173–196. <https://doi.org/10.1023/A:1003606308064>
- Malara, N. A. (2009). Dimostrazione e insegnamento dell'algebra. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 32, 795–818.
- Manion, L., Morrison, K. R. B., & Cohen, L. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge.
- Miragliotta, E. (2022). Geometric prediction: A framework to gain insight into solvers' geometrical reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 65, 100927. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100927>
- Navarra, G. (2022). *Aritmetica e algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni: Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante*. UTET università.
- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2–7.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
- Tooméla, A. (2015). Towards understanding biological, psychological and cultural mechanisms of anticipation. In M. Nadin (Ed.), *Anticipation: Learning from the Past. The Russian/Soviet Contributions to the Science of Anticipation* (pp. 431–456). Springer.
- Vygotskij, L. S. (1980). *Il processo cognitivo*. Bollati Boringhieri.

L'influenza della disomogeneità linguistica di numero nella decodifica di informazioni geometriche: il punto di vista di studenti della scuola elementare e media

The influence of the linguistic inhomogeneity of number in decoding geometric information: the perspective of primary and lower secondary school students

Silvia Sbaragli, Michele Canducci e Silvia Demartini

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI, Locarno – Svizzera

✉ silvia.sbaragli@supsi.ch, michele.canducci@supsi.ch, silvia.demartini@supsi.ch

Sunto / L'articolo presenta un'indagine che ha coinvolto allievi ticinesi e italiani di quarta elementare e di seconda media. Il lavoro rientra nel progetto FNS *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico*, in cui è stato esaminato un corpus di testi scolastici per la scuola elementare e media, incentrato sul contenuto “poligoni”. Uno degli aspetti rilevati riguarda la diffusa presenza di disomogeneità linguistiche rispetto all'indicazione della categoria grammaticale del *numero* nelle parti di testo che presentano gli elementi costitutivi del poligono, spesso presentati in relazione con una rappresentazione figurale. Si è ipotizzato che tali disomogeneità causassero difficoltà nella ricezione ed elaborazione del testo da parte degli allievi. I risultati dell'indagine mostrano che le scelte linguistiche disomogenee nell'uso del singolare e del plurale effettuate dai testi possono in effetti indurre a un'interpretazione errata della numerosità degli enti di un poligono, confermando che elementi linguistici apparentemente minori hanno in realtà importanza per la costruzione del sapere.

Parole chiave: manuale scolastico; poligoni; definizione; lettura del testo; disomogeneità linguistica di numero.

Abstract / The article presents a survey involving fourth and seventh grade students in the Canton of Ticino (Switzerland) and Italy. The work is part of the FNS project *Italmatica. Understanding mathematics at school, between common language and specialised discourse*, in which a corpus of textbooks for primary and lower secondary school was examined, focusing on the content “polygons”. One of the detected aspects concerns the widespread presence of linguistic inhomogeneities with respect to the indication of the grammatical category of *number* in the text parts dedicated to the presentation of the constituent elements of the polygon, often shown in relation to a figural representation. It was hypothesised that these inhomogeneities caused difficulties in pupils' reception and processing of the text. The results of the survey show that the inhomogeneous linguistic choices in the use of singular and plural in the textbooks may lead readers to misinterpret the numerosity of the entities of a polygon, thus confirming that apparently minor linguistic features could have an impact in knowledge building.

Keywords: textbook; polygons; definition; reading; linguistic inhomogeneity of number.

1 Introduzione

Questo contributo si inserisce all'interno del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica), conclusosi a febbraio 2022 dopo un prolungamento di sei mesi rispetto ai tre anni inizialmente previsti. La prima parte del progetto ha avuto come obiettivo l'individuazione, la raccolta e l'analisi, dal punto di vista linguistico e matematico, di un corpus di libri di testo scolastici di matematica in lingua italiana della scuola elementare e media, al fine di delinearne le caratteristiche e i possibili ostacoli per la comprensione di allieve e allievi. Si è concentrata l'attenzione sull'ambito geometrico: in particolare, il tema indagato è stato quello dei poligoni. Questa scelta ha permesso di raccogliere i libri di testo riferiti a sette anni di scolarità; questo perché l'argomento "poligoni" viene proposto con continuità dalla seconda elementare alla terza media, in accordo con l'idea di percorso a spirale per la costruzione di competenze matematiche. In questo modo si è composto un corpus, denominato DFA-Italmatica,¹ sul quale è stato possibile effettuare analisi a diversi livelli, focalizzate su aspetti differenti e tramite una grande varietà di approcci qualitativi e quantitativi. Queste analisi, la cui sintesi è raccolta in un volume (Sbaragli & Demartini, 2021), sono state condotte da un team interdisciplinare di ricercatori e ricercatrici in didattica della matematica e in linguistica, e hanno messo in luce un panorama articolato, dal quale emerge chiaramente come scelte diverse di tipo linguistico e testuale potrebbero influenzare il lettore in fase di apprendimento della matematica.² Il prolungamento del progetto di sei mesi ha inoltre permesso al team di ricerca di svolgere un'indagine qualitativa volta ad approfondire determinati aspetti della comprensione da parte degli studenti, sottoponendo alla loro attenzione alcune parti dei testi analizzati (tale indagine non si era potuta effettuare prima a causa dell'emergenza sanitaria). In particolare, si sono ideati e poi somministrati test scritti e interviste con il fine di porre alla prova dei fatti i rilievi teorici e le ipotesi maturati nei primi tre anni di progetto. Il presente contributo è dedicato proprio a illustrare uno specifico aspetto critico emerso nelle analisi teoriche, interpretandolo in relazione ai riscontri di allieve e allievi. Infatti, se in Canducci, Demartini e Sbaragli (2021, p. 103), l'intento era di

«mettere in evidenza come le diffuse disomogeneità nella realizzazione della categoria grammaticale del *numero*, cioè di plurale e singolare, all'interno di porzioni dei manuali scolastici in cui vengono definiti alcuni enti geometrici relativi ai poligoni, possano produrre una mancanza di aderenza rispetto al sapere matematico in gioco»,

ora, attraverso questa indagine cercheremo di mostrare come la mancanza di aderenza possa in parte incidere sulla costruzione dell'apprendimento.

Nel prossimo paragrafo verranno richiamati alcuni elementi teorici utili a inquadrare le caratteristiche linguistico-matematiche delle definizioni – essendo la definizione l'atto linguistico sul quale si è concentrata la nostra analisi –, con particolare riferimento a questioni riguardanti la categoria grammaticale del *numero* (cioè l'uso del singolare/plurale); si procederà poi a descrivere la metodologia

1. I testi del corpus sono stati raccolti tra quelli editi in Italia e nei cantoni italofoeni della Svizzera (Canton Ticino e Canton Grigioni), arrivando a comporre un corpus di 142 titoli. Tra questi, 129 provengono dal variegato e ampio contesto editoriale italiano; 13 libri dal contesto svizzero, di cui 7 provengono dal Canton Ticino e 6 dal Canton Grigioni. La minore presenza di libri di testo svizzeri è dovuta al fatto che, soprattutto in Canton Ticino, l'utilizzo del libro di testo in ambito didattico non è diffuso. Per un approfondimento dei criteri con i quali è stato costruito il corpus, si veda Sbaragli e Demartini (2021).

2. Proponiamo qui un elenco non esaustivo delle tematiche trattate: gli aspetti strutturali di architettura testuale dei manuali (Demartini, Sbaragli & Ferrari, 2020); gli aspetti lessicali e morfosintattici dei manuali (Canducci, 2020; Canducci et al., 2019a, 2019b; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Demartini & Sbaragli, 2019); gli aspetti legati al rapporto multimodale fra testo e figure nei manuali (Canducci, 2019; Canducci, Rocci & Sbaragli, 2021); gli aspetti legati alle diverse modalità con le quali vengono proposti movimenti testuali di tipo argomentativo (Sbaragli et al., 2021).

seguita per la raccolta dati (par. 3), che saranno poi oggetto di analisi (par. 4), prima di giungere alle conclusioni (par. 5).

2 Quadro teorico

In questo capitolo chiariremo brevemente che cosa si intenda con l'enunciato *definizione* in matematica, in che senso possano rientrare all'interno di questo enunciato elementi di natura linguistica quali la categoria grammaticale di *numero*, e in che senso essa possa risultare disomogenea (oscillante tra singolare e plurale) nelle definizioni degli enti del poligono proposte nei manuali scolastici. Per un ulteriore approfondimento del tema dal punto di vista teorico, rimandiamo a Canducci, Demartini e Sbaragli (2021).

2.1 La definizione in matematica

In matematica, la definizione è un enunciato che stabilisce il significato di una parola o di una espressione attraverso una frase costituita da termini il cui significato si presume già noto. Ciò non è distante da ciò che si intende con definizione nel senso comune, ma non va dimenticato che la definizione in matematica ha delle specificità (ad esempio, la non ridondanza) che ripercorreremo qui di seguito.³

Solitamente – e i manuali scolastici non fanno eccezione – le definizioni di concetti matematici ricalcano la prospettiva aristotelica, secondo la quale *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam* (la definizione si esegue aggiungendo al genere prossimo la differenza che lo specifica). Tali definizioni sono sempre composte di due parti: il *definiendum*, cioè ciò che si vuole definire, e il *definiens*, cioè l'espressione che serve a formulare e a offrire la definizione. Ad esempio, nella definizione "Il vertice è il punto di incontro di due lati", l'espressione "Il vertice" è il *definiendum*, mentre l'espressione "è il punto di incontro di due lati" è il *definiens*. Una conseguenza di questa struttura è il fatto che, quando si definisce un oggetto matematico, lo si sta anche denominando, cioè gli si sta assegnando un nome.

Essendo un enunciato espresso nel linguaggio specialistico della matematica, la definizione presenta le caratteristiche di questo linguaggio:⁴ precisione, concisione, universalità e astrattezza. Le caratteristiche di precisione e concisione sono peculiari dell'enunciazione matematica in generale, e la rendono particolarmente densa a livello informativo (D'Amore, 2000; Laborde, 1995). È infatti molto frequente trovare in un testo matematico espressioni e frasi nelle quali vengono fornite numerose informazioni in poche parole; l'enunciato definitorio non è esente da questa peculiarità, a maggior ragione se si pensa che, storicamente, ha sempre avuto la caratteristica di contenere solo le informazioni necessarie e sufficienti, ossia di non dover risultare ridondante (Aristotele, 1996, p. 238). Si pensi a questa definizione di angolo interno di un poligono: «angolo interno di un poligono è ciascun angolo formato da lati consecutivi contenenti punti del piano interni al poligono». Si tratta di poche parole, 19 in tutto, eppure ci sono elementi morfosintattici e lessicali che rendono la frase matematica precisa e concisa, ma anche estremamente densa di significati e di difficile decodifica: la struttura sintattica caratterizzata in modo ricorsivo da sequenze di sintagmi aggettivali più ulteriori specificazioni (del tipo [formato [da lati consecutivi]...]), l'abbondanza di sintagmi preposizionali (*di un poligono*,

3. Si rimanda anche alle pagine sul tema contenute in Sbaragli e Demartini (2021) e a Demartini, Fornara e Sbaragli (2020).

4. Alcune di esse sono condivise con altri linguaggi specialistici (sui quali si rimanda a Cortelazzo, 2011; Gualdo, 2021; Gualdo & Telve, 2011), mentre certe sono tipiche della lingua speciale della matematica (su cui si veda Sbaragli & Demartini, 2021).

da lati consecutivi, del piano, al poligono), l'utilizzo di forme nominali del verbo (i participi passato e presente *formato*, *contenenti*) che deagentivizzano il discorso, e l'alta specificità del lessico utilizzato. Il linguaggio matematico è inoltre universale, nel senso che si tratta di un linguaggio attraverso cui «chiunque abbia una certa comprensione matematica è in grado di risolvere problemi matematici indipendentemente dalla lingua che parla» (Adoniou & Qing, 2014, p. 3, traduzione degli autori). Pur con i dovuti distinguo culturali provenienti principalmente dagli studi di etnomatematica (Barrow, 2014; Cavanagh, 2005; D'Ambrosio, 1985, 2007), che hanno messo in discussione questa caratteristica assoluta di universalità, il linguaggio matematico si è sviluppato, nel corso dei secoli, in simbolismi specialistici e in tratti linguistici che sono solitamente compresi, e in parte condivisi e utilizzati, nei diversi paesi.

Il linguaggio della matematica tratta inoltre oggetti astratti, intendendo, con ciò, che il referente di ogni discorso matematico non risiede nella realtà empirica, dove invece si trovano solo rappresentazioni di esso. Con particolare riferimento alla geometria, è interessante citare Speranza (1997), il quale afferma che

«le figure, le immagini mentali, sono gli individui di cui si occupa la Geometria: essa parla però di specie, di classi notevoli di figure. Si tratta di un tipico procedimento di astrazione: raggruppiamo le figure che hanno certe caratteristiche comuni in classi, a ciascuna delle quali corrisponde un concetto collettivo ed eventualmente anche un nome comune (cerchio, triangolo, prisma, ...) o un'espressione linguistica che ha la funzione di nome comune (triangolo equilatero, coppie di circonferenze concentriche, ...).».

(Speranza, 1997, p. 18)

Ad esempio, la definizione sopracitata di *angolo interno* raggruppa al suo interno tutte le figure geometriche che hanno la caratteristica di essere un angolo formato da due lati consecutivi del poligono contenenti punti del piano interni al poligono. Si tratta di una definizione che corrisponde a un concetto collettivo, una classe di figure, e che è frutto di un procedimento di astrazione. Inoltre non è possibile "afferrare" concretamente un angolo, ma solo concepirlo ed eventualmente cercare di rappresentarlo.

Da queste prime riflessioni emerge come la decodifica e poi la comprensione piena di enunciati linguistici come quelli definitivi sia possibile solo se si conosce il significato matematico dei termini specialistici, ma ciò non è sufficiente: occorre anche saperli connettere tra loro e con le altre parole presenti, e sapersi orientare nei costrutti sintattici; inoltre, poiché la comprensione è un'operazione complessa, sono spesso richieste ulteriori azioni cognitive (come la gestione di elementi impliciti, il richiamo appropriato di conoscenze pregresse sull'argomento e l'elaborazione di inferenze).

2.2 La dimensione di numero nelle definizioni degli enti del poligono

Nella grammatica italiana, il *numero* è la categoria che serve a codificare e a veicolare la quantità di ciò a cui ci si riferisce (Grandi, 2011a). Riprendendo Salvi e Vanelli (2004, p. 131), «il singolare indica che il referente cui si rimanda è "uno", il plurale indica invece una "pluralità" di referenti». Secondo le grammatiche più tradizionali, e spesso anche nella percezione comune, tale categoria riguarda principalmente nomi e pronomi; in realtà, si tratta di un elemento estremamente pervasivo della lingua, che coinvolge non solo varie altre parti del discorso (aggettivi, articoli, altri quantificatori, verbi). Senza entrare in eccessivi tecnicismi, è sufficiente in questa sede ricordare i principali modi e mezzi espressivi offerti dall'italiano per veicolare l'idea di singolare e quella di plurale.

Iniziamo col dire che, nelle azioni comunicative di tutti i giorni, l'assegnazione del *numero* è generalmente piuttosto chiara in quanto basata sulla semantica: se un'entità è presente in un solo esemplare se ne parlerà al singolare, mentre se il numero di esemplari è maggiore o uguale a due, se ne parlerà al plurale. Esistono però alcuni possibili impieghi particolari, come, ad esempio, quello del singolare

senza valore quantificativo, usato per designare un'intera classe di elementi, in casi come "Il gatto è un mammifero quadrupede...", "Il poligono è una parte di piano...". Si tratta di modi di esprimersi tipici di testi come quelli enciclopedici o dei manuali scolastici. Vedremo come quest'uso, nel testo scolastico di matematica, possa spesso mescolarsi a impieghi strettamente referenziali, originando incoerenze: ciò si nota molto di frequente nelle parti dedicate agli enti del poligono, presentati in modo spesso oscillante fra numerosità effettiva e ricorso al singolare senza valore quantificativo.

Dal punto di vista grammaticale, la categoria di *numero* viene marcata in primo luogo dalla desinenza della flessione nominale, che contiene al suo interno anche l'informazione relativa al genere: vertice / vertici; angolo / angoli; bambino / bambina / bambini / bambine. A catena, tutti gli altri elementi, come articoli, aggettivi, pronomi e verbi si accordano con il nome cui si riferiscono.

Oltre alla marca morfologica, esistono altri elementi linguistici, detti *quantificatori*, che servono a distinguere singolare e plurale:

- articoli: possono essere determinativi singolari o plurali (*il, lo, la, i, gli, le*) o indeterminativi singolari e plurali (*un, una*, e partitivi come *dei, delle*); in alcuni casi, come si è accennato, l'articolo determinativo può anche «marcare un nome come esponente di una intera classe, attribuendogli quindi valore generico e non referenziale» (Grandi, 2011b): ad esempio, *il poligono è una figura geometrica; la scuola è importante; il cavallo è un erbivoro*;
- quantificatori definiti o forti: esprimono la numerosità in modo preciso (aggettivi numerali come *uno, due, tre* ecc.);
- quantificatori indefiniti intrinseci: tipicamente al singolare anche se hanno valore distributivo, in quanto focalizzano l'attenzione sui singoli elementi di una collettività (*ogni, ciascuno* ecc.);
- quantificatori indefiniti non intrinseci: esprimono quantità approssimate (*pochi, alcuni, molti, tanti, un po' di* ecc.).

Questo elenco, sebbene non esaustivo, permette già di chiarire alcune peculiarità linguistiche che sarà utile trasferire in ambito matematico. Ad esempio il fatto che, se non vengono utilizzati esplicitamente aggettivi numerali cardinali maggiori di uno, le risorse linguistiche per il plurale non consentono di stabilire il numero esatto degli elementi di cui si sta parlando. Questa peculiarità del linguaggio naturale risulta particolarmente significativa per un'analisi nell'ambito della matematica, in cui spesso entrano in gioco diverse numerosità; ad esempio, sappiamo che un poligono è una figura piana che può avere un numero di angoli interni di qualsivoglia quantità maggiore o uguale a tre. Sembra arduo riuscire a mettere in evidenza questa caratteristica attraverso una definizione compatta che, linguisticamente, prevede un'unica distinzione, quella fra singolare ("uno") e plurale ("più di uno", oppure "tutti"). Questa impossibilità legata ad aspetti linguistici si riscontra non solo quando si fa riferimento alla pluralità infinita di uno stesso tipo di elementi, ma anche quando ci si riferisce all'infinità di tipi di elementi presenti in matematica, come gli infiniti insiemi di figure, per i quali le espressioni linguistiche risultano assai limitate:

«la cardinalità (potenziale) degli insiemi di figure è ben maggiore di quella delle espressioni linguistiche. Quindi lo strumento linguistico non sarà mai sufficiente a descrivere esaurientemente i fatti geometrici. Ci dobbiamo comunque preoccupare di renderlo il più adeguato possibile».

(Speranza, 1997, p. 5)

Nel progetto sopra menzionato ci si è dunque chiesti se questa preoccupazione manifestata da Speranza venga considerata nei libri di testo per la scuola elementare e media, e se la mancanza di questa attenzione possa avere ricadute sul processo di lettura e comprensione, e dunque poi sull'apprendimento dei concetti geometrici.

2.2.1 La disomogeneità di numero nella definizione degli enti di un poligono

La nostra analisi si è focalizzata sulle definizioni degli elementi del poligono, prestando particolare attenzione agli aspetti di numero. Consideriamo un poligono di 5 lati: esso avrà 5 angoli interni, 5 vertici, 5 altezze, 10 angoli esterni (dei quali se ne considerano di solito solo 5), 5 diagonali. In generale, infatti, un poligono di n lati ha n angoli interni, n vertici, n altezze, $2n$ angoli esterni (dei quali se ne considerano di solito solo n), e un numero di diagonali dato dall'espressione $n(n-3)/2$. Un qualsiasi poligono ha poi sempre un solo contorno e una sola superficie, fatto da cui si deduce che le grandezze perimetro e area, associate rispettivamente alla lunghezza del contorno del poligono e alla grandezza che caratterizza la superficie del poligono, siano presenti in quantità uguale a uno. Ora, i manuali scolastici di geometria solitamente definiscono, in una porzione compatta e unitaria di testo, diversi elementi del poligono; questo comporta, per ognuno degli enti per cui è possibile farlo, la scelta di utilizzare il singolare o il plurale. Tali scelte possono poi risultare *omogenee*, se si sceglie di utilizzare il plurale (categoria *omogenei plurale*) o il singolare (categoria *omogenei singolare*) per tutti gli enti, o *disomogenee*, se si sceglie di utilizzare il singolare per alcuni enti e il plurale per altri. In realtà, l'analisi presentata in Canducci, Demartini e Sbaragli (2021) mostra che la categoria *omogenei singolare* non è presente nelle porzioni di libri di testo di geometria che definiscono gli elementi del poligono del corpus DFA-Italmatica. Chiariamo attraverso due esempi che cosa intendiamo con le categorie *omogenei plurale* e *disomogenei*.

Omogenei plurale. In questa categoria rientrano casi in cui, per tutti gli enti per cui è possibile farlo, in quanto si presentano in un numero maggiore di uno (*lati*, *vertici*, *angoli* e così via), si sceglie di utilizzare esclusivamente il plurale, mentre enti unitari come il *contorno* e la *superficie*, e le grandezze *perimetro* e *area* sono ovviamente espresse, qualora si scelga di definirle, al singolare. A questa omogeneità corrisponde quindi un'aderenza fra numerosità dell'oggetto e numerosità della lingua, pur non potendo esplicitare in tale definizione il numero preciso degli elementi. In Figura 1 (3_4, p. 327)⁵ è mostrato un esempio, tratto da un manuale di quarta scuola elementare, in cui si definiscono tramite il plurale gli enti *lati*, *vertici*, *angoli interni* e *diagonali* e ovviamente tramite il singolare l'ente *superficie*:

- i **lati** sono i segmenti che formano il contorno del poligono;
- i **vertici** sono i punti in cui si incontrano due lati consecutivi;
- gli **angoli interni** sono le parti di piano comprese fra due lati consecutivi;
- le **diagonali** sono i segmenti che uniscono due vertici non consecutivi;
- la **superficie** è la parte di piano racchiusa dai lati.

Figura 1. Esempio di utilizzo omogeneo del plurale (quarta elementare).

5. La catalogazione dei manuali del corpus del progetto *Italmatica* è avvenuta attraverso l'attribuzione di un codice di identificazione univoco composto da due numeri separati da un "_": il primo numero indica la posizione del titolo nella graduatoria delle adozioni in Italia su base nazionale relativa all'anno 2017/2018; il secondo numero indica invece il grado scolastico corrispondente. I titoli meno adottati per ciascun sottogruppo sono stati codificati in modo leggermente diverso. Anche in questo caso, a ciascun libro è stato attribuito un codice di identificazione composto da due numeri separati da un "_", ma a questo codice è stata anteposta la lettera "c", abbreviazione di "coda"; inoltre, anche in questo caso il primo numero indica la posizione del titolo nella graduatoria delle adozioni, ma ordinata a partire dal meno adottato.

Disomogenei. In questa categoria rientrano casi in cui, nella stessa porzione di testo, si utilizza il plurale per alcuni enti e il singolare per altri, pur trattandosi di enti equinumerosi o comunque presenti nel poligono in quantità maggiore di uno. Dall'osservazione dei testi abbiamo riscontrato due sotto-categorie di analisi:

1. Disomogeneità dovuta all'uso del singolare/plurale nel *definiendum* (sottocategoria *Definiendum*).
2. Disomogeneità dovuta all'uso di quantificatori nel *definiens* (sottocategoria *Definiens*).

In Canducci, Demartini e Sbaragli (2021) vengono presentati e discussi esempi riferiti a ciascuna di queste sottocategorie. Poiché il questionario i cui risultati verranno discussi in questo articolo conteneva solo porzioni di testo rientranti nella sottocategoria *Definiendum*, ci limiteremo qui a fornire un esempio di questa sottocategoria, rimandando al già citato articolo per un approfondimento puntuale di tutte le categorie.

Dunque, come dichiarato poc'anzi, nella sottocategoria *Definiendum* l'oscillazione nel *numero* è a carico del *definiendum*. Ad esempio, come emerge nel seguente esempio (Figura 2, 1_3, p. 81), in una stessa porzione di testo si ritrovano i termini *lati*, al plurale, e *angolo* e *vertice* al singolare.

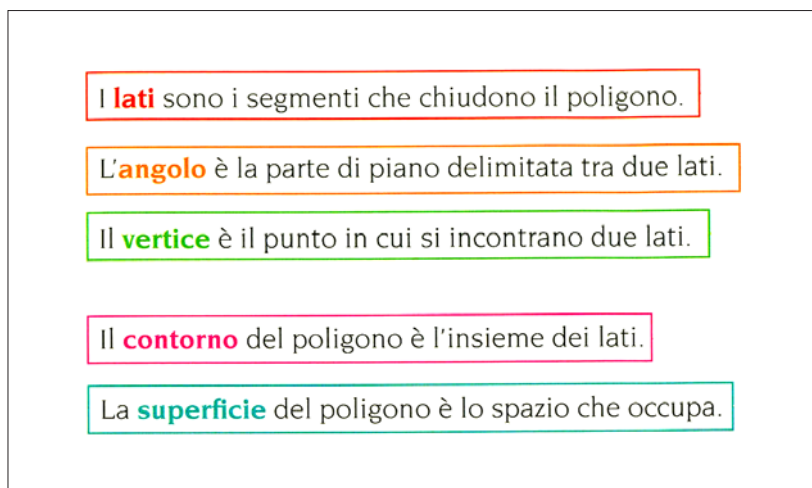


Figura 2. Disomogeneità dovuta all'uso del singolare/plurale nel *definiendum* (terza elementare).

Va inoltre osservato che molte volte le definizioni degli enti di un poligono presenti nei manuali sono affiancate da figure pensate per sostenere ciò che viene espresso in forma verbale; l'uso di questo doppio registro semiotico non è detto però che permetta sempre di semplificare la comunicazione: potrebbe anche ostacolarla, soprattutto se le strategie semiotiche (ad esempio l'uso del colore) non vanno a comporre un testo coerente dal punto di vista multimodale.⁶ Richiami cromatici, frecce, riquadri, forme di enfasi grafica come grassetto e corsivo sono solo i principali elementi che si possono trovare accostati in un manuale scolastico per cooperare, ipoteticamente, alla costruzione di significato, alla gerarchizzazione e alla messa in relazione dei contenuti. E forse è ancora poco studiato quanto aspetti scarsamente funzionali a questo livello, in dialogo con parole e immagini, possano complicare l'interpretazione del testo e la costruzione del sapere corretto.

6. Per un approfondimento sulla realizzazione multimodale della testualità di testi matematici si veda Canducci, Rocci e Sbaragli (2021), e Sbaragli e Demartini (2021).

3 La raccolta dati

Dopo aver richiamato alcuni degli aspetti che hanno costituito la base teorica delle ipotesi formulate in fase di analisi delle definizioni dei libri di testo, nel prossimo paragrafo descriveremo l'impianto metodologico della nostra ricerca finalizzata a rilevare il punto di vista di allieve e allievi sull'aspetto di numero all'atto della lettura di alcuni estratti.

3.1 Aspetti metodologici

La rilevazione effettuata è di tipo internazionale, in quanto ha coinvolto un campione di classi quarte di scuola elementare e classi seconde di scuola media appartenenti a due distinte aree di italoфонia (Canton Ticino e Italia) (par. 3.1.1); pertanto, è stato anche possibile elaborare alcune analisi in prospettiva comparativa. La raccolta dati è stata impostata in due fasi: una prima fase effettuata tramite un questionario che ha coinvolto tutta la classe (par. 3.1.2) e una seconda fase orale avvenuta tramite un'intervista individuale, che ha coinvolto alcune/-i allieve/-i selezionate/-i sulla base delle risposte precedentemente fornite in forma scritta, allo scopo di approfondire le motivazioni sottese alle varie scelte (par. 3.1.3).

Nel loro insieme, le due fasi della raccolta dati sono state costruite per sollecitare e osservare le seguenti azioni nei soggetti testati:

- leggere e comprendere estratti di libri di testo sul tema poligoni già affrontato a scuola;
- esplorare e mettere in relazione le diverse componenti testuali, figurali e multimodali di estratti di testo;
- confrontare testi diversi (su uno stesso contenuto) che presentano modalità comunicative e caratteristiche diverse;
- cogliere il significato globale dei testi e, al contempo, isolarne specifici elementi, e pronunciarsi su di essi (anche in modo guidato tramite le interviste);
- esprimere giudizi sui testi in esame (quale parte aiuta a capire meglio? Perché?);
- esplicitare le proprie difficoltà di comprensione;
- formulare suggerimenti migliorativi.

Ciò al fine di mettere in relazione gli elementi di ipotetica difficoltà emersi dalle analisi teorico-descrittive interdisciplinari dei libri di testo effettuate in seno al progetto *Italmatica* con le reali operazioni di ricezione ed elaborazione da parte di allieve e allievi fruitori dei libri. L'osservazione e l'analisi delle difficoltà realmente riscontrate permette infatti di completare il quadro della ricerca, superando la sola fase di analisi a priori delle criticità testuali e disciplinari.

3.1.1 Descrizione del campione

In Tabella 1 è sintetizzata la composizione del campione di allieve e di allievi che hanno partecipato alla ricerca nelle due parti scritta e orale, e la loro distribuzione territoriale.

	Numero allieve/i Canton Ticino	Numero allieve/i Italia	Totale numero allieve/i
Questionari scritti quarta SE	91 (5 classi)	68 (4 classi)	159
Questionari scritti seconda SM	82 (4 classi)	125 (7 classi)	207
Interviste orali quarta SE	60	15	75
Interviste orali seconda SM	47	15	62

Tabella 1. La composizione del campione (SE sta per scuola elementare, SM per scuola media).

3.1.2 I questionari scritti e le domande oggetto di analisi

I questionari per la scuola elementare ([Allegato 1](#)) e per la scuola media ([Allegato 2](#)) sono stati costruiti in parallelo, affinché potessero portare a osservare elementi analoghi, seppure a differenti livelli di profondità in relazione alle diverse età delle allieve e degli allievi. Anche le abilità di lettura sono state considerate, quindi il questionario per la quarta elementare risulta più breve e meno complesso rispetto a quello per la seconda media. Inoltre, un pre-test in classi di terza e quarta elementare ha fatto emergere alcune difficoltà da parte delle allieve e degli allievi di terza nel comprendere le richieste, per poter poi agire in modo autonomo. Si è dunque optato per le classi quarte, in cui l'argomento *poligoni* risulta già essere stato affrontato e le abilità di lettura si rivelano mediamente più consolidate; in questo modo, è stato più accessibile per lettrici e lettori riuscire a concentrarsi sugli aspetti metariflessivi (cioè di riflessione sulle specificità linguistiche, figurali e matematiche degli estratti di testo in esame), anche se le conoscenze sui poligoni potrebbero essere già state acquisite e, dunque, non essere messe in discussione da un estratto di un testo. Questa scelta ha comportato che dai questionari non si siano potute ricavare informazioni su eventuali atteggiamenti e difficoltà di allieve e allievi che leggevano per la prima volta un testo su un certo argomento di geometria; piuttosto, sono stati utili per ricavare le osservazioni di allieve e allievi che già conoscevano (correttamente o in modo erroneo) un argomento rispetto a come questo veniva proposto dai libri di testo, cogliendone possibili passaggi critici e scelte non ideali dal loro punto di vista.

Domande su singolare e plurale. In ciascuno dei due questionari era presente una domanda (n. 4 per le elementari, n. 6 per le medie) volta a indagare le conseguenze, in termini di decodifica e comprensione, di una oscillazione testuale tra singolare e plurale nel definire gli enti di un poligono. Entrambe le domande prevedevano dapprima l'esposizione dello studente alla lettura di una porzione di testo disomogenea nell'uso del singolare/plurale all'interno del *definiendum* (par 2.2.1). Una volta letto il testo, venivano fatte, per ciascuno degli enti definiti, due richieste:

1. dichiararne la quantità, scegliendo tra due opzioni disponibili (uno, oppure più di uno);
2. indicare nel testo o scrivere in un apposito spazio le parole o le frasi che avessero fatto capire la risposta da dare.

Riportiamo di seguito gli estratti dei testi dei manuali e le relative domande su singolare e plurale poste nei due questionari. Alle bambine e ai bambini di quarta è stata posta in lettura una breve parte di un testo di terza e, analogamente, alle ragazze e ai ragazzi di seconda media è stata sottoposta in lettura una parte estratta da un volume per la classe prima. Infatti, è nei volumi per queste classi che l'argomento poligoni è trattato più approfonditamente, a diversi livelli di complessità e di dettaglio. Inoltre, abbiamo optato per questa scelta nell'ottica di rendere allieve e allievi più solidi e autonomi nell'elaborazione di osservazioni propriamente "metatestuali" (cioè orientate a valutare l'efficacia del testo). Alla luce delle difficoltà riscontrate nel pre-test a effettuare riflessioni sul testo da parte delle allieve e degli allievi di scuola elementare, per questo livello scolastico si è scelto di fornire un estratto espresso solo in forma linguistica, così da focalizzare maggiormente l'attenzione su questo registro semiotico, e non disperdere le osservazioni su conversioni tra un registro e un altro. Immagini di poligoni erano presenti nelle domande precedenti, dunque ne erano comunque già venuti a contatto. Per la scuola media, invece, si è previsto un estratto di testo in cui sono previsti entrambi i registri, linguistico e figurale.

Domanda scuola elementare. Osserviamo ora il brano proposto nel manuale di quarta elementare e la domanda 4a (le successive, sugli altri enti, cioè la 4b e la 4c, presentano la stessa struttura) del questionario ([Figura 3](#), 16_3, p. 207).

I **lati** sono i segmenti che formano il **poligono**.
 Il **vertice** è il punto di incontro di due lati.
 I vertici si indicano con lettere maiuscole.
 L'**angolo**, anche nel poligono, è la parte di piano racchiusa tra due lati.

Figura 3. Porzione testuale di un manuale di terza elementare oggetto di analisi dell'item.

Di seguito si riporta la prima domanda posta in quarta elementare (4a):

A partire da ciò che hai appena letto, rispondi alle seguenti domande:

a) Quanti sono i lati di un poligono?

☐ Uno ☐ Più di uno

Indica nel testo o scrivi qui sotto se c'è una parola o una frase che te lo fa capire.

La porzione di testo del manuale di quarta elementare risulta linguisticamente disomogenea nella gestione della categoria grammaticale di *numero*. Tale disomogeneità si manifesta nell'oscillazione di desinenza dei vari *definiendum*, che vengono presentati al singolare (nel caso di *vertice* e *angolo*) e al plurale (nel caso di *lati*), pur trattandosi per tutti e tre i casi di enti presenti in numero maggiore di uno. Un lettore non abituato a operare inferenze sulla base di impliciti testuali potrebbe non accorgersi, ad esempio, che poiché in un poligono ci sono almeno tre lati, e poiché il vertice è il punto di incontro di due di questi, allora necessariamente ci sono anche almeno tre vertici (analogo discorso varrebbe per l'angolo). Questo potrebbe condurlo a costruirsi un'errata comprensione del concetto in gioco, e cioè che in un poligono ci siano più lati, ma solo un vertice e un angolo.

Inoltre, l'ente vertice viene presentato ben due volte: la prima, come *definiendum* della definizione vera o propria, al singolare; la seconda, subito dopo, al plurale, all'interno di una frase che specifica un'informazione di carattere notazionale ("I vertici si indicano..."). Questo potrebbe aumentare la confusione di un lettore che si approccia al testo senza opportuni strumenti non solo di decodifica, ma soprattutto di ricostruzione delle informazioni presentate, o favorirla mettendo in discussione la singolarità dell'ente geometrico coinvolto.

Domanda scuola media. La figura seguente è la porzione di manuale presentata alle alunne e agli alunni di seconda media (Figura 4, 19_6, p. 142):

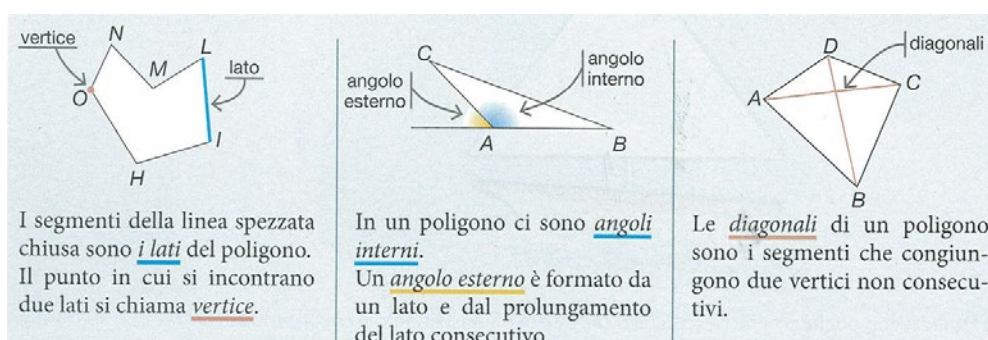


Figura 4. Porzione testuale di un manuale di prima media oggetto di analisi.

Di seguito si riporta la prima domanda riferita ai lati (6a); come per il caso della scuola elementare, le successive domande (6b, 6c) relative agli altri enti presentano richieste analoghe.

A partire da ciò che hai appena letto, rispondi alle seguenti domande:

a) Quanti sono i lati di un poligono? ☐ Uno ☐ Più di uno

Indica nella parte di libro o scrivi qui sotto se c'è una parola, una frase o una immagine che te lo fa capire.

La porzione di manuale proposta agli studenti può essere suddivisa in due parti: in quella in basso vengono fornite le definizioni linguistiche di diversi elementi del poligono (i *definiendum*); in quella in alto troviamo una compresenza di elementi linguistici di tipo denominativo e di figure (a cui i termini denominativi si riferiscono, collegati tramite frecce). Per comprendere meglio l'alternanza di scelte nell'espressione della numerosità degli elementi nel breve estratto, sintetizziamo nella seguente tabella le varie combinazioni di utilizzo del singolare o del plurale nel *definiendum*, nei termini denominativi e nelle figure.

	Lati	Vertici	Angoli interni	Angoli esterni	Diagonali
Desinenza nel <i>definiendum</i>	Plurale	Singolare	Plurale	Singolare	Plurale
Desinenza nel termine denominativo	Singolare	Singolare	Singolare	Singolare	Plurale
Numerosità degli elementi evidenziati nelle figure	Uno	Uno	Uno	Uno	Due

Tabella 2. Varie combinazioni di uso del singolare o del plurale nei *definiendum*.

Nelle definizioni, i *definiendum lati*, *angoli interni* (di cui non viene data vera e propria definizione) e *diagonali* sono al plurale, mentre *vertice* e *angolo esterno* sono al singolare. Questo già di per sé è indicatore di disomogeneità nel trattare la numerosità degli enti di un poligono. Inoltre, la confusione risulta amplificata se si considera la parte superiore della porzione di manuale: in questa parte vengono rappresentati tre poligoni che servono per esemplificare a livello figurale gli enti che si stanno definendo. Si sceglie di rappresentare, utilizzando diversi colori, un solo esponente per gli enti *vertice*, *lato*, *angolo esterno* e *angolo interno*; due esponenti, invece nel caso delle *diagonali*. Questa scelta figurale corrisponde alla scelta linguistica operata per specificare le diverse denominazioni degli enti attorno alle figure: ad esempio, la parola *lato* al singolare, da cui parte una freccia che indica un unico segmento; oppure la parola *diagonali*, da cui parte un'unica freccia (ci domandiamo: perché non due?) che indica le due rappresentazioni figurali corrispondenti. Ma questa corrispondenza lingua-figura non aiuta nella decodifica di informazioni di numero, anzi, complica ancora di più la questione, perché la logica di numerosità seguita – anch'essa al suo interno disomogenea – è diversa (tranne nel caso delle diagonali) da quella linguistica presentata nella sezione in basso: ad esempio, un lettore che si trovasse a dover coordinare tutte le informazioni di numero relative all'ente *lato*, avrebbe a che fare

con due informazioni discordanti: nella definizione in basso si usa il plurale; nell'atto denominativo in alto si usa il singolare; nella figura viene evidenziato in blu un solo lato. Dunque, se leggessimo unicamente questa porzione di testo e volessimo ricavare da essa conoscenze, quanti lati potremmo affermare che ha un poligono? Uno o più di uno?⁷ E soprattutto, quale sforzo inferenziale e analogico dovremmo operare come lettori, magari non ancora esperti del tema?

3.1.3 Le interviste orali

Come si è detto al par. 3.1, oltre al questionario scritto si è deciso di effettuare con un campione ridotto di allieve e allievi un'intervista orale, allo scopo di approfondire la natura di determinate risposte. Sulla scia di Lumbelli (2009), si è infatti pensato che fosse utile andare a fondo nell'esplorazione dei processi di lettura di allieve e allievi attraverso un'intervista semi-strutturata, del tipo "colloquio di lettura", pensata per cercare di aiutare i giovani interlocutori a rendere più esplicite le loro osservazioni e le loro difficoltà. Sia per la scolarità elementare sia per la media si è predisposta una traccia di domande e di input, differenziabile e adattabile in base alle diverse risposte fornite per iscritto e oralmente dal singolo interlocutore, che viene mostrata di seguito.

Ciò è stato previsto ipotizzando la scarsa o nulla abitudine di allieve e allievi di scuola elementare e media a rispondere a (e a porsi) domande metariflessive sulla qualità di un testo, e alla poca dimestichezza dei soggetti coinvolti nella scrittura di risposte a quesiti di questo tipo; da qui, l'idea di sollecitare l'approfondimento in forma orale dialogica. Inoltre, non si è potuto dimenticare che le lettrici e i lettori delle giovani generazioni sono, in genere, abituate e abituati sempre più e sempre da prima a operare in ambienti digitali, e rischiano di considerare

«l'analisi del testo e la ricerca di strati di significati più profondi sempre più anacronistici, a causa dell'abitudine all'immediatezza e all'apparente completezza delle informazioni mostrate dallo schermo di un computer; informazioni che sembrano tutte accessibili senza sforzo critico e apparentemente senza alcun bisogno di andare oltre l'informazione offerta».

(Dehaene, 2009, p. 244)

Per prevenire il rischio di trovarci di fronte unicamente a "decodificatori" di informazioni senza consapevolezza né comprensione profonda, occorrerebbe promuovere la pratica di parlare dei processi che chi legge attiva nel cercare di collegare tra loro le parti del testo e di interpretarle, evitando di dare per scontati o di considerare non degni di attenzione i passi percorsi dal lettore durante la lettura. Le domande-sollecitazioni dell'intervista sono state ideate secondo tre tipi, per sondare diverse componenti della comprensione (percezione di difficoltà, precedenti esperienze di lettura di testi analoghi, attenzione alle varie componenti dell'estratto, inferenze e collegamenti, considerazioni sulle formulazioni linguistiche):

- domande iniziali (su percezioni ed esperienze di lettura precedenti: «Hai fatto fatica a leggere questi testi?»; «Avevi già letto testi come questi?»);
- domande che ripetevano con altre parole (semplificando) la domanda scritta, per vedere se magari non era stata compresa; ad esempio, rispetto alla domanda 1 del questionario «Quale delle due spiegazioni (parte A o parte B) ti ha aiutato a capire meglio che cos'è un poligono e quali sono i suoi elementi?» se la spiegazione scritta era molto scarna o nulla, si è posta una nuova formulazione in questo modo: «Prova a rileggere questi due estratti a voce alta, con calma, e pensa se

7. La porzione in esame è resa ulteriormente complessa dall'utilizzo di elementi multimodali come il colore o la prossimità spaziale, utilizzo che dovrebbe avere il fine di favorire il processo di conversione semiotica del lettore, ovvero la capacità cognitiva di riconoscere uno stesso oggetto matematico espresso attraverso registri semiotici differenti. Non è qui il caso di aggiungere ulteriori prospettive di analisi: rimandiamo chi fosse interessato alla riflessione sulla realizzazione multimodale della testualità in testi matematici ai già citati Canducci, Rocci e Sbaragli (2021), e Sbaragli e Demartini (2021).

c'è una delle due spiegazioni che ti sembra fatta meglio. [lettura] Quale hai preferito/trovato più chiara? Riesci a dirmi con parole tue perché?»;

- domande che volevano ricavare ulteriori informazioni o chiarimenti, come «Mi rispieghi con parole tue perché hai barrato...? Che cosa te l'ha fatto dire? Prova a indicarmelo nella frase»; «Conosci il significato delle parole? Ce ne sono che non avevi mai sentito?»; «Cerca di farmi capire bene dove hai trovato questa informazione e perché hai segnato proprio questo».

Inoltre, per approfondire le domande 4 e 6, dedicate al cogliere le percezioni della disomogeneità fra indicazioni plurali e singolari linguistiche e figurali, si è seguita la seguente traccia:

- «Hai segnato che i lati/i vertici/gli angoli ecc. sono...». Se non era specificato nella risposta scritta: «Dove hai trovato l'informazione nel testo?». Se era specificato nella risposta scritta: «Hai scritto che hai trovato questa informazione qui... Me lo puoi ripetere/rispiegare a voce, cercando di farmi capire bene dove hai trovato l'informazione e perché hai segnato proprio questo?» [Osservare come indicano, ad esempio col dito su una parola o su altri elementi];
- «Vedi altri elementi che ti hanno aiutato a capire quanti sono i lati?»;
- «C'è qualcosa che ti ha confuso o che ti ha reso difficile rispondere?»;
- Solo se occorre (non indicato nella risposta scritta): «Quindi quanti sono secondo te i lati del poligono?»;
- «Questo vale per tutti i poligoni o solo per questo?»;
- «Vuoi aggiungere qualcosa su quello che hai letto?».

Nel caso, si è aggiunto anche uno stimolo esplicito sull'argomento d'interesse, che aiutasse a portare l'attenzione sul fenomeno senza però indirizzare la risposta, del tipo: «Puoi vedere che, per esempio, qui si parla di lati al plurale, ma di angolo al singolare... Vedi che nella parte scritta si parla di lati, ma qui sulla figura è evidenziato un lato solo... Ti sembra comunque chiaro o secondo te potrebbe generare confusione in chi impara? Come ti sembrerebbe più opportuno fare?».

4 Analisi

Procederemo ora con le analisi delle risposte alle domande in forma scritta (partendo dalla scuola elementare per poi passare alle medie), su cui sarà possibile vedere dei rilievi quantitativi; questi saranno sostenuti da alcuni estratti di interviste orali, che permettono di capire più a fondo le motivazioni di alcune scelte, e le riflessioni di allieve e allievi. Globalmente, possiamo affermare che tutti i colloqui di lettura svolti hanno permesso di ricavare uno o più elementi rispetto alle sole risposte scritte, ed allieve e allievi hanno saputo motivare e argomentare le loro idee in modo più accurato grazie alle sollecitazioni proposte.

4.1 Risultati della scuola elementare

4.1.1 Risultati del questionario

La seguente Tabella 3 propone i risultati quantitativi relativi alla domanda 4 del questionario proposto ai 91 studenti di scuola elementare ticinesi.

Ricordiamo che la domanda era suddivisa in tre item: l'item 4a si riferiva alla numerosità dei lati di un poligono, l'item 4b alla numerosità dei vertici, l'item 4c alla numerosità degli angoli.

	Uno	Più di uno	Nessuna risposta	Foglio mancante
Domanda 4a: numerosità dei lati	0 / 0,0%	89 / 97,8%	1 / 1,1%	1 / 1,1%
Domanda 4b: numerosità dei vertici	16 / 17,6%	72 / 79,1%	3 / 3,3%	0 / 0,0%
Domanda 4c: numerosità degli angoli	13 / 14,3%	69 / 75,8%	5 / 5,5%	4 / 4,4%

Tabella 3. Distribuzione delle risposte degli studenti di scuola elementare ticinesi alla domanda.

La maggior parte delle allieve e degli allievi risponde correttamente a ciascuno dei tre item, anche se con percentuali differenti per i tre enti geometrici. Prendiamo in analisi la distribuzione delle risposte errate, riferite cioè al ritenere “uno” la risposta corretta. Mentre zero allieve/-i ritengono che un poligono abbia un unico lato, diversa è la questione quando si passa ai vertici e agli angoli: 16 allieve/-i (il 17,6%) ritengono che un poligono abbia un solo vertice, e 13 allieve/-i (il 14,3%) ritengono che un poligono abbia un solo angolo. Va ricordato che l’estratto del manuale tratta la numerosità degli enti matematici in modo diverso; in particolare, se la parte d’estratto relativa al lato presenta l’ente con *definiendum* al plurale, e quella relativa al vertice lo presenta dapprima con *definiendum* al singolare, e nella frase subito successiva con desinenza al plurale, la parte relativa all’angolo presenta invece questo ente solo con il *definiendum* al singolare. Sembra quindi che le scelte linguistiche di numerosità effettuate dal testo possano indurre a interpretare la numerosità degli enti da parte delle allieve e degli allievi in modo conseguente: se l’ente viene trattato linguisticamente al singolare (cioè se il *definiendum*, in prima posizione, è al singolare), alcune/-i alunne/-i concludono che l’ente sia in quantità uguale a uno. Tale ipotesi è stata confermata anche dalle risposte alle interviste, di cui alcuni estratti vengono riportati nel par. 4.1.2.

La seguente tabella (Tabella 4) propone i risultati quantitativi relativi alla domanda 4 del questionario proposto ai 68 studenti di scuola elementare italiani.

	Uno	Più di uno	Nessuna risposta	Foglio mancante
Domanda 4a: numerosità dei lati	1 / 1,5%	64 / 94,1%	1 / 1,5%	2 / 2,9%
Domanda 4b: numerosità dei vertici	9 / 13,3%	54 / 79,4%	3 / 4,4%	2 / 2,9%
Domanda 4c: numerosità degli angoli	17 / 25,0%	47 / 69,2%	2 / 2,9%	2 / 2,9%

Tabella 4. Distribuzione delle risposte degli studenti di scuola elementare italiani alla domanda.

Dai dati in tabella emerge sostanzialmente la stessa fotografia del caso ticinese: la maggioranza delle allieve e degli allievi italiani risponde correttamente a ciascuno dei quattro item, ma anche qui sembra che l’ambiguità nell’uso sia del singolare sia del plurale (per quanto riguarda il vertice) e la scelta di utilizzo esclusivo del singolare (per quanto riguarda gli angoli) induca a credere che un poligono possieda un solo vertice (9 studenti, il 13,3%) e un solo angolo (17 studenti, il 25,0%). Rispetto al caso

ticinese, però, si nota una differenza: la percentuale di chi afferma che il vertice sia uno è minore della percentuale di chi sostiene che l'angolo sia uno, mentre nel caso ticinese la situazione era invertita.

4.1.2 Risultati delle interviste

Le interviste orali sono servite per chiarire, almeno in parte, alcuni dati emersi dall'analisi dei questionari scritti. Le considerazioni derivanti dalle interviste per entrambi i contesti nazionali sono analoghe, a parte piccole differenze, che per questo vengono qui descritte in modo globale.

Sono rari gli allievi, come il seguente, che esplicitano fin da subito l'incidenza della dimensione di numero del *definiendum* espresso al singolare: «L'angolo è uno perché c'è scritto l'angolo, cioè, quindi in realtà bastava normalmente guardare l'inizio [...] se no sarebbe stato gli angoli».⁸ Alcuni fra questi allievi, esplicitamente sensibili alla disomogeneità di *numero*, manifestano perplessità per quanto concerne la numerosità degli angoli, derivanti dalla formulazione del testo, e che rimangono fino alla fine dell'intervista: «Leggendo che ha i vertici mi ha fatto capire che ne ha più di uno. C'è poi i vertici indicano, quindi non può essere uno, mentre dell'angolo non so»; mentre un buon numero di studentesse e studenti di quarta elementare, che inizialmente non sono stati in grado di cogliere facilmente e in modo non guidato il fenomeno di disomogeneità fra plurale e singolare, posti di fronte a sollecitazioni mirate hanno saputo far intravedere i ragionamenti seguiti e, soprattutto, hanno mostrato come e perché le scelte testuali possono impattare sulla costruzione concettuale. Pur nella consapevolezza di stare indirizzando l'attenzione, come dichiarato nel par. 3.1.3, le domande erano comunque sufficientemente aperte da non vincolare le risposte.

Tra i casi più interessanti e utili ci sono senz'altro quelli dei non molti soggetti che ripercorrono oralmente il ragionamento o le strategie che hanno seguito per rispondere, come queste/-i allieve/-i, che riflettono a proposito delle quantità degli elementi meno noti, cercando di ricavarli dal testo, dal sapere pregresso o dall'interazione fra queste due componenti: «Se i lati sono più di uno e gli angoli sono racchiusi tra loro, allora ci sono anche più angoli»; «Tutto più di uno, ma l'ho capito sottolineando lati e segmenti [cerchia in matita le desinenze plurali], poi ho pensato che quindi sono plurali anche gli altri, per forza»; «In questo pezzo di testo a capire quanti sono i vertici non mi aiuta niente, possono essere uno o di più, ma guardando i disegni precedenti [delle domande precedenti del questionario] noto più di un vertice»; «Ho scritto che i vertici sono più di uno non perché l'ho letto ma perché penso nella mente a una figura, ad esempio triangolo, che ha tre vertici»; «Ho messo più di uno perché una figura con un solo vertice l'ho pensata, ma non è un poligono, non esiste, è tipo un segmento».

Dai rilievi globali e dagli esempi di interviste scaturiscono almeno due riflessioni: da un lato, occorre riconoscere che la dimensione grammaticale, che potrebbe essere vista come poco significativa, ha invece una certa importanza nella corretta comprensione e costruzione di concetti matematici in allieve e allievi di scolarità elementare; dall'altro, non è poi scontato che un'alunna/-o riesca a coordinare le varie informazioni e a risolvere adeguatamente, attraverso inferenze corrette, alcune disomogeneità testuali. A ciò consegue l'importanza di rendere il più possibile aderenti il contenuto matematico e la lingua con cui lo si esprime. Sono proprio le allieve e gli allievi stessi ad affermarlo. Infatti, diversi di loro di entrambe le nazioni, anche tra quelli che rispondono in modo corretto, aggiungono a queste considerazioni commenti espliciti sul fatto che sia proprio il testo a essere "sbagliato" o discutibile e a indurre in errore: «Il libro è un po' sbagliato, sembra far credere che c'è solo un angolo, ma invece per essere un poligono sono più di un angolo»; «Non esiste una forma con un angolo, ma il libro lo scrive e non va bene forse per chi non capisce»; «Il libro è un po' sbagliato: sembra far credere che c'è solo un angolo, ma invece per essere un poligono ci sono più di un angolo»; «In generale posso dire che qui [cerchia lati nel testo] c'è lati ma

8. Nelle trascrizioni delle risposte di allieve e allievi si è mantenuto esattamente quanto da loro detto (errori lessicali e morfosintattici inclusi), ma non si sono applicate convenzioni di trascrizione del parlato, inutili in questa sede e per i fini dell'articolo (sono state omesse ripetizioni inutili, l'indicazione delle pause e i segnali discorsivi; è stata inserita l'interpunzione per agevolare la lettura).

poi vertice e angolo [cerchia "e" e "o"] e però scrive nella spiegazione che il vertice di un poligono ha 2 lati... sono diversi e questo non fa capire, non sono più sicuro che sono tutti più di uno. Secondo me scritto così non va bene, io scriverei tutto *lati* o tutto singolare»; «lo ho segnato più di uno sempre, ma perché lo sapevo, però penso che il libro scritto così non aiuta. Io scriverei tutto come lati, al plurale». Questo aspetto risulta certamente più forviante per le allieve e gli allievi che stanno acquisendo il concetto di poligoni, i loro enti e le loro caratteristiche, dunque di terza elementare (classe a cui è indirizzato il manuale scolastico), piuttosto che di quarta elementare, come questi intervistati, che possiedono questo sapere.

Va però segnalato che tra coloro che rispondono in modo corretto, vi è una netta minoranza che ritiene che gli aspetti morfologici legati alla categoria del numero non impattino sulla comprensione (però per chi ha già delle conoscenze): «*Lati... vertice...* non so per me è uguale, non è uno solo, l'ho scritto»; «Penso che posso capire comunque, ma forse perché lo so già e ho in mente tanti poligoni e so come sono fatti, così non devo fermarmi sulle parole come lati o vertice».

In qualche caso, poi, allieve e allievi esplicitano anche specifiche parole osservate nel testo, che però non sono utili alla comprensione di questo concetto indagato, manifestando così una difficoltà di lettura funzionale (si focalizzano su alcune parole senza connetterle correttamente al testo e alla richiesta) e una difficoltà anche concettuale in ambito matematico: «C'è scritto *tra due lati*, quindi se c'è *due* ci sono più angoli». Questo aspetto avviene in modo più marcato in Canton Ticino rispetto all'Italia, dove, nel chiedere di rileggere a voce alta l'estratto, si sono rilevate modalità di lettura o focalizzazione selettiva su certe parole che favorivano interpretazioni erranee, come le seguenti: «Se il vertice è l'incontro *tra due lati* allora c'è due e non può essercene uno solo di vertice»; «Ho capito che angolo sono due perché se c'è scritto *tra due lati* allora sono più di uno»; «Perché se c'è *fra due lati* allora gli angoli sono almeno due».

Un ulteriore elemento di interesse è stato rilevare che alcune allieve e allievi, soprattutto in Canton Ticino, non avevano ancora acquisito il concetto di poligono, dunque, i giovani lettori approcciavano l'estratto di testo per apprendere il contenuto veicolato: di fronte a conoscenze poco note o per nulla note, come era capitato nel pre-test, l'ambiguità del testo portava più facilmente a fraintendimenti, anche apparentemente poco probabili (come pensare che in un poligono esista un solo vertice); vediamo un esempio: «A me sembrava che nel poligono non c'è solo un vertice e solo un angolo, se no non si chiude, ma forse un vertice si può, uno solo tra due lati ed è comunque una figura».

4.2 Risultati della scuola media

4.2.1 Risultati del questionario

La seguente Tabella 5 propone i risultati quantitativi relativi alla domanda 6 del questionario proposto a 82 studenti di scuola media ticinesi. Ricordiamo che la domanda era suddivisa in cinque item: l'item 6a si riferiva alla numerosità dei lati di un poligono, l'item 6b alla numerosità dei vertici, l'item 6c alla numerosità degli angoli interni, l'item 6d alla numerosità degli angoli esterni, l'item 6e alla numerosità delle diagonali.

	Uno	Più di uno	Nessuna risposta	Foglio mancante
Domanda 6a: numerosità lati	2 / 2,4%	77 / 93,9%	2 / 2,4%	1 / 1,2%
Domanda 6b: numerosità vertici	7 / 8,5%	72 / 87,8%	2 / 2,4%	1 / 1,2%
Domanda 6c: numerosità angoli interni	11 / 13,4%	65 / 79,3%	5 / 6,1%	1 / 1,2%
Domanda 6d: numerosità angoli esterni	24 / 29,3%	54 / 65,9%	3 / 3,7 %	1 / 1,2%
Domanda 6e: numerosità diagonali	7 / 8,5%	70 / 85,4%	4 / 4,9%	1 / 1,2%

Tabella 5. Distribuzione delle risposte degli studenti di scuola media ticinesi.

La maggior parte delle allieve e degli allievi ticinesi afferma correttamente che tutti gli enti sono presenti in un poligono in quantità maggiore di uno. Anche in questa domanda, tuttavia, risulta interessante andare ad analizzare la differenza nelle percentuali di risposte errate, corrispondenti alla colonna "Uno".

Un primo dato da evidenziare è che in Canton Ticino il caso degli angoli esterni sia il più problematico: 24 studenti (il 29,3%) risponde che in un poligono è presente un solo angolo esterno, percentuale che sembra confermare l'importanza di utilizzare un *definiendum* con desinenza plurale. Il secondo ente problematico in termini di percentuale di risposta errata è l'angolo interno:⁹ 11 allieve/-i (il 13,4%) ritengono che in un poligono vi sia un solo angolo interno. In questo caso, ipotizziamo che gli studenti possano essere stati indotti in confusione dall'incoerenza di numero tra il *definiendum* (con desinenza al plurale) e il binomio denominazione (con desinenza al singolare) figura (un unico angolo interno rappresentato). C'è da dire, tuttavia, che lo stesso tipo di incoerenza, nel caso dell'ente lato, non produce analoghi effetti: infatti solo 2 studenti (il 2,4%) ritengono che il poligono abbia un unico lato. Le minori percentuali di risposte errate relative ai lati, ai vertici (7 studenti, l'8,5%) e le diagonali (7 studenti, l'8,5%) fanno emergere una differenza che potrebbe essere ascrivibile al fatto che, solitamente, le allieve e gli allievi giungono alla scuola media avendo già visto numerose volte e in numerosi contesti gli enti *lato*, *vertice*, *diagonale*, mentre l'esposizione didattica all'ente *angolo interno* o *esterno* potrebbe essere inferiore in termini di significatività. Ipotesi che è stata confermata dalle interviste orali delle quali riporteremo alcuni estratti nel prossimo paragrafo.

Significativo, inoltre, che il caso dell'angolo interno sia anche quello in cui risiede la maggior percentuale (il 6,1%) di studenti che scelgono di non rispondere.

L'ultima tabella (Tabella 6) propone i risultati relativi alla domanda 6 del questionario posta a 125 studentesse e studenti di scuola media italiani.

	Uno	Più di uno	Nessuna risposta	Foglio mancante
Domanda 6a: numerosità lati	3 / 2,4%	118 / 94,4%	3 / 2,4%	1 / 0,8%
Domanda 6b: numerosità vertici	12 / 9,6%	106 / 84,8%	5 / 4,0%	2 / 1,6%
Domanda 6c: numerosità angoli interni	9 / 7,2%	106 / 84,8%	10 / 8,0%	0 / 0,0%
Domanda 6d: numerosità angoli esterni	34 / 27,2%	78 / 62,4%	11 / 8,8%	2 / 1,6%
Domanda 6e: numerosità diagonali	4 / 3,2%	113 / 90,4%	8 / 6,4%	0 / 0,0%

Tabella 6. Distribuzione delle risposte degli studenti di scuola media italiani alla domanda.

Come nel caso ticinese, la maggior parte delle allieve e degli allievi risponde correttamente, affermando che gli enti *lato*, *vertice*, *angolo interno*, *angolo esterno* e *diagonale* siano presenti nel poligono in quantità maggiore di uno. Anche qui, però, risulta significativo cercare di interpretare le percentuali relative alle risposte errate. In accordo con quanto accade nelle scuole elementari, le due risposte errate in percentuale maggiore si riferiscono ai casi in cui i *definiendum* sono esplicitati al singolare: 12 studenti (il 9,6%) dichiarano che il poligono ha un unico vertice, e ben 34 studenti (il 27,2%) un unico angolo esterno. Questi dati riconfermerebbero nuovamente l'importanza di associare agli enti del poligono definizioni in cui i *definiendum* siano presentati con desinenza al plurale. Se si considera

9. Notiamo però che 7 allieve/-i (l'8,5%) ritengono che in un poligono vi sia un solo vertice, probabilmente indotti nuovamente dal *definiendum* al singolare.

infine la percentuale di risposte errate relative all'ente angolo interno (9 studenti, il 7,2%), si può anche in questo caso ripercorrere il ragionamento presentato nell'analisi dei risultati ticinesi: sembra che l'incoerenza nella corrispondenza di numero tra l'elemento linguistico del *definiendum* e il binomio denominazione-figura produca effetti in termini di corretta decodifica da parte del lettore.

4.2.2 Risultati delle interviste

Ancora una volta le interviste orali sono servite per interpretare le motivazioni alla base delle risposte fornite nel questionario e per sostenere o confutare le ipotesi da noi formulate.

Anche per questo livello scolastico la formulazione dell'estratto del manuale, sia dal punto di vista linguistico sia figurale, ha influenzato le risposte, sebbene i saperi fossero di base e, nella maggior parte dei casi, conosciuti fin dalla scuola elementare (lati, vertici, angoli interni): «Io ho scritto che l'angolo interno è uno perché il testo dice che è uno perché ce n'è uno, qui [cerchia l'angolo in azzurro]».

Inoltre, come avevamo supposto nel paragrafo precedente, si è riscontrato in entrambe le nazioni che il trovarsi confrontati con un contenuto meno noto (gli angoli esterni e in alcuni casi gli angoli interni), cosa che rendeva l'estratto necessario per comprendere il contenuto veicolato, portava a fraintendimenti dovuti all'ambiguità dell'estratto del testo: «Le diagonali sono due e me lo fa capire soprattutto il disegno, mentre qui c'è un solo angolo esterno [indica] e sotto c'è scritto un angolo»; «Angolo esterno non me lo ricordavo tanto bene e quindi ho scritto che ce n'è uno perché è scritto così, un angolo esterno, che è quello che sta qui sotto sulla base in giallo. Gli interni c'è scritto angoli interni quindi ho pensato che sono di più di uno»; «Guardando il testo e il disegno ho messo uno di angolo interno perché non mi ricordavo se ce n'erano di più e dal testo capisco uno, è anche disegnato: uno esterno, uno interno».

Per contro, se il contenuto era noto, lettrici e lettori tendevano ad appigliarsi al loro sapere pregresso, facendosi solo in rari casi influenzare dalla lettura del testo (e affermandolo apertamente): «Ho scritto più di uno di vertice perché lo sapevo già, me lo ricordavo»; «Lo sapevo già quante di tutte queste cose ci sono in dei poligoni, a parte che si vede. Il testo non l'ho letto bene, tanto sapevo già le risposte».

In varie ragazze e vari ragazzi si è rilevata una particolare attenzione alle parole che compaiono al singolare a fronte di enti plurali, cosa che ha permesso loro di elaborare riflessioni più articolate sui manuali e sulla loro efficacia: «Non penso che sia scritto proprio bene, perché penso che se scrivi così puoi confondere chi sta imparando, magari se non lo vede con la prof. di matematica, cioè non costerebbe niente cercare di fare capire meglio, se sono al plurale tutto al plurale. Io farei così»; «Ho scritto più di uno per vertice ma non perché c'è scritto. Pensandoci ho notato che qui è vertice e poi ne è segnato uno con la freccia. Con tutto al singolare ti fa proprio pensare che può esserne uno, se non lo sai o se non sei attento. Il testo non fa capire, secondo me». Sono inoltre state numerose, essendo allieve e allievi più grandi, le osservazioni metariflessive (spesso proprio metalinguistiche) sull'estratto e sui suoi difetti comunicativi: «Io penso che se devi imparare gli angoli questo testo non spiega bene, perché ne vedi uno e ci devi pensare che sono di più»; «Il testo era meno chiaro, è grazie alle immagini che si capisce e che ho risposto i numeri giusti. Non farei così ma cercherei di mettere delle parole che rispecchiano le figure, soprattutto perché uno se no si può confondere»; «Non era difficile il testo come parole, ma nei disegni, nel senso che io farei così [disegna vari poligoni con sui vari elementi scritto ogni volta lato, vertice...].».

È evidente che le proposte di riformulazione, come quella che esplicita quest'ultimo allievo, anche se non sempre economiche ed efficaci (una figura con scritta su ogni elemento una parola, forse, sarebbe ugualmente confusa e poco chiara), rivelano l'intenzione di suggerire una maggiore coerenza. Questo è un aspetto sovente trascurato da un lettore adulto, ma con ragazze e ragazzi, soprattutto alle prese con testi complessi, non è sempre detto che la sistematicità di indicazione (magari graficamente ridondante, in apparenza) sia inutile, anzi.

Nuovamente, come avvenuto per la scuola elementare, gli esempi più interessanti sono senz'altro

quelli che ripercorrono oralmente il ragionamento seguito per rispondere, come nel caso di questa allieva, che ragiona a proposito degli angoli esterni: «Io per rispondere ho pensato che se un poligono ha almeno 3 lati, dunque ha almeno tre vertici. Qui è scritto vertice perché è, come dire, uno d'esempio degli altri». O di quest'altra, che riflette a partire da lati e vertici (cioè da ciò che per lei era noto) per poi trasporre alle diagonali: «Non sapevo bene delle diagonali, ma se ha più lati e più vertici, allora ha più diagonali».

Infine, va detto che la componente figurale, fondamentale in geometria, pare, per alcuni soggetti, dominare rispetto a quella verbale e non necessariamente dialogare con essa: «Per non sbagliare mi sono basata sul disegno e non mi sono accorta di come erano scritti».

5 Conclusioni

In conclusione, possiamo affermare che le disomogeneità linguistiche presenti nei libri di testo di matematica (geometria, tema *poligoni*) non sono prive di conseguenze rispetto alla rappresentazione semantica e alla successiva costruzione concettuale da parte degli apprendenti, sia nel caso di bambine e bambini di quarta elementare, sia nel caso di lettrici e lettori di seconda media. Abbiamo ricavato ciò sia dalle risposte al questionario scritto, sia dalle interviste orali, sebbene, in generale, tutti i soggetti testati siano riusciti a esprimersi meglio e più approfonditamente sulle richieste se sollecitati in forma orale.

In particolare, abbiamo potuto osservare come anche degli apparenti dettagli abbiano una importanza a livelli di costruzione del sapere. Nel caso della ricerca qui presentata, infatti, più le lettrici e i lettori si trovavano di fronte a un sapere geometrico poco esplorato, più si rivelavano fragili ed esposti a errore, appigliandosi a un testo ambiguo. Non si può infatti presumere che allieve e allievi con un apprendimento da poco costruito o in fase di costruzione siano in grado di sciogliere le inferenze testuali (e iconiche) e di trasporre correttamente la numerosità degli enti (ossia di considerarli tutti di quantità superiore a uno perché alcuni elementi testuali e figurati me lo indicano). Un libro scolastico, ossia un esempio di «discorso scientifico pedagogico» (Loffler-Laurian, 1983, p. 8; su questo anche Dardano, 2008), pragmaticamente efficace, infatti, non dovrebbe dare a chi legge l'onere di gestire ambiguità, almeno in fase di costruzione del sapere e in parti testuali che hanno un carattere dichiarativo, non laboratoriale.

Sarebbe quindi utile considerare i reali bisogni di lettrici e lettori per costruire testi non banalizzati, ma «felici», direbbe Austin (1962), nel senso di rispettosi di quelle massime della comunicazione che vorrebbero garantire un giusto e pertinente passaggio di informazione. Insomma, un'allieva o un allievo dovrebbe poter trovare nel testo un alleato del processo di apprendimento, ovviamente promosso e coadiuvato dall'insegnante e da tanti altri aspetti della didattica disciplinare.

Al di là del contesto di ricerca qui presentato, vogliamo presentare anche il rovescio della medaglia, quello che riconosce le potenzialità didattiche di testi non perfetti, in cui compaiono criticità: affrontare in classe il libro di testo senza «subirlo», ma discutendolo, è utile non solo per favorire lo sviluppo di uno spirito analitico e critico, ma anche per promuovere un apprendimento meno superficiale e più approfondito, tipico di chi si pone domande su ciò che studia e su ciò che fa. In questo senso, il manuale scolastico smette di essere solo un riferimento statico per lo studio e il ripasso, e un eserciziario, ma diventa interlocutore vivace e strumento di ragionamento e riflessione.

Bibliografia

- Adoniou, M., & Qing, Y. (2014). Language, mathematics and English language learners. *The Australian Mathematics Teacher*, 70(3), 3–13.
- Aristotele (1996). *Organon*. Vol. 2 (Edizione critica di M. Zanatta). UTET.
- Austin, J. L. (1962). *How to do things with words*. Oxford University Press.
- Barrow, M. A. (2014). Even math requires learning academic language. *Kappan Magazine*, 95(6), 35–38. <http://www.lindareedclassroom.com/teaching-resources/ewExternalFiles/Academic%20Vocabulary%20in%20Math.pdf>
- Canducci, M. (2019). Il rapporto testo-figure nei libri di testo di matematica: Il caso dei poligoni analizzato in ottica multimodale. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica e professionalità docente. Atti del XXXIII Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica"* (pp. 107–108). Pitagora.
- Canducci, M. (2020). L'incoerenza delle scelte di numero nei libri di testo di geometria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace, Atti del XXXIV Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica"* (pp. 69–70). Pitagora.
- Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2019a). La definizione nei testi scolastici: Dall'analisi alla didattica. In B. Di Paola (Ed.), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: Nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva. Quaderni di Ricerca in Didattica* (vol. 2, numero speciale n. 5, pp. 47–48). G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf
- Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2019b). Analisi di manuali scolastici di matematica dal punto di vista linguistico e disciplinare. In B. Di Paola (Ed.), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: Nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva. Quaderni di Ricerca in Didattica* (vol. 2, numero speciale n. 5, pp. 43–44). G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf
- Canducci, M., Demartini, S., & Sbaragli, S. (2021). Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado italiani. *Italiano a scuola*, 3(1), 99–132. <https://doi.org/10.6092/issn.2704-8128/12935>
- Canducci, M., Rocci, A., & Sbaragli, S. (2021). The influence of multimodal textualization in the conversion of semiotic representations in Italian primary school geometry textbooks. *Multimodal Communication*, 10(2), 157–174. <https://doi.org/10.1515/mc-2020-0015>
- Cavanagh, S. (2005). Math: The not-so-universal language. *Education Week*, 24(42), 1–22.
- Cortelazzo, M. A. (2011). Scienza, lingua della. In R. Simone (Ed.), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia. https://www.treccani.it/enciclopedia/lingua-della-scienza_%28Enciclopedia-dell%27Italiano%29/
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44–48.
- D'Ambrosio, U. (2007). The role of mathematics in educational systems. *ZDM Mathematics Education*, 39, 173–181. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0012-1>

- D'Amore, B. (2000). *Lingua, Matematica e Didattica. La matematica e la sua didattica*, 1, 28–47.
- Dardano, M. (2008). Capire la lingua della scienza. In M. Dardano & G. Frenguelli (Eds.), *L'italiano di oggi* (pp. 173–188). Aracne.
- Dehaene, S. (2009). *I neuroni della lettura*. Raffaello Cortina Editore.
- Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2020). Se la sintesi diventa un problema. Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica. In J. Visconti, M. Manfredini & L. Coveri (Eds.), *Linguaggi settoriali e specialistici: Sincronia, diacronia, traduzione, variazione. Atti del XV Congresso Internazionale della Società Internazionale di Linguistica e Filologia Italiana* (pp. 487–494). Cesati.
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). Le parole che “ingannano”. La componente lessicale nell’insegnamento e nell’apprendimento della matematica. In B. Di Paola (Ed.), *Pratiche d’aula e ricerca didattica: Nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva. Quaderni di Ricerca in Didattica* (vol. 2, numero speciale n. 5, pp. 19–25). G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quader-no2_suppl_5_2019.pdf
- Demartini, S., Sbaragli, S., & Ferrari, A. (2020). L’architettura del testo scolastico di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado. *Italiano LinguaDue*, 12(2), 160–180. <https://riviste.unimi.it/index.php/promoitals/article/view/14979/13889>
- Grandi, N. (2011a) Numero. In R. Simone (Ed.), *Enciclopedia dell’Italiano Treccani*. Istituto dell’Enciclopedia. [http://www.treccani.it/enciclopedia/numero_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](http://www.treccani.it/enciclopedia/numero_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Grandi, N. (2011b). Articolo. In R. Simone (Ed.), *Enciclopedia dell’Italiano Treccani*. Istituto dell’Enciclopedia. [http://www.treccani.it/enciclopedia/articolo_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](http://www.treccani.it/enciclopedia/articolo_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Gualdo, R. (2021). *Introduzione ai linguaggi specialistici*. Carocci.
- Gualdo, R., & Telve, S. (2011). *Linguaggi specialistici dell’italiano*. Carocci.
- Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?. *La matematica e la sua didattica*, 2, 121–135.
- Loffler-Laurian, A.-M. (1983). Typologie des discours scientifiques : Deux approches. *Études de linguistique appliquée*, 51, 8–20.
- Lumbelli, L. (2009). *La comprensione come problema. Il punto di vista cognitivo*. Laterza.
- Salvi, G., & Vanelli, L. (2004). *Nuova grammatica italiana*. Il Mulino.
- Sbaragli, S., Canducci, M., & Demartini, S. (2021). Le modalità logico-argomentative nei testi scolastici di geometria della scuola elementare e media in lingua italiana. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, 9, 44–71. <https://doi.org/10.33683/ddm.21.9.3>
- Sbaragli, S., & Demartini, S. (Eds.). (2021). *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica*. Dedalo.
- Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Pitagora.

Esperienze didattiche

DdM

PiGame 2023: una *escape room* matematica

PiGame 2023: a mathematical escape room

Caterina Bassi, Domenico Brunetto, Nicolò Cangioti e Francesco Nappo¹

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano – Italia

✉ caterina.bassi@polimi.it, domenico.brunetto@polimi.it, nicolo.cangiotti@polimi.it,
francesco.nappo@polimi.it

Sunto / Questo articolo presenta una recente esperienza didattica rivolta a studenti delle scuole secondarie di primo e secondo grado italiane tramite la costruzione di una *escape room* virtuale. Tale esperienza ha coinvolto oltre 50 scuole e 1500 studenti nell'occasione del Pi Day 2023, la Giornata Internazionale della Matematica. L'articolo si concentra sull'idea progettuale dei problemi matematici presentati e sulle modalità di realizzazione di un contesto virtuale che riproduce fedelmente l'esperienza di gioco *escape room*.

Parole chiave: risoluzione di problemi; analogia; metodologie emergenti; apprendimento da remoto; escape room.

Abstract / This article presents a didactic experience aimed at lower and upper secondary school students in Italy through the construction of a virtual escape room. The experience involved more than 50 schools and 1500 students on Pi Day 2023, the International Day of Mathematics. The article elaborates on the inspiration for the mathematical problems presented and on the development of a virtual context that can emulate the experience of an actual escape room game.

Keywords: problem solving; analogy; emerging methodologies; distance learning; escape room.

© 2024 Bassi Caterina, Brunetto Domenico, Cangioti Nicolò e Nappo Francesco. Questo è un articolo Open Access, sottoposto a un processo di revisione tra pari a doppio cieco, pubblicato dal [Centro competenze didattica della matematica](#) e dal Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione del [DFA/ASP-SUPSI](#) in collaborazione con il [DECS](#). L'articolo è distribuito sotto i termini della [Licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale \(CC BY 4.0\)](#) che permette di usare, condividere e modificare l'articolo su qualsiasi mezzo a patto che l'autore e la fonte originale siano citati.

1. Gli autori hanno contribuito in egual misura all'esperienza didattica e alla stesura di questo articolo.

1 Introduzione

Ogni anno il Pi Day, la Giornata Internazionale della Matematica, è un'occasione per celebrare la disciplina della matematica. Nel rivolgerci alle scuole secondarie di primo e di secondo grado¹ di tutta Italia, abbiamo pensato a un gioco che potesse allo stesso tempo coinvolgere gli studenti e, se possibile, ispirare gli insegnanti. Il gioco, basato sull'idea di *escape room*, consisteva nella risoluzione di una serie di problemi e nell'identificazione di una chiave per uscire da una stanza (nel nostro caso metaforica) entro un'ora.² L'*escape room* è una modalità didattica che si può inquadrare all'interno dei "*serious games*", attività ludiche progettate a scopo didattico, ma non solo, di intrattenimento (Fuentes-Cabrera et al., 2020). In un *serious game*, i giocatori «coltivano la loro conoscenza ed esercitano le proprie competenze affrontando numerosi ostacoli durante le fasi di gioco» (Zhonggen, 2019, p. 1, traduzione degli autori). L'attività ha coinvolto oltre 50 scuole e 1500 studenti di scuole di tutta Italia, dalla provincia di Bolzano a quella di Catania. Ciascuna classe ha ricevuto telematicamente, nel giorno del Pi Day 2023, i problemi matematici calibrati a seconda del grado di istruzione e il regolamento con le istruzioni per lo svolgimento. Ai docenti referenti è stata data la possibilità di assistere gli studenti nella risoluzione dei problemi, in particolare nella lettura e interpretazione della cornice narrativa del gioco e dei singoli quesiti. Essi erano inoltre autorizzati a utilizzare lo strumento della chat per porre, per conto degli studenti, domande di chiarimento agli organizzatori. A tutti i docenti coinvolti è stato chiesto di non sostituirsi agli studenti nella risoluzione dei problemi matematici, affidando a loro anche il compito di verificare che il regolamento del gioco fosse osservato. Al termine del gioco, è stato offerto agli studenti un seminario sul ruolo degli strumenti matematici nella risoluzione di problemi ingegneristici (in particolare, nella costruzione di lander lunari). Le classi che avevano risolto i problemi e fornito la chiave nel minor tempo sono poi state premiate. L'evento si è chiuso con l'invito ai docenti a discutere in classe i problemi affrontati nell'attività e a contattarci via email per assistenza nel decodificare il ruolo dei materiali forniti (si veda il par. 3). Il presente articolo si soffermerà su:

- i. gli obiettivi didattici che hanno motivato la scelta della modalità di gioco e la costruzione dei problemi matematici proposti;
- ii. la modalità di realizzazione di un contesto virtuale che possa emulare, a basso costo e con strumenti facilmente accessibili, l'esperienza di una *escape room* fisica. Il nostro obiettivo nel condividere principi e implementazione è di promuovere un uso creativo di strategie di insegnamento relative alla risoluzione di problemi.

Euristicamente, distinguiamo la risoluzione di *problemi* dallo svolgimento di *esercizi*: nel primo caso è richiesto uno sforzo di concettualizzazione del problema, di invenzione di strategia risolutiva, e di analisi della soluzione ottenuta; nel secondo caso la concettualizzazione del quesito e la strategia di svolgimento sono già date dal docente tramite istruzioni esplicite e/o la risoluzione di esercizi del tutto analoghi (D'Amore, 2014; Di Martino & Zan, 2019). Come sarà spiegato nel corso della discussione, il gioco matematico da noi ideato puntava a offrire un'esperienza stimolante nell'ambito della risoluzione di problemi, in particolare quando introdotti in modo verbale – i cosiddetti *word problems* (Greer et al., 2002). I materiali forniti suggerivano inoltre, senza imporle, strategie di risoluzione basate su analogie e modelli, cioè sfruttando somiglianze con domini noti o con problemi di più facile risoluzione (Gick & Holyoak, 1980; Polya, 2004). Alcuni esempi notevoli di materiali per favorire un approccio

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

2. Una descrizione più esaustiva dell'iniziativa, corredata da tutti i materiali utilizzati (scaricabili gratuitamente), è disponibile al sito: <http://tiny.cc/escapefrommathland23>.

per analogie alla risoluzione di problemi matematici saranno presentati nel corso della descrizione dell'esperienza didattica (par. 4).

L'articolo è strutturato come segue. Nel par. 2 ci occuperemo del quadro entro il quale abbiamo concepito l'attività didattica e in particolare del "paradosso dell'apprendimento" che ci ha portato a ideare una *escape room* virtuale. Nel par. 3 esporremo le ragioni pedagogiche e le modalità di implementazione di un gioco online che emuli l'esperienza di *escape room*. Nel par. 4 presenteremo alcuni esempi di problemi tratti dall'attività, sottolineando il ruolo di modelli e analogie nelle strategie di risoluzione, e chiarendo anche come uno stesso problema possa essere calibrato in difficoltà per gradi di istruzione diversi. Infine, nel par. 5 concluderemo con una discussione dei risultati ottenuti dagli studenti e una selezione dei commenti degli insegnanti.

2 Motivazione

Le competenze nella risoluzione di problemi sono uno degli obiettivi principali dell'educazione matematica e più in generale scolastica (McKeough et al., 1995; Stavy & Tirosh, 2001). Tuttavia, come è noto, lavorare con gli studenti affinché sviluppino tali competenze è tanto importante quanto difficile (Blum & Leiss, 2007). I principali ostacoli sono l'identificazione di strategie di risoluzione, la loro implementazione in autonomia, e la valutazione critica dei risultati ottenuti (Niss & Blum, 2020), senza dimenticare quelli relativi alla comprensione del testo (Sbaragli, 2019; Zan, 2016). Sotto molti aspetti, lo sviluppo delle competenze di risoluzione di problemi rappresenta un esempio classico di quello che Berieter (1985) chiama il "paradosso dell'apprendimento", una versione di quello che in filosofia è più comunemente noto come il paradosso di Menone. Come scrive Berieter (1985), il nodo cruciale del paradosso consiste in questo argomento: «se si prova a spiegare l'apprendimento tramite azioni mentali che lo studente compie, è necessario attribuire allo studente una struttura cognitiva di partenza che è tanto avanzata o complessa quanto quella che si vuole sia appresa» (p. 202, traduzione degli autori). Ne sembra seguire la conclusione paradossale che un vero apprendimento da parte dello studente sia di fatto impossibile. Se ci soffermiamo sull'aspetto dell'identificazione di una strategia di risoluzione, l'esperienza pratica dei docenti conferma le difficoltà appena menzionate. Da un lato, gli studenti hanno spesso difficoltà a identificare una strategia risolutiva anche quando essa viene suggerita dal docente tramite problemi familiari o analogie con domini noti. Ad esempio, nel descrivere un tentativo fallimentare di sviluppare strategie di risoluzione di problemi aritmetici di scuola elementare per analogia con le operazioni sui regoli, Holt (1982) scrive: «Bill e io [...] vedevamo una forte connessione tra il mondo dei regoli e i numeri. Per questo motivo abbiamo semplicemente dato per scontato che i bambini, guardando ai regoli, potessero percepire immediatamente come funziona il mondo dei numeri» (pp. 138–139, traduzione degli autori). Il messaggio è che le connessioni tra problemi diversi suggerite da un docente possono non essere notate o percepite dagli studenti (come già discusso nella classica trattazione degli stili di apprendimento di Kolb, 1984). Lo stesso ostacolo è discusso in studi più recenti in didattica della matematica, in particolare riguardo allo sviluppo di competenze di risoluzione tramite modelli familiari ed esempi noti (Clement, 2000; Vamvakoussi, 2017).

Dall'altro lato spesso accade che la strategia di risoluzione di un problema venga esibita dal docente nel corso di un'attività didattica. In questo caso è l'altra faccia del paradosso dell'apprendimento a presentarsi in tutta la sua forza. Se è compito del docente esibire la strategia di risoluzione, l'implementazione da parte dello studente della strategia appena esibita non implica necessariamente una profonda comprensione della strategia. Come scrive Brousseau (1984): «più sono esplicito sul comportamento che voglio che i miei studenti esibiscano, più è probabile che gli studenti esibiscano quel comportamento senza ricorso alla comprensione che il comportamento normalmente indica» (p. 7,

traduzione degli autori). In altre parole, il problema è che un tale approccio rischia di limitare il lavoro dello studente a un uso meramente riproduttivo di strategie risolutive viste in precedenza. È evidente che lo studente che si limita a seguire l'insegnante o a ripetere i suoi comportamenti, senza riflettere sugli aspetti rilevanti del problema e senza analizzare le conclusioni suggerite dalla strategia di risoluzione, non sta imparando a risolvere problemi (Sbaragli et al., 2009).

Prima di acquisire un atteggiamento troppo negativo, è importante ricordare alcune delle ragioni che portano i docenti di matematica a tentare di indurre lo sviluppo di competenze di risoluzione dei problemi. Innanzitutto, poiché la matematica è una disciplina che ha tra le sue caratteristiche la possibilità di lavorare su rappresentazioni diverse dello stesso oggetto o concetto, essa è in una situazione privilegiata per tentare di sviluppare negli studenti una capacità di riconcepire un problema inizialmente complesso come un problema di un altro tipo (Polya, 1954). Le competenze nello sviluppo di strategie di risoluzione tramite riduzione di problemi complessi a problemi più semplici e dell'ignoto e inusuale a ciò che è più noto o familiare sono considerate essenziali per sviluppare l'autonomia intellettuale e le competenze di cittadinanza degli studenti (Zan, 2007). In secondo luogo, puntare l'attenzione sulla risoluzione dei problemi nella pratica didattica è utile anche a presentare la matematica come un ambito del sapere creativo e non meramente nozionistico o procedurale. Trasmettere l'idea di una disciplina nella quale la creatività e l'immaginazione nell'identificazione di strategie risolutive occupano un ruolo centrale è considerato uno strumento valido per sviluppare un maggiore apprezzamento della matematica e della sua storia negli studenti (Behnamnia et al., 2020; Dele-Ajayi et al., 2019; Gil-Doménech & Berbegal-Mirabent, 2019). La modalità di *escape room* a cui ci siamo rivolti nel progettare la nostra attività didattica non è stata concepita solo come un modo per attirare un pubblico di studenti a un gioco matematico, ma assume per noi un'importante funzione didattica, mirata al superamento delle difficoltà appena esposte. La nostra proposta mira, in particolare, a costruire un contesto specifico per fare esperienza nella risoluzione di problemi, lavorando quindi allo stesso tempo sugli aspetti motivazionali e su quelli cognitivi. In particolare, abbiamo selezionato la modalità *escape room* perché caratterizzata da tre aspetti:

1. l'aspetto ludico, che può rendere possibile un coinvolgimento attivo degli studenti e facilita l'assunzione di un atteggiamento e un umore positivo verso la risoluzione di problemi (Zhonggen et al., 2019);
2. l'aspetto del lavoro di gruppo, nel quale sono possibili forme di cooperazione e di revisione tra pari nell'individuazione di strategie risolutive e nella valutazione dei risultati ottenuti;
3. l'aspetto della narrazione, che ha consentito di giustificare naturalmente l'uso di enigmi in modalità verbale, così come l'uso di suggerimenti e insidie comuni in giochi di questo tipo, tramite materiali appositi (par. 3).

La nostra congettura è stata che, in un contesto adeguatamente costruito sia negli aspetti emotivo-motivazionali che in quelli cognitivi, gli studenti fossero più naturalmente portati a lavorare sui problemi in maniera indipendente, senza ripetere comportamenti già visti, e a fare esperienza di un uso produttivo delle proprie risorse cognitive e motivazionali nella risoluzione di problemi. Tale congettura è ben supportata da recenti studi sull'uso di *escape room* con finalità educative (Botturi & Babazadeh, 2020; Fotaris & Mastoras, 2022).

È importante sottolineare come alcuni degli elementi che hanno reso l'attività proposta particolarmente motivante per gli studenti, come la sfida a tempo (relativamente breve) e la partecipazione contemporanea di un grande numero di classi, si siano rivelati al contempo una limitazione alla completa realizzazione dell'attività come proposta didattica. Come suggerito dalla letteratura recente, i processi di risoluzione dei problemi durante attività a tempo limitato, come nel caso della nostra *escape room*, spesso non si conformano alle modalità suggerite dalla narrazione o dagli indizi (Veldkamp et al., 2020). Perché l'attività possa prefiggersi di raggiungere un obiettivo didattico e non soltanto ludico, è quindi opportuno programmare dei momenti di *debriefing*, nei quali il docente può ritornare

sui problemi proposti e discutere con maggiore calma sulle rispettive strategie di risoluzione suggerite (Botturi & Babazadeh, 2020; Fotaris & Mastoras, 2022). Nel nostro caso, l'interazione a distanza con un gran numero di studenti di diversi indirizzi e gradi di istruzione ha impedito lo svolgimento da parte nostra di attività di discussione, riflessione, e rielaborazione successiva. Il *debriefing* è stato delegato ai docenti coinvolti, i quali hanno avuto la possibilità di usufruire della nostra assistenza a distanza e dei materiali forniti durante la prova (si veda il par. 3) per progettare delle attività "su misura" per i loro studenti. Per quanto non ci sia dato sapere il contenuto specifico di tali attività, dalla corrispondenza con i docenti referenti è emerso il vivo interesse ai problemi matematici degli studenti coinvolti anche diverse settimane dopo l'evento.

È evidente in ogni caso che, perché si possa discutere di efficacia della nostra proposta rispetto agli obiettivi intesi, quest'ultima vada calata all'interno di un percorso didattico più ampio, ad esempio focalizzato sul ruolo dei modelli nella risoluzione di problemi. Una sperimentazione in questo senso è in corso in alcune delle scuole partecipanti. Tuttavia, una trattazione esaustiva di tali azioni e dei loro esiti esula dal tema di questo articolo, incentrato sui principi di costruzione dell'esperienza di gioco e dei quesiti che la compongono.

Dal momento che la costruzione del contesto assume un ruolo centrale nella nostra proposta, nella prossima sezione ci soffermeremo sulle modalità di realizzazione della situazione di *escape room* in modalità online, per poi passare nel par. 4 alla selezione dei problemi matematici proposti.

3 L'esperienza di *escape room*

Poiché l'esperienza didattica prevedeva la partecipazione di circa 1500 studenti, provenienti da scuole secondarie di primo e secondo grado di tutta Italia, abbiamo progettato una *escape room* di tipo digitale. Prima dell'inizio del gioco, le classi partecipanti sono state divise in tre sessioni Zoom parallele in base al loro grado scolastico: scuola secondaria di primo grado, biennio della scuola secondaria di secondo grado, triennio della scuola secondaria di secondo grado. Il giorno precedente allo svolgimento dell'attività, un kit di materiali aggiuntivi, contenenti alcuni indizi utili allo svolgimento del gioco, è stato inviato in formato PDF ai docenti referenti, in modo che potessero stamparli in anticipo. Tale organizzazione è stata pensata per permettere agli studenti coinvolti di partecipare al gioco restando nelle loro classi. L'inizio del gioco è stato sancito con l'invio, tramite lo strumento chat di Zoom, di un file PDF e del link a un modulo Microsoft Form tramite il quale inviare le risposte. Sia il file PDF che il modulo Microsoft Form contenevano la descrizione del regolamento del gioco, il prologo (un breve testo per la contestualizzazione del gioco) e i testi di tutti gli enigmi. Alle classi è stata messa a disposizione un'ora per la risoluzione degli enigmi e l'identificazione della chiave d'uscita. Durante la prova non è stato consentito l'utilizzo di device connessi a Internet.

Gli elementi dell'*escape room* sono stati progettati con lo scopo di essere coerenti l'uno con l'altro e allo stesso tempo fedeli agli obiettivi didattici della proposta. Di seguito presentiamo la proposta seguendo lo schema di progettazione dello "Star Model" di Botturi e Babazadeh (2020). Quest'ultimo divide gli elementi rilevanti in *trama*, *gameflow*, *enigmi*, *materiali* e *apprendimento prospettato*.

3.1 Trama

La trama scelta per l'*escape room* permetteva a ciascuna classe partecipante di identificarsi con la classe protagonista del gioco, ovvero gli studenti del matematico Tullio Levi Civita. Grazie al prologo, infatti, i partecipanti viaggiano nel tempo sino ai primi del '900 e si trasformano negli studenti del famoso matematico il quale, alla fine di una lunga giornata di lezione, dopo essersi addormentato con la testa sulla cattedra, trasporta nel proprio sogno anche gli studenti. I partecipanti si ritrovano

così al centro di una strana sfera, ognuna delle quali intitolata a un(a) famoso(a) matematico(a) e contenente un enigma da risolvere. È quindi la voce dello stesso professore ad annunciare ai partecipanti che il luogo in cui si trovano è la sua mente: un “garbuglio geometrico”, una trappola onirica invasa da problemi matematici che esigono una risoluzione per trovare la chiave che consente di uscire dal sogno. Il matematico chiede aiuto ai suoi studenti per risolvere gli enigmi e fornisce loro uno schema bidimensionale della sfera onirica, rappresentato in Figura 1. La rappresentazione bidimensionale è un primo indizio fornito ai partecipanti: tra le altre cose, è possibile intuire da essa che gli enigmi contenuti nelle stanze “Fermat” e “Ipazia” sono collegati.

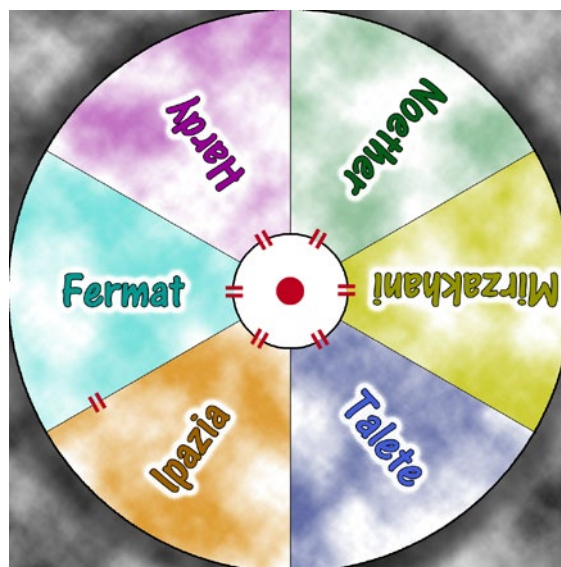


Figura 1. Schema bidimensionale della sfera onirica.

La scelta di un tema onirico per l'*escape room* ha permesso, come evidenziato in Fotaris e Mastoras (2022), di sfruttare il potenziale che i temi fantasiosi hanno nel favorire il pensiero creativo nello svolgimento di compiti non routinari. Inoltre, esso ci ha consentito una certa libertà nella presentazione narrativa degli enigmi nelle varie stanze e nella strutturazione dei loro collegamenti.

3.2 Gameflow

Per quanto riguarda il *gameflow*, abbiamo scelto quello di tipo aperto, per il quale gli enigmi vengono resi disponibili ai partecipanti nello stesso momento e i loro risultati vengono utilizzati per risolvere l'enigma finale. La scelta di questo particolare tipo di *gameflow* è stata dettata dal numero stimato di studenti di ciascuna delle classi partecipanti, che rendeva importante che gli studenti si dividessero in gruppi per permettere loro un maggiore coinvolgimento nell'attività. Il *gameflow* di tipo aperto permette infatti facilmente ai gruppi di lavorare contemporaneamente su diversi enigmi.

In Figura 2 riportiamo l'enigma finale che richiedeva agli studenti di ricombinare le soluzioni dei sei enigmi precedenti per trovare la chiave di uscita. È stato richiesto agli studenti di inserire nel Microsoft Form fornito all'inizio dell'esperienza sia la soluzione per ciascuna stanza (un numero) che la chiave alfabetica di uscita (una parola di senso compiuto, ottenibile tramite la “codifica” dei numeri risultanti da determinate operazioni sulle soluzioni delle singole stanze in lettere dell'alfabeto italiano; si veda la Figura 2). In questo modo, è stato anche possibile misurare tanto il tempo di risoluzione totale quanto il numero dei problemi matematici effettivamente risolti da ciascuna classe (par. 5).

Centro Pigreco

Se chiave vuoi la, tabella interpretare la dovrai!

F	$S \times 2 + 2 =$		
H	$N + N + D =$		
I	$4^{\text{da}} =$		
M	$S^3 - 3 =$		
N	$da + u =$		
T	$S : 108 =$		

Figura 2. Enigma finale (versione per il triennio). Una delle chiavi di uscita era la parola "Eulero", che poteva essere ottenuta sostituendo opportunamente le soluzioni numeriche all'interno delle espressioni rappresentate in figura, successivamente traducendo i numeri ottenuti (tutti valori da 1 a 21) in lettere dell'alfabeto, e infine riordinando le lettere.

3.3 Enigmi

La selezione degli enigmi è avvenuta in piena coerenza con la scelta della modalità di gioco *escape room*. Potendo contare su un contesto privilegiato per proporre un'attività che fosse coinvolgente e motivante per gli studenti (Fotaris & Mastoras, 2022), abbiamo pensato a dei problemi che non fossero risolvibili applicando delle semplici procedure e allo stesso tempo non risultassero di eccessiva difficoltà, per continuare a tenere coinvolti gli studenti nel corso di tutte le fasi di gioco. Il livello di difficoltà è stato calibrato a seconda del grado di istruzione sulla base di precedenti esperienze e di quanto osservato nelle banche dati dei test INVALSI (www.gestinv.it). Nello specifico, abbiamo preparato due versioni del gioco, una (più facile) per le scuole secondarie di primo grado e per il primo biennio di scuole secondarie di secondo grado, e un'altra (più difficile) per gli ultimi tre anni di scuole secondarie di secondo grado.

In entrambi i casi, abbiamo pensato a degli enigmi che permettessero alle classi partecipanti di lavorare sullo sviluppo di competenze matematiche (Niss & Højgaard, 2019). L'accento posto sullo sviluppo di competenze, piuttosto che sulla riproduzione di procedure e sull'applicazione di conoscenze matematiche, oltre a essere in linea con le Indicazioni nazionali per i licei (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010) e le Linee guida per istituti tecnici e professionali, ha anche permesso una maggiore equità nello svolgimento della prova, data la grande varietà di tipologie di scuole secondarie di secondo grado che hanno partecipato all'attività. Alcuni esempi di enigmi verranno descritti in dettaglio nel par. 4.

3.4 I materiali

Gli indizi utili alla risoluzione dei problemi sono stati forniti grazie ai materiali aggiuntivi. A differenza degli enigmi, che sono stati forniti in forma narrativa, abbiamo pensato a degli indizi che fossero in sola forma grafica. Nel caso di alcuni quesiti, l'individuazione dei materiali di supporto era indispensabile per la risoluzione di un problema. Un esempio è il problema riportato di seguito:

Ti ritrovi circondato da forme chiuse di tutti i tipi. Ti raggiunge Ipazia D'Alessandria e ti chiede: «Quale di queste figure ha l'area uguale a un quattrocentesimo dell'area della faccia della spugna di Tarmef appena pescata (cioè prima di seccare)? Senza la risposta non possiamo andare avanti. Mi basta il numero!».

Il problema richiama gli studenti all'uso della **Figura 3**, contenuta nel kit di materiali aggiuntivi.

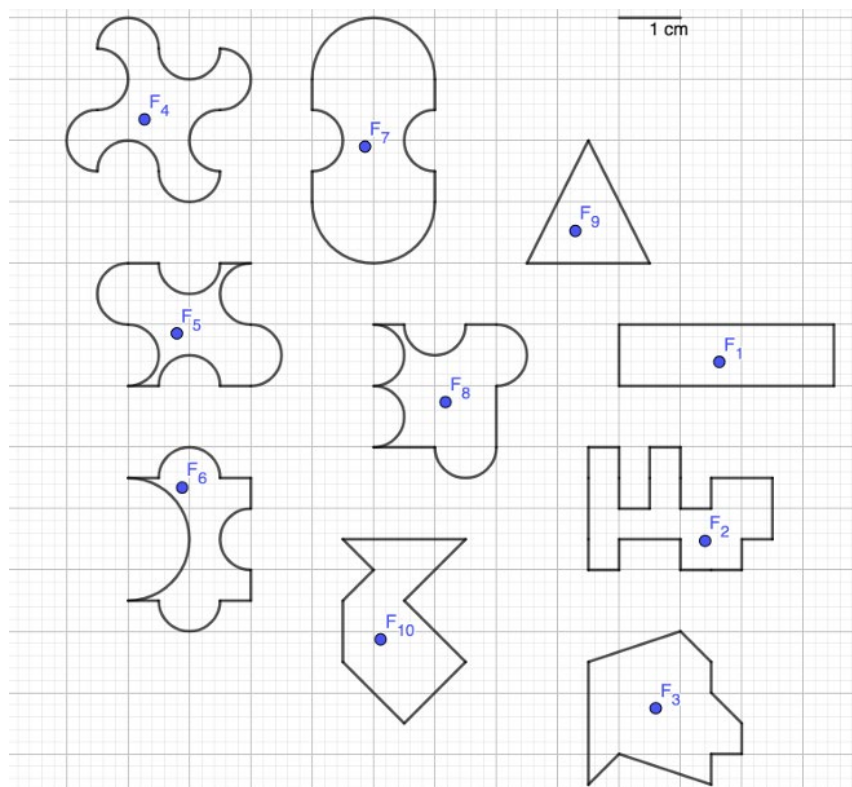


Figura 3. Materiale aggiuntivo utilizzabile per la risoluzione dell'enigma nella stanza "Ipazia" (Livello: scuola secondaria di primo grado).

È opportuno sottolineare qui che il dato mancante (l'area della faccia della spugna) è calcolabile a partire dai dati di un altro enigma. In altri casi, i materiali contenuti nel kit sono stati intesi come supporto per la risoluzione di un problema, suggerendo una strategia risolutiva particolarmente rapida, ma non risultano indispensabili. Un esempio di questo tipo sarà dato nel par. 4.2.

Una sfida aggiuntiva che si è voluta porre agli studenti è quella della corretta selezione dei materiali rilevanti e dell'esclusione dei materiali fuorvianti (*red herrings*) come in **Figura 4**. L'introduzione di *red herrings* ci ha permesso di mettere le classi nella condizione di lavorare sulla competenza di modellistica matematica (Niss & Højgaard, 2019), per lo sviluppo della quale la capacità di distinguere le informazioni rilevanti da quelle irrilevanti è una componente fondamentale (Maass, 2006). Come nella tradizionale esperienza di *escape room*, abbiamo immaginato che gli studenti producessero nel corso dell'attività argomenti diversi per l'utilizzo di alcuni indizi piuttosto che altri, e che tali argomenti venissero poi valutati e le conclusioni accettate o modificate nel corso delle discussioni (durante la prova o, più verosimilmente, nelle attività di *debriefing*).

Inoltre, una volta selezionati i materiali rilevanti, è ancora necessario identificare la strategia di risoluzione. Avendo imposto un tempo limitato per la risoluzione degli enigmi, l'utilizzo dello strumento dei materiali aggiuntivi tendeva a premiare, da un lato, la capacità di compiere "salti mentali" (Holyoak & Thagard, 1995) tra domini apparentemente distanti tra loro (come la forma di un cubo e di un suo particolare sviluppo bidimensionale; si veda il par. 4.2), dall'altro, la capacità di riflettere sulle soluzioni ottenute tramite l'applicazione dei modelli presenti negli indizi, con opportuna selezione dei modelli rilevanti ed esclusione di quelli fuorvianti.

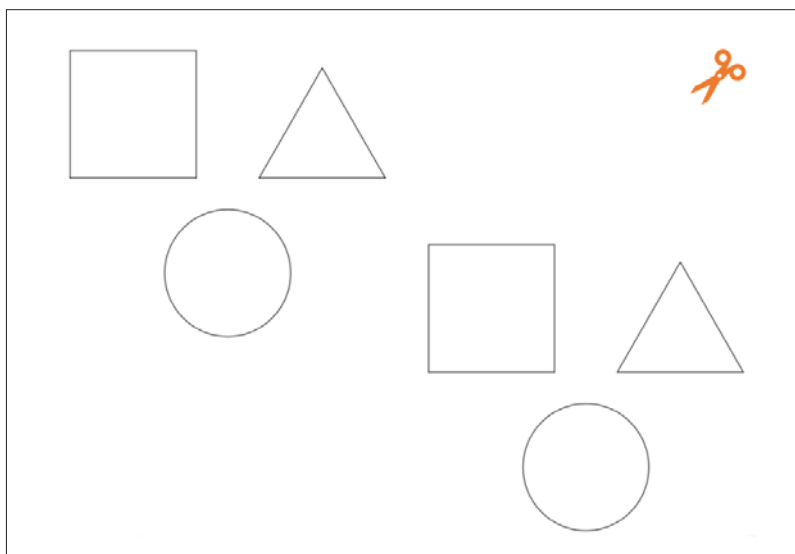


Figura 4. Esempio di materiale fuorviante presente in tutti i kit. Le figure geometriche proposte non hanno una particolare utilità per la corretta risoluzione degli enigmi.

Da notare, inoltre, che i materiali aggiuntivi sono stati pensati anche come base per la progettazione di attività di *debriefing* da parte dei docenti coinvolti, con o senza assistenza esterna.

3.5 L'apprendimento prospettato

L'apprendimento prospettato spazia dal consolidamento di specifiche conoscenze matematiche agli aspetti della confidenza nella risoluzione di problemi matematici. Qui ci soffermiamo su un aspetto della nostra proposta che ci sembra particolarmente rilevante e distintivo, cioè l'utilizzo combinato di problemi verbali e indizi grafici. Tale scelta è stata pensata per lavorare, da un lato, sulle competenze nella rappresentazione di problemi verbali in problemi matematici (tramite l'identificazione di una certa rappresentazione grafica come rilevante per un problema; si veda anche Duval, 2006) e dell'altro, sulla capacità di riflettere su inferenze suggerite da somiglianze con indizi grafici (tramite l'esame di gruppo delle soluzioni ottenute). Per utilizzare un'espressione di Fischbein (1987, 1992), il lavoro su problemi e indizi è stato pensato per permettere agli studenti di mettere alla prova (durante il gioco o nelle fasi di *debriefing*) i propri *modelli intuitivi*, cioè quelle iniziali associazioni e rappresentazioni di nozioni matematiche che «continuano ad influenzare, tacitamente, le interpretazioni e decisioni risolutive dell'allievo» (Fischbein, 1992, p. 26). Gli enigmi proposti offrivano agli studenti la possibilità di riflettere sia sui vantaggi che sui rischi dell'uso di tali modelli nella risoluzione di problemi (Sbaragli et al., 2009).

Nel suo tentativo di innescare durante le fasi di gioco strategie di risoluzione tramite modelli e analogie, cioè mediante un trasferimento ragionato di proprietà di problemi più semplici o di domini più familiari (Borgogna, 2023; Cangiotti & Nappo, 2023; Polya, 1954) la nostra proposta può essere distinta da un approccio comune nella letteratura recente, che consiste nell'arricchire il contesto di risoluzione di un problema tramite un intervento del docente volto a identificare un'analogia intermedia (*bridging analogy*). Nei loro studi sulla didattica della fisica, per esempio, Brown e Clement (1989) descrivono come gli studenti siano indotti a concepire correttamente il sistema di forze di un libro che poggia sul tavolo tramite un esempio intermedio (proposto dal docente) di un libro che poggia su un ripiano flessibile, che è a sua volta analogo al caso della molla su cui si esercita una pressione. In uno studio più recente, Vamvakoussi (2017) ha esteso l'uso di analogie intermedie per facilitare una corretta acquisizione della nozione matematica di densità, dove la retta dei numeri reali è paragonata dal docente a «una banda elastica che non si rompe mai» (p. 497, traduzione degli autori). Altri

studi influenti sostengono l'arricchimento diretto del contesto in cui operano gli studenti attraverso l'utilizzo di processi di «dissolvenza del concreto» (*concreteness fading*, Fyfe et al., 2014) innescati dal docente. Nel nostro caso, l'intervento del docente viene quasi interamente a mancare (almeno durante l'attività di gioco) ed è sostituito dall'aspetto motivazionale della modalità *escape room* e dalla presenza di materiali con indizi sia utili che fuorvianti. Per quanto i risultati positivi nella risoluzione degli enigmi ottenuti dalle classi partecipanti (riportati nel par. 5) possano suggerire la conclusione che la costruzione di un adeguato contesto emotivo-motivazionale e di adeguati materiali possano talvolta sostituire un intervento diretto del docente nell'innescare strategie risolutive di problemi matematici tramite modelli e analogie, l'impossibilità da parte nostra di osservare gli studenti nello svolgimento del gioco non ci consente di raggiungere questa importante conclusione. Rimandiamo pertanto l'esame dell'ipotesi appena menzionata a uno studio futuro.

Concludiamo questa sezione ricordando che, come anticipato nei paragrafi precedenti, l'attività di *debriefing* è stata demandata ai docenti coinvolti, eventualmente con il supporto dei materiali aggiuntivi e della nostra assistenza esterna. I docenti hanno potuto anche offrire una valutazione più accurata dello svolgimento della prova da parte dei loro studenti rispetto a quello che è stato offerto da noi tramite l'informazione del loro "punteggio" ufficiale e del tempo impiegato. Tutto ciò rientra coerentemente all'interno dell'obiettivo di offrire alle classi coinvolte un'attività di *stimolo* allo sviluppo delle competenze matematiche – più un punto di partenza che un punto di arrivo.

4 La selezione dei problemi

In questo paragrafo presentiamo tre esempi di problemi estratti dal gioco descritto poco fa. Tutti i problemi sotto illustrati sono rivolti agli studenti del triennio (terza, quarta, quinta) delle scuole secondarie di secondo grado. Per ogni problema riportiamo il testo, gli eventuali materiali di supporto alla soluzione contenuti nei materiali aggiuntivi, le possibili strategie risolutive e le competenze matematiche che il problema può contribuire a sviluppare.

4.1 Problema: una passeggiata sulle facce di una piramide

Il primo problema è di natura geometrica. Riportiamo di seguito il testo:

La luce è giallastra, l'aria è fastidiosa. Ci metti un momento per capire che sei nel bel mezzo di una tempesta di sabbia. Non hai più due gambe e due braccia ma otto zampe lunghe e pelose! Ti accorgi di esserti trasformato in un grosso ragno e ti trovi molto in alto, proprio nel baricentro di una delle facce laterali di una piramide regolare! Vicino a te trovi una pergamena. Nel vento riecheggia un suono, una voce: «Misura il percorso più breve che ti porta a toccare tutti i baricentri delle facce laterali e la tempesta cesserà». Qual è la sua lunghezza (approssimata al metro)?

Agli studenti è stato fornito del materiale aggiuntivo (presente nel kit di supporto): una pergamena con alcuni dati relativi alla piramide (Figura 5) e alcune immagini geometriche, tra le quali lo sviluppo bidimensionale della piramide (Figura 6). Notiamo che molti dei dati forniti non sono utili allo svolgimento del problema, ma concorrono a simulare un contesto reale e a testare la competenza degli studenti nel discernere le informazioni rilevanti da quelle superflue, permettendo loro di lavorare allo sviluppo della competenza di modellistica matematica (Niss & Højgaard, 2019).

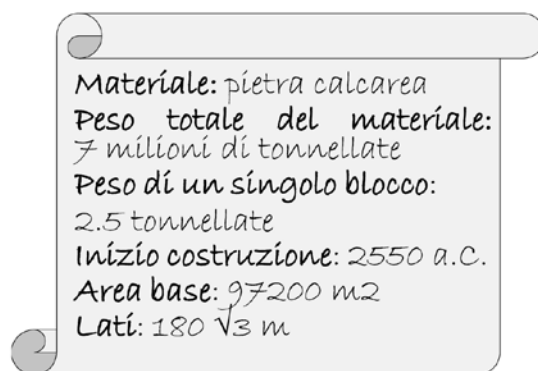


Figura 5. Pergamena fornita nel kit di supporto.

Una strategia di risoluzione del problema proposto si basa proprio sullo sviluppo bidimensionale della piramide di Figura 6. Infatti, grazie a questa visualizzazione il problema geometrico tridimensionale (muoversi tra le facce di una piramide) si riduce a un problema di più facile risoluzione: il calcolo della lunghezza di un percorso sul piano formato da più segmenti (le cui lunghezze sono deducibili dai dati forniti in pergamena e da alcune proprietà base dei triangoli equilateri).

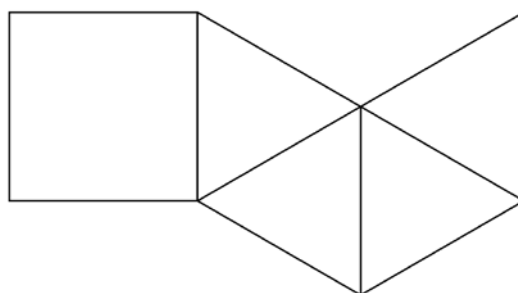


Figura 6. Sviluppo bidimensionale della piramide.

Considerando i baricentri delle facce laterali (come indicato nel testo), la risoluzione grafica del problema è quella rappresentata in Figura 7.

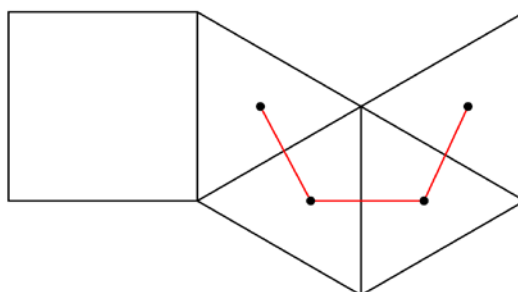


Figura 7. I tre segmenti rossi rappresentano il percorso più breve che congiunge i quattro baricentri delle facce laterali della piramide.

La soluzione delineata mostra come il problema proposto abbia il potenziale di aiutare gli studenti a lavorare sulla competenza di rappresentazione, in quanto coinvolge l'utilizzo di una rappresentazione bidimensionale di un problema tridimensionale. Come sottolineato in Niss e Højgaard (2019), il cam-

biamento di rappresentazione è raramente una trasformazione biettiva. Al contrario, può causare il guadagno o la perdita di informazioni. Nel problema qui considerato, in particolare, il passaggio da una rappresentazione tridimensionale a una bidimensionale, supportato dallo sviluppo bidimensionale fornito, può aggiungere informazioni funzionali alla risoluzione.

4.2 Problema: l'estrazione dei cubetti colorati

Il secondo problema si compone di una parte geometrica (più complessa) e di una parte probabilistica (più semplice). Il testo del problema è il seguente:

Un odore acre pervade il tuo olfatto. Il fumo di due camini accessi riempie quello che sembra essere un raffinato salotto. Inizi a intravedere delle sagome, prima un uomo al centro della stanza, poi una donna che parla con lui, ora due ragazzi seduti sul divano, e poi un gruppo di tre ragazze davanti a una scacchiera. Il fumo si dirada e ora distingui 5, 8, 13, 21 sagome. Alcuni giocano a dama, altri a scacchi, altri ancora a carte. Ti avvicini a un tavolo dove un uomo sta dipingendo le sei facce di un grande cubo di legno di colore verde. Ti fissa e ti passa un seghetto. «Dividilo in 216 cubetti» – dice l'uomo – «tutti uguali e precisi. Non sbagliare!». In un istante hai fatto, ma ti senti stanco come se avessi corso 33 giri di campo. L'uomo raccoglie i piccoli cubetti in un sacchetto di stoffa ed esclama: «Da questa stanza uscire potrai se la probabilità (in forma di frazione ridotta ai minimi termini) di pescare dal sacchetto un cubetto con esattamente due facce di colore verde indovinerai!». Mentre l'uomo parla ti guardi intorno e noti che sul tavolo ci sono anche altri oggetti e forme geometriche, tra cui una strana croce...

Le due parti di cui si compone l'enigma sono il conteggio dei cubetti che rispettano la caratteristica indicata nel testo (avere esattamente due facce colorate) e il rapporto del numero ottenuto con i cubetti totali (indicati nel testo: 216) per calcolare la probabilità come "casi favorevoli su casi possibili". Similmente al caso precedente, nel kit di supporto è possibile trovare (tra le varie figure geometriche fornite) uno sviluppo bidimensionale del cubo (Figura 8). Il suo utilizzo può condurre alla soluzione dell'enigma tramite la divisione in quadratini della figura bidimensionale e la sua ricomposizione manuale in forma di cubo. Come nel problema precedente, il materiale aggiuntivo introduce quindi un elemento di concretezza nell'individuazione della strategia di risoluzione. Inoltre, notiamo che anche in questo caso il testo dell'enigma è cosparso di dati superflui, contribuendo a testare anche la competenza di modellizzazione matematica degli studenti (Niss & Højgaard, 2019).

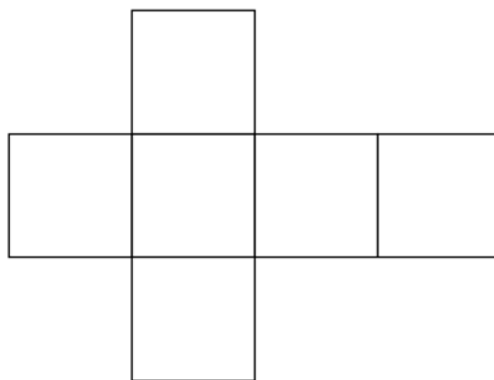


Figura 8. Uno sviluppo bidimensionale del cubo.

Per l'uso di una figura bidimensionale come indizio, il problema sopra descritto è simile al precedente.

Tuttavia, è bene evidenziare due importanti differenze:

- La connessione tra lo sviluppo bidimensionale e la figura tridimensionale appare in questo caso più debole e, pur offrendo una strategia risolutiva particolarmente rapida, può indurre in errore se utilizzata in modo inappropriato. È infatti vero che le uniche facce interessate alla colorazione sono quelle visualizzate nello sviluppo bidimensionale; tuttavia, alcuni lati necessitano dell'operazione di *identificazione* (ad esempio, i lati agli estremi sono esattamente lo stesso lato) per non contare lo stesso cubetto due volte.
- Il metodo appena esposto non è l'unica via per selezionare i cubetti utili alla soluzione né tanto meno la via più intuitiva di risoluzione. Una valida alternativa consiste nella ricostruzione del cubo (dopo averlo diviso tramite l'utilizzo del righello) e nel contare i cubetti con esattamente due facce colorate del cubo tridimensionale ottenuto tramite questa procedura (si veda la Figura 9). Inoltre, è possibile procedere alla soluzione anche solo numericamente.

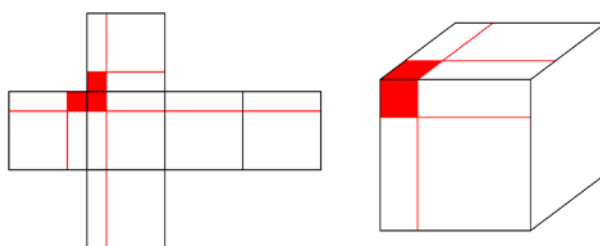


Figura 9. Ricostruzione del cubo dallo sviluppo bidimensionale alla versione tridimensionale.

Abbiamo immaginato in questo caso che, nel discutere in gruppo (durante la prova o nelle successive attività di *debriefing*) le varie strategie risolutive del quesito, gli studenti potessero lavorare sulle competenze relative alla gestione dei problemi matematici (Niss & Højgaard, 2019).

4.3 Problema: il mondo degli otto-dita

L'ultimo enigma del quale proponiamo la descrizione è di natura numerica. Il testo recita:

Che strana scuola è questa! Un buffo professore coi baffi a forma di 9 ti chiama alla lavagna. Dietro di te c'è scritto "DIVISIONE" e una tabella da completare:

654321	25	0
54321	17	1
4321	12	3
321	6	6
5362545	...	?

Ti guardi intorno per ricevere qualche suggerimento ma noti solo un curioso dettaglio: tutti hanno solo otto dita! Come faranno mai in questa scuola a contare e a dividere? Il buffo professore ti guarda con aria perplessa e ti interroga: «Che numero dovrò inserire nella casella in basso a destra?».

Nello spirito delle *escape room*, sono stati nascosti alcuni indizi nel testo. In particolare, per la risoluzione si riveleranno utili il numero "9" (la forma dei baffi del professore), la parola "otto" (relativa al numero delle dita degli alunni della scuola) e la parola "dividere" inserita nella domanda.

Le intestazioni della tabella inserita nel testo del problema sono rese esplicite nella Tabella 1.

<i>Numero (in base 8)</i>	<i>Somma delle cifre (in base 8)</i>	<i>Resto della divisione per 7 (in base 8)</i>
654321	25	0
54321	17	1
4321	12	3
321	6	6
5362545	...	?

Tabella 1. La corretta lettura della tabella: la prima colonna rappresenta dei numeri in base 8, la seconda colonna è la somma delle cifre del numero nella prima colonna in base 8 e la terza colonna è il resto della divisione per 7 in base 8 (il cui risultato è lo stesso se la divisione viene svolta rispetto al numero nella prima colonna o nella seconda, analogamente a come funziona la regola della divisione con resto per 9 in base 10).

Una volta interpretato il significato delle diverse colonne della tabella, il risultato (cioè il numero da inserire nella casella in basso a destra) segue immediatamente. Si presume infatti che comprendere il significato della tabella sia equivalente a capire la regola di divisione con resto per 7 in base 8. Quest'ultimo problema sfrutta l'analogia tra le regole di divisione in base 10 e base 8, rispettivamente per 9 e 7.³ Analogamente si può procedere in base 8 quando il divisore è 7 (notiamo che la somma delle cifre del dividendo può essere svolta in qualsiasi base e non necessariamente nella base di partenza, la qual cosa offre un ulteriore spunto di riflessione e di potenziale discussione collettiva).

Il problema appena descritto si propone di far sorgere negli studenti domande del tipo «Esiste uno schema che i numeri riportati in tabella soddisfano?», «Qual è lo schema sottostante?», offrendo un pretesto per lavorare in classe sulla competenza di pensiero matematico (Niss & Højgaard, 2019). Tale competenza coinvolge infatti la capacità di porre un particolare tipo di domande caratteristiche della matematica, come ad esempio: «Esiste...?», «Sotto quali condizioni?», «È possibile che...?».

5 Risultati

In questa sezione riassumiamo gli esiti dell'*escape room* sopra descritta, focalizzandoci solo su alcuni aspetti che abbiamo ritenuto interessanti. In totale hanno partecipato all'attività 61 classi di cui 16 delle "medie" (scuola secondaria di primo grado, grado 6-9), 27 del "biennio" (primi due anni della scuola secondaria di secondo grado, grado 10-11) e 18 del "triennio" (ultimi tre anni della scuola secondaria di secondo grado, grado 12-14). Come da regolamento, il punteggio è stato calcolato come segue. Il valore attribuito alla risoluzione di ciascun problema matematico è stato di 15 punti. Il valore attribuito all'inserimento della chiave alfabetica corretta è stato di 21 punti. Solo in caso di completamento corretto del gioco (cioè se tutte le risposte fornite erano corrette), sono stati attribuiti punti extra in base al tempo di consegna, con un incremento di 9 punti in caso di completamento tra 0 e 45 minuti, di 6 punti in caso di completamento tra 45 e 50 minuti, e di 3 punti in caso di completamento

³ Ricordiamo che, in base 10, per trovare il resto della divisione di un numero D per 9 è sufficiente trovare il resto della divisione per 9 del numero ottenuto sommando le cifre di D .

tra 50 e 55 minuti. Il punteggio massimo ottenibile in base al regolamento è quindi di 120 punti. La Tabella 2 riporta i punteggi delle classi premiate.

Vincitore	Punteggio	Tempo
Medie	120	41' 35"
Biennio	120	31' 06"
Triennio	90	60' 00"

Tabella 2. Punteggi e tempi delle classi premiate divisi per categoria.

Per completezza, proponiamo nella Tabella 3 il punteggio medio e il tempo medio impiegato a completare il gioco diviso per i tre livelli:

Tipo di classe	Punteggio medio	Tempo medio
Medie	64,7	42' 11"
Biennio	80,7	52' 57"
Triennio	40,8	55' 47"

Tabella 3. Medie dei punteggi e tempi delle classi partecipanti divise per categoria.

I risultati suggeriscono che il gioco si è rivelato di più facile soluzione per gli studenti del biennio delle scuole secondarie di secondo grado. Non sorprende che la stessa tipologia di problemi (e quindi lo stesso livello di difficoltà) si sia rivelata leggermente meno accessibile per gli studenti delle scuole secondario di primo grado. Un discorso a parte va invece fatto per il triennio: in questo caso la maggior parte dei problemi era differente (sia per conoscenze che per competenze) rispetto a medie e biennio. I dati suggeriscono che il livello di difficoltà incontrato al triennio sia stato decisamente più elevato rispetto al resto delle classi partecipanti. Non abbiamo sufficienti informazioni per fare ipotesi sulle cause della maggiore difficoltà incontrata al triennio.

In riferimento ai problemi presentati nel par. 4, un dato interessante è che solo il 17% delle classi partecipanti del triennio sia riuscito a risolvere il problema sulla passeggiata sulle facce della piramide, nonostante la presenza dello sviluppo bidimensionale della piramide nei materiali di supporto, segno che forse vi è una limitata familiarità con l'utilizzo di rappresentazioni bidimensionali di oggetti tridimensionali per la risoluzione di problemi. Nel problema dell'estrazione dei cubetti colorati, tuttavia, le percentuali di successo salgono in modo significativo: circa l'89% delle classi del triennio ha risposto correttamente al quesito. I dati raccolti non sono sufficienti a stabilire se la differenza negli esiti sia dovuta principalmente al fatto che il problema dell'estrazione dei cubetti colorati è risolvibile anche per sola via numerica, senza l'utilizzo dello sviluppo bidimensionale del cubo, o per altri motivi.

Infine, il 43% dei partecipanti del triennio ha fornito la corretta soluzione al problema sul mondo degli otto-dita. Quest'ultimo dato risulta interessante perché il tema affrontato nell'esercizio (l'aritmetica in basi diverse dalla base 10) non è spesso un argomento curriculare. Per questo motivo è interessante notare come una buona percentuale di classi (significativamente maggiore di quella del

problema della passeggiata sulle facce della piramide) sia riuscita a risolvere correttamente il quesito. In ogni caso, è importante sottolineare come le analisi dei risultati ottenuti, per quanto provenienti da un campione relativamente significativo di classi, restituiscano una visione estremamente parziale, che necessita di un'ulteriore indagine con l'osservazione diretta delle modalità di risoluzione più utilizzate dagli studenti. Più significativi sono invece i feedback ricevuti dai docenti in merito all'esperienza. Le testimonianze collezionate nei giorni successivi sono state generalmente positive, come mostrano i due seguenti esempi:

«Quanto all'attività, i ragazzi erano molto contenti di "utilizzare" la matematica in un contesto differente da quello tradizionale; hanno lavorato con entusiasmo e partecipazione» (docente del triennio).

«L'attività legata al PiGame è stata molto gradita. I ragazzi hanno lavorato con entusiasmo e la formula della Escape Room è stata vincente» (docente del biennio).

I commenti confermano l'impressione di un vivo interesse verso un'attività didattica non tradizionale focalizzata sulle competenze nella risoluzione di problemi. Infine, è importante sottolineare gli aspetti affettivi che emergono quando i docenti si riferiscono al lavoro dei propri studenti usando le parole "entusiasmo" e "partecipazione".

6 Conclusioni

In questo articolo abbiamo descritto una proposta di gioco matematico in modalità *escape room*. L'idea di presentare la nostra attività all'interno di un contesto di gioco si è rivelata uno dei punti di forza di questa iniziativa, come abbiamo potuto constatare dai commenti positivi rilasciati dagli insegnanti. Nella nostra proposta, le capacità di coordinare diversi registri semiotici (Duval, 2006) e di gestire problemi (Niss & Højgaard, 2019) apparentemente distanti tra loro è stata posta come prioritaria rispetto alla sola conoscenza dei teoremi e delle proprietà matematiche. I commenti ricevuti in seguito all'esperienza suggeriscono che integrare una modalità di apprendimento inusuale, basata su un gioco, possa fornire al docente non solo uno strumento utile per testare il livello di apprendimento delle competenze logico-matematiche, ma anche un supporto per sviluppare in modo autonomo competenze nella risoluzione di problemi. Nella nostra discussione abbiamo inoltre sottolineato il ruolo dello strumento narrativo e degli indizi (tipici dell'esperienza di *escape room*) per consentire agli studenti di esercitarsi nella rappresentazione di problemi matematici e nell'utilizzo ragionato di procedure di risoluzione tramite modelli e analogie. Ulteriori studi, tra cui esperienze effettuate in presenza, saranno utili a verificare l'efficacia della proposta combinazione di problemi in forma narrativa e indizi in forma grafica agli scopi didattici da noi intesi.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano tutte le scuole che hanno partecipato all'iniziativa PiGame2023 "Escape from MathLand" il 14 marzo 2023. In particolare, un ringraziamento va a tutti gli studenti e gli insegnanti che si sono messi in gioco e hanno contribuito all'ottima riuscita dell'evento. Inoltre, gli autori ringraziano Anna Rho e Laura Guarino che hanno offerto il loro supporto nell'organizzazione, progettazione e gestione dell'evento. Infine, gli autori ringraziano il progetto PLS – Matematica e il Laboratorio FDS del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano che hanno finanziato l'intera iniziativa e i due revisori anonimi del presente articolo, per i loro preziosi commenti.

Bibliografia

- Behnamnia, N., Kamsin, A., Ismail, M. A. B., & Hayati, A. (2020). The effective components of creativity in digital game-based learning among young children: a case study. *Children and Youth Services Review*, 116, 105227.
- Berieter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55, 201–226.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems?. In C. Haine, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, Engineering and Economics – ICTMA 12* (pp. 222–231). Elsevier.
- Borgogna, G. (2023). L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una classe di seconda media. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 13, 71–89.
- Botturi, L., & Babazadeh, M. (2020). Designing educational escape rooms: validating the Star Model. *International Journal of Serious Games*, 7(3), 41–75.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education* (pp. 110–119). University of Bielefeld.
- Brown, D. E., & Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: Abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*, 18(4), 237–261.
- Cangiotti, N., & Nappo, F. (2023). Reasoning by analogy in mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, 31(2), 176–215.
- Clement, J. (2000). Model based learning as a key research area for science education. *International Journal of Science Education*, 22(9), 1041–1053.
- D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. INDEX Editore.
- Dele-Ajayi, O., Strachan, R., Pickard, A., & Sanderson, J. (2019). Games for teaching mathematics in Nigeria: What happens to pupils' engagement and traditional classroom dynamics?. *IEEE Access*, 7, 53248–53261.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12(3), 306–355.
- Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). "The answer is really 4.5". Beliefs about word problems. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 271–292). Kluwer Academic Publishers.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Reidel.

- Fischbein, E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 25–38). Pitagora.
- Fotaris, P., & Mastoras, T. (2022). Room2Educ8: A Framework for Creating Educational Escape Rooms Based on Design Thinking Principles. *Education Sciences*, 12(11), 768.
- Fuentes-Cabrera, A., Parra-Gonzalez, M., Lopez-Belmonte, J., & Segura-Robles, A. (2020). Learning mathematics with emerging methodologies – the escape room as a case study. *Mathematics*, 8(9), 1586.
- Fyfe, E., McNeil, N., Son, J., & Goldstone, R. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: a systematic review. *Educational Psychology Review*, 26, 9–25.
- Gil-Doménech, D., & Berbegal-Mirabent, J. (2019). Stimulating students' engagement in mathematics courses in non-STEM academic programmes: A game-based learning. *Innovations in Education and Teaching International*, 56(1), 57–65.
- Holt, J. (1982). *How children fail*. Delta.
- Holyoak, K., & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: analogy in creative thought*. MIT Press.
- Kolb, D. (1984). *Experiential Learning as the Science of Learning and Development*. Prentice Hall.
- Maass, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 113–142.
- McKeough, A., Lupart, J., & Marini, A. (Eds.). (1995). *Teaching for transfer: Fostering generalization in learning*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali per i licei*. https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/decreto_indicazioni_nazionali.pdf
- Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modeling*. Routledge.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9–28.
- Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.
- Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (Vol. 85). Princeton University Press.
- Sbaragli, S. (2019). Il ruolo della comprensione del testo nella risoluzione di problemi. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica e professionalità docente* (pp. 47–50). Pitagora.
- Sbaragli, S., Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., & Ricci, M. (2009). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in ambito geometrico* (Matematica per gli insegnanti e la classe, Vol. 1). Armando Editore.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze? Alcune regole intuitive generano errori clamorosi*. Centro Studi Erickson.

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 49(4), 497–507.

Veldkamp, A., Grint, L., Knippels, M., & van Joolingen, W. (2020). Escape education: A systematic review on escape rooms in education. *Educational Research Review*, 31, 100364.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer-Verlag.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Carocci.

Zhonggen, Y. (2019). A meta-analysis of use of serious games in education over a decade. *International Journal of Computer Games Technology*, 4797032.

Classe cooperativa e apprendimento matematico individualizzato con il piano di lavoro

Cooperative class and individualized mathematical learning through the work schedule

Rita Di Ianni^{*} e Antonio Pellicori[°]

^{*}Scuola primaria “M. K. Gandhi”, Pontedera (PI) – Italia

[°]Liceo artistico “F. Russoli”, Cascina (PI) – Italia

✉ r.dianni@gmail.com, antoniopellicori@gmail.com

Sunto / L'articolo racconta l'esperienza dell'introduzione del piano di lavoro matematico in due classi quinte della scuola primaria, con riflessioni di contesto e di metodo. Al centro di pratiche condivise da un gruppo di insegnanti di scuola primaria, il piano di lavoro costituisce una formula promettente di laboratorio matematico, in cui autonomia, apprendimento individualizzato e dimensione pratica e cooperativa si incontrano. Il racconto parte dalla descrizione dello strumento del piano di lavoro e procede con l'introduzione per gradi di questa pratica in classe e la sua articolazione negli spazi e tempi, cui fa seguito l'illustrazione del percorso della classe attraverso alcune esperienze significative collegate al problem solving. Si prende in considerazione, infine, l'evoluzione nel tempo degli atteggiamenti dei bambini verso la matematica, con alcune riflessioni in chiusura sulle possibilità d'uso dello strumento anche dopo la scuola primaria.

Parole chiave: piano di lavoro; strumenti; apprendimento cooperativo; apprendimento individualizzato; problem solving.

Abstract / This paper discusses a didactical experience with the (mathematical) work schedule developed in two fifth-grade classes of primary school in Italy, also introducing contextual and methodological reflections. The potential of the work schedule for developing a real mathematics laboratory in primary school is discussed: the mathematics laboratory is the context where autonomy, individualized learning, and practical and cooperative dimensions converge. The paper first introduces the specific tool of the work schedule, then shows its gradual introduction in the classroom and the full organization of the work schedule in terms of space and time, describing some significant experiences related to problem solving activities. The evolution of children's attitudes towards mathematics involved in the didactical path is also discussed, with a final reference to the perspectives of this practice in secondary school.

Keywords: work schedule; tools; cooperative learning; individualized learning; problem solving.

1 Introduzione

L'esperienza qui presentata si è svolta in due classi quinte di scuola primaria¹ a cui la docente (tra gli autori dell'articolo)² è stata assegnata per la prima volta l'anno precedente, e in cui è stata introdotta, attraverso un percorso graduale, la pratica del *piano di lavoro matematico*. È importante a questo proposito fare subito riferimento a un contesto di attività e di condivisione di pratiche che va ben oltre il lavoro in classe di un singolo docente, e ne costituisce la base imprescindibile.

Parlare di piano di lavoro significa infatti in questo caso parlare innanzitutto di uno scambio vivo di pratiche tra gruppi di insegnanti di scuola primaria che si ispirano in vario modo a quei principi di scuola democratica che sono stati al centro di un vasto movimento educativo lungo decenni in Italia e non solo. L'esperienza qui riportata in particolare si situa nell'attività intensa del gruppo territoriale del Movimento di Cooperazione Educativa di Pisa, e ha avuto un ulteriore sviluppo nella nascita di un gruppo di lavoro autonomo e nella creazione di una piattaforma online di scambio di strumenti, chiamata "Lo strumentario per il piano di lavoro",³ alla quale collaborano maestre e maestri di tutta Italia. Il piano di lavoro, nella sua idea di fondo, è una forma di organizzazione del lavoro cooperativo in classe. In alcuni tempi stabiliti della settimana ogni bambino sceglie di lavorare di volta in volta su un obiettivo da raggiungere, impiegando, individualmente o insieme ad altri, gli strumenti relativi a ciascun obiettivo messi a disposizione dall'insegnante; quando il bambino si sente pronto, chiede di conseguire il *brevetto* relativo a quell'obiettivo, abilità o competenza, il tutto in un contesto in cui, come si vedrà, il percorso di ognuno è compreso e vissuto collettivamente come parte di quello della classe. Si tratta in realtà di un'organizzazione complessa, che richiede esperienza e può essere introdotta solo attraverso un percorso progressivo che, anche nella storia personale delle maestre e dei maestri, è fatto di tentativi ed esperimenti. Per questo pensiamo sia significativo illustrare in questo lavoro, per così dire, le virtù dello "strumento", e mostrarle nel vivo di un'esperienza pure parziale e imperfetta.

È evidente che il piano di lavoro è fortemente ispirato e difficilmente scollegabile da una specifica visione di fondo del ruolo della scuola e dell'apprendimento. Il piano di lavoro, infatti, nasce com'è noto da un'intuizione feconda di Célestin Freinet (2002), il creatore e promotore di quella scuola popolare che ha avuto un impatto notevole sulla storia educativa in Italia, costituendo uno dei riferimenti privilegiati nella ricca storia del rinnovamento dell'insegnamento scolastico nel dopoguerra, in parallelo con cambiamenti epocali della sensibilità sociale, politica e culturale. Ne è nato un movimento internazionale ancora ben vivo, che ha continuato a proporre le "tecniche Freinet" in contesti nuovi, accogliendo il contributo rivoluzionario e le pratiche e le esperienze diffuse di tanti altri maestri e maestre, in un circuito di scambio libero da vincoli di letteralità e di ortodossia. Chi scrive non intende proporre qualcosa come un "metodo" o una "classe Freinet", ma si riallaccia piuttosto alla ricchezza molteplice di quelle esperienze, che nel tempo si sono approfondite, sono mutate, hanno anche cambiato il proprio punto di vista. L'ispirazione profonda della scuola democratica, che muove gli autori del presente contributo e tanti docenti impegnati, è tale innanzitutto perché politeistica, policentrica e continuamente in evoluzione attraverso il contributo di tutti e tutte.

Un'altra osservazione preliminare riguarda l'aspetto *matematico* del piano di lavoro. Qui strumenti e pratiche si ispirano a un ventaglio ampio di studi e acquisizioni degli ultimi decenni, con un approccio da un lato aperto, come vedremo, ad accogliere fonti molteplici ed eterogenee, con i loro strumenti specifici che si rivelino utili, e dall'altro decisamente ancorato ad alcuni punti fermi nella considerazione

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

2. Il presente lavoro è il racconto dell'esperienza didattica condotta dalla docente di scuola primaria, tra gli autori dell'articolo. La sua elaborazione è il risultato della riflessione e del contributo condiviso dei due autori, il secondo dei quali è insegnante nella scuola secondaria di secondo grado.

3. Sito web: <https://www.pianodilavoro.org/>, con ricco materiale introduttivo sul piano di lavoro.

attuale della ricerca sull'apprendimento matematico. Non secondario in questo quadro è anche l'apporto per molti versi decisivo che le neuroscienze sono state in grado di dare alla nostra comprensione dell'apprendimento matematico e della natura delle difficoltà incontrate dai bambini.⁴ Non è obiettivo di chi scrive discutere nel dettaglio questi aspetti teorici, ma alcuni contributi e riflessioni essenziali che hanno nutrito nel tempo il lavoro emergeranno nel racconto, con qualche riferimento in bibliografia.

2 Il piano di lavoro: uno sguardo d'insieme

Col piano di lavoro, una volta entrati "a regime", la classe funziona, in alcuni tempi stabiliti della settimana, come un laboratorio artigianale, simile alle botteghe di un tempo: gruppi di lavoro con materiali a disposizione, singoli bambini⁵ intenti ad approfondire un argomento e coppie al lavoro. Ogni bambino si dedica ai suoi obiettivi con un set di materiali predisposti per lo scopo, e può decidere di lavorare approfondendo l'argomento da lui scelto, lavorare da solo o con un compagno, dedicarsi a un brevetto legato ai numeri, alla geometria, alle misure, al *problem solving* o ad altro. A livello generale l'impianto del piano di lavoro presenta dunque alcune componenti essenziali:

- una scelta di obiettivi che ogni bambino sa di dover raggiungere durante l'anno;
- la predisposizione di un ventaglio di strumenti dedicati ad ogni obiettivo, che ogni bambino può scegliere di sperimentare da solo o con altri. L'aula, come si vedrà, traduce nell'organizzazione degli spazi questo *setting* operativo;
- gli strumenti possono essere autocorrettivi, a sviluppo aperto e di natura ludica: nel primo caso possiedono una modalità di controllo immediata, che consente al bambino di verificare l'abilità raggiunta, cioè se è in grado di fare o no qualcosa;
- la scheda riepilogativa individuale, che consente a ogni bambino di programmare e verificare il percorso del proprio lavoro, ossia il vero e proprio "piano di lavoro";
- un sistema di brevetti: ogni bambino, quando si sente pronto e ha voglia, può fare richiesta di conseguire il brevetto relativo a un obiettivo. Di lì a breve proverà a conseguire il brevetto in classe, in quello che assume l'importanza di un momento collettivo.

A monte e a valle del laboratorio artigianale sta in effetti la dimensione cooperativa e di gruppo del progetto. L'idea del piano di lavoro è collegata in vario modo all'assemblea di classe e a momenti decisionali condivisi, oltre all'attività laboratoriale. Ciò che tuttavia caratterizza la pratica anche nel suo nucleo più essenziale, che racconteremo qui, è un'esperienza nuova e a suo modo inedita e sorprendente per il bambino: fare esperienza di sé e lavorare sulle proprie competenze in modo autonomo e diretto, in una dimensione in cui ha importanza capire cosa si sa fare e procedere con i propri tempi, riducendo le ansie da prestazione, e in un clima di gioco e di collaborazione continuamente supportato da maestre e maestri. Per vedere questa realtà viva del piano di lavoro è necessario, perciò, entrare nel racconto dettagliato dell'esperienza di classe.

2.1 Le ragioni di un inizio: quale matematica?

Introdurre il piano di lavoro in due classi quinte, che non avevano avuto questo tipo di esperienza nel loro cammino matematico, ha suscitato inizialmente un po' di incertezza nella docente riguardo all'op-

4. A questo tema è dedicata la tesi di laurea di uno dei due autori (Di Ianni, 2020). Riferimenti imprescindibili in questo campo sono i contributi di Dehaene (1992, 2010) e in Italia di Lucangeli (si vedano, ad esempio, Lucangeli, 2019; Lucangeli et al., 2007).

5. Il genere maschile sarà usato da qui in poi per designare persone, indipendentemente dal genere.

portunità o meno di introdurre questa pratica. Come si vedrà, si tratta di un processo favorito dalla risposta positiva ad alcuni tentativi più circoscritti, ma che trova innanzitutto una solida base nelle Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012; di seguito, abbreviate in Indicazioni Nazionali). Le Indicazioni Nazionali insistono programmaticamente sulla didattica laboratoriale come modalità privilegiata d'insegnamento nella scuola primaria, sia nell'impostazione generale del documento che nello specifico della trattazione dell'insegnamento della matematica.⁶ Esse recepiscono a loro volta una concezione mutata del ruolo culturale della matematica e delle sue modalità di apprendimento, per la quale ciò che conta non è solo acquisire alcune conoscenze "strumentali" specifiche, ma soprattutto imparare a padroneggiare strutture aperte e più ampie di ragionamento e argomentazione: la matematica ci mette in contatto col mondo, e ci aiuta a problematizzarlo. L'ambiente del laboratorio matematico, con le sue caratteristiche di apprendimento pratico e di attitudine al confronto e alla costruzione condivisa delle conoscenze, è in questo quadro il luogo ideale per sviluppare le competenze matematiche.⁷

Nel solco di queste acquisizioni, la concezione del "laboratorio" che ha costituito un punto di riferimento per questa esperienza didattica è quella di uno spazio strutturato ma aperto, in cui si sperimenta il ragionamento matematico con tempi personali e si realizza la *strutturazione del sé*. «Lasciate ai ragazzi il tempo di perdere tempo» recita una famosa frase di Emma Castelnuovo: era proprio un invito a stimolare l'esperienza della matematica e dei suoi "strani" oggetti senza fretta o ritmi imposti, attraverso la curiosità e il piacere di sperimentare il proprio ragionamento, e supportando un approccio libero in particolare dall'ansia dell'errore (Castelnuovo, 2008).⁸ *Libertà* qui significa infatti innanzitutto prendersi il tempo di "sostare" presso questi costrutti, ragionarci insieme da più punti di vista, e valorizzare gli errori come linee di ragionamento a loro modo valide e significative.⁹

Come questo articolo si propone di mostrare, il piano di lavoro matematico può essere una pratica particolarmente adatta a lavorare in questa dimensione laboratoriale. Ed è in questo contesto e sulla base di queste istanze che il piano di lavoro è stato introdotto nelle due classi quinte in cui si è svolta l'esperienza didattica.

2.2 Primi passi verso il piano di lavoro matematico: gli strumenti

Come anticipato, le due classi quinte non avevano esperienza di laboratorio matematico. Si trattava di due classi dai numeri piuttosto ridotti (15 e 13 bambini rispettivamente), ma in entrambe si presentavano sia casi di disabilità di tipo cognitivo, sia un'incidenza rilevante di disturbi specifici dell'apprendimento, che coinvolgevano problemi di discalculia. Questo ha fatto sì che il lavoro in classe sia stato sempre un lavoro di equipe, in cui l'insegnante di matematica era affiancata da due di sostegno. L'osservazione di una classe abituata a fare matematica "sul libro di testo" mostra subito alcune caratteristiche tipiche: la dipendenza dall'insegnante e la mancanza di autonomia del bambino, l'esaltazione delle differenze di rendimento (proprio per la sua caratteristica monodimensionale: il libro è uguale per tutti e non è flessibile) e una generale tendenza dei bambini a rispondere meccanicamente alle richieste operative del libro. È emblematica in questo senso l'affermazione di un'allieva dopo il passaggio al piano di lavoro: «Maestra, io prima pensavo di aver capito tutto, poi mi sono resa conto che non era così!».

6. Tali riferimenti si trovano esplicitamente in MIUR (2012, p. 27 e p. 49). Il secondo di questi due passaggi chiave associa significativamente al laboratorio anche la dimensione del *gioco*.

7. Si vedano i contributi pubblicati come "Matematica per il cittadino", a cura di Anichini et al. (2003). Per una discussione approfondita delle questioni accennate qui, si veda il fondamentale lavoro di Di Martino e Zan (2019).

8. L'esperienza della "Officina matematica di Emma Castelnuovo" a Casa Laboratorio Cenci, sotto la guida di Nicoletta Lanciano e Franco Lorenzoni, ha costituito un riferimento essenziale per l'educazione matematica per i due autori, mostrando il ruolo chiave del *laboratorio adulto* come pratica di formazione attiva per insegnanti ed educatori.

9. Resoconti inimitabili, ai limiti dell'antropologia, di una dimensione di apprendimento di questo tipo (in un ambito non esclusivamente matematico), sono quelli di Franco Lorenzoni (si veda, ad esempio, Lorenzoni, 2014).

Come sbloccare questa routine e introdurre una modalità operativa differente? La risposta (delle classi) è stata forte e chiara: con l'introduzione della dimensione del *gioco*. I primi giorni di osservazione e di attività in classe evidenziavano una difficoltà diffusa con i grandi numeri e in generale con le operazioni aritmetiche quando i numeri diventano più grandi o con la virgola. Sono stati introdotti subito alcuni "strumenti", portatori di una cornice diversa di attività. In Figura 1 viene mostrato il primo: "Macchie di caffè".¹⁰

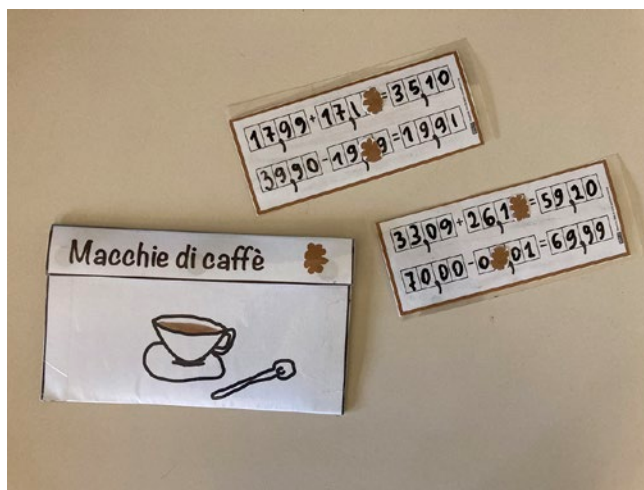


Figura 1. Strumento "Macchie di caffè" al livello cinque.

Si gioca a coppie: ognuno ha una schedina da compilare con un'addizione e una sottrazione, e ha a disposizione una "macchia di caffè" per coprire una cifra per ogni operazione, che l'avversario dovrà cercare di individuare. Le schedine hanno più livelli di difficoltà (cinque) e si gioca a punti (uno per ogni cifra individuata). Ciascuno deve cercare di elaborare una proposta sfidante per l'avversario, il che implica non solo introdurre un'operazione corretta, ma riflettere sulle difficoltà che si incontrano e sulle opportunità di indurre gli altri in errore: è una riflessione concreta sui *processi*. Un secondo gioco incentrato sulle operazioni aritmetiche (Figura 2) può illustrare bene come questo tipo di strumenti si riveli utile a valorizzare le diverse strategie dei bambini (Figura 3): le "Carte fantasmino".¹¹



Figura 2. Una carta fantasmino lato fronte.

10. Pubblicato sul sito "Lo strumentario per il piano di lavoro", cui si rimanda per tutti i dettagli dello strumento: <https://www.pianodilavoro.org/2022/05/03/macchie-di-caffe/>. La rielaborazione dello strumento qui proposta prende le mosse da alcuni spunti del fondamentale riferimento di Navarra (2022).

11. Per dettagli e materiale: <https://www.pianodilavoro.org/2022/10/28/carte-fantasmino-2-0/>.

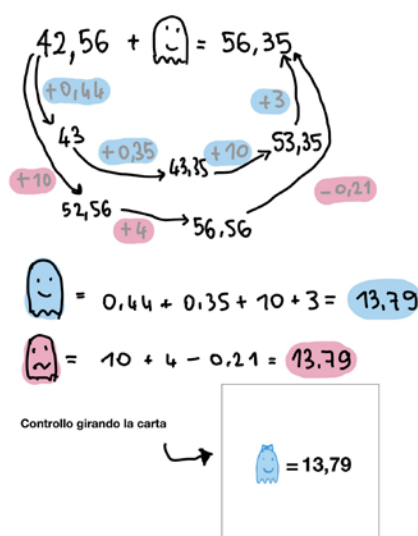


Figura 3. Due possibili percorsi di soluzione della carta in Figura 2.

Anche questo strumento è molto semplice: su ogni carta è riportata un'operazione aritmetica con un numero coperto da un "fantasmينو", cui bisogna riuscire a risalire (soluzione sul retro). La cosa importante è che nel gioco i bambini devono disegnare la strada che hanno intrapreso, con i singoli passi, per avvicinarsi al numero desiderato, e possibilmente indicarne più di una (come nell'esempio in Figura 3). I bambini vengono così invitati a visualizzare ed esplicitare processi e percorsi mentali, favorendo la messa a punto di strategie di calcolo mentale. In concreto accadeva che i bambini adottassero strategie diverse a seconda delle proprie abilità e difficoltà.

Possiamo osservare alcuni vantaggi in due strumenti di questo tipo:

- I bambini elaborano ognuno la propria strategia di calcolo e di gioco (che sono anche invitati a verbalizzare e a confrontare in momenti collettivi).
- Gli strumenti sono autocorrettivi:¹² in generale in molti di essi i bambini trovano già la soluzione sul retro della carta. Questo significa mettere l'accento, nell'attività, non sul prodotto, ma sui processi (stimolando anche la responsabilità: andare diretti al risultato priva di senso tutta l'attività).
- I bambini si trovano di fronte a un'attività sfidante, e cercano il proprio partner, il livello di scheda o anche la strategia con cui si divertono e riescono effettivamente a giocare. *Tutti* trovano il livello adatto a loro, anche i bambini con tratti di disabilità cognitiva o difficoltà specifiche di apprendimento. E nel piano di lavoro, quando gli strumenti sono tanti, questo guida anche la scelta del bambino tra le attività e gli obiettivi da rafforzare.

La caratteristica iniziale della situazione-gioco (per esempio, nelle sfide con le macchie di caffè) è inoltre quella di spiazzare il giocatore, perché non si sa esattamente quale strumento operativo e quale strategia usare, e il bambino è chiamato a fare leva sul proprio bagaglio di abilità e competenze. Quella dello "strumento" è un'esperienza molto diversa dalla quotidianità del libro, che ad ogni pagina detta una regolina e chiede di applicarla. "Macchie di caffè" e "Carte fantasmينو", introdotti nei primi giorni di scuola, sono stati pertanto anche strumenti osservativi molto utili per valutare le competenze matematiche effettive delle due classi all'inizio dell'anno.

È bene sottolineare da subito un altro aspetto cruciale: lo "strumento" non funziona da solo, ma

¹² Anche nel primo gioco infatti l'indicazione è che i bambini possono a posteriori usare la calcolatrice per controllare il risultato e assegnare il punto.

serve a entrare in un *frame* differente di attività, in una cornice nuova,¹³ in cui si situa l'attività matematica. In altri termini la stessa microattività in senso stretto (come quelle contenute negli esempi di carte mostrati) assume un significato e una portata cognitiva del tutto diversi a seconda del contesto *pragmatico* (Che cosa stiamo facendo? Che situazione è?) in cui si situa. I bambini come gli adulti hanno una capacità estremamente sottile e raffinata di cogliere e distinguere queste cornici o strutture.¹⁴ È proprio la capacità di costruire questi contesti complessi ma ben definiti di attività che caratterizza la mediazione didattica forse nel suo senso più affascinante, e il piano di lavoro non è che un esempio di macroattività di questo tipo. Ciò vuol dire anche che la trasferibilità di questa esperienza dipende in modo essenziale dalla capacità dei docenti di ricreare situazioni complesse, attingendo a tutte le risorse personali, ambientali, culturali, d'immaginazione loro e della classe: non si tratta mai solo di applicare una "tecnica".

Il momento dell'introduzione degli strumenti è dunque molto prezioso e delicato, perché qui si gioca la possibilità di far intravedere e apprezzare ai bambini una modalità differente di approccio alla matematica. Fin dal primo giorno di scuola si è cercato di lavorare in classe sul piano del gioco, dell'errore interessante, del porre domande sfidanti che spiazzano e non hanno una soluzione unica, apprezzando insieme che ci sono tante strade possibili.¹⁵

L'esempio di altri due strumenti può illustrare bene il tipo di attività introdotte nel piano di lavoro. Partiamo da "Le carte geometriche" (Figura 4), che hanno avuto grande successo nelle due classi.¹⁶

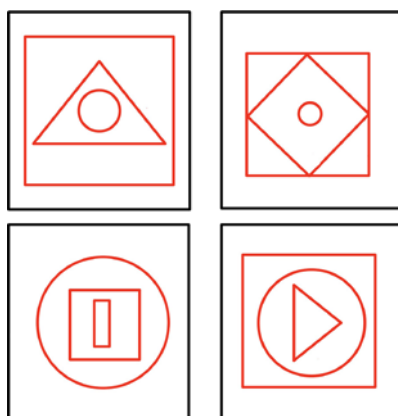


Figura 4. Quattro tessere dello strumento "Le carte geometriche".

Lo strumento è costituito da un mazzo di carte stampate e plastificate,¹⁷ con combinazioni di figure geometriche, anche queste con gradi diversi di complessità. Il gioco, inizialmente pensato a coppie, consiste nel mettersi schiena contro schiena: un bambino ha la carta in mano e cerca di descrivere

13. Per un'impostazione generale, dalla grande portata antropologica, si veda Goffman (1974).

14. "Frame" e "framework", nella terminologia di Goffman (1974). Questi contesti sono estremamente malleabili, possono essere trasformati e riformulati, per così dire messi in una chiave diversa, come fanno per esempio il gioco o la finzione rispetto alla realtà: si veda lo storico saggio di Gregory Bateson (1976) sul gioco, che è il punto di partenza delle analisi di Goffman.

15. Tra gli strumenti impiegati all'inizio dell'anno per monitorare l'atteggiamento verso la matematica è stato impiegato anche il tema autobiografico ("Io e la matematica") e la richiesta di associare la matematica a un animale (ispirati alle proposte di Di Martino e Zan, 2019). Come si vedrà più sotto, la ripetizione dell'attività a fine anno, confrontando con i bambini quanto scritto in precedenza, ha consentito alla docente e a loro di apprezzare il percorso compiuto. Un bambino a inizio dell'anno aveva scritto: «Per me la matematica è noiosa come un maiale», e a fine anno è tornato su quella impressione: «Non è vero maestra, la matematica è divertente, ma io non lo sapevo».

16. Per materiale ed esposizione più dettagliata: <https://www.pianodilavoro.org/2023/03/27/le-carte-geometriche-2/>.

17. Tutti gli strumenti proposti sul sito "Lo strumentario per il piano di lavoro" sono realizzati e riproducibili con strumenti molto semplici, di uso scolastico.

all'altro quello che vede, perché lo riproduca disegnando. Una volta finito, si confronta il disegno con la carta, e se le cose non tornano si riflette sul perché. Il gioco è piaciuto moltissimo ai bambini, il che ha dato seguito ad alcune varianti in classe: "contro la maestra", in cui un bambino o un gruppo estraeva una carta dal mazzo e diceva alla docente cosa disegnare (la docente si divertiva, a sua volta, a far emergere le conseguenze più assurde delle loro indicazioni), e "tutti insieme", in cui un bambino prendeva una carta e la descriveva a tutta la classe che disegnava sul quaderno, e si confrontavano poi tutti insieme i risultati. Lo strumento, divertente spesso fino all'ilarità generale, si è prestato tantissimo a lavorare e riflettere sull'uso del linguaggio descrittivo e sulla decodifica del linguaggio verbale. Si ripresenta inoltre la caratteristica di lavorare sui processi, e di trasformare l'errore in un momento non solo divertente ma anche vissuto come funzionale al processo di comprensione.

Uno strumento analogo ma con finalità differenti è quello che ha preso in classe il nome di "Figure pericolose".¹⁸ L'ispirazione per la creazione del gioco è venuta dall'esperienza di uno dei laboratori del convegno CARME 2023 a Pistoia.¹⁹

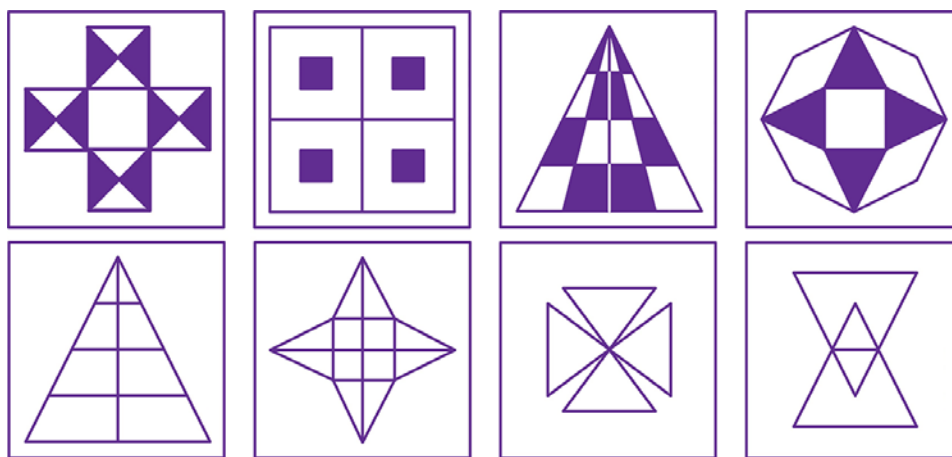


Figura 5. Otto tessere dello strumento "Figure pericolose".

Anche qui si tratta di un set di carte, in ognuna delle quali è riportato un disegno geometrico su sfondo bianco. Per cominciare una delle figure è stata proiettata alla lavagna multimediale interattiva, lasciando che dal gruppo classe nascessero le osservazioni su ciò che i bambini vedevano; poi la docente ha guidato la discussione con l'ottica di rafforzare i commenti legati alle relazioni tra le parti disegnate; infine si è lasciato ai bambini del tempo per riprodurre il disegno sul quaderno. Stavolta l'obiettivo era focalizzarsi sulle *relazioni* fra le parti delle figure, attraverso la capacità di riprodurle correttamente.²⁰ Il gioco è poi entrato nel piano di lavoro: la richiesta era quella di lavorare in coppia, osservare bene la figura e provare a ricreare il disegno sul proprio quaderno. Quali capacità bisogna mettere in gioco per ricreare un certo disegno geometrico? Quali domande possiamo farci prima di iniziare a disegnare? Anche qui osservazioni e strategie possibili sono molteplici.

Giocando, i bambini scoprono che più dei dati, delle informazioni o delle rilevazioni di misure, sono fondamentali le relazioni tra le varie parti della figura. È evidente che i disegni possono essere replicati

18. Per materiale e dettagli: <https://www.pianodilavoro.org/2023/05/29/figure-pericolose/>.

19. Per CARME (Center for Advanced Research in Mathematics Education) 2023 consultare il sito: <https://www.carme.center/ricerca-in-pratica2023/>. Il laboratorio a cui ci riferiamo nel testo era a cura di Antonella Castellini.

20. L'insistenza sul ruolo dell'osservazione nell'apprendimento matematico è uno degli insegnamenti centrali di Emma Castelnuovo, come si può leggere ad esempio, in Castelnuovo (2008, p. 151): «Osservare le affinità [...] Si tratta di osservare cose mai osservate, che stanno là. Si è sempre osservato poco e oggi si osserva ancora meno. Invece a scuola, se ben condotti, si può imparare ad osservare e ad arrivare a fare delle scoperte, partendo da osservazioni attente». Sulla dimensione antropologica dell'educazione come "pratica di attenzione" si veda Ingold (2019).

in una vasta gamma di dimensioni, che siano più grandi o più piccole poco importa (come illustrato nella Figura 6), ma è la proporzione tra le varie parti che diventa cruciale nel determinare se la riproduzione è accurata o meno.

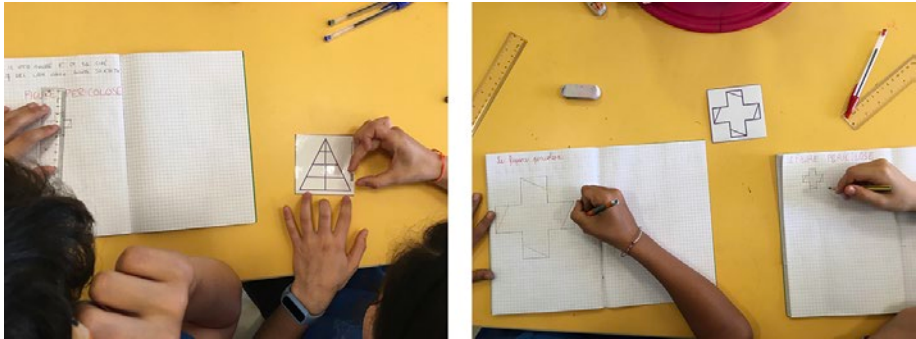


Figura 6. Bambini che lavorano con lo strumento “Figure pericolose”.

Come si potrà vedere meglio nel corso dell’articolo, la natura degli strumenti impiegati è estremamente varia e versatile: la regola è piuttosto l’eterogeneità. Gli strumenti hanno poi una loro *storia* nella classe: sono accolti, modificati, rielaborati insieme ai bambini, al punto che si può ben dire che la direzione presa dalla didattica in classe è sempre frutto dell’esito di questi incontri.

2.3 L’introduzione del piano di lavoro

L’attività con gli strumenti, accolta con curiosità ed entusiasmo dalle due classi, ha costituito la nostra introduzione alla situazione del piano di lavoro. Dopo qualche tempo, è stato chiesto infatti alle classi di fare un passo in più, tanto riflessivo quanto organizzativo: riconsiderare cioè i giochi-strumenti fino a quel momento impiegati in classe, e disporli dentro le aree tematiche riportate su grandi cartelloni (Figura 7).

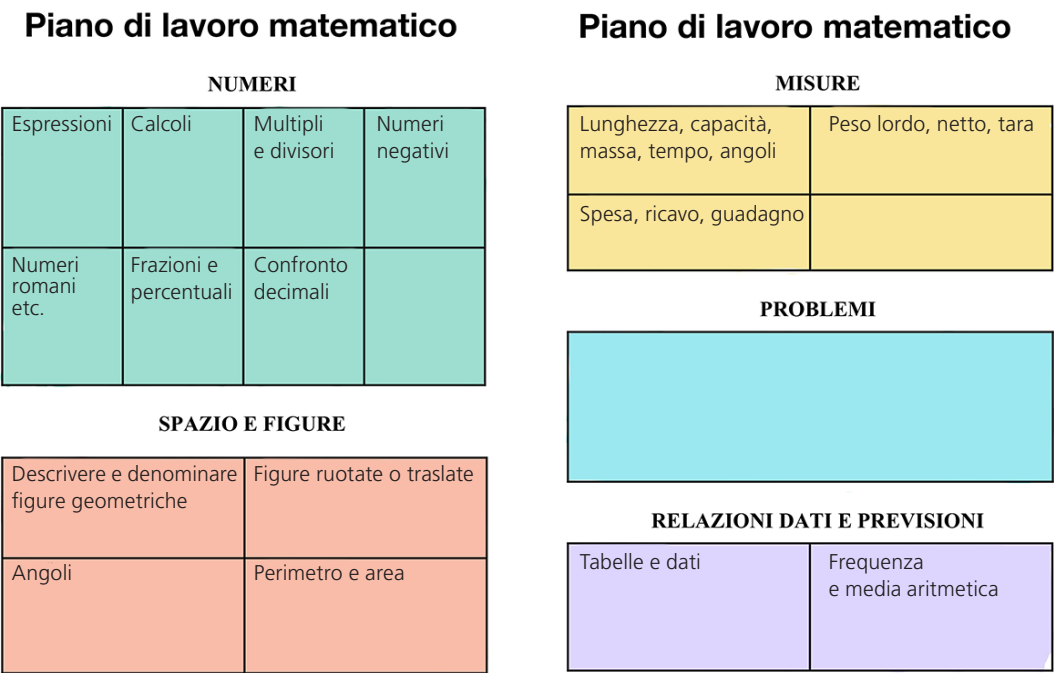


Figura 7. I cartelloni con le aree tematiche.

Anche questo è un momento generativo nel percorso della classe, perché occasione di dibattito e di osservazioni varie tutti insieme. La cosa più interessante che è emersa qui nell’interazione con le due classi è che quando uno strumento è particolarmente riuscito e stimolante, «tende a coprire più caselle diverse».

Con questo passaggio è stato di fatto introdotto il piano di lavoro nella sua formula più elementare: si comincia infatti a dedicare dei tempi specifici della settimana al lavoro con gli strumenti, e viene proposta ai bambini una prima forma di pianificazione personale della propria attività. All’inizio, con pochi strumenti a disposizione, si è chiesto ai bambini di pianificare il lavoro della settimana a seconda degli obiettivi (corrispondenti alle caselle del tabellone) che sentivano di dover approfondire, e di farlo attraverso una prima scheda che chiedeva loro: «Su cosa dovrei esercitarmi?», e consentiva di registrare e valutare le attività svolte («Com’è andata?»). Ai bambini è stato chiesto di scegliere il compagno o la compagna con cui lavorare e, a fine sessione, di scrivere un *feedback* sul lavoro svolto. Vengono presentate la scheda in **Figura 8** e alcune valutazioni in **Figura 9**.

Il mio piano di lavoro pomeridiano

NOME:	Su cosa dovrei esercitarmi?	
DATA:		
	Approfondimento	

TEMPI e CON CHI?	STRUMENTO SCELTO	COME È ANDATA?
1° tempo/i settimana		
2° tempo/i settimana		
3° tempo/i settimana		
4° tempo/i settimana		

Figura 8. Scheda iniziale del piano di lavoro.

CELTO	COME È ANDATA?
ENO	SECONDO ME È ANDATA MOLTO BENE MI È SERVITO PERCHÉ HO FATTO DATTOSI ALLA MIA MATEMATICA E MI SONO ESERCITATA
HA	NEL SECONDO TEMPO HO FATTO I CALCOLI A MENTE E SONO MOLTO FELICE PERCHÉ SECONDO ME MI È SERVITO MOLTO
VI	IN REALTÀ UN PO' MALUCCIO PERCHÉ FLA ANDAVA VELOCISSIMO IO INVECE MOLTO LENTA E QUINDI HO FATTO SOLO DUE MI DEVO ANCORA ALLENARE
PRESSIONI	È ANDATA AB BASTANZA BENE ABBIA MO FATTO UN BUON LAVORO E MI SONO DIVERTITO PERCHÉ ABBIA MO INCLUSO TUTTI E NESSUNO NON HA PARTECIPATO.

Figura 9. Valutazioni di un'alunna.

Chiedere ai bambini di scrivere «Com’è andata?» non solo apre le porte della riflessione spontanea sulla propria attività, ma diventa facilmente occasione di riflessione insieme, sia in gruppo confrontando le varie esperienze, sia in scambi con la maestra mentre il resto del gruppo è al lavoro. Questi momenti sono importanti perché aiutano a inquadrare le esperienze matematiche in modo nuovo: si realizza che è normale manifestare le proprie difficoltà e individuare le vie che si sono rivelate infruttuose, che questo capita a tutti ed è il modo con cui si arriva a trovare le strade che funzionano. In questo primo *setting* come in seguito, l’insegnante poteva chiedere di lavorare con qualcuno in particolare per recuperare una lezione persa o per supportarne il lavoro. I tempi dedicati al piano di lavoro generalmente erano dati da due pomeriggi di scuola a settimana, e così sarebbe stato anche dopo, ma con una differenza importante: in questa prima fase, il pomeriggio era suddiviso in quattro

tempi di lavoro uguali di circa venti minuti l'uno, e l'indicazione era di cambiare in ogni tempo strumento e compagno. Questo per abituare i bambini alla gestione del tempo e delle situazioni di lavoro in funzione dei loro obiettivi: un accompagnamento alla seconda fase, in cui sarebbe stata data loro piena libertà di scelta dei tempi e dei modi di lavoro.

I bambini avevano a disposizione il quadro generale degli obiettivi, riassunto nel tabellone già visto (Figura 7), che riportava i materiali a disposizione della classe suddivisi per argomenti, e ogni volta che la maestra portava a scuola un nuovo strumento, esso veniva illustrato alla classe. Spesso, collettivamente, veniva inventato e inserito sul cartellone un nome, chiedendosi tutti insieme: «Dove lo collochiamo? A quale scopo servirà?». I materiali venivano inseriti man mano nel piano di lavoro matematico dopo che l'argomento veniva affrontato in classe attraverso un laboratorio o una lezione.

2.4 Il piano di lavoro articolato

Durante le vacanze di Natale la docente ha lavorato alla strutturazione completa del piano di lavoro matematico attraverso l'organizzazione degli obiettivi, tenendo le Indicazioni Nazionali come riferimento di base. Gli strumenti matematici a disposizione sono stati suddivisi tra *12 obiettivi* che l'insegnante aveva intenzione di raggiungere con le due classi entro la fine dell'anno. Gli obiettivi erano a loro volta suddivisi in alcune macroaree (in grassetto), dettagliate di seguito.

Numeri

1. Lavorare con i grandi numeri, eseguire le operazioni con sicurezza, ricorrere al calcolo mentale e stimare un risultato.
2. Saper fare divisioni con resto fra numeri naturali.²¹
3. Operare con le frazioni, riconoscere le frazioni equivalenti.
4. Utilizzare le percentuali.
5. Usare i numeri decimali: leggere, scrivere, confrontare numeri decimali ed eseguire operazioni.

Geometria

6. Descrivere, denominare e classificare le figure geometriche, riprodurle con strumenti adatti e ridurle in scala.
7. Determinare il perimetro di una figura.
8. Determinare l'area di una figura.

Misure

9. Usare le principali unità di misura e passare dall'una all'altra.

Problem solving

10. Risolvere problemi-esercizio.
11. Risolvere problemi "grattacapo".

Dati e tabelle

12. Rappresentare relazioni e dati, leggere tabelle e grafici e ricavare informazioni.

Ogni obiettivo corrispondeva a un brevetto da raggiungere. Per ogni brevetto la docente aveva preparato un set di strumenti e materiali che i bambini avrebbero potuto utilizzare per esercitarsi. Molti di questi strumenti erano già stati introdotti in classe, altri sono stati adattati o creati *ad hoc* (Figura 10).

²¹ La docente ha voluto introdurre un brevetto specifico su questa operazione che non era stata capita in profondità dalla classe.

Con questo lavoro preparatorio era dunque pronta la *Scheda personale* del piano di lavoro di ogni bambino (Figura 11).



Figura 10. Diverse attività svolte in contemporanea durante un pomeriggio di piano di lavoro.

NOME: _____

Il mio piano di lavoro di MATEMATICA

	OGGETTIVO	APPUNTI PERSONALI	APPUNTI MAESTRA	A CHE PUNTO SONO?	PUNTO	BREVETTO
NUMERI	Grandi numeri					
	Divisioni					
	Frazioni					
	Percentuali					
	Decimali					
GEOMETRIA	Figure geometriche					
	Perimetro					
	Area					
MISURE						
PROBLEM SOLVING semplice						
	PROBLEM SOLVING grattacapo					
DATI e TABELLE						
Brevetto capolavoro						

Figura 11. Scheda personale del piano di lavoro.

Come si vede in **Figura 11**, la scheda introduce appieno la dimensione della programmazione individuale, in cui ogni bambino fissa la sua situazione cercando di trovare termini descrittivi e si dà degli obiettivi, che sono immediatamente espressi *in termini di ciò che riesce a fare*. A ogni obiettivo corrisponde infatti un set di strumenti da imparare a padroneggiare, come in un laboratorio artigianale. L'apprendimento è dunque qui *tradotto il più possibile in termini pratici*.²²

Tutto ciò è reso perspicuo e intuitivo attraverso l'organizzazione della classe e dei materiali. Il nuovo *setting* del piano di lavoro sviluppato si presenta infatti così: sul tavolone grande della classe ci sono dodici targhette, con su scritti gli obiettivi matematici, e sotto ogni targhetta sono collocati i relativi strumenti. I bambini lavorano in formazioni varie e l'insegnante si muove tra loro (non ha una sede propria), osservando e supportando il lavoro di tutti, oppure dedicandosi a un singolo bambino o a un gruppo ristretto per un lavoro specifico. All'inizio di ogni nuova sessione si consegna ai bambini la scheda personale del piano di lavoro (**Figura 11**), che viene ritirata alla fine. Nel foglio il bambino può inserire gli strumenti usati per lavorare a un certo obiettivo e valutare il proprio livello raggiunto, colorando l'immagine di una batteria elettrica divisa in quattro tacche; c'è poi uno spazio per inserire il timbro del brevetto superato. Alla fine di ogni sessione del nuovo piano di lavoro è stato inoltre introdotto un momento di riflessione comune: dieci minuti per chiudere l'attività, in cui ciascuno aveva modo di dire com'era andata, e anche la maestra dava il suo *feedback* e le sue impressioni.

Eccoci dunque all'organizzazione pienamente articolata del piano di lavoro matematico. L'idea di impiegare una scheda personale, gestire il profilo autonomo della propria attività, in cui inserire gli obiettivi di volta in volta più sfidanti, è molto attraente per i bambini: si tratta anche del fascino esercitato dal trovarsi a fare qualcosa di estremamente concreto e padroneggiabile, e insieme di avere la responsabilità del proprio percorso, e di aggiornarlo ogni volta.²³

2.5 Strategie ed esperienze nel piano di lavoro

L'attività matematica delle due classi era costituita a grandi linee da due momenti distinti: uno nel quale argomenti e attività venivano introdotti dalla maestra con il gruppo classe, e l'altro costituito dal piano di lavoro. Benché il primo venisse affrontato di preferenza con un approccio laboratoriale, si può osservare come il piano di lavoro sia compatibile con approcci diversi e misti (laboratoriale, frontale, persino dal libro), e sia una pratica favorevole, per maestre e maestri, per iniziare a sperimentare e a formarsi gradualmente un bagaglio operativo.²⁴ Tra i due momenti è tuttavia necessaria una circolarità proprio nell'atteggiamento verso la matematica: come si è visto, sono essenziali valorizzazione e confronto di tutte le vie del ragionamento dei bambini, attenzione ai processi, ruolo positivo dell'errore.

Il piano di lavoro, una volta entrato nel vivo, si rivela subito una formula molto funzionale nello stimolare la pianificazione e le strategie più diverse per affrontare sia i singoli strumenti che l'insieme degli obiettivi. Si lascia qui la parola ad alcuni bambini, ai quali è stato chiesto dopo un po' di tempo di descrivere la strada che avevano intrapreso per affrontare gli obiettivi del piano di lavoro.

22. Il carattere profondamente intuitivo e attraente di questa impostazione è forse il dato antropologico profondo, anche indipendente da altre sue assunzioni, che Freinet ha intuito nel piano di lavoro. Qualcosa che ha a che fare col fondo cooperativo e insieme concreto dell'attività umana, di qualunque natura essa sia.

23. Difficile dire dove si situi esattamente questa attività, tra "gioco" e "lavoro": è chiaro che qui siamo in una sorta di *frame* intermedio e complesso, in cui piacere pratico-concreto e piacere intellettuale felicemente convergono. Si veda a questo proposito la formulazione efficace di Winnicott sulla natura *gioco*: «Per controllare ciò che è all'esterno bisogna *fare cose*, non semplicemente pensarle o desiderarle [...]. Giocare è fare» (Winnicott, 2005, p. 62, traduzione degli autori).

24. Questo è uno dei motivi per i quali il progetto del sito "Lo strumentario per il piano di lavoro" ha avuto molta fortuna: è un modo pratico e immediato per cominciare a provare a entrare in un'ottica differente, senza per questo essere sganciati da presupposti teorici che invece come premesse dogmatiche rischiano di trasformarsi in retorica. Dove, se non nel pratico, si può trovare la verità dell'intuizione? Vale per gli adulti come per i bambini.

Ecco qualche frase estrapolata dalle loro risposte:

- «Il mio percorso è: prima fare quelle che mi tornano meglio, le più facili per me e infine le più difficili. Le più difficili sono tutta la geometria, il *problem solving* grattacapo, le frazioni e i decimali».
- «Io ho deciso di assaggiare un po' tutto per capire il grado di difficoltà, ora mi sto concentrando su alcune cose ma penso di averci un percorso in mente: vorrei prendere il brevetto dei numeri decimali visto che nel primo quadrimestre ci abbiamo lavorato molto, anche se a dire il vero mi sembra abbastanza lungo e anche difficile».
- «Io nel piano di lavoro ho iniziato da subito facendo le cose che mi piacciono di più in matematica come i numeri decimali che è il primo brevetto che ho preso. Volevo passare prima quelli che facevo con facilità».
- «Mi sono fermata a lungo sul *problem solving* più semplice ma poi ho preso il brevetto. Ora vorrei puntare su cose più facili così non dovrò più pensarci».
- «Io ho elaborato una tecnica per prenderli [i brevetti], arrivo a $\frac{3}{4}$ su tutte le batterie poi li prendo tutti all'ultimo».

Molto interessante è stata poi la riflessione che è scaturita in classe dopo aver stimolato la riflessione sui diversi approcci: alcuni hanno raccontato di aver provato ogni strumento, testando vari argomenti; altri sono partiti da temi conosciuti e semplici, mentre alcuni hanno affrontato un argomento alla volta e sono passati al successivo solo dopo aver ottenuto un brevetto. C'erano coloro che amavano lavorare rigorosamente da soli e altri che preferivano il lavoro di gruppo, alcuni si erano affezionati a un compagno, mentre altri lasciavano che fossero i compagni a scegliere. E una volta preso il brevetto si diventa "tutor" di quell'argomento: la classe può rivolgere le questioni più complicate al tutor di riferimento.

Quest'ultimo accorgimento si è mostrato utile nel favorire il senso di autoefficacia e una percezione della competenza matematica come qualcosa di diffuso e variegato, non esclusivo di "quelli bravi" o "portati per la matematica". Davide (nome di fantasia) per esempio si è applicato per un mese intero soltanto sull'aspetto geometrico. Diceva infatti di odiare l'aritmetica e aveva problemi nel calcolo, e in qualche modo si sentiva sempre indietro nella situazione della lezione tradizionale. Ha deciso di affrontare subito il brevetto del perimetro, riuscendo a ottenerlo con grande impegno e dedizione (nel fine settimana chiedeva per casa compiti di matematica sull'argomento), ed è diventato il primo e indiscusso tutor di un argomento nuovo per la classe: forse per la prima volta ha sentito di riuscire in matematica e si è confrontato davvero con sé stesso. L'insegnante segue questi percorsi con attenzione e curiosità: osserva, interagisce, supporta, muovendosi tra bambini e situazioni. Ma le è chiesto anche uno sforzo importante di attesa e di fiducia, perché è proprio lo spazio della *libertà* di scegliere, provare, correggere il tiro o riformulare il proprio obiettivo che offre quella possibilità di strutturazione di sé che è tipica del piano di lavoro. La dimensione pratica dell'attività ha infatti il vantaggio di tradursi immediatamente in valutazione, senza un giudizio esterno ma attraverso il confronto con i pari e con i materiali a disposizione. I bambini sono messi nelle condizioni di tastare sé stessi e le proprie attitudini, vedere come vengono fuori i propri errori e riflettere sulle strategie più funzionali. Questa riflessione è poi sempre sollecitata nei momenti di gruppo in classe.

L'esperienza mostra che i bambini tendono a dedicarsi al materiale più sfidante, né troppo facile né al momento proibitivo per loro: trovano con facilità la propria "via" tra gli strumenti, mettendoli da parte quando ormai li padroneggiano e passando ad altro, esattamente come accade nel coinvolgimento proprio del gioco. Si può anche osservare come il fatto di muoversi fra diversi strumenti e obiettivi comporti un vantaggio secondario di non poca importanza: mentre quando si segue il libro di testo si tende a procedere per argomenti ed esercizi, passando poi oltre e dimenticandoli, il piano di lavoro tende per così dire a tenere in gioco tutte le competenze, perché ci si muove tra più obiettivi e materiali, e anche quando si è raggiunto il brevetto si resta a disposizione degli altri.

Gli strumenti a loro volta sono costruiti per consentire una gradazione di livelli e un impiego o adattamento

personale. In questa esperienza, il piano di lavoro si è dimostrato in effetti come un ambiente didattico particolarmente capace di rispondere a molte di quelle istanze che vanno sotto il nome di *inclusione*. La dimensione fortemente personalizzata e insieme di gruppo, in cui ognuno persegue i suoi obiettivi e le sue sfide, si è rivelata ideale per coinvolgere in modo naturale, senza forzature, i bambini con difficoltà cognitive. Anche loro vogliono divertirsi come gli altri, con strumenti e adattamenti pensati per loro. Ed è una pratica, fatto forse meno immediato, molto felice anche nella sua capacità di stimolare il contributo più indovinato e creativo da parte degli insegnanti di sostegno, anche quando capita che non abbiano esperienza di questo tipo di didattica. Il piano di lavoro ha infatti la virtù di indirizzare subito gli insegnanti, in modo chiaro e diretto, a formulare obiettivi e a definire strumenti adeguati al bambino. È il caso di dire che la sua dimensione immediatamente pratica e concreta aiuta e mette tutti in grado di dare il meglio di sé. È anche importante rilevare come faccia parte dello spirito del piano di lavoro, e anche del suo *background* culturale, che esso si presti a configurazioni varie, che vanno al di là della dimensione della classe, per coinvolgere gruppi più ampi (le classi aperte). Nell'esperienza più particolare e limitata qui raccontata, è capitato spesso che le due classi quinte si trovassero a fare il piano di lavoro insieme il pomeriggio: esperienza a dir poco elettrizzante e stimolante per i bambini.

2.6 I brevetti

Il momento del brevetto si può presentare, come si è visto, anche molto presto. Quando un bambino ha affrontato tutte le sfide proposte nell'obiettivo e si sente sicuro, completa le tacche della batteria nella sua scheda e richiede alla maestra il relativo brevetto: negli incontri successivi si svolge in classe la "prova", che consiste nel mostrare di saper fare quello su cui ci si è esercitati con gli strumenti, e può essere di tipologia molto varia. Alcuni brevetti erano scritti: ad esempio, il brevetto delle divisioni consisteva nel farne quattro (due a una cifra, le altre a due cifre, alcune con il resto e altre senza resto), e veniva superato solo se tutte e quattro erano esatte; in altri casi, come quello dei decimali, molti esercizi si susseguivano, ed era ammesso qualche errore. Altri, tipicamente quelli meno legati ad abilità "strumentali", erano orali: per esempio il brevetto del *problem solving* semplice si svolgeva sul divanetto della classe attraverso un colloquio con la maestra e con altri compagni coinvolti. C'era anche spazio per i cosiddetti "brevetti capolavoro": si trattava in questo caso di un particolare talento, di una ricerca matematica, o della presentazione di uno strumento matematico autocostruito che un bambino desiderava condividere con la classe e mettere a disposizione degli altri.

Quando tutta la classe raggiungeva un obiettivo si festeggiava. Il clima emotivo intorno al brevetto è diverso dalla valutazione classica, perché l'accento è sul *saper fare* qualcosa e sul carattere condiviso da tutti i bambini della competenza matematica. Anche il non passarlo rientrava il più possibile in una routine di apprendimento. Che i brevetti non venissero superati accadeva spesso, perché un bambino aveva sottovalutato la difficoltà o si era sopravvalutato, perché non aveva capito la portata del lavoro da fare o anche perché alcuni brevetti risultavano particolarmente ostici per difficoltà specifiche di apprendimento. Non superare il brevetto non aveva il significato di un fallimento, ma era un'esperienza che chiariva su cosa bisognava ancora lavorare.²⁵ In altri casi invece, se la difficoltà si rivelava eccessiva per un bambino, quello che contava era piuttosto il percorso di lavoro, e si propendeva per un adattamento del brevetto finale in funzione delle abilità raggiunte dal bambino, per non lasciarlo in una situazione di frustrazione. È chiaro che il ventaglio delle possibilità e degli accorgimenti richiesti per far fronte a situazioni di difficoltà o di impasse è molto ampio, e dipende dall'osservazione di tutto il percorso del bambino dentro e fuori il piano di lavoro.²⁶ Accompagnare

25. Di Martino e Gregorio (2019) rilevano in un articolo recente l'importanza di sperimentare l'insuccesso a scuola, in un contesto protetto in cui elaborare le proprie emozioni negative di fronte alla matematica.

26. La questione della valutazione è molto complessa; illuminanti queste osservazioni di Di Martino e Zan (2019, p. 101): «[...] sottolineiamo come le scelte didattiche dovrebbero nascere da considerazioni di *significatività* (e non di valutabilità degli studenti) e come le competenze più significative siano per loro natura più difficili da valutare: in particolare, la valutazione necessita di tempi lunghi e strumenti diversificati e deve abbandonare il mito dell'oggettività».

i bambini nel loro percorso personale è sempre un compito delicato per gli insegnanti, che richiede creatività, esperienza, attitudine all'ascolto e all'osservazione dei processi: non ci sono formule didattiche prestabilite.

Si può infine osservare come nello sviluppo del piano di lavoro l'insegnante debba in una certa misura affidarsi, perché non si ha un controllo sul percorso di ogni bambino: spesso non si hanno nemmeno in mano i prodotti o i risultati del lavoro, visto che non necessariamente si produce qualcosa di scritto. Tuttavia accade che, lentamente, ciò che emerge e si fa tangibile siano i *processi*. I bambini abbandonano i giochi che non sono più sfidanti per loro, non guardano all'errore come a un fallimento e sono portati a esplicitare i propri processi di pensiero con i pari e in gruppo. Possiamo apprezzare questa evoluzione attraverso un esempio trasversale: il percorso fino al brevetto chiamato "*problem solving grattacapo*".

2.7 Il brevetto "*problem solving grattacapo*"

Il piano di lavoro presentava tipologie molto diverse di strumenti e brevetti: da alcuni, come quello delle divisioni, che richiedevano una preparazione fatta più di classici esercizi, a quello del *problem solving*, che era il risultato di un percorso più articolato. Il cosiddetto "*problem solving grattacapo*" costituiva anzi l'ultima tappa dei brevetti, perché poteva abbracciare tutti gli argomenti affrontati e richiedeva competenze più ampie e generali.

Il *problem solving* era infatti declinato in due brevetti distinti. Quello "semplice" metteva di fronte a problemi più standard, in cui i costrutti matematici da impiegare sono relativamente chiari e prevedibili, e sarebbero da definire più propriamente esercizi. In quello "grattacapo" invece emergeva la dimensione autentica di *problema*: quella cioè in cui non si ha idea di quali procedure siano richieste e si devono mobilitare tanto le proprie risorse e conoscenze quanto capacità e strategie più ampie di comprensione e di soluzione. Il lavoro di Di Martino e Zan (2019, 2020), incentrato sul ruolo dei "buoni problemi" nell'educazione matematica, ha costituito un punto di riferimento tanto teorico quanto pratico: con le due quinte abbiamo aderito infatti durante l'anno al progetto "Problemi al centro" condotto dai due studiosi dell'Università di Pisa appena citati, e così le classi si sono ritrovate spesso ad affrontare problemi veri e propri, stimolanti e di qualità, che avevamo battezzato "grattacapo".

La situazione nuova costituita da questi problemi è stata affrontata innanzitutto in momenti laboratoriali di gruppo, in cui le congetture, le associazioni, i ragionamenti di tutti venivano vagliati e valutati insieme, e proprio l'*argomentazione* assumeva un ruolo centrale.²⁷ Non avevamo una strada sicura e ben tracciata per risolverli, e spesso il ragionamento prendeva strade lunghe, e necessitava di molto tempo per dipanarsi. Presto "Problemi al centro" è diventato un'attività laboratoriale della classe, spesso fatta in piccoli gruppetti, e con una collocazione precisa nei tempi settimanali della classe.

La caratteristica dei problemi così intesi è quella di porre domande non artificiali, ma reali e sensate, e di richiedere comprensione, ragionamenti e argomentazioni che vanno oltre l'ambito della procedura strettamente matematica. Un esempio trasversale di un'attività di questo tipo, che è diventato uno degli strumenti proposti sotto l'obiettivo 11 relativo ai problemi "grattacapo", è quella che ha preso il nome di "Stimiamo il mondo",²⁸ (Figura 12) dall'albo illustrato di Giffon e Boston (2018) a cui è ispirata.

²⁷ La situazione funziona, e i problemi sono veramente generativi, quando il ragionamento e l'argomentazione matematici si mostrano in *continuità* con quelli più generali che impieghiamo nella nostra vita, e non come un ambito separato e per così dire idiomatizzato.

²⁸ Per materiale e dettagli: <https://www.pianodilavoro.org/2023/05/03/stimiamo-il-mondo/>.

Di tutta l'acqua presente sulla Terra quanta percentuale appartiene ai mari e agli oceani? Quanta ai fiumi e laghi? Quanta è congelata nelle calotte polari?	Quanto può crescere al mese in lunghezza un'unghia della mano? Fai una stima! Ps: puoi aiutarti con un righello.
Cerca la risposta a pagina 20	Cerca la risposta a pagina 12
La gestazione dell'essere umano, si sa, è di 9 mesi. Quanto quella del maiale? E di un elefante?	Qual è l'animale più forte del mondo?
Cerca la risposta a pagina 84	Cerca la risposta a pagina 77
Stima le misure di un campo da calcio di serie A.	Tra un elefante e una nuvola chi pesa di più secondo te?
Cerca la risposta a pagina 61	Cerca la risposta a pagina 19

Figura 12. Alcune carte dello strumento "Stimiamo il mondo".

Il gioco consiste in una serie di schede come quelle riportate in Figura 12, con domande che sollecitano un'attività di valutazione e di stima (per le risposte esatte si rimandava alla pagina dell'albo tenuto a disposizione in classe). In classe abbiamo cominciato a giocareci dividendoci in gruppi: ogni gruppo riceveva tre carte-domande, e aveva a disposizione mezz'ora per ragionare (Figura 13). Dopo questo tempo, si entrava nella fase del dibattito, in cui le stime argomentate venivano presentate al resto della classe: ogni squadra riceveva un punto se il suo ragionamento si mostrava coerente, ben argomentato e convincente anche per il pubblico, il quale a sua volta poteva aggiungere riflessioni e commenti. Il fine del gioco non era fornire la risposta esatta (quasi sempre impossibile da indovinare), ma trovare una strategia per *avvicinarsi* il più possibile alla risposta, facendo congetture, argomentando, utilizzando preconoscenze e dati attinti dalle fonti più disparate.²⁹



Figura 13. Bambini intenti a discutere le tre domande del gioco "Stimiamo il mondo".

29. Alcune domande che possono apparire banali, come per esempio: «Qual è l'animale più forte del mondo?» (Figura 12), hanno stimolato uno tra i dibattiti più interessanti, perché dopo le risposte più ovvie (come «l'elefante»), si sono insinuate considerazioni più raffinate, del tipo: in proporzione al proprio peso o grandezza una formica è capace di sollevare un peso molto più grande ecc. Ma è impossibile offrire qui un'analisi dettagliata delle linee di ragionamento che potevano scaturire da questi e altri problemi.

Queste pratiche euristiche e argomentative, una volta apprezzate in gruppo, si sono poi trasferite nel piano di lavoro, dove sono state affrontate nel percorso più autonomo dei bambini. Sono state assemblate così delle schede chiamate “grattacapo”, divise in due tipi, a seconda delle fonti da cui erano attinte: “schede grattacapo MaMa” (dal progetto *MaMa – Matematica per la scuola elementare*)³⁰ e “schede grattacapo INVALSI” (dalle prove standardizzate dell’Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione).³¹ Il sito MaMa è stato una fonte inesauribile di materiale prezioso (Figura 14); tra gli item INVALSI ne sono stati selezionati alcuni valutati come significativi e stimolanti per le classi coinvolte, togliendo spesso le risposte chiuse proposte.



Figura 14. Il raccogliatore delle schede MaMa a disposizione della classe.

È stato chiesto ai bambini di argomentare le loro risposte in un unico quaderno personale che abbiamo chiamato “quaderno grattacapo”: questo consentiva all’insegnante di avere una fotografia dei loro sviluppi argomentativi nel tempo. Le schede grattacapo erano numerate, e in ogni quaderno era riprodotta una griglia su cui poter segnare il numero delle schede già affrontate (Figura 15).

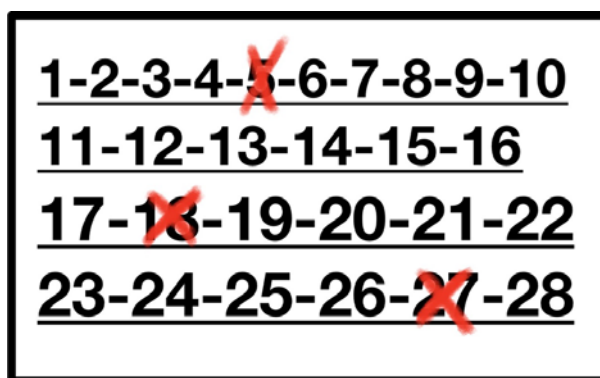


Figura 15. Griglia presente in ogni quaderno grattacapo.

³⁰ Giochi, problemi, schede modificabili di qualità (Sbaragli et al., 2021), anche con una veste grafica estremamente curata e accattivante, sono scaricabili gratuitamente dal sito: <https://mama.edu.ti.ch/>; si veda l'impostazione del progetto nelle Linee guida (Sbaragli, 2021) scaricabili dal sito.

³¹ I testi e l'analisi degli item proposti nelle prove standardizzate di matematica (e non solo) sono consultabili sul sito: <https://www.gestinv.it/>.

Lavorando al piano di lavoro sul *problem solving* i bambini potevano leggere, discutere a coppie e poi scrivere le risposte sul quaderno. La richiesta era di ragionare sui perché da dare, di collaborare per arrivare a una risposta che convincesse entrambi e argomentare. Il momento della discussione era condiviso, mentre quello della scrittura era individuale.

Data questa impostazione, che poteva contare su ottimi materiali di base per il lavoro dei bambini, più difficile si presentava il compito di impostare il brevetto. Eseguire un problema già affrontato aveva poco senso, affrontarne uno dato dall'insegnante ai singoli non risultava in linea con lo spirito cooperativo che aveva animato fin lì il *problem solving*: era insomma un bel grattacapo educativo anche per la docente. Lo spunto per risolverlo è venuto dalla giornata del "Pi Greco Day", promossa dalla scuola con una formula particolare: per la festa della matematica le classi erano infatti chiamate a costruire un gioco matematico da usare con una classe gemellata della scuola. Le classi quinte coinvolte in questa esperienza didattica si sono scelte a vicenda e ne è nato il gioco dei brevetti grattacapo: i bambini si sono dedicati per giorni a ideare e formulare quiz matematici da proporre per sfidare l'altra classe. Le tipologie di quiz creati sono state tante, alcuni esempi sono forniti in Figura 16.

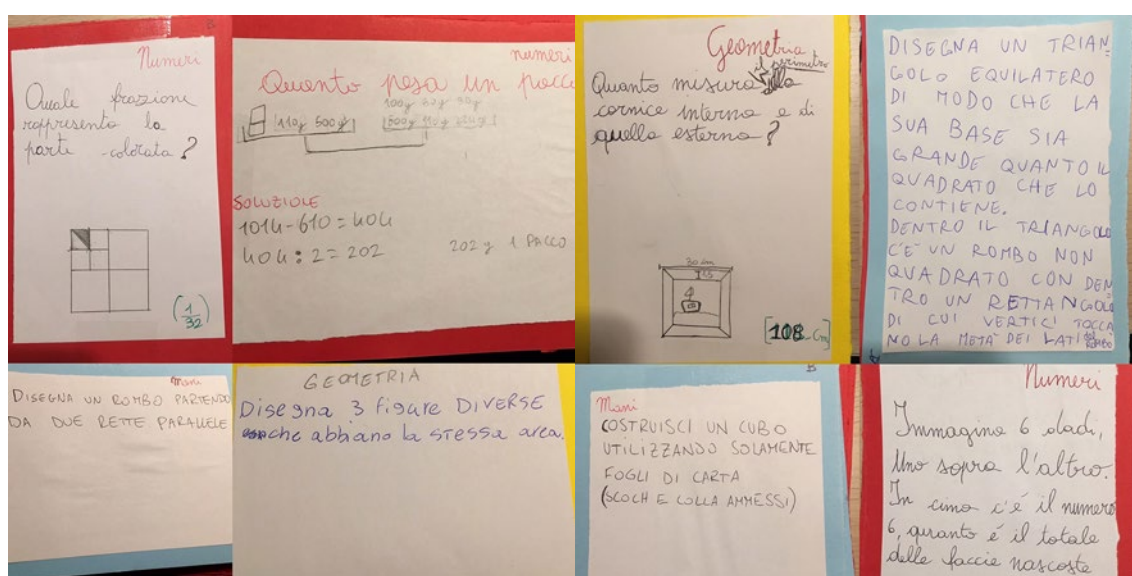


Figura 16. Alcuni esempi di quiz creati dalle classi.

Così durante la giornata del "Pi Greco Day" le due squadre-classi si sono sfidate a turno per tutta la mattina e parte del pomeriggio. Ogni classe sviluppava collettivamente le idee per risolvere un problema ed esponeva poi la propria risposta alla classe sfidante. Lo stile e le strategie delle soluzioni erano differenti. Una delle due classi, per esempio, amava ragionare per assurdo e cercare i casi limite, per cui il problema «Disegna 3 figure diverse che abbiano la stessa area» è stato interpretato alla lettera: non si parlava di poligoni e così i bambini non hanno perso tempo a cercare aree e perimetri, ma hanno semplicemente contato (pochi) quadretti e segmenti, creando figure diverse. Allo stesso modo la richiesta «Disegna un rombo partendo da due rette parallele» ha trovato un degno finale proponendo un semplice quadrato. Nei giorni a seguire le domande costruite per il gioco del "Pi Greco Day" sono diventate le carte per il nuovo gioco del piano di lavoro matematico: i problemi affrontati quel giorno erano solo una parte dei problemi costruiti da tutti, e durante l'anno i bambini stessi, quando volevano, continuavano a proporre problemi grattacapo da inserire.

Da questa esperienza è venuta la soluzione del brevetto "*problem solving* grattacapo": una sfida analoga tra due coppie di bambini. Una volta ottenuti tutti gli altri brevetti, e avuto modo di eserci-

tarsi con le schede grattacapo MaMa e INVALSI, era possibile richiedere il brevetto *problem solving* finale. Bisognava però aspettare che anche un altro compagno facesse richiesta per poter formare una squadra e affrontare altri due compagni proponendo loro alcuni dei quiz ideati dalla classe. La coppia sceglieva infatti quali problemi sottoporre ai compagni avversari e la correzione era affidata alla squadra che aveva proposto la sfida.

2.8 Valutazione e autovalutazione finale

La cosa sorprendente, arrivati alla fine dell'anno, è stata che la scheda del piano di lavoro rappresentava già a grandi linee quella che sarebbe stata la pagella di matematica dei bambini. Alcuni obiettivi erano stati pienamente raggiunti, su altri i bambini avevano lavorato ma non era stato ancora raggiunto il pieno risultato, e la batteria colorata dei brevetti era a $3/4$, $2/4$ o $1/4$ di "carica": i livelli ministeriali indicati per la valutazione relativa a ogni obiettivo (avanzato, intermedio, base o in via di sviluppo) dalle più recenti Linee guida (MIUR, 2020) avevano così una chiara connessione con la valutazione che i bambini stessi si erano costruiti durante l'anno.

Cosa ancora più importante, quella pagina era una fotografia fedele delle abilità del momento presente, risultanti dalla storia (autonomamente registrata) dell'attività personale (Figura 17). Se Davide (che abbiamo incontrato sopra) ha avuto modo di dedicarsi al perimetro e ad altri brevetti lasciando dei vuoti su altri obiettivi, con il tempo e soprattutto col suo impegno potrà arrivare a colorare tutti gli obiettivi che si pone: questo, grazie al piano di lavoro, lo ha capito con tutto sé stesso.

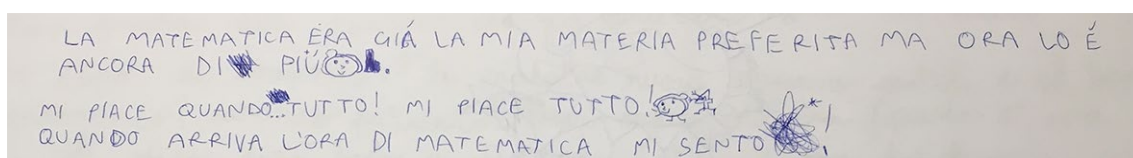
NOME: ALESSIA Il mio piano di lavoro di MATEMATICA - II semestre

OBIETTIVO	STRUMENTI	ESERCIZI DA LIBRI	A CHE PUNTO SONO?	BREVETTO
NUMERI Decimali	GRANDI SANTI SCHEDE FANTASMINI	PAG 27-1, 33 58, 59		
Frazioni	CARTE FRAZIONI			
Percentuali	SCHEDE CON SILVIA	35 QD.		
Divisioni	CARTE CANADESI	28-29-30 31-32-33 QD.		
GEOMETRIA Figure geometriche	FIGURE PERICOLOSE CARTE GEO 1-2 RIDUZIONI INScala			
Perimetro	1-11 16-22 12-15			
Area	1-5 6-11 12-16			
MISURE	STIMIAMO IL MONDO			
PROBLEM SOLVING	1-20 21-26 27-35			
PROBLEM SOLVING grattacapo	GIOCO DEI BREVETTI MATA			
DATI E TABELLE	SCHEDE TUTTE	PAG 47-50 86		
RECUPERO				

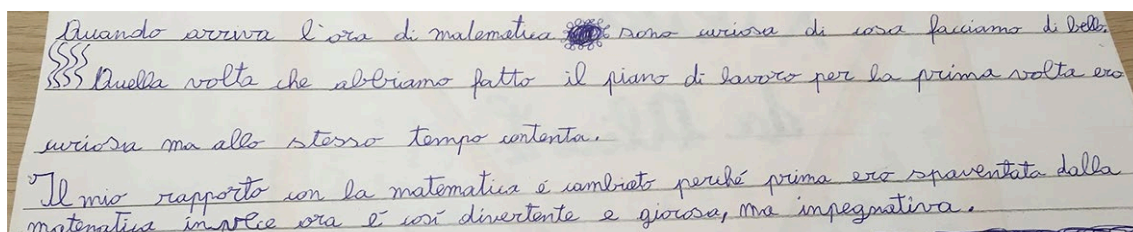
Figura 17. Come si presenta una scheda del piano di lavoro durante l'anno.

E in ultimo, ciò che si è visto crescere con il tempo nei bambini è un atteggiamento positivo verso la matematica. Erano entusiasti di lavorare con il piano di lavoro, e lo scrivevano spesso nelle riflessioni e nei temi autobiografici proposti, come si può leggere qui di seguito e rintracciare nella Figura 18:

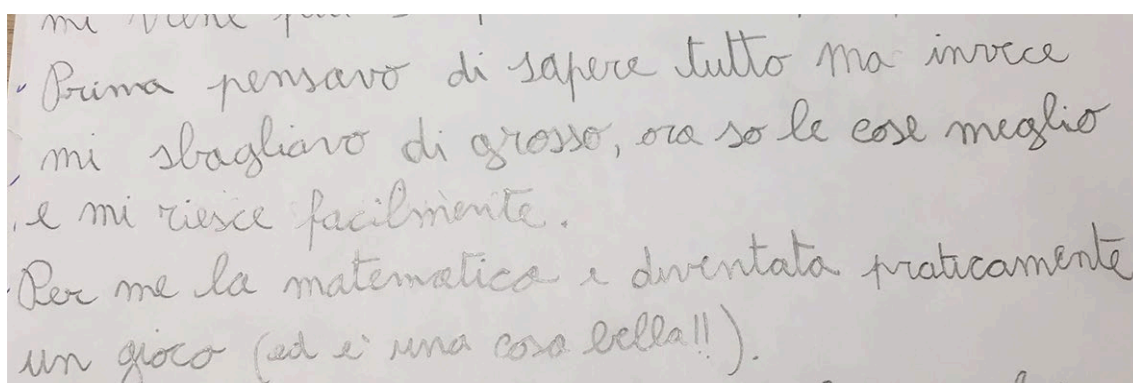
- «Quando arriva l'ora di matematica sono curiosa di cosa facciamo di bello».
- «La matematica era già la mia materia preferita ma ora lo è ancor di più».
- «Mi piace quando si fa il piano di lavoro».
- «All'inizio dell'anno pensavo che la matematica fosse bruttissima ma te maestra mi hai fatto cambiare idea».
- «Quando arriva l'ora di matematica mi sento felice e la mia mente si chiede chissà cosa si farà oggi».
- «Quando arriva l'ora di matematica mi sento gioia, energia, felicità».



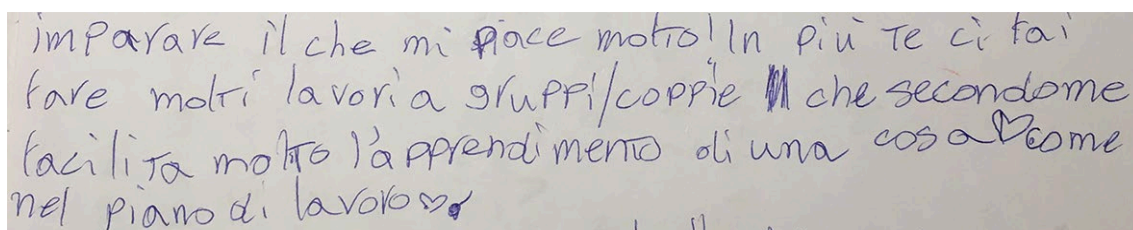
LA MATEMATICA ERA GIÀ LA MIA MATERIA PREFERITA MA ORA LO È ANCORA DI PIÙ! MI PIACE QUANDO TUTTO! MI PIACE TUTTO! QUANDO ARRIVA L'ORA DI MATEMATICA MI SENTO



Quando arriva l'ora di matematica sono curiosa di cosa facciamo di bello. Quella volta che abbiamo fatto il piano di lavoro per la prima volta ero curiosa ma allo stesso tempo contenta. Il mio rapporto con la matematica è cambiato perché prima ero spaventata dalla matematica invece ora è così divertente e gioiosa, ma impegnativa.



Prima pensavo di sapere tutto ma invece mi sbagliavo di grosso, ora so le cose meglio e mi riesce facilmente. Per me la matematica è diventata praticamente un gioco (ed è una cosa bella!!).



imparare il che mi piace molto! In più te ci fai fare molti lavori a gruppi/coppie che secondo me facilita molto l'apprendimento di una cosa come nel piano di lavoro.

Figura 18. Alcuni passaggi tratti dai temi autobiografici "Io e la matematica".

3 In conclusione: alcune riflessioni generali

In questo racconto abbiamo cercato di mettere in luce tanti aspetti che ci sono sembrati rilevanti nell'esperienza e nella sua costruzione. È utile sviluppare in conclusione alcuni spunti di riflessione generale che sono emersi nel corso dell'esposizione e che richiedono qualche altra parola.

Una prima riflessione riguarda la scelta e l'adattamento dei *materiali* del piano di lavoro matematico. Gli esempi e gli accenni riportati sopra mostrano come il "magazzino" del piano di lavoro si presenti come un insieme di strumenti estremamente eterogenei. Idee e materiali possono attingere alle fonti più varie, come esperienze, schede, libri, fotocopie, giochi strutturati, prove INVALSI, albi illustrati e tanto altro; anche il loro impiego è molto vario e sempre frutto di aggiustamenti specifici e varianti creative. Allo stesso modo, nella realizzazione della piattaforma de "Lo strumentario per il piano di lavoro", non c'è un'istanza di originalità nell'ideazione o nell'adattamento degli strumenti,³² e tantomeno il "copyright" di un "metodo" che venga promosso.³³ Non si tratta di altro che di strumenti concretamente realizzati e impiegati in classe da maestri e maestre rispondendo a esigenze specifiche, nella fiducia che il confronto e il libero scambio sollecitino l'inventiva e la qualità. Ed è perciò un lavoro veramente *artigianale*, in cui cioè la creatività, come nella gran parte dell'attività umana, consiste nella capacità di riusare e riadattare strumenti *in contesti nuovi*: sono questi ultimi ciò che in ultima analisi conta. Il lavoro più bello e difficile dell'insegnante è *far accadere le cose*, le situazioni reali di apprendimento.

Un'altra osservazione importante e collegata riguarda un'attitudine che il piano di lavoro e il laboratorio matematico in generale portano con sé, la capacità cioè di stabilire un rapporto differente con i suoi oggetti culturali. A differenza del libro di testo come luogo monodimensionale e "altro" della matematica, l'abitudine laboratoriale mette i bambini in un rapporto diverso di appropriazione e riformulazione dei contenuti culturali: lo si è visto sopra in piccolo, per esempio, nel modo in cui le classi si sono appropriate del costrutto dei "problemi" e l'hanno trasformato in uno strumento personale, giocando e rimodulandolo secondo il proprio gusto. Ed è essenziale notare come questo sia innanzitutto il compito dell'insegnante: non muoversi esclusivamente e nemmeno prioritariamente nella galassia degli strumenti "didattici", ma di essere nutriti di autentica curiosità verso la materia e le esperienze culturali, da cui strumenti e idee scaturiscono.³⁴ Per dirlo in una formula: la didattica non è un contenuto specifico, è un ponte.

Un altro aspetto che non è stato fin qui analizzato, ma che è per noi centrale nell'idea di fondo del piano di lavoro, è la natura dell'esperienza *sociale* e *culturale* che punta a introdurre. Qui forse si tocca il significato politico (in senso lato) più profondo che sta al cuore di pratiche di questo tipo, in cui la scuola è intesa come spazio di alterità e di possibilità rispetto ad altre realtà conosciute dai bambini. Intendiamo il fatto che il piano di lavoro, concepito come si è visto, offre ai bambini uno spazio di strutturazione di sé molto diverso dall'esigenza sociale che preme dappertutto, in primo luogo nel nostro immaginario, verso la *performance*, la misurazione delle prestazioni, l'affermazione individualistica che si realizza rispetto agli altri. In modo semplice e concreto, ma decisamente sorprendente quando funziona, nel piano di lavoro e nei momenti di confronto collettivo si sperimenta uno scenario diverso: una situazione comunitaria in cui lo sviluppo di sé avviene non in competizione con gli altri

32. Tutti i materiali sul sito sono rilasciati con licenza *copyleft* Creative Commons.

33. Come non esiste un "metodo" matematico, è ancor meno plausibile che ne esista uno della didattica della matematica. Per il cui ambito, se pensiamo tanto agli strumenti quanto ai ragionamenti, può ben valere ciò che scriveva Wittgenstein (1971, p. 111): «La matematica è un *miscuglio variopinto* di tecniche di prova». Per lo stesso motivo, ci appare sostanzialmente opaca ogni pretesa a una via o a un metodo "naturale" per l'apprendimento matematico: qualsiasi accesso ai costrutti matematici, comunque li si voglia guardare nella loro essenza, è fatto di mediazioni culturali.

34. Come osservano Passoni e Lorenzoni (2019, p. 11): «è necessario ripensare alla cultura e alle competenze di noi insegnanti, e, insieme, alla capacità critica che siamo in grado di sviluppare riguardo alla cultura di cui facciamo parte e in cui siamo immersi».

ma in un rapporto di cooperazione, e ha bisogno dell'apporto del gruppo. I modi di essere sono molteplici, ed è la molteplicità e diversità degli sguardi che ci consente di vedere le cose.

Non si può ignorare del resto il fatto che proprio un'esperienza comunitaria di qualche tipo è qualcosa di sempre più raro nelle vite dei bambini fuori dalla scuola. La bellezza del piano di lavoro, collocato nella visione più ampia che abbiamo cercato di suggerire, è quella di offrire una situazione cooperativa e collettiva che *coincide* con l'opportunità individuale di indirizzare sé stessi in piena *libertà*.

In conclusione, è doverosa una considerazione sul piano di lavoro matematico *oltre* la scuola primaria. Questa è stata tradizionalmente il campo d'elezione nella storia della proposta di pratiche educative più innovative; e, per quanto il laboratorio rientri pienamente nelle strategie proposte dalle varie indicazioni per la scuola secondaria, non si può nascondere, nella nostra esperienza di insegnanti rispettivamente della scuola primaria e secondaria di secondo grado,³⁵ l'impressione di uno scarto profondo fra la pratica didattica globalmente praticabile nella scuola primaria e lo scenario che si presenta dopo. In parte ciò è dovuto a un fatto culturale, in parte alle difficoltà notevoli che si ritrovano, per esempio nella scuola secondaria di secondo grado, nel formulare una proposta didattica ispirata alla stessa sensibilità in cui le tante istanze in gioco in quell'ordine di scuola si combinino in modo coerente.

Ma se si guarda alla situazione tipica delle competenze matematiche nella scuola secondaria di secondo grado, in cui ci si trova spesso di fronte a una spaccatura critica nelle classi (in particolare negli indirizzi non scientifici) fra un insieme di ragazzi capaci di padroneggiare anche solo a un livello base il linguaggio astratto della matematica e un altro, a volte maggioritario, che non è in grado di farlo, lo strumento laboratoriale del piano di lavoro può forse costituire una prospettiva promettente. Il vantaggio di questa pratica è infatti quello di rendere possibile il lavoro su più livelli, anche ripartendo dalle competenze di base; e soprattutto si volge a quell'*autonomia* nei confronti degli oggetti culturali che spesso scompare dall'orizzonte dell'esperienza dei ragazzi.

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., Robutti, O., & Statale, L. S. (Eds.). (2003). *La matematica per il cittadino. Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. Ciclo secondario*. <https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf>

Bateson, G. (1976). *Verso un'ecologia della mente*. Adelphi.

Castelnuovo, E. (2008). *L'officina matematica. Ragionare con i materiali*. La Meridiana.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1–42.

Dehaene, S. (2010). *Il pallino della matematica*. Raffaello Cortina.

Di Ianni, R. (2020). *Neuroscienze e apprendimento. Implicazioni per l'educazione matematica*. Tesi di laurea in Scienze della Formazione Primaria, Università di Firenze.

Di Martino, P., & Gregorio, F. (2019). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 825–843. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y>

³⁵ La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

- Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2020). *Problemi per crescere. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.
- Freinet, C. (2002). *La scuola del fare*. Edizioni Junior.
- Giffon, C., & Boston, P. (2018). *Misuriamo il mondo. Confrontiamo ciò che ci circonda*. IdeeAli.
- Goffman, E. (1974). *Frame analysis. An essay on the organization of experience*. Harper & Row.
- Ingold, T. (2019). *Antropologia come educazione*. La linea.
- Lorenzoni, F. (2014). *I bambini pensano in grande. Cronaca di un'avventura pedagogica*. Sellerio.
- Lucangeli, D. (2019). *Cinque lezioni leggere sull'emozione di apprendere. Guida alla costruzione di attività creative e sfidanti per la scuola primaria e secondaria*. Erickson.
- Lucangeli, D., Iannitti, A., & Vettore, M. (2007). *Lo sviluppo dell'intelligenza numerica*. Carocci.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola d'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero speciale*. Le Monnier.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2020). *Linee guida per la formulazione dei giudizi descrittivi nella valutazione periodica e finale della scuola primaria*. <https://www.istruzione.it/valutazione-scuola-primaria/allegati/Linee%20Guida.pdf>
- Navarra, G. (2022). *Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante*. Utet Università.
- Passoni, R., & Lorenzoni, F. (2019). *Cinque passi per una scuola inclusiva. Trasformare la didattica con una formazione dal basso*. Erickson.
- Sbaragli, S. (2021). *Linee guida MaMa: matematica per la scuola elementare – Numeri e calcolo*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. <https://mama.edu.ti.ch/wp-content/uploads/2021/11/2021-Guida-MaMa-Numeri-e-calcolo.pdf>
- Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021). *MaMa: matematica per la scuola elementare*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport.
- Winnicott, D. W. (2005). *Playing and Reality*. Routledge.
- Wittgenstein, L. (1971). *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*. Einaudi.

Insegnare matematica con il teatro: apprendimento *embodied* ed emozioni

Teaching mathematics through theatre: embodied learning and emotions

Caterina Erba

Istituto Comprensivo “Aristide Gabelli”, Torino – Italia

✉ c.erba@icgabellitorino.edu.it

Sunto / Numerose ricerche sottolineano, da un lato, l'importante influenza di emozioni e convinzioni nell'apprendimento della matematica e, dall'altro, evidenziano come la corporeità sia alla base dei processi cognitivi dell'attività matematica. L'approccio Mathemart, ideato da SCT Centre e poi utilizzato a livello europeo nel progetto TIM (*Theatre In Mathematics*), si avvale del Teatro Sociale e di Comunità come metodologia per l'insegnamento dei concetti matematici. In questo articolo verrà presentata la sperimentazione svolta utilizzando Mathemart in una classe seconda di scuola primaria, analizzandone potenzialità didattiche e limiti, in particolare facendo riferimento agli aspetti affettivi e al ruolo dell'esperienza corporea.

Parole chiave: emozioni; corpo; teatro sociale e di comunità; scuola primaria.

Abstract / Numerous research studies point out the great influence held by emotions and beliefs in the process of mathematics learning, on one hand, and how the body has a central role in mathematical cognitive processes, on the other hand. Mathemart approach, designed by SCT Centre and included in the TIM (*Theatre in Mathematics*) project, employs Social and Community Theatre as a means to teach mathematical concepts. This paper illustrates a series of lessons carried out in a second grade class using Mathemart; potential and limitations of the methodology will be analyzed, with a specific focus on affect and the role of bodily experience.

Keywords: emotions; body; social and community theatre; primary school.

1 Apprendere con il corpo: le prospettive *embodied* in matematica

L'approccio Mathemart, oggetto dell'esperienza discussa in questo lavoro, facendo uso del teatro come mezzo didattico, mette al centro dell'apprendimento matematico la corporeità, intesa in tutte le sue manifestazioni: espressione, trasformazione e movimento, interazione nello spazio e tra i corpi, uso della voce attraverso il linguaggio e produzione di suoni. Tale approccio è coerente con gli studi relativi al ruolo del corpo nell'attività matematica, a partire da una prospettiva neuropsicologica che vede interconnesse mente e corporeità nella cognizione (*embodied cognition*).

Al fine di dare un quadro generale degli studi in merito è utile partire da quanto affermato nella Premessa al documento "Matematica 2003: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. La Matematica per il cittadino", che dà una definizione rispetto a ciò che si intende parlando di corpo ed esperienza corporea in matematica:

«Non si tratta di imporre una matematica dall'esterno, ma di fare evolvere dall'interno la matematica che vive nel nostro corpo. Quindi le intuizioni, le metafore concettuali ecc. non sono un primo vago approccio ai concetti matematici, qualcosa di 'sporco' e scorretto da fare sparire al più presto, ma ne costituiscono un ingrediente fondamentale, che rimane anche a livelli estremi di rigore».

(Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR] et al., 2003, p. 5)

Quando si parla di *embodied cognition*, infatti, ci si allontana da una concezione di cognizione distaccata dalla corporeità, per abbracciare invece l'idea che i processi mentali siano strettamente collegati con l'esperienza corporea e sensoriale. George Lakoff e Rafael Núñez, nel loro testo "*Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*" (Lakoff & Núñez, 2000) affrontano questo tema facendo proprio riferimento alla matematica: ipotizzano, a partire da studi neuroscientifici, psicologici e linguistici, che i concetti matematici abbiano origine dalle esperienze corporee degli esseri umani, attraverso una loro rielaborazione nella forma di metafore concettuali. Da questa modalità di concepire la cognizione, più in generale, e in particolare la cognizione matematica, derivano dunque fondamentali conseguenze nella visione del processo di insegnamento-apprendimento: l'esperienza corporea, la percezione sensoriale, e con esse la manipolazione di oggetti e l'utilizzo di artefatti, sono alla base dell'apprendimento matematico. L'approccio *embodied* alla conoscenza e all'apprendimento della matematica, inoltre, ribalta il modello trasmissivo di insegnamento basato principalmente sul linguaggio formale, che può causare ostacoli cognitivi in quanto slegato dall'esperienza concreta dello studente, introducendo un approccio di tipo «[...] percettivo-motorio [che] coinvolge l'azione e la percezione e produce apprendimento basato sul fare, toccare, muoversi e vedere» (Arzarello et al., 2005, p. 57, traduzione dell'autrice).

A partire poi da ricerche riguardanti il cervello e il funzionamento neuronale (Gallese & Lakoff, 2005) e gli aspetti semiotici della comunicazione (Kress, 2000) si è affermato in didattica della matematica il concetto di "multimodalità" inteso come «[...] la coesistenza e l'importanza di diverse modalità o risorse nei processi di apprendimento-insegnamento [...]» come parole, gesti, simboli, posizioni del corpo, toni della voce (Sabena et al., 2019, p. 19). In particolare, numerosi studi si sono soffermati sul ruolo dei gesti, mostrando il ruolo preminente di questi ultimi e dell'esperienza senso-motoria nella costruzione e condivisione di significati, nel dispiegarsi dell'argomentazione e della discussione matematica e nello sviluppo di nuove conoscenze (Arzarello et al., 2009; Arzarello et al., 2005; Radford, 2014; Sabena, 2018). Un altro filone di ricerca si è invece concentrato sul ruolo del corpo nella sua interezza e del movimento nell'emergere dei concetti matematici e nel favorire la loro comprensione: ne sono un esempio gli studi di Susan Gerofsky (2011, 2016, 2018), che, con il progetto *Graph & Gestures*, ha messo in luce la maggiore capacità intuitiva degli studenti che utilizzano movimenti a largo spettro, coinvolgendo

diverse parti del corpo. L'autrice sottolinea inoltre l'importanza di un clima di gioco nel proporre questo tipo di esperienze, fondamentale per favorire l'immaginazione e l'esplorazione delle idee matematiche; un approccio troppo rigido, improntato fin da subito al rigore e alla ricerca della perfezione, impedisce agli studenti di entrare in contatto in modo creativo con la disciplina (Gerofsky, 2018).

Risultano interessanti anche i casi studio presentati da Kelton e Ma (2018) e Ma (2017), che evidenziano l'importanza dell'esperienza corporea e della collaborazione tra studenti nel favorire la concettualizzazione, l'attività di *problem solving* e la costruzione di significati matematici.

Infine, l'attenzione al corpo e alle sue potenzialità rimanda anche a una visione di tipo estetico ed artistico della matematica, in cui ha posto anche l'espressione creativa ed immaginativa, centrale nel teatro e nella danza; Gerofsky (2016) sottolinea come un approccio mediato dall'arte alla matematica sia "inclusivo", nel senso che tramite esso si può dare accesso ai concetti matematici stimolando interesse e coinvolgimento, anche al di fuori dei contesti accademici e scolastici. Nell'esperienza dell'autrice, inoltre, le difficoltà scolastiche sembrano attenuarsi nel momento in cui viene data possibilità agli studenti di sperimentare liberamente i concetti matematici, utilizzando le modalità più affini al proprio stile di apprendimento. Il processo di apprendimento centrato sul corpo pare inoltre sostenere la memoria degli studenti, i quali anche a distanza di tempo utilizzano la risorsa corporea come aggancio cognitivo (Gerofsky, 2016).

2 Gli aspetti affettivi e metacognitivi nell'apprendimento della matematica

L'importanza di una buona predisposizione verso l'apprendimento della matematica, verso cui è necessario che tendano le scelte didattiche operate in classe, è ribadita nelle Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, in uno dei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze* nella sezione dedicata alla matematica:

«[L'alunno] Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato ad utilizzare siano utili per operare nella realtà».

(MIUR, 2012, p. 61)

Il riferimento a componenti di tipo affettivo e che non riguardano nello specifico competenze intese in senso classico (ovvero come manifestazioni di padronanza di conoscenze ed abilità, mobilitate in diversi contesti) è presente soltanto nei *Traguardi* relativi a questa disciplina, a riprova di come, in matematica, sia considerato particolarmente importante porre attenzione al rapporto personale che l'allievo ha con la materia e alla sua predisposizione verso di essa: pur riconoscendo che una disposizione affettiva di tipo positivo sia favorevole nell'apprendimento di qualsiasi materia, è proprio nell'ambito della didattica della matematica che si concentrano numerosissime ricerche sul tema. All'interno del report stilato in seguito all'indagine PISA (Programme for International Student Assessment) del 2012 si evidenzia come una percentuale considerevole degli intervistati abbia segnalato emozioni negative e stress nel confrontarsi con compiti matematici, e che tale condizione sia correlata con prestazioni inferiori alla media (Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2013).

Pur non potendo arrivare a definire un rapporto di causalità tra le due variabili, l'associazione tra stati emotivi di tipo negativo e prestazioni di apprendimento è in ogni caso nota in letteratura, sia per quanto riguarda la ricerca sull'apprendimento in genere sia per quanto riguarda la didattica della matematica. Lucangeli (2019, p. 52) afferma infatti che le emozioni «[...] non sono disgiunte dall'attività cognitiva, anzi influiscono concretamente sui processi cognitivi».

Per ciò che concerne la matematica, appaiono interessanti gli esiti di una serie di studi effettuati da

Zan e Di Martino, i quali si sono concentrati sull'analisi qualitativa di numerose produzioni scritte (dal titolo "Io e la matematica") nelle quali studenti a diversi livelli scolari dovevano raccontare il proprio rapporto con la matematica. Le analisi di centinaia di testi hanno consentito agli autori di formulare un'ipotesi definitoria del costrutto di "atteggiamento", caratterizzandolo con tre dimensioni interconnesse tra loro (Di Martino & Zan, 2009):

- disposizione emozionale verso la matematica: insieme di emozioni che il soggetto associa alla matematica;
- senso di auto-efficacia in matematica: insieme delle credenze o delle percezioni che un individuo ha delle proprie capacità in matematica;
- visione della matematica: riguarda le credenze individuali circa la natura della matematica.

Queste tre dimensioni, specificano i ricercatori, interagiscono tra loro nell'interpretazione dell'esperienza matematica degli alunni, permettendo di abbandonare la dicotomia positivo/negativo, principalmente riferita all'aspetto emozionale, a favore di diversi "profili" di atteggiamento.

Alla costituzione di un certo tipo di atteggiamento verso questa disciplina concorrono quindi non solo la disposizione emozionale, ma anche una serie di convinzioni, su di sé e sulla matematica, che fanno riferimento a una conoscenza di tipo metacognitivo, ovvero riflessiva sulla propria cognizione (Cornoldi, 1995). Per quanto riguarda le convinzioni sulle proprie capacità, è utile fare nuovamente riferimento alle produzioni scritte analizzate da Zan e Di Martino, nelle quali si riscontra una correlazione tra difficoltà incontrate dagli studenti, bassa percezione di autoefficacia e di conseguenza frustrazione ed emozioni negative nei confronti dell'apprendimento matematico, «[...] arrivando fino alla convinzione di non poter controllare il successo in matematica» (Di Martino, 2012, p. 212).

Alla luce di queste considerazioni è evidente come sia fondamentale il ruolo dell'insegnante, che deve operare scelte didattiche mirate a «[...] orientare l'allievo in un'attribuzione costruttiva e positiva [...]» (Zan, 2007, p. 131). Come sottolinea inoltre Di Martino (2012, p. 212) «[...] è importante "far provare esperienze di successo"», senza ricorrere a una semplificazione eccessiva dei problemi posti ma calibrando le sfide da proporre in base alle capacità attuali dell'alunno.

All'atteggiamento di uno studente verso la matematica concorrono inoltre le visioni che lo stesso possiede sulla disciplina e che gli vengono trasmesse dal contesto; l'importanza di una visione della matematica adeguata è sottolineata nel paragrafo introduttivo alla disciplina contenuto nelle Indicazioni Nazionali per il curriculum:

«[...] non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo».

(MIUR, 2012, p. 60)

Le espressioni iniziali fanno riferimento a una visione della matematica in cui la memoria ricopre un ruolo preponderante: una disciplina in cui è necessario acquisire una serie di regole e formule da applicare per ottenere un risultato; nella seconda parte invece si esorta a trasmettere una visione della matematica maggiormente connessa con la realtà; talvolta negli studenti si imprime però una convinzione opposta, che parte dal presupposto dell'inutilità del buonsenso in matematica e che porta a vedere la matematica come un'attività estranea all'alunno e scollegata dalla realtà quotidiana (Zan, 2007). A tal proposito Skemp (1976) distingue tra due diverse visioni della matematica possedute da studenti e insegnanti: una visione "strumentale" determinata dall'applicazione di regole prive di significato, e una visione "relazionale", caratterizzata dalla consapevolezza dei *perché* del proprio agire. Come si può evincere da quanto descritto finora, la dimensione affettiva, unita alle componenti metacognitive (percezione di autoefficacia e credenze relative alla disciplina), ricoprono un ruolo

fondamentale per un apprendimento significativo della matematica. Per questo motivo è necessario che le pratiche didattiche e il contesto classe siano pensati in modo da valorizzare tali aspetti: una possibilità in questo senso è data dall'uso delle tecniche teatrali per l'insegnamento-apprendimento della matematica, in cui l'alunno può esplorare liberamente e in modo attivo i concetti matematici in un'atmosfera ludica, e in cui l'errore assume una valenza positiva e di carattere formativo.

3 **Matematica in scena: il teatro come metodologia d'insegnamento**

La sperimentazione attuata in classe, che verrà presentata e analizzata nei paragrafi seguenti, è stata pensata e progettata a partire dalla partecipazione a un *workshop* di formazione rivolto a studenti e studentesse del corso di Scienze della Formazione Primaria svoltasi a ottobre 2022 e condotta da formatori di SCT Centre (Social Community Theatre Centre) nella sede di Spazio Bac a Torino. SCT Centre è un centro di ricerca dell'Università di Torino diretto da Alessandra Rossi Ghiglione che si occupa di produrre ricerca scientifica e di avviare e sperimentare progetti di carattere culturale e sociale riguardanti una pluralità di tematiche (salute, educazione, differenze culturali e di genere, contrasto alle disuguaglianze, ambiente e sostenibilità) servendosi della metodologia del Teatro Sociale e di Comunità. La finalità dei progetti avviati è quella di coinvolgere i cittadini, facenti parte di comunità e organizzazioni, in percorsi di auto-riflessione, espressione e relazione attraverso il teatro e la *performance* teatrale, uniti all'utilizzo della musica e di altre forme artistiche. Il progetto TIM – *Theatre in Mathematics*¹ si è sviluppato all'interno del programma Erasmus+ (programma dell'Unione europea nel campo dell'istruzione, della formazione, della gioventù e dello sport) e in particolare nell'ambito della Key Action n°2 (Cooperazione tra organizzazioni e istituzioni – Partenariati strategici per l'istruzione scolastica). Il progetto infatti coinvolge organizzazioni di diverse nazioni europee: SCT Centre (Social Community Theatre Centre) e DORS (Centro di Documentazione per la Promozione della Salute della Regione Piemonte) per l'Italia, HVL (Western Norway University of Applied Science) per la Norvegia, TUC (Technical University of Crete) per la Grecia e la compagnia teatrale ASTA per il Portogallo. Tali organizzazioni hanno collaborato per l'implementazione e l'applicazione di una nuova metodologia per l'insegnamento della matematica nella scuola primaria e secondaria di primo grado² con l'utilizzo di tecniche teatrali denominata metodologia TIM.

La metodologia TIM si avvale di due approcci preesistenti, approfondendone e valutandone l'utilizzo: Mathemart – Giocare con la matematica nel laboratorio teatrale e Process Drama – Scambio di ruoli, prospettive e aspetti di ruolo nell'insegnamento della matematica. Come si legge nel "Manuale metodologico TIM" (SCT Centre, n.d.a, p. 5), Mathemart, creato da Maurizio Bertolini, è

«[...] un approccio pedagogico innovativo che consiste nell'insegnamento della matematica attraverso la metodologia del Teatro Sociale e di Comunità (TSC) [...] per coinvolgere gli studenti nel gioco della matematica attraverso attività ludiche e teatrali: un approccio globale che include mente e corpo, creatività innata e impegno».

Process Drama è invece un approccio sviluppato dall'Università norvegese HVL che «[...] mira a cambiare il modello di comunicazione dominato dall'insegnante introducendo ed esplorando i ruoli e gli aspetti del ruolo [...] al fine di generare processi di apprendimento attivo da parte degli studenti» (p. 5). In particolare, l'approccio Mathemart propone in primo luogo una serie di esercizi e attività strutturate di stampo ludico che permettono ai partecipanti al laboratorio di prendere confidenza

1. <https://www.theatreinmath.eu/it/>

2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

con il linguaggio teatrale, esplorando le diverse possibilità del corpo e del movimento, del suono e della voce; in seguito, tali attività subiscono alcune variazioni che permettono al conduttore di includere i concetti matematici, che diventano necessari per giocare. L'atmosfera giocosa dà quindi la possibilità agli studenti sia di apprendere nuovi argomenti sia di mettere in atto conoscenze e abilità già possedute con un atteggiamento curioso ed esplorativo, utilizzando creatività, consapevolezza corporea, capacità di relazione, senza temere di sbagliare. La metodologia TIM è stata sperimentata in un progetto di ricerca-azione che ha coinvolto 30 classi italiane di scuola primaria e secondaria di primo grado, per un totale di 65 insegnanti affiancati da *trainer* TIM e 276 studenti (Rubino et al., n.d.). I risultati dell'applicazione della metodologia, a seguito di una raccolta di dati tramite interviste semi-strutturate, *focus group*, questionari di autovalutazione, diari di osservazione, indicano una tendenza positiva rispetto all'efficacia della metodologia nel favorire emozioni piacevoli e un clima di collaborazione, sia facendo riferimento alle percezioni degli studenti, sia a quelle dei docenti. Al fine di diffondere la metodologia e permetterne una più ampia applicazione nelle scuole i *trainer* TIM nelle diverse nazioni coinvolte nel progetto si occupano di formare insegnanti e futuri insegnanti di diversi gradi scolastici, mettendo inoltre a disposizione strumenti quali il "Manuale metodologico TIM" (SCT Centre, n.d.a) e il "Toolkit TIM" (SCT Centre, n.d.b), essenziali per poter approfondire le premesse teoriche e le attività proposte dal metodo.

4 Obiettivi e metodologia

L'esperienza didattica presentata in questo contributo, oggetto di un progetto di tesi,³ ha avuto come destinatari gli alunni e le alunne di una classe seconda della scuola primaria "G. E. Pestalozzi" di Torino. La classe è composta in totale da 23 alunni, di cui 10 bambine e 13 bambini, di età compresa tra i 7 e gli 8 anni. La riflessione sull'esperienza didattica, effettuata a priori, ha consentito di mettere in luce alcuni obiettivi di carattere sperimentale: valutare, in senso qualitativo, l'efficacia didattica del percorso proposto; analizzare le ricadute di un approccio *embodied* sulla costruzione e consolidamento delle conoscenze matematiche; analizzare le percezioni soggettive degli studenti rispetto ad emozioni e convinzioni. Sulla base di questi obiettivi, si è deciso di utilizzare un approccio di ricerca-azione che si inserisce nel filone della *Design-Based Research*, ovvero ricerca basata su progetti (Design-Based Research Collective, 2003; Pellerey, 2005): si tratta di un tipo di ricerca applicato ai contesti educativi e che tiene conto della complessità e del carattere dinamico di questi ultimi; a partire da assunti teorici desunti dalla letteratura si progettano dunque interventi innovativi, sperimentati in contesti reali, e se ne valutano ed analizzano gli effetti. Per poter analizzare l'esperienza da molteplici punti di vista e fornire un resoconto a tutto tondo, i dati sono stati raccolti con diversi strumenti:

- diario di bordo: l'insegnante ha provveduto ad annotare, in seguito a ciascuna lezione, lo svolgimento e i tempi delle attività, gli interventi degli alunni, eventuali variazioni rispetto al progetto iniziale, punti di forza e difficoltà;
- registrazioni video e fotografie;
- registrazioni audio, utilizzate per tenere traccia degli interventi nel corso di discussioni collettive e in piccolo gruppo;
- produzioni degli studenti: produzioni di tipo grafico e testuale riguardanti la propria esperienza.

3. Lavoro di tesi di Caterina Erba (2023), intitolato "Matematica, teatro ed emozioni: l'approccio Mathemart alla scuola primaria", svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in Scienze della Formazione Primaria, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino. Relatrici: Carlotta Soldano, Cristina Sabena.

5 Struttura del percorso didattico

Il percorso didattico, messo in atto tra marzo e maggio 2023, si è articolato su due principali dimensioni, interconnesse tra loro:

- a. *lezioni di matematica e teatro*: attività teatrali propedeutiche e attività matematiche svolte sotto forma di laboratorio teatrale, utilizzando l'approccio Mathemart;
- b. *attività metacognitive*: attività di tipo metacognitivo sulla matematica e il suo apprendimento, svolte sia nella fase finale delle lezioni sia in momenti separati.

Le *lezioni di matematica e teatro* si sono sviluppate in un totale di otto lezioni; ognuna di queste (con l'eccezione della lezione 6, che ha previsto la partecipazione della classe ad uno spettacolo teatrale) è stata strutturata in fasi, così come indicato nel "Manuale metodologico TIM":

1. *Contatto e contratto*: l'insegnante accoglie gli allievi e le allieve e introduce il laboratorio, spiegando le attività che verranno svolte nel corso dell'incontro e condividendo gli obiettivi dello stesso; in questa fase è possibile recepire anche eventuali domande e osservazioni dei partecipanti e avviare una breve discussione, oppure riprendere tematiche affrontate negli incontri precedenti.
2. *Riscaldamento*: gli studenti e le studentesse vengono introdotti/e al linguaggio teatrale con varie attività ed esercizi; l'attività viene prima illustrata dall'insegnante (e se necessario dimostrata nella pratica) e poi messa in atto dagli allievi, in *step* successivi a seconda della complessità dell'esercizio proposto. È bene che il riscaldamento si ponga in continuità con l'attività seguente, allenando le capacità necessarie a svolgerla.
3. *Attività centrale*: il gruppo affronta l'argomento matematico di interesse attraverso le tecniche teatrali con giochi matematici o brevi *performance* in cui si mette in scena l'argomento scelto.
4. *Raffreddamento*: viene proposto un momento di riflessione su quanto esperito nel corso dell'incontro di laboratorio; nel caso di questo progetto si è dato spazio a una riflessione individuale con un supporto di tipo visivo.
5. *Feedback*: il gruppo, con l'accompagnamento dell'insegnante, avvia una riflessione collettiva sull'esperienza; l'insegnante accoglie domande, impressioni, dubbi e pone a sua volta domande che stimolino la discussione e l'esplorazione a livello più profondo su quanto vissuto, sia per quanto riguarda gli aspetti più specificamente matematici sia quelli relativi all'attività teatrale e al laboratorio nel suo complesso.

Le attività proposte nel corso delle *lezioni di matematica e teatro*, sia quelle propedeutiche alle tecniche teatrali, sia quelle matematiche, sono state tratte e riadattate per la maggior parte (con l'eccezione di un'attività) dal "Toolkit TIM". Nello specifico, le attività matematiche hanno riguardato l'area tematica del numero, delle operazioni e del calcolo, scelte e adattate in base alle competenze già possedute dagli alunni e dalle alunne.

Le *attività metacognitive*, invece, hanno riguardato la riflessione su aspetti metacognitivi ed affettivi, come ad esempio le emozioni provate nel corso delle lezioni di laboratorio e il proprio rapporto con la matematica.

Si inserisce qui, per chiarezza, un resoconto schematico dell'intero percorso (Tabella 1): per un'esposizione completa delle attività proposte e analisi delle stesse, oltre che per maggiori dettagli sul quadro teorico presentato, si rimanda al lavoro di tesi da cui è tratto il contributo. Nella colonna delle attività vengono riportate solo le fasi variabili all'interno di ogni lezione: il riscaldamento e l'attività centrale.

Lezione	Attività
Lezione 1	Riscaldamento: <i>Teatro immagine</i> e <i>Palla dei nomi</i> Attività centrale: <i>La palla dei numeri</i>
Lezione 2	Riscaldamento: <i>Zattera</i> Attività centrale: <i>Zattera con i numeri</i>
Lezione 3	Riscaldamento: <i>Zattera</i> Attività centrale: <i>Gioco dell'addizione</i>
Lezione 4	Riscaldamento: <i>Specchio</i> Attività centrale: <i>Gioco della sottrazione</i>
Lezione 5	Riscaldamento: <i>Tableaux vivants</i> Attività centrale: <i>Gioco della moltiplicazione</i>
Lezione 6	Partecipazione allo spettacolo <i>Math Scare Boom! Una strana lezione contro il mal di matematica</i> di SCT Centre. Produzioni scritte individuali.
Lezione 7	Riscaldamento: <i>Oggetto immaginario</i> Attività centrale: <i>Indovina che numero sono</i>
Lezione 8	Riscaldamento: <i>Teatro immagine</i> Attività centrale: <i>Duello del calcolo mentale</i>

Tabella 1. Schema del percorso.

6 Descrizione e analisi delle attività

In questo paragrafo verrà presentato ed analizzato il resoconto di alcune delle attività svolte nel corso dell'esperienza didattica, facendo riferimento a due principali lenti di approfondimento: in primo luogo si analizzerà il ruolo dell'esperienza corporea nella concettualizzazione matematica; in seguito, si prenderà in esame quanto esperito dagli studenti rispetto alla percezione dell'errore e il loro punto di vista su emozioni e convinzioni. Queste due lenti, prese in esame nei sottoparagrafi seguenti, consentono di indagare le attività proposte agli alunni a partire da quanto esposto nel quadro teorico del presente contributo. Le attività da analizzare sono state scelte sulla base della loro significatività ai fini di poter trarre conclusioni sugli esiti dell'esperienza e presentare potenzialità e limiti della metodologia proposta. Nel prossimo paragrafo (par. 6.1) viene presentata un'analisi delle attività proposte nelle lezioni 3 e 4. In quello successivo (par. 6.2), invece, l'attenzione si sposta sulle attività proposte nelle lezioni 2 e 8.

6.1 Il corpo come mediatore cognitivo

Le attività matematiche laboratoriali proposte nel corso delle *lezioni di matematica e teatro* hanno

visto la centralità del corpo e del movimento: in questo paragrafo si analizzerà come il corpo abbia avuto il ruolo di mediatore cognitivo, ovvero come i concetti matematici si siano “incarnati” nell’esperienza concreta dei bambini, favorendo così la loro elaborazione e l’emergere strategie di *problem solving* per mezzo dell’argomentazione.

6.1.1 Il Gioco dell’addizione

L’attività denominata *Gioco dell’addizione* è stata scelta come nucleo centrale della lezione 3.

Tale attività prende avvio dal gioco di *Riscaldamento* teatrale chiamato *Zattera*, di cui si esplicitano qui brevemente le regole: gli alunni camminano in ordine sparso; è necessario non far ribaltare la zattera immaginaria occupando in modo uniforme lo spazio, cercando di non procedere in forma circolare, senza scontrarsi con gli altri; l’insegnante dà i comandi *via* e *stop*; allo stop i bambini devono fermarsi e restare immobili nella posizione che stanno occupando o trasformarsi in oggetti così come di volta in volta richiesto; al via possono ripartire; i comandi sono accompagnati dall’accendersi o spegnersi della musica. Nel corso dell’*Attività centrale*, che mantiene le medesime regole di base, è stato introdotto un nuovo comando chiamato *colla*, dato nel momento dello stop della musica. In risposta a questo comando i bambini hanno dovuto formare gruppi di 2 o 3 persone con i compagni vicini, appunto “incollandosi” con una parte del corpo (Figura 1). Nei primi turni, per familiarizzare con la nuova istruzione, non si è proseguito con la seconda parte del gioco ma i gruppi dopo essersi formati si sono nuovamente sciolti al via. In questa fase è stato sottolineato dall’insegnante come fosse necessario unirsi ai compagni che si trovavano nelle vicinanze e non andare a cercare altri compagni spostandosi nello spazio. In seguito ai gruppi è stato chiesto di restare uniti al ripartire della musica e muoversi nello spazio rimanendo attaccati ai compagni. Allo stop successivo è stata inserita un’ulteriore istruzione, “colla” con l’esplicitazione di un numero: i gruppi avrebbero dovuto quindi sommarsi per formare il numero indicato. La prima istruzione data è stata *colla 6*: in un primo momento però i bambini si sono separati dai gruppi iniziali andando a formare nuovi gruppi da 6 componenti. È stato quindi rispiegata la regola per cui i gruppi iniziali non possono separarsi, ma solo unirsi ad altri gruppi; per chiarirla ulteriormente l’insegnante ha dimostrato come fare con l’aiuto di alcuni alunni, simulando l’esecuzione dell’esercizio. Nel turno successivo i gruppi si sono correttamente sommati per formare gruppi da 6; come prevedibile (gli alunni presenti erano 21) un gruppo non è riuscito ad unirsi agli altri. Nell’ultimo turno di gioco l’istruzione è stata cambiata ed è stato chiesto di formare gruppi di 9 componenti (*colla 9*).



Figura 1. I bambini si uniscono in gruppi di 2 o 3 dopo il primo comando *colla*.

Nel corso dell'attività, l'atmosfera di gioco e il movimento spontaneo hanno in alcuni casi prevalso rispetto all'elaborazione di strategie corrette (come il conteggio e la somma), utilizzate solo da alcuni alunni, che hanno avuto il compito di guidare i compagni del proprio gruppo. Tali strategie sono state usate solo successivamente, nel gruppo già unito, per verificare di aver costituito il numero corretto. Si può dire quindi che "a caldo" il concetto matematico oggetto del gioco (in questo caso l'addizione) non sia emerso spontaneamente nel corso dell'attività, almeno non per tutti gli alunni. Tuttavia, nel corso della discussione seguita all'attività (fase di *Feedback*), si può notare come gli alunni si siano serviti del riferimento alla corporeità per guardare retrospettivamente quanto fatto e giungere ad una comprensione più profonda. Si riporta qui la trascrizione di una parte del dialogo:

1. Insegnante: «Quale strategia potevo utilizzare per riuscire a raggiungere il numero detto dalla maestra? Per esempio, come facevo a raggiungere 9?»
2. L.: «Dovevamo contare quanti eravamo nei gruppi».
3. S.: «Per esempio si poteva fare che 2 e 3 si mettevano insieme e faceva 5, poi venivano altri 2 e poi 2 e faceva 9».
4. F.: «Oppure si poteva fare che 3 gruppi con 3 bambini si mettevano insieme».
5. Insegnante: «Quindi quale operazione mi aiutava ad unire i gruppi piccoli per formare dei gruppi più grandi, senza dover contare?»
6. N.: «Il più».
7. K.: «L'addizione».
8. Insegnante: «Perché quando ho detto *colla* 9 alcuni bambini sono rimasti fuori?»
9. B.: «Perché c'erano 2 assenti».
10. S.: «Perché siamo 21, siamo dispari».
11. Insegnante: «Quanti gruppi da 9 potevamo formare?»
12. M.: «Secondo me potevamo farne 1».
13. S.: «Potevamo farne 2, perché 9 più 9 fa 18».
14. Insegnante: «Potevamo farne ancora uno?»
15. L.: «No, perché restavano solo 3 bambini».

Analizzando gli interventi dei bambini emerge come il riferimento all'esperienza corporea sia costante e faccia da motore all'elaborazione cognitiva: ne sono esempi gli interventi che si riferiscono al mettersi insieme e allo spostamento dei vari gruppi nello spazio (interventi 3 e 4), che poi portano, anche grazie all'input dell'insegnante, all'esplicitazione del concetto matematico (interventi 6 e 7). Nella seconda parte della discussione è il riferimento concreto dell'insegnante (intervento 8) a dare avvio al ragionamento attraverso l'argomentazione, in alcuni casi errata (intervento 10), in altri corretta (intervento 13).

6.1.2 Il Gioco della sottrazione

La lezione 4 ha avuto come focus la sottrazione. L'attività si è svolta nel modo seguente: gli alunni sono stati divisi in 2 gruppi (un gruppo formato da 10 bambini e un gruppo da 11). Ciascun gruppo, con l'aiuto dell'insegnante, ha dovuto organizzare e rappresentare in forma scenica una sottrazione esibendosi sul palco. La sottrazione è così drammatizzata: il gruppo si divide in due ulteriori sottogruppi, minuendo e sottraendo; il sottogruppo del minuendo si dispone in forma statica nello spazio; al partire della musica, ciascun membro del sottogruppo del sottraendo si avvicina danzando e tocca un compagno; il sottogruppo del sottraendo e i compagni toccati escono dalla scena danzando; sulla scena rimangono soltanto gli alunni che rappresentano il risultato della sottrazione (Figura 2). Il gruppo che non sta mettendo in atto la scena ha fatto da pubblico e in seguito alla rappresentazione ha potuto ipotizzare in quale forma numerica si potesse trasporre quanto osservato.



Figura 2. Svolgimento di una delle due rappresentazioni ($6 - 5 = 1$).

Nel corso dell'organizzazione della breve drammatizzazione, facilitata dall'insegnante, gli alunni hanno potuto riflettere sulle diverse possibilità offerte dal numero di bambini a disposizione per individuare la sottrazione da poter rappresentare. Viene qui trascritta una porzione di discussione avvenuta in uno dei due gruppi:

1. Insegnante: «Quali sottrazioni potremmo rappresentare con 10 bambini?»
2. F.: «Possiamo fare $5 - 5 = 0$ ».
3. S.: «Secondo me possiamo fare $10 - 10$ ».
4. Insegnante: « $5 - 5$ può andare. Ma ci sono abbastanza bambini per fare $10 - 10$? Proviamo ad immaginare lo spettacolo».
5. M.: «Se mettiamo 10 bambini nel palco, non ci sono altri 10 bambini che possono venire a prenderli».
6. D.: «Allora possiamo fare $6 - 4 = 2$ ».
7. Insegnante: «Ok, questo possiamo farlo? Ci sono abbastanza bambini?»
8. D.: «Sì perché ci servono 6 bambini sul palco e 4 fuori e così facciamo 10».

Nella fase di *Feedback* si è dato poi modo a tutta la classe di discutere collettivamente, condividendo i processi decisionali dei due gruppi per riflettere sulle strategie adottate. Anche in questo caso si ritiene significativo riportare una parte della discussione per mettere in evidenza i riferimenti fatti dai bambini nel corso del ragionamento:

9. Insegnante: «Invece nel nostro gruppo è capitato che qualcuno dicesse $10 - 10$. Lo potevamo fare? Perché?»
10. S.: «Non potevate perché 10 bambini entravano... Poi dovevano entrare altri 10 ma non c'erano altri 10».

11. M.: «Servivano 20 bambini».
12. S.: «Per esempio potevamo farlo se eravamo tutti insieme, ma poi siamo 21 e uno non giocava».
13. Insegnante: «Vi faccio una domanda difficile. Come doveva essere il numero dei bambini sul palco e di quelli fuori per far funzionare la sottrazione? Dovevano essere di più quelli sul palco o quelli fuori? Perché?»
14. W.: «Quelli sul palco».
15. S.: «Perché altrimenti i bambini entravano e poi non avevano nessuno da prendere per mano per uscire».

Come per l'attività descritta precedentemente, anche qui l'esperienza corporea e motoria ha avuto ruolo centrale nel veicolare il concetto matematico: gli alunni hanno infatti impersonato i numeri coinvolti nell'operazione vivendola concretamente tramite il movimento. Analizzando gli interventi degli alunni, sia in fase di organizzazione della rappresentazione in piccolo gruppo, sia nel corso della discussione collettiva finale, si può notare come il collegamento al vissuto corporeo sia anche qui molto rilevante nel procedere del ragionamento: possiamo evincerlo ad esempio dall'intervento 5 di M., nel corso del dialogo in piccolo gruppo («[...] non ci sono altri 10 bambini che possono venire a prenderli») e dall'intervento 15 di S. in plenaria («[...] i bambini entravano e poi non avevano nessuno da prendere per mano per uscire»). Proprio quest'ultimo intervento evidenzia il passaggio dall'esperienza concreta (se ci sono meno bambini sul palco, un bambino resta senza compagno con cui uscire) alla concettualizzazione avvenuta successivamente (operando con i numeri naturali, il minuendo deve essere maggiore del sottraendo): il ponte tra queste due fasi dell'elaborazione è stata l'argomentazione.

6.2 Emozioni e convinzioni

All'interno del "Manuale metodologico TIM" viene messo in risalto come l'approccio Mathemart sia nato proprio al fine di contrastare le emozioni negative che spesso sono associate alla matematica, sia a causa di difficoltà soggettive sia a causa degli ostacoli cognitivi della disciplina. La cornice del laboratorio teatrale permette infatti agli alunni di sperimentare liberamente, agendo per tentativi ed errori, in un'atmosfera ludica e creativa in cui non ha spazio il giudizio. Proprio per questo motivo si è deciso di approfondire, nel percorso didattico, il ruolo delle emozioni e delle convinzioni sulla disciplina, sia analizzando come esse si siano manifestate nel corso delle attività, sia esplorando il punto di vista degli alunni a partire dalle loro produzioni scritte e dalle discussioni avvenute in classe.

6.2.1 Il teatro come cornice per trasformare l'errore

Al fine di mettere in luce come il percorso ludico-teatrale abbia permesso agli studenti di vivere in maniera positiva e costruttiva l'esperienza di errore, si analizzeranno qui a titolo esemplificativo due attività proposte: la *Zattera dei numeri* (lezione 2) e il *Duello del calcolo mentale* (lezione 8).

La prima attività è una variazione del gioco teatrale già descritto nel par. 6.1.1. A ciascun alunno è assegnato un numero che, per facilitarne il ricordo, è riportato su un post-it da apporre sul petto. Come nella *Zattera*, gli alunni si muovono nello spazio con un sottofondo musicale; allo *stop*, l'insegnante chiede agli alunni di trasformarsi in oggetti o animali, facendo però riferimento solo ad alcune categorie di numeri (pari, dispari, multipli di un determinato numero). Ad esempio, può chiedere solo ai numeri dispari di trasformarsi in "scatole".



Figura 3. Alcune fasi del gioco.

Dopo ogni istruzione ciascun alunno si è trovato a dover decidere se effettuare la trasformazione oppure no. Quando tutti gli alunni avevano scelto la propria posa, l'insegnante ha proceduto a controllare in maniera giocosa la correttezza delle trasformazioni, aggirandosi nello spazio; in caso di errore si suggeriva al bambino o alla bambina di trasformarsi o di annullare la sua trasformazione con un gesto "magico", spiegando la motivazione dell'errore. In questa attività l'errore appariva in modo lampante, anche agli occhi dei compagni oltre che dell'insegnante, situazione che poteva essere fonte di imbarazzo; allo stesso tempo però la risposta scorretta assumeva una condizione di reversibilità immediata, data dalla possibilità di trasformarsi e ritrasformarsi liberamente. L'attività permetteva inoltre a ciascuno di osservare i compagni in azione, notando come in ogni turno di gioco ci fossero degli errori e ricavando informazioni dalla correzione dell'insegnante. Ciascun alunno ha quindi percepito di non essere l'unico a sbagliare, come può invece succedere nel corso di una lezione di tipo tradizionale in cui l'attività è essenzialmente individuale e in cui anche la correzione dell'insegnante potrebbe essere centrata in modo prioritario sul singolo.

A seguito dell'ultima istruzione data dall'insegnante (richiesta di trasformarsi ai numeri multipli di 1) soltanto i bambini che impersonavano i numeri da 1 a 10 si sono trasformati. Anche in questo caso le caratteristiche dell'attività hanno permesso di cogliere l'errore come opportunità di riflessione e apprendimento: l'insegnante ha infatti stimolato il ragionamento chiedendo se anche moltiplicando i numeri successivi al 10, si ottenesse comunque lo stesso numero; dopo alcuni scambi si è arrivati alla conclusione che tutti dovessero trasformarsi in scatole, poiché tutti i numeri fanno parte della tabellina dell'1. La correzione dell'errore è poi stata fonte di divertimento dato che, in seguito alla riflessione collettiva, tutti gli alunni hanno potuto trasformarsi insieme e realizzare materialmente un esempio di

proprietà matematica che si applica a tutti i numeri di un insieme.

La seconda attività è stata caratterizzata dalla cornice di finzione del duello *western*: l'atmosfera è stata arricchita dalla presenza di una semplice scenografia, un travestimento (i cappelli da *cowboy*) e la musica a tema. Ai bambini è stato richiesto di sfidarsi, mettendo in scena la rappresentazione di un confronto in cui i duellanti si sfidano a "colpi" di calcolo mentale. Particolare enfasi è stata posta sull'interpretazione quanto più convincente e plateale possibile degli attori sul palco.



Figura 4. Un frame della rappresentazione di due alunni.

Questa attività, a differenza delle altre proposte nel corso del laboratorio, presentava caratteristiche di competitività, in quanto agli alunni è richiesto di sfidarsi e ciascun turno di gioco si conclude con un vincente e un perdente. Nonostante ciò, la cornice teatrale ha permesso agli alunni di non focalizzarsi sull'errore e di non manifestare reazioni emotive negative in caso di sconfitta: l'abbinamento della situazione di sconfitta a un gesto plateale e comico ha consentito di sdrammatizzare l'errore attivando emozioni positive, manifestatesi con risate e applausi sia degli alunni in veste di attori che di quelli in veste di spettatori. Infatti, tutto il gioco è stato vissuto dagli alunni con divertimento: la voglia di partecipare ha prevalso sul timore di risultare perdenti o di non saper rispondere correttamente al calcolo, e tutti gli alunni hanno voluto prendere parte volontariamente all'attività senza esitazione. In particolare, ciò è stato evidente per gli alunni in genere più restii a partecipare attivamente alle lezioni (ad esempio intervenendo dopo una domanda dell'insegnante, o recandosi alla lavagna per dimostrare un procedimento) e per gli alunni con maggiori difficoltà in matematica, i quali solitamente preferiscono tenersi ai margini e non mettersi in gioco per il timore di sbagliare o di incontrare una sfida ritenuta troppo difficile per le proprie capacità.

6.2.2 Il punto di vista degli alunni

Come descritto nel par. 5, il percorso didattico è stato caratterizzato anche da *attività metacognitive*, che hanno avuto come intento quello di far emergere dagli studenti riflessioni su aspetti affettivi e metacognitivi relativi sia alla propria percezione del laboratorio teatrale sia più in generale al proprio rapporto con la matematica.

Nella fase di *Raffreddamento* delle lezioni 1, 3, 5 e 7 è stata proposta agli alunni un'attività di riflessione individuale sulla propria esperienza all'interno del laboratorio teatrale, facendo emergere le emozioni e sensazioni provate oltre che ciò che ritenevano aver appreso nel corso della lezione. È stato utilizzato come strumento un foglio A3 riportante il profilo di una sagoma umana, consegnato a

ciascun alunno (Figura 5): è stato chiesto ai bambini di indicare, colorandola, una parte del corpo a loro parere significativa in quel momento, abbinandola a un'emozione e riportando con una breve frase ciò che sentivano di aver imparato nel corso delle attività (con l'aiuto dell'input «Oggi ho imparato...»).

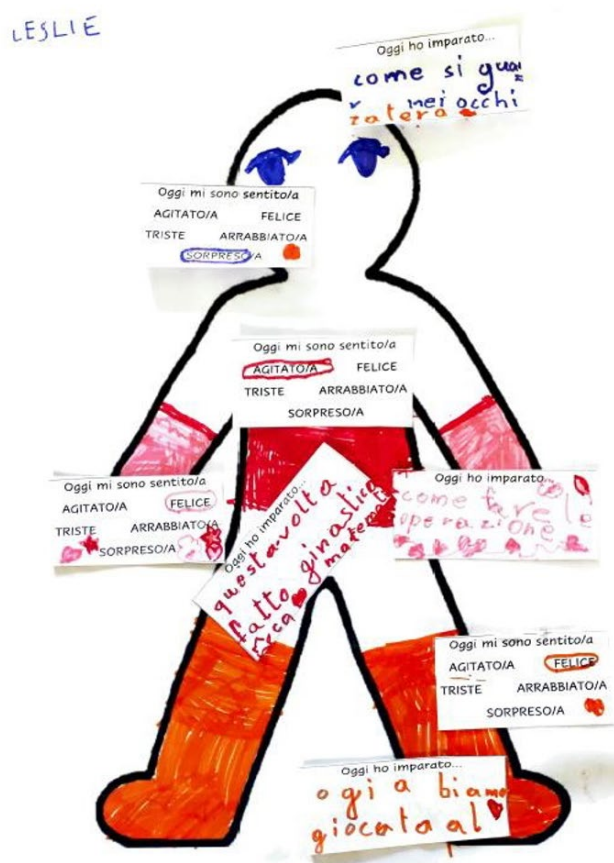


Figura 5. Esempio di sagoma completata.

Nella Tabella 2 sono riportati i dati relativi alle emozioni provate nel corso del laboratorio, segnalate nell'elaborato-sagoma al termine delle lezioni 1, 3, 5 e 7.

	Lezione 1		Lezione 3		Lezione 5		Lezione 7	
	#	%	#	%	#	%	#	%
Felice	4	17,39	8	34,78	8	34,78	3	13,04
Sorpreso	10	43,48	5	21,74	3	13,04	4	17,39
Agitato ⁴	5	21,74	3	13,04	5	21,74	2	8,70
Triste	1	4,35	3	13,04	4	17,39	4	17,39
Arrabbiato	2	8,70	2	8,70	0	0,00	4	17,39
Alunni assenti	1	4,35	2	8,70	3	13,04	6	26,09

Tabella 2. Occorrenze dei diversi stati emotivi negli elaborati.

4. È stato scelto di utilizzare il termine "agitato" al posto di "ansioso" per una maggiore comprensibilità del lessico utilizzato.

Ad un primo sguardo le emozioni di carattere positivo (felicità, sorpresa) risultano essere prevalenti: si può ipotizzare che l'atmosfera ludica e creativa del laboratorio teatrale abbiano influito sul benessere dei bambini nel corso delle attività; inoltre, le numerose occorrenze dell'emozione sorpresa possono essere dovute alla percezione di novità data dall'approccio inusuale all'insegnamento della matematica, da riscontrarsi soprattutto nel luogo adibito alle attività (la palestra al posto dell'aula) e nelle caratteristiche delle attività stesse. Si può comunque notare un numero di occorrenze non trascurabile anche delle altre emozioni (ansia, tristezza, rabbia). Dal dialogo avvenuto con i bambini in seguito alla compilazione si è potuto notare come alcune occorrenze delle emozioni tristezza e rabbia fossero dovute a situazioni contingenti (ad esempio, un litigio) piuttosto che legate alle attività del laboratorio. La scelta del termine "agitato" ha inoltre generato confusione in alcuni alunni, i quali hanno interpretato questa espressione come riferita ad un'agitazione di tipo motorio piuttosto che all'emozione di paura o ansia. In ogni caso, al di là di queste considerazioni, la presenza di emozioni di tipo negativo può essere dovuta alle iniziali difficoltà presentate dai bambini nell'adattarsi alla struttura delle lezioni e alla complessità di alcune attività; anche dal lato progettuale si sono rese necessarie nel corso delle lezioni alcune modifiche *in itinere* proprio a seguito dell'osservazione delle difficoltà degli alunni. È difficile dedurre in che modo le diverse emozioni siano legate direttamente alla matematica in quanto non è stato chiesto ai bambini di motivare le proprie risposte; possiamo però rilevare il ruolo più o meno significativo che la disciplina ha avuto nella percezione dei bambini attraverso un elenco delle risposte date all'input «Oggi ho imparato...». Si riportano qui alcune frasi scritte dai bambini:

- S.: «Oggi ho imparato... che i numeri si possono fare con il corpo».
- K.: «Oggi ho imparato... un gioco della matematica e dei numeri».
- L.: «Oggi ho imparato... come fare le operazioni».
- A.: «Oggi ho imparato... come si sta su una zattera».
- N.: «Oggi ho imparato... dei giochi nuovi».
- M.: «Oggi ho imparato... a fare teatro».

Per presentare in modo globale i dati relativi alle risposte dei bambini si è scelto di utilizzare una rappresentazione grafica sotto forma di Word Cloud, che rendesse evidente la frequenza delle parole impiegate dagli alunni (Figura 6).



Figura 6. Word Cloud realizzata a partire dalle risposte dei bambini.

All'interno della Word Cloud le parole utilizzate con più frequenza hanno dimensioni maggiori e la dimensione diminuisce al diminuire della frequenza di utilizzo. Come si può riscontrare le parole riferite all'ambito semantico del gioco (giochi, giocare, gioco) risultano prevalenti nelle risposte dei bambini. Sono presenti poi una serie di parole riferite al teatro e all'attività teatrale (come ad esempio teatro, palco, spettacolo, costumi, mimo, zattera) e all'esperienza corporea (piedi, mani, occhi, muovere, corpo). In richiamo alla matematica risulta innanzitutto evidente la parola "numeri", utilizzata in frequenza simile rispetto alle parole riferite al gioco; in frequenza minore è stata utilizzata dai bambini la parola "matematica"; infine sono presenti varie parole, utilizzate da alcuni alunni, che si possono mettere in relazione alla matematica (come ad esempio tabelline, pari, operazioni, moltiplicazioni). È possibile ipotizzare quindi che per i bambini abbia assunto maggiore rilevanza l'aspetto ludico delle lezioni di laboratorio, a discapito della percezione di "star facendo matematica": collegando questa informazione a quanto ricavato in precedenza dai dati relativi alle emozioni, si può supporre che la sensazione di benessere riportata da molti bambini sia connessa all'esperienza di gioco del laboratorio più che alla disciplina in sé. Questo conduce a una riflessione doverosa: se da una parte l'obiettivo del laboratorio teatrale è proprio quello di esplorare la matematica giocando e non parlare di matematica (azione che viene svolta solo successivamente con la formalizzazione del concetto matematico), dall'altra questo porta a separare in modo netto l'esperienza del laboratorio Mathemart da quella della lezione tradizionale di matematica; tale separazione potrebbe quindi rendere meno rilevante l'effetto globale dell'approccio Mathemart sul rapporto degli alunni con la matematica.

La prospettiva degli alunni è stata infine indagata con la proposta di una produzione scritta guidata di stampo autobiografico, che portasse gli alunni a riflettere sul proprio rapporto con la matematica. La produzione testuale ha avuto come spunto i temi toccati durante lo spettacolo *Math Scare Boom! Una strana lezione contro il mal di matematica* ed è stata proposta in un momento separato rispetto alle lezioni del laboratorio teatrale (si veda la **Tabella 1** per lo schema del percorso didattico). Il testo è stato diviso in tre parti consegnando dei prompt sotto forma di domande guida:

- Ti è mai capitato di avere il "mal di matematica"? In quali situazioni ti è successo? Come ti sei sentito nel corpo? Quale emozione hai provato?
- Invece quali sono secondo te le meraviglie della matematica? Quali sono le cose che ti hanno fatto pensare «Wow! Ma allora la matematica è fantastica!»?
- Cosa potrebbero fare secondo te le maestre e i maestri per far amare la matematica ai bambini? Come si può sconfiggere la paura della matematica?

Relativamente alla prima domanda posta, molti alunni rispondono di aver provato il "mal di matematica", in particolare in situazioni valutative (ad esempio, verifiche e interrogazioni) oppure trovandosi a dover rispondere a domande alla lavagna; il "mal di matematica" si manifesta, in quanto espresso dai bambini, con numerosi sintomi fisici riconducibili a sensazioni di paura e ansia (cuore che batte forte, mal di testa, mani che tremano, mal di pancia). Alcuni alunni esprimono queste sensazioni con frasi evocative, che rimandano a un forte disagio emotivo, come nel caso di M.: «Nelle verifiche di matematica il mio cuore è spaventato perché delle volte non studio e ho una paura come se sono sulla montagna più alta al mondo». A parte alcune eccezioni, la paura della matematica sembra essere diffusa tra tutti i bambini, indipendentemente dalle difficoltà manifestate e dal livello di apprendimento osservato dall'insegnante. Il riferimento costante al momento valutativo può far pensare che la sensazione di paura sia legata essenzialmente alla paura di sbagliare e al giudizio che ne consegue; ciò viene esplicitato ad esempio da S., che scrive: «Mi è capitato alla verifica di matematica, ho fatto 10 errori e poi mi sono sentita triste nel mio cuore». Si può supporre quindi che alla base del disagio emotivo dei bambini ci sia una concezione della matematica legata all'importanza della risposta corretta, che può essere solo una ed è un sapere posseduto esclusivamente dall'insegnante. Nella

seconda parte del testo è stato chiesto ai bambini di indicare quali fossero secondo loro le meraviglie della matematica. Molti alunni hanno risposto elencando una serie di argomenti trattati nel corso delle lezioni di matematica (ad esempio, le tabelline o le operazioni). Si denota qui una difficoltà degli alunni nel distaccarsi da una matematica scolastica, fatta di argomenti successivi da affrontare, spesso slegati tra loro: una visione della matematica che si può definire strumentale, in cui si fatica a costruire un senso globale e una connessione con la realtà quotidiana. Nell'ultima sezione, i bambini hanno potuto esprimere la propria opinione consigliando a maestre e maestri come poter fare per sconfiggere la paura della matematica. Alcuni alunni hanno fatto riferimento a modalità diverse di apprendere la matematica rispetto alla consueta lezione (ad esempio, creare poesie, fare dei giochi, unire matematica ed arte, andare in palestra e utilizzare il corpo); altri alunni si sono concentrati sulle difficoltà che si possono incontrare facendo matematica e sulla paura di sbagliare, trovando una soluzione quindi nell'aiuto delle insegnanti e dei compagni; altri ancora suggeriscono agli insegnanti di far vedere la matematica sotto una luce diversa, sottolineandone gli aspetti di utilità. Si riportano qui, a titolo esemplificativo, alcune frasi scritte dagli alunni in risposta all'ultimo prompt di scrittura:

- F.: «Si può sconfiggere la paura della matematica se fai giocare i bambini con la matematica».
- E.: «Le maestre potrebbero dire ai bambini che sbagliando si impara. La paura della matematica si può sconfiggere sbagliando».
- S.: «Per sconfiggere la paura della matematica dico ai bambini che la matematica serve per comprare le cose».

7 Bilancio dell'esperienza

L'esperienza illustrata nel presente contributo ha avuto l'obiettivo di esaminare le potenzialità didattiche di una metodologia innovativa (l'approccio Mathemart) per l'insegnamento-apprendimento della matematica, incentrata sull'utilizzo di tecniche del Teatro Sociale e di Comunità. A tal fine sono state progettate una serie di lezioni rivolte a una classe seconda di scuola primaria: nel corso delle lezioni gli alunni hanno potuto, da un lato, sperimentare direttamente la nuova metodologia, e dall'altro riflettere in senso metacognitivo ed affettivo sul proprio rapporto con la matematica.

In conclusione, questa prima indagine esplorativa ha quindi messo in luce come la metodologia Mathemart presenti dei vantaggi dal punto di vista dell'approccio non convenzionale all'apprendimento: il contesto laboratoriale e la cornice teatrale hanno permesso agli alunni di mettere in gioco le proprie competenze in modo libero e scevro da giudizio, utilizzando simultaneamente risorse corporee e cognitive per avvicinarsi ai contenuti matematici; la centralità assegnata alla creatività ed alla libera espressione ha dato la possibilità agli studenti di riflettere di matematica e sulla matematica, attivando il ragionamento e il pensiero metacognitivo, ulteriormente favoriti dall'interazione nel gruppo. D'altra parte è necessario sottolineare come gli effetti positivi della metodologia possano essere ridotti se essa non è integrata nella didattica quotidiana, se non nei suoi aspetti più specificamente teatrali, almeno per quanto riguarda l'approccio all'errore e l'importanza attribuita all'emozioni per l'apprendimento; sarebbe inoltre importante un continuo dialogo tra le attività svolte nel laboratorio e quelle svolte in classe, affrontando i concetti matematici in relazione all'esperienza vissuta dagli studenti. Ulteriori sviluppi della ricerca potrebbero quindi concentrarsi sulle possibilità di integrazione tra laboratorio Mathemart e didattica d'aula e come questo possa avere ricadute sull'apprendimento o sulla percezione soggettiva degli studenti della disciplina.

Bibliografia

- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97–109.
- Arzarello, F., Robutti, O., & Bazzini, L. (2005). Acting is learning: Focus on the construction of mathematical concepts. *Cambridge Journal of Education*, 35(1), 55–67.
- Cornoldi, C. (1995). *Metacognizione e apprendimento*. Il Mulino.
- Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5–8.
- Di Martino, P. (2012). “Un mondo dove la matematica non c’è”: Emozioni negative e difficoltà in matematica. In F. Ferrara, L. Giacardi & M. Mosca (Eds.), *Conferenze e seminari dell’Associazione Subalpina Mathesis 2011-2012* (pp. 209–216). Kim Williams Books.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2009). Different profiles of attitude towards mathematics: The case of learned helplessness. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 417–424). PME.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2010). Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica: Dalle buone intenzioni alle buone pratiche. In R. Biagioli & T. Zappaterra (Eds.), *La scuola primaria. Soggetti, contesti, metodologie e didattiche* (pp. 115–130). ETS.
- Erba, C. (2023). *Matematica, teatro ed emozioni: l’approccio Mathemart alla scuola primaria*. Tesi di Laurea Magistrale, Scienze della Formazione Primaria, Università degli Studi di Torino.
- Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain’s concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive neuropsychology*, 22(3-4), 455–479.
- Gerofsky, S. (2011). Seeing the graph vs. being the graph: Gesture, engagement and awareness in school mathematics. In G. Stam & M. Ishino (Eds.), *Integrating gestures: The interdisciplinary nature of gesture* (pp. 245–256). John Benjamins.
- Gerofsky, S. (2016). Approaches to embodied learning in mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 60–97). Routledge.
- Gerofsky, S. (2018). Mathematics and Movement. In L. Jao & N. Radakovic (Eds.), *Transdisciplinarity in Mathematics Education* (pp. 239–254). Springer.
- Kelton, M. L., & Ma, J. Y. (2018). Reconfiguring mathematical settings and activity through multi-party, whole-body collaboration. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 177–196.
- Kress, G. R. (2000). Multimodality. In B. Cope & M. Kalantzis (Eds.), *Multiliteracies: Literacy Learning and the Design of Social Futures* (pp. 182–202). Routledge.

- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books.
- Lucangeli, D. (2019). *Cinque lezioni leggere sull'emozione di apprendere*. Erickson.
- Ma, J. Y. (2017). Multi-party, whole-body interactions in mathematical activity. *Cognition and Instruction*, 35(2), 141–164.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale*. Le Monnier.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Unione Matematica Italiana, & Società Italiana di Statistica. (2003). *Matematica 2003: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. La Matematica per il cittadino*. <http://www.matematica.it/tomasi/lab-did/pdf/matem-2003-curricolo.pdf>
- Organisation for Economic, Cooperation and Development. (2013). *PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs (Volume III)*. PISA, OECD Publishing.
- Pellerey, M. (2005). Verso una nuova metodologia di ricerca educativa: la Ricerca basata su progetti (Design-Based Research). *Orientamenti pedagogici*, 52(5), 721–737.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257–277.
- Rubino, V., Allern, T., Bertolini, M., Cangemi, E., Drageset, O. G., Lingua, S., et al. (n.d.). *Counteracting the fear of mathematics through theatre: An innovative teaching methodology*. [Manoscritto non pubblicato]. <https://www.theatreinmath.eu/wp-content/uploads/2022/10/4.-Counteracting-the-fear-of-mathematics-through-theatre.pdf>
- Sabena, C. (2018). Exploring the contribution of gestures to mathematical argumentation processes from a semiotic perspective. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 541–559). Springer International Publishing.
- Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Mondadori.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
- Social and Community Theatre Centre. (n.d.a). *TIM – Theatre in mathematics. Manuale metodologico*. <https://www.theatreinmath.eu/wp-content/uploads/2022/03/Manuale-metodologico-TIM-Italian-compressed.pdf>
- Social and Community Theatre Centre. (n.d.b). *TIM – Theatre in mathematics. Toolkit: attività ed esercizi*. <https://www.theatreinmath.eu/wp-content/uploads/2022/03/Toolkit-TIM-Italian-compressed.pdf>
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Introduzione al problem solving in una classe prima primaria

Introduction to problem solving in a first-grade class

Caterina Seneci

Istituto Comprensivo “Scarperia - San Piero a Sieve”, Scarperia e San Piero (FI) – Italia

✉ caterinaseneci@gmail.com

Sunto / Questo articolo intende descrivere le attività maggiormente significative del percorso svolto da una classe prima primaria in merito all'attività di problem solving, intesa come una delle attività principali e fondamentali del curriculum di matematica. Uno degli obiettivi del percorso è quello di introdurre l'abitudine ad affrontare problemi matematici (e non) senza che si instaurino stereotipi e abitudini rigide. Altri obiettivi del percorso riguardano il coinvolgimento di tutti gli alunni e l'importanza di accogliere tutte le strategie risolutive proposte dagli alunni per la risoluzione dei problemi affrontati. Grande rilievo è dato anche al ruolo dell'argomentazione sia orale che scritta, considerata ovviamente tenendo conto dell'età degli scolari (6 anni).

Parole chiave: problem solving; argomentazione; strategie risolutive; lavoro a coppie; discussione collettiva.

Abstract / This article aims to describe the most significant activities carried out by a first-grade class regarding problem solving activities, considered as one of the main and fundamental aspects of the mathematics curriculum. One of the goals of the didactic path is to instill the habit of tackling mathematical (and non-mathematical) problems without falling into stereotypes and rigid habits. Other objectives of the didactic path include involving all students and emphasizing the importance of welcoming all solving strategies proposed by the students for solving the problems addressed. Special attention is also given to the role of argumentation, both oral and written, considering the age of the students (6 years old).

Keywords: problem solving; argumentation; solving strategies; pair work; collective discussion.

1 Risoluzione di problemi e pratica matematica: il progetto *Problemi al centro*

La scelta di questo articolo è quella di trattare e descrivere le principali e più significative pratiche attuate in una classe prima primaria¹ in merito all'introduzione del problem solving.

È importante, pensando all'attività del problem solving, che quest'ultima venga introdotta il più possibile senza stereotipi e slegata da pratiche didattiche rigide o fisse. Spesso, infatti, si assiste all'introduzione di abitudini molto schematiche legate allo svolgimento dei problemi come, per esempio, seguire una routine specifica e obbligatoria: si cercano i dati nel testo del problema e si cerchiano di rosso, si scrivono i dati sul quaderno, si scrive l'operazione, si scrive la risposta. Questo tipo di abitudini innanzi tutto evidenzia una pratica del problem solving legata principalmente, se non unicamente, alla presenza del dato numerico e inoltre questa rigidità nell'esecuzione si pone in netto contrasto con le affermazioni delle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012). Queste ultime, infatti, esplicitano chiaramente come l'attività di problem solving debba necessariamente essere slegata dalla ripetitività e debba essere intesa non come mero esercizio ma bensì legata a questioni autentiche e significative:

«Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo come esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola».

(MIUR, 2012, p. 49)

Nella scelta delle attività proposte alla classe sarebbe importante fare attenzione, pertanto, anche alla differenza fra esercizio e problema:

«Si ha un esercizio quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento; gli esercizi ritornano dunque nella categoria delle prove a scopo di verifica immediata o di rafforzamento; si ha invece un problema quando una o più regole o nozioni che dovrebbero essere utilizzate per la risoluzione non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore (alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione); a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto strategico, talvolta creativo, da parte del risolutore».

(D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 95)

Sulla base di queste premesse e sulla scorta della formazione professionale svolta nell'ambito della didattica della matematica, l'insegnante (autrice di questo articolo) ha scelto di introdurre nella sua pratica didattica per la classe prima primaria il progetto *Problemi al centro* (Di Martino & Zan, 2019). Il progetto, realizzato sotto la direzione scientifica di Pietro di Martino e Rosetta Zan dell'Università di Pisa, parte dalla necessità di ripensare il ruolo dei problemi all'interno dell'insegnamento della matematica. Secondo questo approccio, attraverso l'attività con i problemi, possono essere sviluppate non solo competenze matematiche significative ma anche un atteggiamento positivo nei confronti della matematica, due aspetti correlati fra loro in quanto è anche attraverso lo sviluppo delle competenze di problem solving e dei processi ad esso collegati (comprensione del problema, esplorazione, rappresentazione, argomentazione) che risulta possibile costruire un atteggiamento positivo verso questa disciplina (Di Martino, 2017). Oltre a questi, altri obiettivi generali del progetto riguardano lo

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

sviluppo di una visione della matematica come disciplina di idee e ragionamenti in cui siano favorite e auspicate la collaborazione e la comunicazione, in cui venga dato valore allo spirito critico e in cui venga promosso un adeguato senso di autoefficacia. In generale, dunque, il progetto si basa su una visione *relazionale* della disciplina (in contrapposizione alla visione *strumentale*, nel senso di Skemp, 1976) in cui ragionare sia più importante che ricordare e in cui i processi siano considerati più importanti dei prodotti.

Problemi al centro è un progetto che propone un repertorio di attività significative coerenti con l'approccio metodologico che esplicita. Nel percorso descritto in questo articolo sono state utilizzate gran parte delle attività che il progetto definisce di Livello 1, oltre ad alcune afferenti a livelli più elevati dalle quali l'insegnante ha attinto l'idea di fondo per poi progettare attività adatte alla classe prima primaria.

L'articolo descrive le attività maggiormente significative del percorso didattico svolto in una classe prima primaria dell'Istituto Comprensivo "Scarperia - San Piero a Sieve". Tale percorso ha avuto inizio a novembre 2021 e si è concluso con la fine dell'anno scolastico, nel mese di maggio 2022. Nell'articolo le attività vengono descritte nell'ordine cronologico in cui sono state svolte.

La scuola primaria dell'Istituto in questione ha un modello orario a tempo pieno che prevede dunque quaranta ore settimanali; l'insegnante afferente all'ambito scientifico svolge in classe ventidue ore dedicandosi all'insegnamento di matematica, scienze, tecnologia e geografia. In due delle suddette ventidue ore è prevista una compresenza fra l'insegnante di lingua e quella di matematica: in questo modo è possibile dividere la classe in due gruppi che lavorano separatamente oppure lavorare con l'intero gruppo alla presenza simultanea delle due maestre (entrambe modalità molto utili per le attività di tipo laboratoriale, come sono, in questo percorso, anche quelle legate al problem solving). L'insegnante di matematica dedica circa due ore a settimana al problem solving (a seconda dell'attività proposta, talvolta le ore di compresenza citate sopra) tornando anche più volte, in settimane successive, sullo stesso problema.

2 Introduzione della parola *problema*

La classe prima primaria di cui vengono descritte le attività è composta da 24 alunni, 12 maschi e 12 femmine. Dopo un primo periodo di adattamento degli alunni alla nuova routine scolastica della scuola primaria, si entra nel vivo delle attività didattiche più specifiche delle discipline. In particolare, per quanto riguarda la matematica, gli alunni vengono introdotti alle prime attività di conteggio, di composizione e scomposizione dei numeri, di confronto fra le quantità e, a partire dal mese di novembre, anche alla risoluzione dei problemi.

Come prevede anche il progetto di *Problemi al centro*, al fine di creare un ambiente e delle attività che stimolino il pensiero produttivo, un primo necessario passaggio è legato proprio all'introduzione e al successivo utilizzo della parola *problema*.

La prima attività svolta con gli alunni della classe di cui si riporta l'esperienza è, proprio per i motivi già menzionati, una discussione in merito alla concezione del *problema*: l'insegnante propone una discussione a partire dalla domanda stimolo: «Che cos'è per te un problema?».

La discussione si svolge, in due momenti diversi, con il gruppo classe diviso in due sottogruppi per molteplici motivi. È infatti fondamentale instaurare la pratica del confronto fra pari attraverso la discussione perché permette lo scambio di idee e il riconoscimento del valore delle idee altrui; allo stesso tempo è auspicabile introdurre tale pratica con gradualità in modo che ognuno riesca a esprimere la propria opinione e non si senta inibito dalla presenza di tanti bambini tutti insieme. Gli alunni provengono da sezioni diverse della scuola dell'infanzia, quindi potrebbe essere necessario un po' di

tempo prima che sviluppino un certo grado di confidenza che permetta loro di esprimersi con chiarezza e tranquillità; bisogna inoltre considerare il fatto che ognuno di loro ha abitudini e carattere diversi e può essere più o meno abituato a raccontare quello che pensa davanti a tante persone. Oltre a queste motivazioni, c'è da sottolineare che gli alunni stanno frequentando da poco tempo la scuola primaria, non sono ancora in grado di scrivere in maniera autonoma un testo che preveda un ragionamento lungo e quindi si rende necessario trovare una strategia che permetta di potersi esprimere e argomentare in maniera esaustiva: la discussione orale è uno strumento molto adatto a questo fine. L'introduzione e la pratica regolare della discussione collettiva, inoltre, sviluppa il rispetto del turno di parola altrui e la capacità di ascolto degli alunni.

Le discussioni si svolgono all'interno di quello che l'insegnante di matematica e gli alunni hanno denominato "Laboratorio di matematica": un'aula che non è quella della classe ma una stanza usata durante le compresenze fra le due insegnanti della classe (si veda il par. 1). Entrambe le discussioni sono registrate e vengono qui volutamente riportate le espressioni esatte pronunciate dai bambini anche se non del tutto corrette a livello sintattico o lessicale.

Di seguito una sintesi contenente i passaggi salienti della discussione svolta nel primo gruppo.

Maestra: «Mi potresti fare un esempio [di problema]?»

V.: «Tipo un gessetto che si rompe, quando si rompe un gessetto cerchi di aggiustarlo».

G.: «Oppure un piatto di coccio cade ed è un problema».

V.: «Io volevo dire: un problema molto grande è la guerra perché ci si fanno male tante persone ed è pericolosa, la guerra».

G.: «Bravo! Io non ci avevo pensato a questa cosa!»

M.: «Volevo dirti che un problema, per esempio, è che io di solito quando sbaglio dico: Oh! Ho fatto un problema! Poi la mamma mi aiuta e fine, mi aiuta».

[...]

Maestra: «E poi che cosa succede?»

M.: «Succede che ho rimediato e non c'è più il problema».

H.: «Se cade un bicchiere c'è un problema».

Maestra: «Sì, è vero! Altre idee? G., che cos'è per te un problema?»

G.: «Un problema è tipo quando ti cade un piatto».

[...]

Maestra: «[Rivolta a T. che non è ancora intervenuto] E per te T. che cos'è un problema?»

T.: «Quando mi cade un gioco la mia mamma lo ripara».

Maestra: «E qual è qui il problema?»

T.: «Che la mia mamma lo aggiusta».

Maestra: «Cioè il problema è quando la mamma aggiusta?»

T.: «Sì».

Maestra: «Chi è d'accordo alzi la mano!»

[Nessuno dei compagni alza la mano].

Maestra: «Il problema è quando la mamma aggiusta?»

M., G. e A.: «No!»

Maestra: «T., loro non sono tanto d'accordo, proviamo a farci dire come mai!»

G.: «È il giocattolo che si rompe. La mamma ha aiutato il giocattolo a rimettersi».

Maestra: «Quindi secondo te il problema fra queste due cose qual è?»

G.: «È il giocattolo che si rompe».

Maestra: «E "la mamma lo aggiusta" che cosa è?»

G.: «Vuol dire che si è rotto e lo aggiusta tipo con la colla, con lo scotch».

Maestra: «T. sei sempre della stessa idea che il problema è quando la mamma aggiusta?»

T.: «Sì».

Maestra: «E invece te C. nell'idea che ha detto lui?»

C.: «Mi è caduto il giocattolo e si è rotto [riferito al problema]».

Maestra: «E "la mamma lo aggiusta" che cosa potrebbe essere?»

C.: «Una cosa felice perché puoi ricontinuare a giocare con quel giocattolo».

A.: «Però secondo me è quando la macchinina casca in terra perché si rompe e quindi bisogna che qualcuno la riaggiusta».

Maestra: «Questa cosa la stavi dicendo a T.? Che il problema è quando cade qualcosa?»

A.: «Sì».

Maestra: «E quando qualcuno lo riaggiusta che cos'è?»

A.: «Praticamente è felicità perché poi puoi rigiocare con quel gioco che si era rotto prima e però poi la sua mamma gliel'ha riaccomodato».

Come è evidente dalla discussione, i bambini faticano a esprimersi in maniera completamente corretta e soprattutto non hanno ancora contezza del concetto di *soluzione*, parola che non viene mai nominata da nessuno (due alunne, C. e A., individuano la soluzione come felicità), addirittura un alunno (T.) confonde il problema con la soluzione e per il momento non si fa influenzare dalle idee degli altri; l'insegnante cerca di non dare risposte preconfezionate né di correggere chi parla, ma di stimolare il confronto.

Quella riportata di seguito invece è la sintesi della discussione avvenuta all'interno del secondo gruppo.

Maestra: «Che cos'è un problema secondo voi?»

D.: «Per me un problema è tipo come la perdita del mio babbo: a casa abbiamo una perdita dei tubi, ogni giorno vanno a controllare e problema vuole dire qualcosa che va storto».

E.: «Un problema è tipo qualcosa che non va nel verso giusto, una cosa che va storta, un tubo intasato: che problema!»

S.: «Oppure se qualcuno ha sbagliato la maestra gli dice: Qual è il problema?»

[...]

C.: «Che le cose non vanno nel verso giusto».

G.: «Una cosa che va male».

Maestra: «Quindi un problema è una cosa che va male?»

E.: «Quando versiamo una cosa non diciamo è un problema ma quando siamo in un posto i genitori ci dicono se è un problema o no».

Maestra: «Quindi ce lo dicono i genitori se è un problema o no?»

E.: «Sì».

C.: «Un problema è che se uno cade dal terrazzo si fa male ed è un bel problema!»

E.: «Se cade dal terrazzo potrebbe anche morire!»

Maestra: «Questo è un problema davvero molto grande; e poi cos'altro potrebbe essere un problema?»

C.: «Pure se picchia in una cosa dura è un bel problema».

[...]

Maestra: «C. per te che cos'è un problema?»

C.: «Secondo me quando io sono triste e sto ferma i miei genitori mi dicono: Qual è il problema?»

[...]

D.: «Ce ne ho un'altra che è: se ti muore il pesce e non dovrebbe è un bel problema!»

E.: «A D. è morta la mantide, meno male che è riuscita in tempo a fare l'uovo!»

[...]

Maestra: «M. che cosa è un problema? Puoi farmi anche un esempio!»

M.: «Un problema è quando usiamo troppa carta igienica e i genitori ci brontolano».

E.: «Quando un bambino vuole stare attaccato all'altro a scuola e poi prende il raffreddore è un po' un problemino perché non può fare la scuola, se un po' di giorni resta a casa poi non impara niente».

S.: «Lo sai che prima io mi sono caduto dietro alla sedia?»

Maestra: «E questo è stato un problema?»

S.: «Eh sì!»

Maestra: «Perché ti potevi fare male?»

S.: «Se sbatti la testa ti fai male».

Anche in questa seconda discussione si notano alcune espressioni non del tutto corrette da parte degli alunni, ma risulta comunque che abbiano chiaro quali potrebbero essere situazioni problematiche, anche molto gravi; interessanti alcuni interventi che esplicitano come il fatto diventi o meno un problema solo se i genitori o gli adulti lo individuano come tale. In questa seconda discussione non è scaturita né la parola né il concetto di *soluzione*.

In generale in entrambe le discussioni è abbastanza evidente che per gli alunni un problema sia legato a situazioni vissute come negative: un malessere, una rottura, una situazione critica. Alcuni alunni intervengono senza bisogno di essere stimolati, altri invece sono sollecitati dall'insegnante a esprimere la loro idea, in ogni caso al termine delle due discussioni tutti gli alunni sono riusciti a intervenire. L'insegnante evita con cura di esprimere giudizi in merito agli interventi degli alunni: questo è uno dei passaggi fondamentali per trasmettere ai bambini che la loro idea non viene giudicata come giusta o sbagliata, che sono liberi di esprimere esattamente quello che pensano: tutti gli interventi sono importanti e necessari. In questo modo si comincia a sviluppare l'abitudine a esprimersi liberamente durante i vari confronti e conseguentemente sarà più semplice per ogni alunno, anche più avanti nel tempo, sentirsi libero di proporre la strategia che ritiene migliore per la risoluzione dei problemi.

2.1 Un mio problema

Quando le discussioni avvengono in gruppi separati è molto importante che i risultati vengano socializzati con l'intero gruppo classe, in modo da rendere partecipi tutti gli alunni delle idee emerse nei due sottogruppi. A tal fine viene svolta l'attività proposta in una *flashcard* (Figura 1) di "Problemi al centro. Matematica senza paura" (Di Martino & Zan, 2019).

Problemi al centro

2/5

DISEGNA UN PROBLEMA

UN MIO PROBLEMA:

COME L'HO RISOLTO:

NOME: _____ CLASSE: _____ DATA: _____

Figura 1. Flashcard "Disegna un problema".

Ogni alunno disegna in autonomia sia un suo problema che la sua risoluzione. In seguito, dopo essersi messi in cerchio, ognuno spiega al gruppo classe quello che ha disegnato, intanto l'insegnante si annota le parole utilizzate dai bambini mentre spiegano i loro disegni.

Non sempre gli alunni riportano gli esempi che hanno precedentemente condiviso durante le discussioni (anche perché l'attività viene svolta dopo alcuni giorni dalle discussioni), molti riportano situazioni diverse, ma questo non desta nessuna preoccupazione negli alunni né tantomeno nell'insegnante, anzi, il fatto che emergano altre situazioni problematiche è positivo proprio nella prospettiva di evitare di incorrere in rigidità rispetto alle situazioni proposte come *problemi*.

Nelle Figure 2a-2d si riportano alcuni protocolli dell'attività, in seguito raccolti e attaccati su un grande cartellone apposto su una parete del corridoio adiacente all'aula.



a «Il gatto mi ha graffiato. La mamma mi ha messo un cerotto».



b «Mi usciva il sangue dal naso. Ho usato un fazzoletto».



c «Mentre giocavo a carte mi sono cadute tutte. Le ho raccattate e ho potuto giocare di nuovo».



d «Mi si è rovesciato il bicchiere a mensa. Ho preso un po' di carta e ho asciugato».

Figura 2a, b, c, d. Esempi di protocolli dell'attività "Un mio problema", spiegati dai bambini a parole.²

2. Le frasi usate dagli alunni per descrivere problema e soluzione disegnati, sono state trascritte dall'insegnante esattamente come pronunciate dagli alunni.

3 Il problema “In palestra”

Un'altra attività significativa del percorso di avvio al problem solving è la proposta del problema “In palestra”, contenuto in una delle *flashcard* (Figura 3) del progetto *Problemi al centro* (Di Martino & Zan, 2019).



Figura 3. Flashcard “In palestra”.

Gli alunni, come per l'attività precedente, non sono ancora in grado di scrivere autonomamente. Questa volta l'insegnante propone l'attività chiamando uno alla volta i bambini nel “Laboratorio di matematica”: dopo essersi seduti comodamente, l'insegnante legge il testo del problema e mostra l'immagine all'alunno, l'alunno risponde oralmente (le risposte vengono registrate e poi trascritte integralmente dall'insegnante).

Si decide di svolgere l'attività individualmente al fine di capire se e quanto i bambini abbiano chiaro il significato del concetto “bastare” (come riporta la domanda «Bastano i cerchi per tutti gli alunni?»), per il momento senza essere influenzati alle idee altrui; successivamente le risposte verranno discusse all'interno del gruppo classe per condividere le strategie utilizzate e stabilire un significato condiviso del verbo “bastare”.

Rispetto alla scelta del problema è interessante sottolineare due aspetti in particolare: nel testo non sono riportate le regole del gioco a cui il problema fa riferimento ma solo il suo nome (“La conquista dell'isola”); il disegno è funzionale alla risoluzione in quanto il dato numerico dei cerchi non è scritto nel testo.

Anche in questo caso l'insegnante evita di intervenire in merito alla correttezza delle risposte, ma cerca di stimolare l'argomentazione chiedendo ulteriori spiegazioni in merito a ciò che gli alunni dicono con domande stimolo come: «Potresti spiegare quello che hai pensato per dare questa risposta?» oppure «Perché hai dato questa risposta? Mi interessa molto capire il tuo ragionamento», senza cercare di indirizzare la risposta dell'alunno.

Analizzando le risposte date dagli alunni si possono fare diverse considerazioni sia in merito alla compren-

sione del testo e della situazione, sia per ciò che riguarda la risposta alla domanda che l'attività propone. Per ciò che concerne la comprensione è sempre importante accertarsi che gli alunni abbiano capito bene il contesto prima di rispondere a una domanda. In questo caso gli alunni dimostrano di avere compreso la situazione, anche se emergono risposte diverse. Gli elementi che favoriscono la comprensione del testo sono: la lettura da parte dell'insegnante e la presenza sulla scheda di un'immagine dedicata funzionale.

Per quanto riguarda le risposte invece emergono situazioni diverse che vengono descritte di seguito, corredate da alcune affermazioni esemplificative pronunciate dai bambini. Alcuni alunni dimostrano di avere chiaro il significato del verbo "bastare" e rispondono che i cerchi bastano:

- G.: «Sì, i cerchi bastano. Due ce ne sono in più».
- D.: «I cerchi bastano perché sono 13 e i bambini sono 11, quindi ci possono giocare tutti».
- F.: «Sì perché sono troppi, i cerchi sono di più e i bambini sono meno».
- S.: «Secondo me non bastano perché li ho contati: guarda! [Conta fino a 13]».
Maestra: «Perché secondo te non bastano? Potresti spiegarmi cosa hai pensato? Mi interessa».
S.: «No, aspetta, forse bastano, sono troppi, li ho contati e i cerchi sono tanti».
Maestra: «E i bambini?»
S.: «I bambini sono pochi. I cerchi sono di più rispetto ai bambini».

Altri alunni hanno chiaro che i bambini sono in numero maggiore rispetto ai cerchi ma quando viene chiesto se i cerchi bastano danno una risposta negativa:

- E.: «I cerchi sono 13».
Maestra: «Bastano?»
E.: «No».
Maestra: «Perché?»
E.: «Perché loro sono 11 e i cerchi sono 13, sono più di 11. Non bastano perché i bambini sono meno».
- T.: «I cerchi non bastano, i cerchi sono più tanti e i bambini sono più pochi».

Alcuni alunni non hanno chiaro che 11 è più piccolo di 13, come C. nel seguente scambio:

- C.: «Non bastano i cerchi perché i bambini sono di più».
Maestra: «E quanti sono i bambini?»
C.: «Aspetta li riconto [conta fino a 11 correttamente]: sono 11, sono di più!»

In questo caso sarà particolarmente importante la socializzazione delle risposte perché contribuirà alla comprensione e al confronto delle quantità.

Infine, alcuni pensano che ci debba essere parità fra il numero dei cerchi e quello dei bambini:

- A.: «No, non bastano. Perché ci mancano altri».
Maestra: «Altri che?»
A.: «Che devi levare dei cerchi».
Maestra: «Perché? Dimmi un po', mi interessa quello che pensi!»
A.: «1, 2, 3, 4... [Conta fino a 13] Devo levare 2 cerchi perché i bambini sono 11».
- L.: «I cerchi sono di più».
Maestra: «E quindi come rispondi alla domanda "Bastano i cerchi"?»
L.: «Io dico di no perché i cerchi sono di più allora leverei alcuni cerchi».

- M.: «No, non bastano perché i cerchi che ha messo la maestra sono 13».
Maestra: «E perché non bastano? Spiegami quello che pensi».
M.: «Perché tutti i bambini devono conquistare un'isola però non deve rimanere un... insomma il gioco è così: per esempio ci sono 10 cerchi e i bambini devono conquistare l'isola, uno rimane fuori e perde. Poi si toglie un altro cerchio e via via si continua. Ma se ci sono 13 altre isole non sono conquistate e tutti i bambini potrebbero stare ma non è così il gioco!»
Maestra: «Allora a questa domanda come risponderesti? Bastano i cerchi per tutti i bambini?»
M.: «No! Cioè bastano, però non bastano per tutti perché ci sono due [cerchi] che non ci entra nessuno!»

Quest'ultima risposta sembra mostrare una sorta di conflitto fra il testo del problema e il gioco "classico" di cui l'alunno ha precedente esperienza; si può ipotizzare pertanto che la comprensione da parte di M. risulti influenzata dalla sua «*conoscenza enciclopedica*, cioè l'insieme generale delle conoscenze che ha sul mondo» (Zan, 2007, p. 62).

La risposta di M. mette anche in luce che esiste un'abitudine a pensare che ci sia un unico modo per fare le cose: quello "giusto"! È una risposta molto importante perché incarna la rigidità di alcuni approcci didattici mentre questo percorso intende proprio scardinare questa visione e proporre agli alunni una visione pluralistica, in cui possano coesistere non solo strategie ma anche soluzioni diverse e come sia importante imparare a condividerle facendosi contaminare dalle idee altrui.

3.1 Approfondimento del problema "In palestra"

Qualche giorno più tardi la classe si reca nell'aula "morbida" per una lezione di educazione motoria (si tratta di un'aula simile a tutte le altre aule del plesso, ma dotata di strumenti per l'attività motoria come materassini, cerchi, clavette, piccole palle morbide; questo ambiente risulta più adatto per i bambini della classe prima primaria rispetto alla palestra che è un ambiente molto grande e dispersivo, una sorta di piccolo palazzetto dello sport, e si trova leggermente distante dal plesso della primaria). L'insegnante chiede agli alunni se si ricordano del problema e se ci sono proposte per cercare di capire se effettivamente i cerchi bastano alla classe per giocare. Diversi alunni propongono, visto che si trovano proprio in una sorta di palestra, di sfruttare la situazione per cercare di rispondere alla domanda usando il materiale a disposizione. Quasi tutti ricordano i dati del problema per cui alcuni bambini vanno a prendere 13 cerchi e li sistemano sul pavimento; 11 alunni si dispongono intorno ai cerchi. Prima di riproporre la domanda l'insegnante introduce una riflessione sui numeri, chiedendo: «11 è più grande o più piccolo di 13?». Quasi tutti rispondono che è più piccolo, ma C. (come si vede dalla sua risposta precedentemente riportata nel par. 3) afferma che invece 11 è più grande. L'insegnante propone di controllare facendo entrare gli 11 bambini dentro ai cerchi sistemati a terra: due cerchi rimangono vuoti (Figura 4).



Figura 4. Alunni nei cerchi.

A questo punto la docente chiede alla classe: «Ci sono più cerchi o più bambini?». Tutti (anche C.) rispondono che ci sono più cerchi. Quindi chiede: «Allora qual è il numero più grande?» e tutti (anche C.) rispondono che 13 è il numero più grande. In questo caso risulta evidente come la manipolazione di materiali abbia favorito l'operazione di confronto tra i due numeri.

Una volta risolta la questione della quantità e appurato che 13 è maggiore di 11, l'insegnante ripropone la domanda del problema e guida una discussione collettiva in cui emergono quasi tutte le posizioni riportate precedentemente, rendendo evidente come gli alunni non siano affatto d'accordo sulla risposta e come il significato della parola "bastare" non sia condiviso. Di seguito uno scambio esemplificativo della discussione:

T.: «Ma come fanno a bastare, i cerchi? Sono più tanti e i bambini sono più pochi».

G.: «Io non sono d'accordo con te! Cioè sono d'accordo, ma non sono d'accordo: i cerchi sono più tanti dei bambini allora ci sono abbastanza cerchi! Ce ne sono anche di più!»

T.: «E allora non bastano perché non sono mica uguali!»

A.: «Ma se i cerchi sono di più vuol dire che ogni bambino può stare in un cerchio, anzi due cerchi rimangono vuoti».

T.: «I cerchi sono troppi!»

C.: «Ma se ci sono due cerchi in più vuol dire che due avanzano! Quindi 11 cerchi bastano per 13 bambini, anzi ne avanzano pure altri 2».

D.: «Ah sì, questo è vero».

L'insegnante a questo punto interviene proponendo una situazione diversa, rovesciando i dati e facendo in modo che i cerchi siano meno dei bambini. Inizia a togliere i cerchi e, via via che li toglie, chiede agli alunni di contare all'indietro a voce alta. Gli 11 bambini che c'erano in partenza rimangono al loro posto senza il cerchio. Rimangono 7 cerchi e 11 bambini (Figura 5).



Figura 5. Alunni nei cerchi rimasti.

Poi ripropone la domanda «Bastano i cerchi per tutti i bambini?». A questo punto tutti rispondono che i cerchi non bastano più. L'insegnante chiede ad alcuni bambini (concentrandosi in particolare su alcuni che non avevano chiaro il significato di "bastare"): «Perché non bastano?». Ecco alcune risposte:

S.: «Perché i cerchi sono meno allora tutti non possono stare nei cerchi».

T.: «I cerchi sono più tanti, non bastano, i bambini sono meno».

M.: «Anche se non sono uguali con i bambini, i cerchi non bastano».

In generale il confronto fra pari e la possibilità di maneggiare materiali, ma anche la messa in scena del problema, sono elementi che contribuiscono alla comprensione della situazione. Molti bambini

che non avevano chiaro il concetto di “bastare” iniziano in questo modo a comprenderlo. È evidente che non può bastare un’unica attività per consolidare il concetto e il significato della parola, perciò, a seguito di questa attività, l’insegnante di matematica ha proposto alla collega di lingua di continuare a stimolare la classe su questo tipo di parole (“bastare”, “avanzare” ecc.).

4 Il problema “Le mollette per il bucato”

L’attività successiva proposta alla classe è ispirata a un’altra *flashcard* del progetto *Problemi al centro* (Di Martino & Zan, 2019), rielaborata dall’insegnante per calibrarla meglio per bambini che stanno frequentando da poco la classe prima primaria. L’idea di partenza, infatti, deriva dalla scheda che è pensata per bambini di seconda o terza primaria (Figura 6).



Figura 6. *Flashcard* “Le mollette per il bucato”.

Avendo ancora difficoltà a leggere autonomamente, l’insegnante sceglie di evitare di proporre un testo e pensa a una situazione che proponga una problematica simile a quella de “Le mollette per il bucato”. Racconta agli alunni che i collaboratori scolastici hanno un grande problema perché non hanno mai abbastanza mollette per stendere i panni ad asciugare. Nasce allora una discussione in merito all’argomento durante la quale i bambini raccontano come vedono stendere i panni (compreso chi dice: «Noi abbiamo l’asciugatrice!»); al termine sono tutti abbastanza d’accordo nel dire che ogni indumento che viene steso ad asciugare deve avere due mollette perché altrimenti il vento potrebbe portarlo via: e allora, come fare se abbiamo a disposizione poche mollette?

A questo punto l’insegnante annuncia che i custodi hanno chiesto l’aiuto della classe perché hanno visto che risolvere i problemi è un’attività a loro molto gradita e hanno lasciato loro il materiale per aiutarli a trovare una strategia da mettere in pratica quando non si hanno abbastanza mollette.

I bambini escono a gruppi di 4 (l’attività viene svolta durante le ore di compresenza con la collega di classe) e si recano nel “Laboratorio di matematica” dove trovano il materiale: 2 panni e 3 mollette, filo per stendere i panni o stendino. Avendo il materiale a disposizione discutono poco e si mettono subito all’opera (Figura 7).



Figura 7. Esempi di strategie trovate da quattro gruppi diversi.

Nella lezione successiva l'insegnante mostra alla LIM i video e le foto di tutte le strategie trovate dai diversi gruppi; gli alunni sono sostanzialmente tutti d'accordo fra loro sulla stessa soluzione: per stendere ad asciugare 2 panni bastano 3 mollette e non è necessario averne 4 (qualcuno nota che è ritornata anche la parola "bastare").

Uno degli obiettivi dell'attività è quello di iniziare a stimolare negli alunni l'idea di poter usare i materiali che abbiamo intorno come strategia valida per confermare o confutare i ragionamenti fatti, aspetto che tornerà utile nel momento in cui inizieranno ad affrontare i problemi davanti a un testo da leggere e un ragionamento da scrivere. È molto importante creare un'abitudine rispetto al fatto di poter utilizzare più di una strategia per provare a risolvere un problema, scrivendo, disegnando o manipolando materiali.

4.1 Approfondimento del problema "Le mollette per il bucato"

Nei giorni successivi l'insegnante, ricordando alla classe l'attività sulle mollette per il bucato, propone una domanda: «Per stendere ad asciugare 4 panni bastano 5 mollette?». Ancora una volta ritorna la parola "bastare", un modo per verificare se un concetto su cui si è precedentemente lavorato è stato recepito e consolidato. La domanda viene scritta alla lavagna e agli alunni, che lavorano a coppie, viene consegnato un foglio per risolvere il problema. Sono liberi di scegliere come risolverlo.

Al termine ogni coppia mostra il risultato e racconta la strategia. Tutte le coppie sono d'accordo nel dire che 5 mollette bastano per tendere 4 panni anche se sono state usate strategie diverse per risolvere il problema. La maggior parte delle coppie ha disegnato (Figura 8).

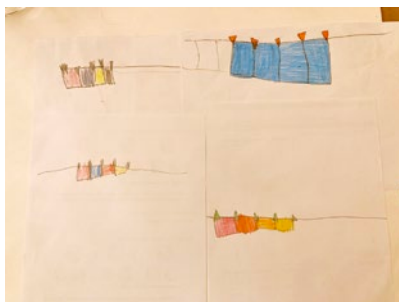


Figura 8. Esempi di protocolli.

Altri sono andati in giro per la classe a cercare del materiale che potesse essere usato come se fossero panni e mollette (Figura 9).



Figura 9. Esempi di lavoro con il materiale trovato in aula.

4.1.1 Dal problema alla regola

Al termine del confronto fra le coppie, l'insegnante chiede se gli alunni si ricordano il motivo per cui hanno svolto quell'attività: la richiesta di aiuto da parte dei custodi.

Un bambino, E., propone di scrivere un messaggio ai custodi per spiegare la loro proposta, l'insegnante si offre di scrivere, ma pone la questione che i custodi avranno sempre più di 3 o 4 panni da stendere quindi propone di cercare di capire se c'è una regola più generale che i custodi possano seguire e suggerisce di fare alcune prove disegnando alla lavagna.

Si parte dalla situazione iniziale, con i primi esempi scritti dall'insegnante (Figura 10): 2 panni da stendere per i quali tutti hanno visto che bastano 3 mollette. Poi procede con la questione successiva già proposta agli alunni in cui tutti sono d'accordo con l'affermare che per 3 panni bastano 4 mollette. Si prova con 4 panni e si vede che bastano 5 mollette.

L'insegnante inizia a chiamare gli alunni e li invita a disegnare via via la situazione successiva alla lavagna: si prosegue quindi con 5 panni, l'alunno che si è proposto per rispondere prova ad anticipare che forse bastano 6 mollette. Si prosegue con disegni e proposte fino ad arrivare a 10 panni e 11 mollette (Figura 11).



Figura 10. Lavoro alla lavagna, primi esempi dell'insegnante.

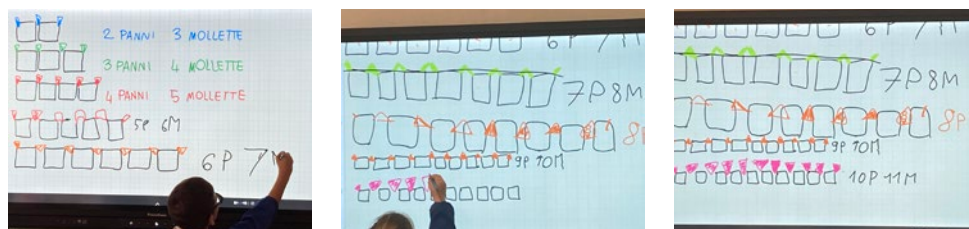


Figure 11. Lavoro alla lavagna portato avanti dagli alunni.

A questo punto A. esclama: «Ma allora scusate forse basta contare i panni e poi contare le mollette che devono essere una di più!». E. risponde «Eh, mi pare anche a me!»; la classe dimostra di essere d'accordo con questa esternazione quindi l'insegnante riprende l'idea iniziale di E., cioè lasciare un

messaggio alla lavagna per i custodi con la strategia scoperta (Figura 12). La scelta delle parole scritte viene effettuata attraverso una discussione collettiva.

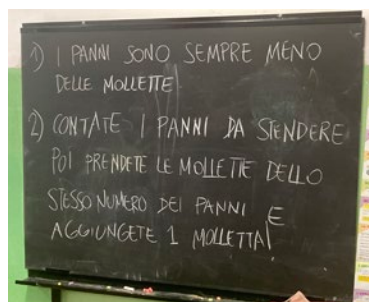


Figura 12. Conclusioni degli alunni in merito al problema delle mollette.

Durante la ricreazione pomeridiana un piccolo gruppo di bambini si ritrova per cercare di andare avanti nella ricerca di risposte provando a disegnare la situazione con numeri crescenti arrivando a 20 panni e 21 mollette e dicendo all'insegnante, una volta rientrati in aula dopo la ricreazione, che la regola viene confermata. Questa volontà di proseguire l'attività, la ricerca di conferme rispetto alla regola individuata, sembra dimostrare che gli alunni, invitati a ragionare su certe situazioni (anche matematiche!), si appassionano alla questione e si sentono stimolati a continuare il ragionamento anche in momenti diversi da quelli preposti dall'insegnante.

5 Il gioco del tiro al bersaglio

Una delle ultime attività di problem solving proposte in questo percorso lega l'attività di conteggio a una situazione ludica: il tiro al bersaglio. Anche questa volta l'idea per l'attività prende spunto da una scheda di *Problemi al centro* (Di Martino & Zan, 2019) che però è pensata per alunni di terza o quarta primaria (Figura 13).



Figura 13. Flashcard "Le freccette".

L'insegnante nuovamente sceglie di riadattarla per la classe prima primaria, e propone agli alunni di realizzare un bersaglio da tenere in aula per giocare al gioco delle freccette (Figura 14). Con un cerchio della palestra viene realizzata la forma su un cartone resistente; poi, sul cartoncino incollato sopra, vengono scritti i punteggi possibili.



Figura 14. Bersaglio realizzato dagli alunni.

Una volta presentato l'artefatto a tutti gli alunni della classe, segue una discussione collettiva guidata dall'insegnante per capire se tutti conoscono il gioco e quali sono le regole per giocare. In particolare, la classe decide il punto dal quale si può tirare, che non si deve superare la linea di tiro quando si esegue il lancio e cosa succede se non si prende il bersaglio. In merito all'ultima regola si distinguono tre proposte: si segnano zero punti; si hanno tre tentativi a disposizione; si hanno tentativi a disposizione finché non si prende il bersaglio. Quest'ultima proposta riscuote maggior successo. Dopo la discussione viene proposto agli alunni di cominciare a giocare lanciando una pallina di carta stagnola (fatta con l'involucro di alcune merende): a turno i bambini si alzano e fanno un tiro; possono giocare anche durante la ricreazione (Figura 15).



Figura 15. Vari momenti del gioco del tiro al bersaglio.

Il giorno successivo la maestra propone di giocare ancora e consegna una scheda (Figura 16) dove si potranno segnare i punti: tutti gli alunni tirano una prima volta (avendo sempre la possibilità di tirare di nuovo se non prendono il bersaglio), poi tirano una seconda volta e, al termine dei due lanci, sommano i punteggi scrivendo il totale nell'ultima colonna.

Oggi abbiamo giocato di nuovo al tiro al bersaglio, questa volta ognuno di noi ha fatto due tiri quindi dopo il secondo tiro dovevamo sommare i due punteggi. Ecco il risultato del gioco.

Nome	Primo tiro	Secondo tiro	Punteggio totale
C.			
T.			
D.			
D.			
C.C.			
A.			
H.			
C.F.			
G.			
C.			
M.			
V.			
E.			
E.			
A.			
E.			
G.			
A.			
S.			
M.			
S.			
G.			
S.			
C.			

Figura 16. Scheda usata per registrare i punteggi.

Nei giorni successivi gli alunni continuano a giocare liberamente durante la ricreazione segnando alla lavagna i punteggi e continuando quindi il lavoro sul calcolo mentale.

Durante la settimana successiva l'insegnante propone di nuovo di giocare tutti insieme e consegna a ogni alunno una tabella strutturata (Figura 17) dove segnare i punteggi, questa volta ognuno tirerà tre volte, e solo dopo il terzo lancio ogni alunno farà la somma del punteggio totale.

Giochiamo ancora! Questa volta ognuno di noi farà 3 tiri

Nome	Primo tiro	Secondo tiro	Terzo tiro	Punteggio totale
C.				
T.				
D.				
D.				
C.C.				
A.				
H.				
C.F.				
G.				
C.				
M.				
V.				
E.				
E.				
A.				
E.				
G.				
A.				
S.				
M.				
S.				
G.				
S.				
C.				

Figura 17. Scheda a tre tiri usata per registrare i punteggi.

Attraverso un'attività ludica gli alunni fanno esperienza di attività concrete in cui c'è bisogno di effettuare un calcolo mentale. La prospettiva, che viene proposta subito dagli alunni stessi, è di continuare a giocare costruendo bersagli con numeri più grandi.

5.1 Dal gioco al problema

L'attività del tiro al bersaglio, oltre che un ottimo esercizio spontaneo di calcolo mentale, risulta anche lo spunto per la proposta di un problema (Figura 18). A questo punto dell'anno (seconda metà del secondo quadrimestre, aprile) gli alunni hanno cominciato già da un po' di tempo a scrivere in maniera abbastanza articolata e si rende quindi possibile proporre una scheda con il testo di un problema e con lo spazio per rispondere per scritto. Il testo viene letto a voce alta dall'insegnante che risponde ad alcune domande degli alunni. Non tutti sembrano avere chiare le richieste del problema, in particolare la domanda «In quanti modi puoi fare 10 punti?».

TIRO AL BERSAGLIO

ALLA SCUOLA DI BOSCOFELICE LA MAESTRA HA PORTATO UN BERSAGLIO E I BAMBINI HANNO GIOCATO TANTE VOLTE!



POI LA MAESTRA HA SCRITTO QUESTA DOMANDA ALLA LAVAGNA:

PUOI TIRARE 3 VOLTE.

IN QUANTI MODI PUOI FARE 10 PUNTI?

AIUTA I BAMBINI DI BOSCOFELICE A RISPONDERE A QUESTA DOMANDA. SE HAI A DISPOSIZIONE 3 TIRI QUANTI SONO I MODI PER SEGNARE 10 PUNTI IN TUTTO?

Figura 18. Scheda del problema inizialmente proposto.

Dall'analisi dei protocolli in effetti emergono diverse difficoltà di comprensione. Alcuni alunni usano numeri che non sono sul bersaglio (Figura 19).

NOI POSSIAMO FARE COSI' NOI
 POSSIAMO FARE CON 2 NUMERI
 10 POSSO FARE COSI'
 10+0+0 E FA DIECI.

Figura 19. Esempio di protocollo: «Noi possiamo fare così noi possiamo fare con 2 numeri. Io posso fare così / $10 + 0 + 0$ e fa dieci». ³

³ Le frasi degli allievi vengono, per scelta, trascritte esattamente così come sono da loro proposti sulla scheda, errori ortografici compresi.

Alcuni usano più di tre addendi (Figura 20).

PER FARE IL NUMERO 10.
DEVI FARE QUESTO RAGIONAMENTO
PER FARE DIECI DEVI AGGIUNGERE
 $1+4+3+2=10$

Figura 20. Esempio di protocollo: «Per fare il numero 10 devi fare questo ragionamento. Per fare dieci devi aggiungere $1+4+3+2=10$ ».

Alcuni alunni comprendono la consegna, trovando però solo alcuni modi per segnare 10 punti con tre tiri, qualcuno sbagliando i calcoli (Figure 21a-21d).

AIUTA I BAMBINI DI BOSCOFELICE A RISPONDERE A QUESTA DOMANDA:
A DISPOSIZIONE 3 TIRI QUANTI SONO I MODI PER SEGNARE TUTTO?

$3+3+4=10$
 $4+3+3=10$
 $3+4+3=10$

- a « $3+3+4=10$
 $4+3+3=10$
 $3+4+3=10$ ».

A DISPOSIZIONE 3 TIRI QUANTI SONO I MODI PER SEGNARE TUTTO?

TIRO UNA VOLTA E DEVO FARE 4
TIRO UN'ALTRA VOLTA E DEVO FARE 4
TIRO L'ULTIMA VOLTA E DEVO FARE 2
 $4+4+2=10$ $3+4+3=10$ $4+3+3=10$

- b «Tiro una volta e devo fare 4
Tiro un'altra volta e devo fare 4
Tiro l'ultima volta e devo fare 2
 $4+4+2=10$ $3+4+3=10$ $4+3+3=10$ ».

IO HO AVUTO LA STRATEGIA
CONTO $4+4$ CHE FA 8. POI AGGIUNGO 3 E ARRIVO A 10. PERÒ, C'È UN'ALTRA E È $4+2+3=10$

- c «Io ho avuto la strategia conto $4+4$ che fa 8 poi aggiungo 3 e arrivo a 10 però ce n'è un'altra e è $4+2+3=10$ ».

IO HO GIÀ UNA IDEA. PERÒ NON SO SE FUNZIONA. IO TIRO FACIO 4 POI 2 POI 4 E ARRIVO A 10. SECONDO VOI È COSÌ PER ME O FATO BENE. ORA VI FACIO VEDERE GLI ALTRI
 $2+4+4=10$ $3+4+4=10$

- d «Io ho già una idea però non so se funziona. Io tiro faccio 4 poi 2 poi 4 e arrivo a 10. Secondo voi è così per me o fatto bene. Ora vi faccio vedere gli altri
 $2+4+4=10$ $3+4+4=10$ ».

Figura 21 a, b, c, d. Esempi di protocolli della scheda «Tiro al bersaglio».

A questo punto l'insegnante prova a rielaborare il testo (Figura 22) per cercare di capire se gran parte delle problematiche siano legate alla trasparenza della richiesta e propone domande graduali.

TIRO AL BERSAGLIO

ALLA SCUOLA DI BOSCOFELICE I BAMBINI HANNO DETTO ALLA MAESTRA CHE LA DOMANDA SUL BERSAGLIO ERA MOLTO DIFFICILE!! ALLORA LE HANNO CHIESTO DI PROVARE A SPIEGARE MEGLIO QUAL ERA LA RICHIESTA



LA MAESTRA HA PENSATO CHE I BAMBINI AVESSERO RAGIONE E HA SCRITTO NUOVE DOMANDE ALLA LAVAGNA.

AIUTA I BAMBINI DI BOSCOFELICE A RISPONDERE. POTREBBERO AVERE BISOGNO DELLE TUE IDEE!

DEVI TIRARE 3 VOLTE

- 1) QUAL È IL PUNTEGGIO MASSIMO CHE SI PUÒ FARE AL GIOCO?

- 2) TROVA UN MODO PER FARE 10

- 3) CE NE SONO ALTRI SECONDO TE?

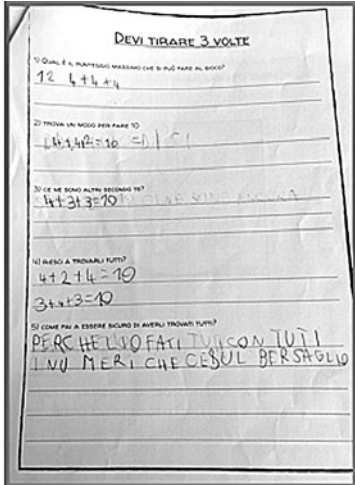
- 4) RIESCI A TROVARLI TUTTI?

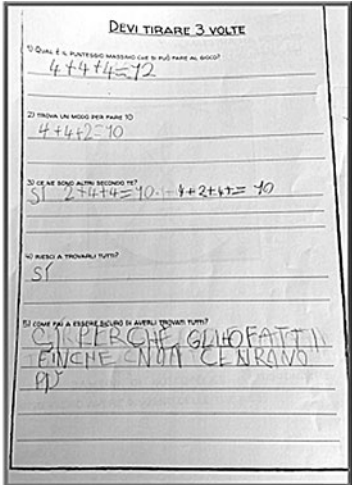
- 5) COME FAI A ESSERE SICURO DI AVERLI TROVATI TUTTI?

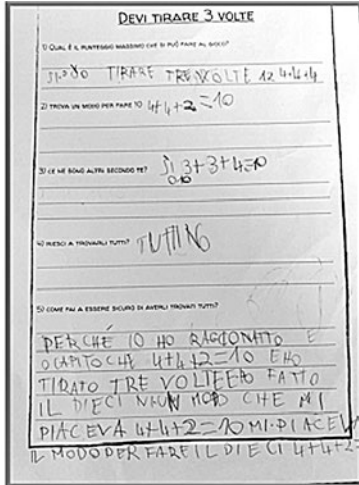
Figura 22. Rielaborazione del problema.

Sebbene il problema risulti più lungo e appaia più complesso, l'analisi dei protocolli mette in luce come, al contrario, la situazione sia diventata più chiara per molti più alunni.

Ci sono diversi alunni che con la domanda precedente avevano avuto difficoltà (per esempio usando numeri diversi da quelli presenti sul bersaglio oppure usando più di tre addendi); dopo la rielaborazione del testo, pur non riuscendo a trovare molte soluzioni, riescono a rimanere centrati sulla richiesta (Figura 23).







- a**

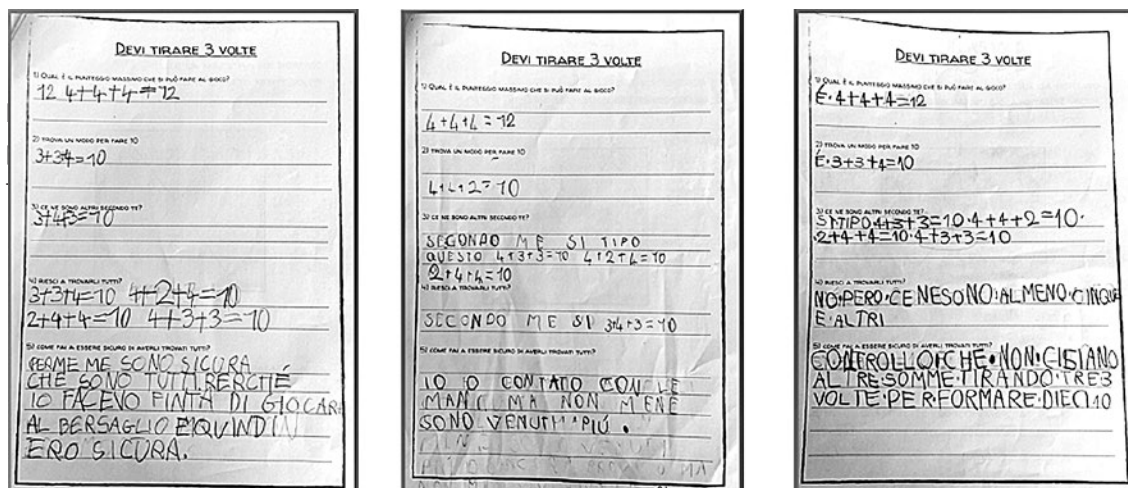
 - «1) $12 / 4 + 4 + 4$;
 - 2) $4 + 4 + 2 = 10$;
 - 3) $4 + 3 + 3 = 10$;
 - 4) $4 + 2 + 4 = 10$
 $3 + 4 + 3 = 10$;
 - 5) Perché li o fatti tutti con tutti i numeri che ce sul bersaglio».

b

 - «1) $4 + 4 + 4 = 12$;
 - 2) $4 + 4 + 2 = 10$;
 - 3) Sì $2 + 4 + 4 = 10$
 $4 + 2 + 4 = 10$;
 - 4) Sì;
 - 5) Sì perché gli ho fatti finché non cenrano più».

c

 - «1) [...] $12 / 4 + 4 + 4$;
 - 2) $4 + 4 + 2 = 10$;
 - 3) Sì $3 + 3 + 4 = 10$;
 - 4) Tutti no;
 - 5) Perché io ho ragionato e o capito che $4 + 4 + 2 = 10$ e ho tirati tre volte e ho fatto il dieci ni un modo che mi piaceva [...]».



a

- «1) $12 / 4 + 4 + 4 = 12$;
2) $3 + 3 + 4 = 10$;
3) $3 + 4 + 3 = 10$;
4) $3 + 3 + 4 = 10$
 $4 + 2 + 4 = 10$
 $2 + 4 + 4 = 10$
 $4 + 3 + 3 = 10$;
5) Perme me sono sicura che sono tutti perché io facevo finta di giocare al bersaglio e quindi ero sicura».

b

- «1) $4 + 4 + 4 = 12$;
2) $4 + 4 + 2 = 10$;
3) Secondo me si tipo
questo $4 + 3 + 3 = 10$
 $4 + 2 + 4 = 10$
 $2 + 4 + 4 = 10$;
4) Secondo me si
 $3 + 4 + 3 = 10$;
5) Io o contato con le mani
ma non mene sono
venuti più».

c

- «1) È $4 + 4 + 4 = 12$;
2) È $3 + 3 + 4 = 10$;
3) Sì tipo $4 + 3 + 3 = 10 /$
 $4 + 4 + 2 = 10 / 2 + 4 +$
 $4 = 10 / 4 + 3 + 3 = 10$;
4) No pero ce ne sono
almeno cinque altri;
5) Contollo che non ci
siano altre somme
tirando tre 3 volte per
formare dieci 10».

Figura 24. Altri protocolli più completi dopo la rielaborazione del problema.

Un'alunna è riuscita a individuare tutte le combinazioni possibili (Figura 25).



Figura 25. Protocollo completo di tutte le sequenze possibili di punti: «1) 12 perché ho fatto così ho messo 4 nelle mani poi ho rimesso 4 e poi ho rimesso 4 e poi altri 4 e sono arrivata a 12; 2) $3 + 3 + 4 = 10$; 3) $4 + 4 + 2 = 10 / 4 + 3 + 3 = 10 / 3 + 4 + 3 = 10 / 2 + 4 + 4 = 10 / 4 + 3 + 3 = 10$; 4) Sì perché lo fatto con le mie mani; 5) Sì perché ho fatto alcuni nuovi e alcuni vecchi e ho anche fatto al contrario».

L'analisi proposta in questo paragrafo sembra quindi corroborare l'assunto che la sintesi dei testi non sia un requisito produttivo per la comprensione del testo, ma al contrario possa portare il problema a risultare più oscuro e meno comprensibile.

Fin qui gli allievi hanno lavorato individualmente, solo al termine della seconda consegna i risultati vengono condivisi e la classe prova a rispondere a ogni domanda usando il vero bersaglio disponibile in aula.

6 Ulteriori attività nel corso dell'anno

Durante il corso degli ultimi mesi di scuola la classe continua a svolgere problemi utilizzando spesso le *flashcard* del progetto *Problemi al centro* (Di Martino & Zan, 2019).

Le attività spesso si svolgono a coppie omogenee dal punto di vista dell'apprendimento, per fare in modo che un alunno non prevarichi sull'altro nella proposta di risoluzione del problema, ma che entrambi i componenti della coppia abbiano la possibilità di dire la propria opinione e di esprimere la propria idea. Accade infatti talvolta che, in coppie eterogenee da questo punto di vista, l'alunno con competenze più fragili o anche solo più timido si lasci trascinare dal compagno e rinunci a proporre una strategia; sarebbe importante invece che nella coppia gli alunni si sentissero tranquilli nella proposta di risoluzione: in questo modo spesso emergono interessanti proposte divergenti ed è possibile constatare, durante la socializzazione delle risposte, che esistono più strategie per rispondere a un unico quesito. L'insegnante interviene "prestando la mano" agli alunni che ne richiedono l'intervento e scrivendo esattamente quello che la coppia dice per la risoluzione del problema.

Di seguito si propone il problema “La collana” (Figura 26) come esempio di ulteriore problema svolto secondo la suddetta modalità.

LA COLLANA

QUI SOTTO È DISEGNATA SOLO UNA PICCOLA PARTE DI UNA COLLANA MOLTO LUNGA.

COLORA DI GIALLO LE STELLINE, DI ROSSO I CERCHI, DI BLU I TRIANGOLI.

DOPO, CONTINUA A DISEGNARE LA COLLANA FINO A UN'ALTRA STELLINA, RISPONDI ALLE DOMANDE E PROVA A SPIEGARE LE TUE RISPOSTE.

A) FILIPPO SOSTIENE CHE AL TREDICESIMO POSTO C'È UNA STELLINA. HA Ragione? _____

B) ERICA DICE CHE AL DICOTTESIMO POSTO CI DEVE ESSERE UN CERCHIO. È vero? _____

C) ELENA, SENZA ALLUNGARE ANCORA DI PIÙ LA COLLANA COL DISEGNO, DICE CHE AL VENTESIMO POSTO CI DEVE ESSERE IL SECONDO DEI TRE TRIANGOLI. È vero? _____

D) SECONDO TE QUALE FIGURA SI TROVERÀ AL VENTIQUATTRESIMO POSTO? _____
RACCONTA COME HAI FATTO PER RISPONDERE. _____

NOME _____ CLASSE _____ DATA _____

Figura 26. Flashcard “La collana”.

Nelle Figure 27-30, vengono riportati con trascrizione i protocolli svolti da alcune coppie.

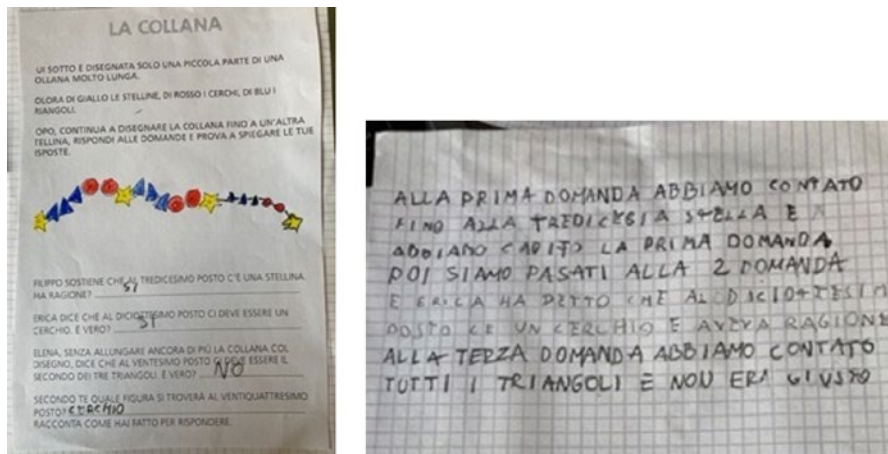


Figura 27. Primo esempio di protocollo "La collana": «Alla prima domanda abbiamo contato fino alla tredicesima stella e abbiamo capito la prima domanda. Poi siamo pasati alla 2 domanda e Erica ha detto che al diciottesimo posto ce un cerchio e aveva ragione. Alla terza domanda abbiamo contato tutti i triangoli e non era giusto».

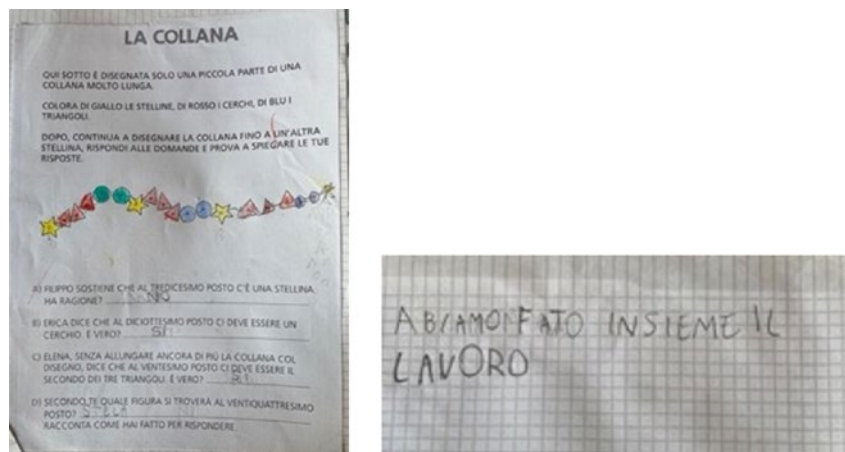


Figura 28. Secondo esempio di protocollo "La collana": «Abbiamo fato insieme il lavoro».

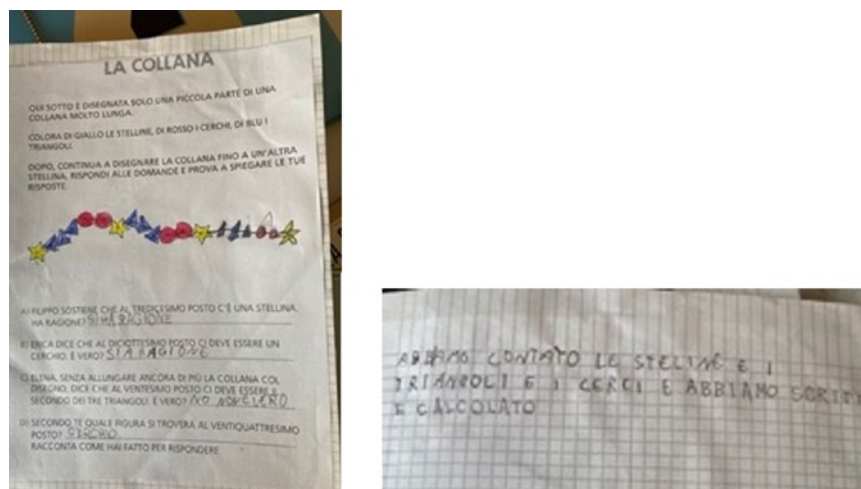


Figura 29. Terzo esempio di protocollo "La collana": «Abbiamo contato le stelline e i triangoli e i cerchi e abbiamo scritto e calcolato».



Figura 30. Quarto esempio di protocollo "La collana": «Abbiamo contato e abbiamo poi immaginato cosa c'era al 24 posto».

Come risulta evidente dai protocolli, e come è immaginabile se gli alunni vengono lasciati liberi di sperimentare ragionamenti, risposte e strategie, non sempre gli alunni sono d'accordo, non tutti arrivano alle stesse conclusioni e inoltre non tutti hanno la stessa capacità argomentativa.

Al termine dell'attività, attraverso la discussione collettiva, ogni coppia viene invitata a raccontare il proprio ragionamento, a leggere le risposte e a descrivere le strategie: è un momento fondamentale non solo dal punto di vista dell'educazione civica ma anche da un punto di vista didattico, perché in questo modo si viene a contatto con idee altrui e ci si apre a punti di vista diversi che non erano stati presi in considerazione e si costruisce il sapere in maniera collettiva. Inoltre, come risulta evidente dalla scheda di sintesi (Figura 31), proprio la discussione stessa può essere un momento in cui si fanno ulteriori scoperte che non erano state messe a fuoco durante il lavoro a coppie: una vera e propria esperienza di costruzione collettiva del sapere. L'insegnante guida la discussione e fa sintesi di ciò che viene detto cercando di condurre alle conclusioni che si intendono raggiungere attraverso un determinato problema o attività. Al termine si appuntano le conclusioni collettive.

Durante la lezione successiva l'insegnante fornisce alla classe una scheda elaborata sulle conclusioni collettive che faccia sintesi sull'attività svolta (Figura 31).

LA COLLANA - SCHEDA DI SINTESI

ABBIAMO LETTO LE NOSTRE RISPOSTE E ABBIAMO DISCUSO INSIEME.

QUESTA È LA SINTESI DELLE NOSTRE CONCLUSIONI:

- **ABBIAMO TROVATO IL RITMO DELLA COLLANA:**
1 STELLA - 3 TRIANGOLI - 2 CERCHI.
- NESSUNO LO AVEVA SCRITTO MA ALCUNI DI NOI L'AVEVANO SCOPERTO E RACCONTATO A VOCE AI COMPAGNI.
- **FILIPPO HA RAGIONE PERCHÉ AL TREDICESIMO POSTO C'È UNA STELLINA, ABBIAMO CONTATO FINO A 13 E ABBIAMO VISTO CHE ERA VERO.**
- **ERICA HA RAGIONE PERCHÉ AL DICOTTESIMO POSTO CI DEVE ESSERE UN CERCHIO; ABBIAMO CONTINUATO LA COLLANA CON IL RITMO SCOPERTO E CONTATO FINO A 18.**
- **ELENA NON HA RAGIONE: AL VENTESIMO POSTO NON C'È IL SECONDO TRIANGOLO. NOI, PER ESSERE SICURI, ABBIAMO DECISO DI CONTINUARE ANCORA IL DISEGNO DELLA COLLANA CHE LA MAESTRA AVEVA FATTO ALLA LAVAGNA E ABBIAMO VISTO CHE C'È IL PRIMO TRIANGOLO.**
- **PER SAPERE COSA C'È AL POSTO 24, SICCOME NON ERAVAMO TUTTI D'ACCORDO, ABBIAMO CONTINUATO ANCORA IL DISEGNO E ABBIAMO VISTO CHE ERA IL CERCHIO.**

DURANTE LA DISCUSSIONE ALCUNI BAMBINI HANNO DETTO CHE PER ARRIVARE A 24 SI POTEVA CONTARE $6 + 6 + 6 + 6$ PERCHÉ CI SONO 6 FORME E POI LE STESSA 6 SI RIPETONO CON LO STESSO RITMO. ANCHE SE NESSUNO LO AVEVA SCRITTO ABBIAMO PENSATO CHE È UN'INFORMAZIONE IMPORTANTE E ABBIAMO DECISO DI SCRIVERLO NELLA SCHEDA DI SINTESI.

Figura 31. Scheda di sintesi elaborata dall'insegnante sulla base della discussione collettiva.

7 Conclusioni

Durante tutto il percorso proposto alla classe prima sono state svolte attività importanti per l'approccio al problem solving. Questo tipo di attività ha avuto un carattere di tipo graduale, partendo dal significato della parola *problema* fino ad arrivare allo svolgimento di attività problematiche più strutturate (e non solo orali) che sono state svolte anche sul quaderno di matematica.

In accordo con le intenzioni del progetto *Problemi al centro*, da cui il percorso descritto trae le attività più significative, è possibile affermare che siano stati raggiunti alcuni importanti obiettivi.

Uno dei propositi fondamentali, soprattutto per una classe prima primaria, riguarda l'atteggiamento degli alunni nei confronti della disciplina: i bambini hanno sempre partecipato con grande entusiasmo alle attività proposte dimostrando più volte anche di portare avanti i ragionamenti in momenti diversi da quelli previsti dall'insegnante (nel par. 4.1.1 viene raccontato di come gli alunni abbiano portato avanti la ricerca della regola durante il tempo della ricreazione, segno evidente di come l'attività avesse stimolato la loro curiosità).

Un altro scopo non meno importante del percorso affrontato è quello di incentivare la collaborazione, la comunicazione e il confronto fra gli alunni. In tutte le attività proposte risulta evidente come la possibilità di cooperare sia fondamentale non solo nel primo momento di ricerca di soluzioni ma anche in un secondo momento in cui tutte le strategie trovate vengono socializzate e diventano patrimonio di tutto il gruppo classe. Questo atteggiamento rende possibile la valorizzazione sia dei risultati parziali sia di tutte le strategie trovate per la risoluzione del problema.

Proponendo situazioni non prettamente legate al numero e vicine all'esperienza degli alunni, è stato possibile inoltre connotare la matematica come una disciplina fatta di idee e ragionamenti, cioè un ambito in cui è necessario esprimere pensieri, fare riflessioni e formulare ipotesi (e verificarne la correttezza). In generale risulta piuttosto evidente l'approccio relazionale che l'insegnante ha applicato nello svolgimento delle attività, dando grande attenzione al ragionamento e quindi al processo piuttosto che al prodotto.

Si può affermare dunque che, attraverso questo percorso, è stato possibile lavorare sul coinvolgimento di tutti gli alunni in quanto tutte le strategie e le soluzioni proposte sono state accolte e considerate sia dall'insegnante che dagli alunni.

L'utilizzo di situazioni realmente ingaggianti, stimolanti e vicine al vissuto degli alunni ha reso possibile il coinvolgimento globale della classe; ogni alunno è stato in grado di fare proposte in merito alle risoluzioni grazie alla libertà di approccio al problema stesso. Un esempio di ciò è la possibilità di utilizzo di materiali vari presenti in classi come si vede in numerose delle attività descritte: "In palestra", "Le mollette per il bucato" e "Tiro al bersaglio"; quest'ultimo inoltre propone anche una situazione realmente ludica.

È possibile affermare, inoltre, che il percorso svolto in questa classe prima primaria abbia stimolato una costruzione collettiva delle conoscenze, un aspetto estremamente importante sia dal punto di vista educativo sia dal punto di vista didattico. Questo è reso possibile in particolare grazie alla socializzazione delle risposte, delle strategie e dei procedimenti, anche quelli parziali, che vengono disseminati all'interno del gruppo diventando così patrimonio anche dei singoli alunni.

In definitiva è stato possibile preparare un terreno fertile per la costruzione del pensiero produttivo tenendosi alla larga dalle stereotipie e dalle abitudini rigide spesso legate allo svolgimento dei problemi nella pratica didattica. Terreno che potrà essere utilizzato nel percorso scolastico successivo di questi allievi per continuare a svolgere attività con un approccio simile, approfondendo maggiormente i contenuti matematici e introducendone di nuovi.

Bibliografia

- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di didattica della matematica*. Pitagora Editrice.
- Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 23–37. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.2>
- Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* [D.M. 254/2012]. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf/1f967360-0ca6-48fb-95e9-c15d49f18831?version=1.0&t=1480418494262
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20–26.
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Recensioni

DdM

Recensioni¹

Antonini, E., Bellotti, L., Bernasconi, L., Cahenzli, F., Chiappini, M., Ielmini, P., Juri, C., & McLeod, P. (2023). *Matematica in natura. Giochi matematici da vivere all'aperto*. Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, SUPSI. <https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/matematica-in-natura/>



Come ben illustra la copertina ed evoca il titolo, questa proposta didattica è pensata per lavorare con le allieve e gli allievi dai 4 ai 10 anni su argomenti matematici immersi in un contesto naturale, utilizzando un approccio ludico e attraverso una metodologia volta all'esplorazione e alla scoperta.

Gli autori, docenti di scuola dell'infanzia e scuola elementare del gruppo *Matematicando*, afferente al Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica della SUPSI, sono accomunati dalla passione per la natura e per la matematica e questo abbinamento, non ancora (purtroppo!) così usuale nelle pratiche didattiche, ha tutti i requisiti per risultare vincente! D'altronde è nota l'importanza per le bambine e i bambini di familiarizzare con la natura che li circonda, favorendo la scoperta, la conoscenza e il rispetto del mondo naturale. Fare dunque matematica in un contesto così ricco e salutare, che incentiva il fare esperienze nuove e originali, utilizzando mani, mente, corpo e tutti i sensi, certamente non può che favorirne anche l'apprendimento. La proposta consiste in una raccolta di 25 giochi, 11 pensati prevalentemente per la scuola dell'infanzia e 14 per la scuola elementare, utilizzabili sia da docenti che desiderano portare la propria sezione o classe all'aperto, ma anche da genitori che scelgono di trascorrere nel bosco una tranquilla domenica pomeriggio.

I materiali che vengono utilizzati per questi giochi si possono trovare facilmente in natura: ghiande, foglie, sassi, legni, ... così da semplificare l'esecuzione durante le uscite. Non serve portarsi dietro nulla, se non le schede del gioco!

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l'autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell'infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

La raccolta è organizzata in modo da avere per ogni gioco una scheda per l'insegnante e una scheda per il bambino. La prima contiene una descrizione per capire lo svolgimento dell'attività, lo scopo, la finalità didattica, gli aspetti disciplinari maggiormente coinvolti, alcuni consigli operativi utili per predisporre e organizzare il gioco e alcune varianti che permettono di sperimentare l'attività in modo diverso, in accordo con le esigenze e l'età delle bambine e dei bambini. La seconda è pensata per essere utilizzata in modo autonomo dalle allieve e dagli allievi più grandi e competenti, così da svolgere l'attività senza necessariamente il supporto o le spiegazioni del docente. Tutto il materiale ha una grafica accattivante, testi corti e semplici con informazioni di base per poter giocare (la modalità di gioco; il tempo indicativo della durata del gioco; i materiali da predisporre; il livello di difficoltà: 1 o 2 foglie). I giochi, da alcuni classici ad altri più originali, permettono di lavorare su competenze disciplinari legate all'ambito numerico, geometrico e di grandezze e misure, ma non solo: l'applicazione di strategie risolutive, la collaborazione tra compagni e la creatività richiesta in alcune attività fa sì che anche le competenze trasversali possano essere sviluppate.

Inoltre, il formato digitale è pensato per essere agevole e pratico per chi vuole utilizzare un tablet oppure una selezione di schede da stampare, senza portarsi dietro necessariamente tutto il libretto.

Matematica in natura vuole essere un ulteriore spunto operativo per gli insegnanti che vogliono sperimentare attività di matematica in contesti alternativi e che vogliono abbattere pareti a volte troppo rigide a favore di un apprendimento meno tradizionale.

Elena Franchini

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

Arrigo, G. (2023). *Insegnare matematica con i concetti fondanti nella scuola primaria*. LS Scuola.



Da docente di liceo trovo sempre stimolante affiancare alla riflessione sulla didattica propria del livello di scolarità di cui mi occupo quotidianamente quella relativa a livelli scolastici precedenti, in particolar modo riferita al livello elementare. Lo stimolo ha diverse origini: la più immediata è che quelli che oggi sono studenti di liceo sono stati studenti delle medie e delle elementari, e dunque vengo pungolato dalla possibilità di sapere cosa hanno vissuto prima di giungere tra le mie grinfie; una seconda origine è meno epidermica e risiede nella convinzione che la didattica della matematica riferita alla scuola elementare consenta di mantenere l'attenzione su quei fondamenti epistemologici (della matematica e della didattica della matematica) che, invece, man mano che si prosegue nei livelli, rischiano di non essere più oggetto di riflessione e approfondimento. Invece ritengo sia importante mantenerli vivi, sia perché la struttura di competenza matematica ha un carattere longitudinale e va vista in continuità, sia perché, come un tennista continua per tutta la carriera ad allenare il dritto e il rovescio, cioè quelli che in gergo vengono chiamati "i fondamentali", così un insegnante trarrebbe giovamento dal continuare a porsi le domande fondamentali che guidano la sua professione: qual è il ruolo dell'insegnamento-apprendimento della matematica nella società odierna? Quali strumenti della ricerca didattica sostengono questo ruolo? Quale modello di competenza è più adatto agli scopi dell'insegnamento-apprendimento della matematica? Come valutare la competenza? Quali scelte didattiche sono più in linea con questi presupposti? E in tutto questo, qual è quindi il ruolo dell'insegnante? Si vede subito che si tratta di questioni potenzialmente inesauribili, come solo sanno essere le domande profonde.

Il libro di Arrigo, uno che di didattica della matematica ne ha masticata e ne mastica parecchia, prende di petto diverse di queste domande, e le affronta saggiamente, equilibrando visioni sintetiche, dall'alto, ad approcci analitici, dal basso. Già nell'introduzione si capisce che il respiro è ampio: si riflette sul senso della scuola odierna in riferimento all'insegnamento della matematica, sulle aspettative dei bambini che entrano nella scuola elementare, e sul ruolo dell'insegnante oggi. Il secondo capitolo propone una utilissima e sintetica rassegna diacronica delle varie fasi della disciplina didattica della matematica, dalla sua nascita a partire dalla seconda metà del XX secolo fino a oggi: si ricorda la stagione delle tassonomie, l'apprendimento per padronanza, e poi dritti verso la nuova didattica, la teoria delle situazioni, gli aspetti legati all'*affect*, le lezioni di Vygotskij... insomma, una chicca. Il terzo capitolo si occupa di chiarire la proposta teorica dei concetti fondanti, intesi come nuclei densi e

imprescindibili della disciplina per un particolare livello di scolarità. Richiamata l'idea teorica, l'autore fornisce una proposta di sistemazione pensata per la scuola elementare in termini di tabelle esplicative di ciascun concetto fondante (espresso in forma di binomio) e mappe esemplificative. I capitoli successivi si occupano di didattica dell'aritmetica, didattica della geometria, educazione al problem solving, didattica della probabilità e della combinatoria: sono il cuore del libro, dove l'insegnante potrà trovare una vera miniera di attività, corredate da riflessioni e da inquadramenti che facilitano la comprensione di come rendere attuabili le idee teoriche dei capitoli precedenti. Infine, l'ultimo doveroso capitolo è dedicato alla valutazione della competenza. Anche in questo caso, l'autore non propone facili ricette. Valutare la competenza matematica non è cosa semplice, ma la ricerca in didattica può venire in aiuto con alcuni strumenti messi a punto negli anni: i compiti di realtà, le produzioni testuali autonome degli studenti (Tep's), le osservazioni a piccoli gruppi...

In conclusione, che dire? Certamente il libro è pensato e scritto per insegnanti in formazione e in servizio e per ricercatori. Propone una visione che deriva da una vita professionale spesa a insegnare, riflettere e far ricerca in didattica della matematica. Introduce temi teorici corredati da esempi d'aula e situazioni didattiche. Affronta numerose criticità della messa in pratica di temi che altrimenti rischierebbero di rimanere sterili idealismi. Insomma: cosa si può volere di più?

Michele Canducci

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

Cameron, P. (2008). *Paura della matematica*. Adelphi.



Diciamolo subito: Peter Cameron non è un matematico, non è un insegnante, non si occupa professionalmente di didattica della matematica. Peter Cameron è uno scrittore. Molto apprezzato per alcuni romanzi di successo (*Un giorno questo dolore ti sarà utile*, *Quella sera dorata*, *Cose che succedono la notte*), esordisce in realtà come scrittore di racconti, genere in cui a mio modesto avviso dà il meglio di sé. Se si è deciso, qui, di recensire un suo libro, lo si deve principalmente al titolo di questa raccolta di racconti, titolo che chiama esplicitamente in causa la disciplina sul cui insegnamento-apprendimento, da anni, questa rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* raccoglie stimoli e contributi. Ma andiamo con ordine. Peter Cameron pubblica nel 1986 una raccolta di racconti, dal titolo *In un modo o nell'altro*, che contiene al suo interno il racconto "Paura della matematica". Nel 2008, Adelphi sceglie di ripubblicare la raccolta, aggiungendovi un racconto inedito, e di intitolarla *Paura della matematica*. Un titolo efficace, che attira l'attenzione, per due motivi: il primo è che non è così usuale trovare, tra gli scaffali di letteratura delle librerie, riferimenti alla matematica (almeno lo era anni fa), e quello che è inusuale, tipicamente, incuriosisce; il secondo è perché se c'è una dimensione emotiva associata alla matematica e, ahimè, esperita da tanti, questa è proprio la paura. La questione è di grande interesse per la didattica della matematica, sia come disciplina di ricerca scientifica, sia come pratica quotidiana degli insegnanti di scuola. Non staremo qui a ricordare quanto i fattori affettivi in generale, e quelli emotivi in particolare, possano influenzare l'apprendimento in matematica e le dinamiche del suo insegnamento (ma chi fosse interessato potrà leggere qualche lavoro di Pietro Di Martino e Rosetta Zan, giusto per citare due tra i maggiori esperti italiani a questo riguardo). Quello che più mi sembra interessante è invece cercare di descrivere i motivi che, dopo aver letto d'un fiato il racconto che dà il titolo alla raccolta, mi hanno portato a pronunciare un sintetico ma eloquente "Wow" e a proporre una recensione per la rivista. Impresa non facile, ma che mi accingerò a provare a fare.

In primis, la prosa narrativa di Cameron ha del magico. Dico davvero: in poche pagine riesce a sporgersi, mantenendo un elegante e misterioso equilibrio tra detto e non detto, fino al cuore di sentimenti complessi, drammi, motivazioni ad agire, interi mondi interiori, e non solo del protagonista della storia, ma anche dei personaggi che gli ruotano attorno. Che /e ruotano attorno, visto che la protagonista del racconto è una giovane donna in cerca di un riscatto e alle prese con un corso estivo di analisi matematica. Il racconto inizia proprio dando questa informazione: l'obbligo di seguire un

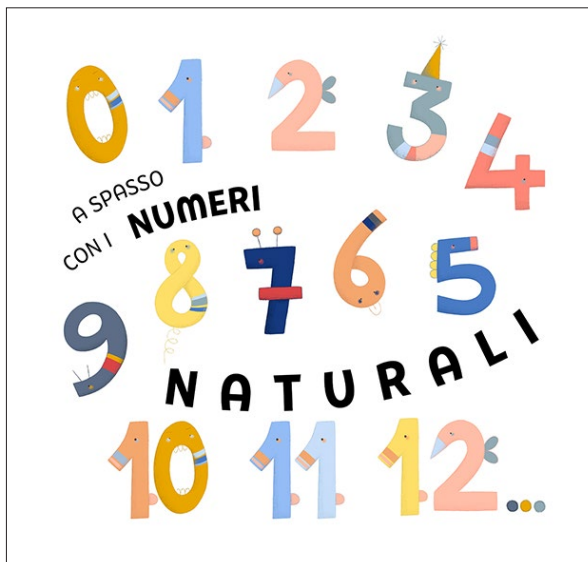
corso di analisi matematica, con esame annesso, come prerequisito per l'iscrizione a un programma universitario autunnale. La protagonista opta per la versione intensiva del corso, della durata di 3 settimane invece di 8, basando la sua scelta «sul principio secondo il quale le cose che ci spaventano di più sono quelle da affrontare e da concludere prima» (p. 33). Il racconto prosegue descrivendo la prima lezione del corso tenuta da un insegnante apparentemente insicuro con il quale, di lì a poche pagine, la protagonista instaurerà una breve relazione didattico-sentimentale: il professore si offre per darle ripetizioni private, e questo funge da sfondo alla loro avventura amorosa. La relazione non durerà molto, ma comunque abbastanza perché i personaggi esprimano alcune idee riguardo alla matematica: l'insegnante pensa che riuscire in matematica sia una questione di genetica, e che il gene della matematica dell'alunna-amante «abbia soltanto bisogno di essere stimolato»; la protagonista, osservando l'insegnante-amante addormentato, ne immagina i sogni, arrivando a concludere che «doveva sognare astratto, quadri freddi come opere di Mondrian». Un cliché: l'insegnante che associa la propensione per la matematica a fattori innati, la studentessa che vede il matematico come un essere appartenente a un mondo di esseri freddi e astratti (sì, perché che cosa, più dei sogni, rivela da cosa è abitato il nostro animo?). Prima dell'esame, i due si lasciano; l'addio avviene a conclusione di una scena magistrale, ambientata durante una sessione di lezioni private: lei è frustrata perché non capisce la spiegazione («qualcosa in quel complesso grafico sul tovagliolo di carta mi dette un senso di depressione») e di lì a pochi istanti comunica la scelta di smettere di vedersi, perché «sente che è una cosa sbagliata». L'insegnante, lungi dall'essere incapace di comprendere i sentimenti umani, risponde smascherando il vero motivo della scelta, e cioè liberarsi di lui. Riporto per intero il paragrafo successivo, a suggello di un transfert perfetto tra paura della matematica e paura della relazione (con un matematico): «Io non risposi e continuai a fissare il gatto; rimanemmo seduti in silenzio per un bel po': mi sentivo come se stessi facendo un grave errore, ma non capivo bene se riguardava l'amore o la matematica. Sentii che con tutta probabilità stavo perdendo su entrambi i fronti» (p. 46).

Il racconto continua, ma io finisco qui, perché mi sembra che sia già possibile chiarire i motivi della mia reazione onomatopeica: non pare anche a voi che dietro a questo parallelismo si celi una verità, magari ovvia, ma su cui ancora non si è riflettuto abbastanza, e cioè che la matematica è un'attività umana, e che in quanto tale possa provocare reazioni emotive che, più che da giudicare, avrebbero bisogno di essere comprese, sviscerate? Voglio dire, se Cameron ci ha costruito un racconto, non sarà forse perché ha riconosciuto che c'è qualcosa, nella disciplina, di analogo all'incontro con una persona, all'incontro con una parte di sé, all'incontro con parti di noi che non vogliamo affrontare, con traumi, vissuti, censure, auto-sabotaggi? Dirò di più, anche se forse sto esagerando, forse mi sto lasciando andare alla facile analogia, ma ormai la frittata è fatta: non pare anche a voi che tutto questo abbia a che fare con il cercare di costruire, così come si cerca di farlo per i rapporti umani, un rapporto sano con la matematica? E che quando non ci si riesce, è perché in fondo si è dominati dalla paura?

Michele Canducci

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2024). *A spasso con i numeri naturali*. RSI Kids e Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica della SUPSI. <https://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/a-spasso-con-i-numeri-naturali/>



Testi delle canzoni: Silvia Demartini & Silvia Sbaragli

Musica, chitarra e voce: Francesco Mariotta

Sonorizzazione: Yuri Ruspini

Giochi: Luca Crivelli, Elena Franchini & Silvia Sbaragli

Illustrazioni: Elanor Burgyan

Grafica: Alessandra David

Produzione: Alessandra Bonzi

I numeri naturali, lo zero, le quattro operazioni: sono argomenti tradizionali che le allieve e gli allievi incontrano già dai primi anni di scuola elementare durante le ore di matematica. Sono, però, molto originali se li pensiamo in una veste diversa, cioè come protagonisti di 9 filastrocche e di altrettante canzoni. Questa è l'ennesima sfida affrontata dal gruppo "italmatico" del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica della SUPSI, che da anni lavora in sinergia dando vita a un connubio ben riuscito tra italiano e matematica; nello specifico, in questo caso, i testi sono stati scritti da Silvia Demartini e Silvia Sbaragli, mentre la messa in musica è opera del cantante-menestrello Francesco Mariotta, che ne ha creato una versione cantata particolarmente efficace e orecchiabile, prodotta da RSI Kids (ascoltabile a questi link: <https://www.matematicando.supsi.ch/iniziative/a-spasso-con-i-numeri-naturali/> e <https://www.rsi.ch/web/podcast/a-spasso-con-i-numeri-naturali/>).

Si può proprio dire che di sfida si tratta, perché esprimere in versi contenuti matematici piuttosto articolati, in modo corretto e rispettoso della disciplina – ma anche della qualità della metrica e del testo in generale –, non sempre è facile né, tantomeno, usuale: dalla ricerca delle parole adatte al contenuto, al loro inserimento nel testo senza trascurare la regolarità delle rime (non scontate e fedeli ai concetti che si vogliono esprimere), gli aspetti di difficoltà sono stati molti, come affermano le autrici, e hanno richiesto un delicato lavoro di affinamento, complesso ma stimolante.

Con *A spasso con i numeri naturali* si sono voluti avvicinare, in modo inedito e non scontato, ragazze e ragazzi del secondo ciclo di scuola elementare fino ai primi anni di scuola media al più intuitivo insieme numerico, quello dei numeri naturali, con i suoi infiniti abitanti e le sue curiose proprietà.

Passando dai concetti di pari e dispari, dalla scoperta delle quattro operazioni fondamentali, con l'annessa terminologia specialistica per parlarne, fino alla conoscenza dello zero (che tanti stimoli ha dato alla letteratura: si pensi ad alcuni testi di Gianni Rodari) e del suo ruolo nel nostro sistema numerico e nelle operazioni. Nelle filastrocche sono presenti parti esplicative di aspetti matematici, ma anche riferimenti alla vita di tutti i giorni, così da rendere più vicini e interagenti i due "mondi".

D'altronde si sa: la trasmissione di argomenti matematici attraverso filastrocche e canzoni ha il vantaggio di stimolare le dimensioni dell'ascolto, dell'attenzione e della memoria, oltre che quello di sollecitare l'interesse, per l'originalità del formato stesso. Ad esempio, introdurre in questo modo la moltiplicazione, in forma di filastrocca cantata, può senz'altro suscitare la curiosità di chi ascolta:

«La moltiplicazione è astuta, sai perché?
Il suo funzionamento un gran portento è.
Quando due numeri qualsiasi vuoi moltiplicare,
un'addizione ripetuta è quel che devi immaginare».

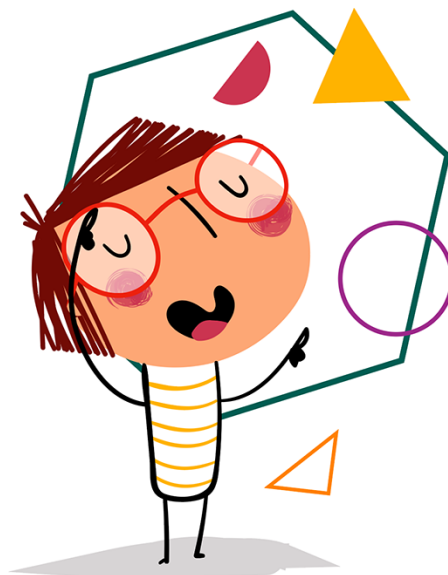
Inoltre, l'utilizzo di questi strumenti è molteplice: si possono proporre come esempi per lavorare con allieve e allievi al fine di produrre analoghe composizioni sugli argomenti matematici trattati (promuovendo la ricerca lessicale e la sperimentazione di strutture sintattiche da inserire nel formato filastrocca, riflettendo sulla lingua oltre che sulla matematica), oppure possono essere semplicemente ascoltate e, di volta in volta, interrotte laddove sia necessario approfondire un verso o una strofa (anche per ripassare i contenuti in esse presentati); l'insegnante può proporre domande-stimolo o richiedere degli esempi che spieghino una situazione descritta nella filastrocca, affrontare semplici problemi suggeriti dalla canzone, oppure chiedere una sorta di parafrasi per esprimere in prosa, o addirittura con modalità e in stile propriamente matematico, i concetti veicolati in forma poetica.

A ogni filastrocca cantata è stato anche associato un gioco (a cura di Luca Crivelli, Elena Franchini e Silvia Sbaragli), così da fornire un'ulteriore attività concreta legata al tema dei versi ascoltati. Una scheda dettagliata spiega lo scopo e il funzionamento del gioco proposto, i materiali che servono per realizzarlo, alcune possibili varianti e, naturalmente, alla fine le soluzioni e le strategie vincenti per affrontarlo. Si tratta di giochi più o meno noti da svolgere anche a coppie o in gruppo, che non richiedono particolari materiali e che prevedono partite piuttosto brevi, così da permettere l'esplorazione di più proposte ludiche con diverse compagne e compagni.

Lorenzo Cosci

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera

Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Pannero, M., & Poretti, C. (2023). *MaMa: matematica per la scuola elementare – Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. <https://mama.edu.ti.ch/>



A Natale del 2023 sono usciti più di 300 materiali del progetto “MaMa – Matematica per la scuola elementare”, dedicati all’ambito di competenza “Geometria”. Questi materiali sono ora disponibili gratuitamente sulla piattaforma <https://mama.edu.ti.ch/>. Per chi è già familiare con la piattaforma, ritrovarsi nella ricerca e nell’esplorazione dei nuovi materiali è semplice, perché l’inserimento dei nuovi materiali segue la stessa struttura di quelli di “Numeri e calcolo”. Tuttavia, salta all’occhio che il filtro corrispondente all’ambito “Geometria”, precedentemente visualizzato in grigio chiaro e non cliccabile, è ora attivo e permette di cercare per argomento pratiche didattiche, giochi e supporti per il docente, oltre a schede didattiche per l’allievo. Non solo la struttura è rimasta invariata, ma anche le intenzioni del progetto sono sempre le stesse: fornire materiali didattici utili ed efficaci per progettare e proporre attività matematiche coinvolgenti e significative in classe, seguendo un approccio laboratoriale e in linea con le indicazioni del Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese (Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022). Inoltre, anche per l’ambito “Geometria” gli allegati di alcune pratiche, giochi e supporti, nonché le schede per l’allievo sono modificabili e personalizzabili facilmente dai docenti, consentendo di adattare le consegne, i testi dei problemi, gli esercizi e le quantità delle illustrazioni per soddisfare le esigenze specifiche degli allievi, mantenendo lo stesso tipo di problema o di esercizio e un layout uniforme. L’insegnante ha così la preziosa possibilità di modificare e personalizzare i materiali che propone rendendoli adatti all’allievo che ha di fronte! Oltre alla ricchezza dei materiali prodotti dal Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica della SUPSI di Locarno, ciò che colpisce maggiormente è l’attenzione rivolta alla conciliazione delle esigenze didattiche degli insegnanti con gli spunti e le riflessioni provenienti dalla ricerca in didattica della matematica. Un occhio attento potrà cogliere e apprezzare queste attenzioni in numerosissimi aspetti, primo tra tutti la decisione di porre la geometria dello spazio e non quella del piano come punto di partenza e di curare il delicato passaggio da spazio a piano e viceversa in tutti i materiali dalla prima alla quinta elementare. Inoltre, viene prestata particolare attenzione alla rappresentazione delle figure geometriche. Come è noto, l’insegnamento e l’apprendimento della geometria presuppongono l’uso delle figure: l’aspetto figu-

rale è indissolubilmente legato a quello concettuale e, negli studenti, i due aspetti devono svilupparsi ed evolversi insieme. Ecco quindi che i materiali “MaMa” attribuiscono alle figure la cura e l’attenzione che meritano, fornendo allo studente figure corrette in quanto realizzate con un software di geometria dinamica, ma anche accattivanti per il pubblico a cui si rivolgono in quanto “mamizzate” dalle grafiche del progetto. Oltre ad essere corrette e belle da vedere, le figure e i collegamenti tra esse sono resi chiari grazie all’attenzione posta nel rispetto delle proporzioni e delle caratteristiche delle figure stesse. Un occhio abituato ad avere a che fare con figure geometriche potrebbe quasi non notare che, per esempio, l’immagine di un cubo sia proporzionata al suo sviluppo, o che le rappresentazioni degli origami, a mano a mano che viene mostrato come piegarli, diventino più piccole; ma un occhio inesperto viene aiutato enormemente da questi dettagli nel creare collegamenti tra rappresentazioni prodotte e nel ricondursi all’esperienza che viene fatta nel mondo reale. Inoltre, le figure sono state realizzate cercando di evitare la formazione di misconcezioni ben note nella ricerca in didattica della matematica: si noti, ad esempio, la scelta di evitare l’uso dell’archetto per indicare l’angolo, sostituendolo con sfumature di colore per rappresentare l’illimitatezza della parte di piano o l’attenzione nel proporre poligoni di diversi tipi, compresi quelli concavi e irregolari, per mostrare la varietà delle figure geometriche ed evitare che per gli allievi i poligoni siano solamente figure convesse e regolari. Colpisce l’attenzione nella cura riposta nelle rappresentazioni bidimensionali di figure tridimensionali che variano da solidi pieni colorati e non colorati, che richiamano i solidi realizzati con il cartoncino, a solidi in cui gli spigoli non visibili sono realizzati con tratteggio per dare l’idea della profondità o agli scheletrati per aiutare la realizzazione degli stessi con stuzzicadenti e plastilina puntando l’attenzione su spigoli e vertici. La cura nella rappresentazione delle figure non riguarda solo l’aspetto grafico, ma anche l’aspetto verbale con cui le figure stesse vengono presentate e descritte: vengono evitati i termini noti in letteratura come “non parole”, ossia le parole-termini che non hanno fondamenta di significato all’interno della matematica come, per esempio, “base” o “lato obliquo”. La ricerca ha infatti mostrato che tali non parole potrebbero limitare una comprensione dinamica della figura, che potrebbe portare a non riconoscere il quadrato quando nessuno dei suoi lati è orizzontale/verticale rispetto ai bordi del foglio. L’uso che si fa del termine base nella lingua comune potrebbe portare a vincolare quel lato all’idea di orizzontalità rendendo opache le relazioni matematiche di parallelismo e perpendicolarità tra lati da cui dipende la natura dei concetti matematici.

L’approccio proposto da questi materiali alla geometria è sintetico e non metrico, concentrandosi sulle proprietà delle figure anziché sulle loro misure. Qui non si trovano quindi i concetti di area e perimetro di figure geometriche o di ampiezza di angoli. Per questa parte bisognerà pazientare ancora qualche tempo: i materiali dell’ambito “Grandezze e misure” sono infatti attualmente in produzione e la loro pubblicazione è prevista entro un anno, e sarà lì che si troveranno tutti gli aspetti metrici.

Si auspica che questi nuovi materiali possano continuare a influenzare le pratiche degli insegnanti e ad arricchire le loro conoscenze disciplinari, contribuendo alla strutturazione di percorsi didattici matematicamente validi, come sta già avvenendo ora con i materiali dell’ambito “Numeri e calcolo” (Sbaragli & Panero, 2024).

Bibliografia

Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport. (2022). Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese. DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>

Sbaragli, S., & Panero, M. (2024). Didactical materials customizable to suit classroom needs: A valuable resource for teachers. *Education Sciences*, 14(5), 449. <https://doi.org/10.3390/educsci14050449>

Carlotta Soldano

Dipartimento di Filosofia e Scienze dell’Educazione
Università degli Studi di Torino, Italia

Zan, R. (2022). *Problemi al centro con Ebix e Ibby*. Giunti Scuola.



Ogni insegnante di matematica sa che non è facile trovare dei bei problemi matematici da proporre alle alunne e agli alunni. Una cosa infatti è predisporre esercizi di allenamento e consolidamento di tecniche, procedure e conoscenze, un'altra è scovare problemi significativi, che possano fornire lo sfondo sul quale innestare la costruzione di apprendimenti profondi. Anche la prima tipologia, quella della ricerca di esercizi su cui far allenare gli studenti, nasconde delle insidie, ma è senza dubbio la seconda tipologia che impensierisce maggiormente i docenti. Lo sa bene Rosetta Zan, già docente di didattica della matematica presso l'Università di Pisa e autrice di questo testo che sembra inserirsi nel solco di una missione ben precisa: dedicarsi, dopo anni di ricerche sul campo e di formazione a insegnanti, alla comunicazione e divulgazione dei risultati di ricerca al grande pubblico. Lo ha già fatto recentemente con il volume *Mio figlio ha paura della matematica*, recensito sempre in questa rivista, che si rivolgeva ai genitori di alunne e alunni con lo scopo di introdurli al complesso tema delle emozioni negative nei confronti della matematica e di esplicitare vari fattori a esse collegati. Lo fa anche con questo bel libro, rivolto questa volta a bambini di età compresa tra i 9 e gli 11 anni, nel quale propone la sua visione riguardo a un altro grande tema della sua ricerca: i problemi di matematica. D'altronde, le due questioni non sono scollegate: impostare una didattica per problemi (veri, però) è uno dei fattori che, se innescati sapientemente, aiutano a costruire un rapporto sano con la matematica; e viceversa, costruire un rapporto sano con la matematica aiuta a viverla in classe come un'attività creativa per affrontare problemi, più che una sterile acquisizione di regole e tecniche.

L'obiettivo di questo volume, dichiarato fin dall'introduzione, è di «offrire ai bambini e alle bambine – e agli adulti che li affiancano – stimoli e occasioni per fare matematica “ragionando”, attraverso problemi e attività che mettono in gioco contenuti significativi e previsti dall'insegnamento nella scuola primaria» (p. 2). Per fare questo, si è scelto di inserire le attività all'interno di uno sfondo narrativo in cui due personaggi immaginari interagiscono direttamente con il lettore, accompagnandolo nelle varie attività: Ebix, Ibby e i loro amici, bambini extraterrestri del pianeta Ux.

Dal punto di vista strutturale il libro è suddiviso in tre sezioni: Numeri, Geometria, e Relazioni, dati e previsioni. Ciascuna di esse si apre con una breve intervista e un gioco, un modo coinvolgente per introdurre il lettore agli argomenti trattati. Segue poi un'analisi dei termini specifici, scaturita dalle domande e dai dubbi di Ebix e Ibby, con un tono leggero e giocoso che rende l'apprendimento più accessibile. Diverse tipologie di pagine arricchiscono poi ogni sezione: le pagine “problemi-storia”

narrano le vicende di un personaggio che ha un obiettivo da raggiungere, incoraggiando il lettore a partecipare offrendo possibili soluzioni. Questo approccio non solo rende il testo più coinvolgente, ma favorisce anche la comprensione, poiché richiama l'esperienza e le conoscenze dei giovani lettori. Si tratta di buoni esempi di quelli che Zan ha chiamato, in altri suoi lavori, "problemi a righe" (Zan, 2016). Le pagine "Rompicap" offrono sfide strutturate per stimolare il pensiero critico e allenare la mente, mentre quelle dedicate ai "Giochi" propongono attività da svolgere in gruppo o in coppia, promuovendo l'interazione sociale e il divertimento condiviso. Infine, nella sezione finale "Cartamodelli", sono inclusi strumenti da ritagliare utili per svolgere alcuni dei giochi o delle attività proposti nel libro.

In ciascuna di queste pagine si può riconoscere l'attenzione e la cura che l'autrice ha messo in ogni parte: attenzione per le parole utilizzate, per gli stimoli inseriti, per le accortezze dedicate agli aspetti affettivi, per la creazione di problemi ricchi, per la produzione di strategie risolutive piuttosto che di risultati. Insomma, è uno di quei libri che fa bene ai bambini, e anche agli adulti che li accompagnano; non perché sia risolutivo dei problemi e delle difficoltà in matematica, anzi: come dicono i due protagonisti alla fine del percorso, «Guardate che con i problemi la cosa più importante è proprio saperli affrontare, poi non è detto che si risolvano» (p. 71).

Bibliografia

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Carocci.

Michele Canducci

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica
SUPSI, Svizzera