Uno studio sulla *concept-image* di nozioni di base dell'analisi non standard

Disponibile anche in inglese

On students' *concept-image* of elementary notions of nonstandard analysis

Mirko Maracci* **e Ambra Marzorati**
*Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia, Italia

Sunto / L'analisi non standard è una riformulazione dell'analisi matematica introdotta negli anni sessanta, che consente di estendere il sistema di numeri reali in modo da includere numeri infinitesimi e infiniti e di conseguenza semplificare, almeno a prima vista, molte nozioni centrali dell'analisi matematica. Da allora sono state formulate varie proposte per introdurre l'insegnamento dell'analisi non standard nelle università e nelle scuole secondarie. Anche se chi promuove tale approccio sostiene che i concetti di analisi non standard siano più vicini all'intuizione e più facili da comprendere e utilizzare, non esiste un corpus di ricerche che confermi queste ipotesi. Questo articolo intende contribuire a questa discussione presentando i risultati preliminari di uno studio pilota sulle *concept-image* degli studenti in analisi non standard.

Parole chiave: Analisi non standard; *concept-image*; scuola secondaria.

Abstract / Nonstandard analysis is a reformulation of mathematical analysis introduced in the 1960s, which allows for extending the system of real numbers so as to include infinitesimal and infinite numbers, and consequently simplify, at least at a first glance, many central notions of elementary calculus. Since then, various proposals have been formulated to introduce the teaching of nonstandard analysis in universities and in upper secondary schools. Even if proponents of such an approach maintain that concepts of nonstandard analysis are closer to intuition and easier to be understood and used, there is not a body of research to support such claims. This paper is meant to contribute to this discussion through reporting on the preliminary results of a pilot-study on student's concept-images in nonstandard analysis.

Keywords: Nonstandard analysis; concept-image; upper secondary school level.

1 Introduzione

L'analisi non standard (NSA) è una rifondazione dell'analisi matematica sviluppata negli anni '60 del XX secolo, dal logico e matematico Abraham Robinson (1965/2013) a partire dall'introduzione di un'estensione non archimedea di $\mathbb{R}$, l'insieme dei *numeri iperreali*, che include *numeri infiniti* e *numeri infinitesimi*; i numeri infiniti, o più brevemente infiniti, sono numeri il cui valore assoluto è maggiore di qualsiasi numero reale positivo e i numeri infinitesimi, o più brevemente infinitesimi, sono numeri il cui valore assoluto è minore di qualsiasi numero reale positivo.
Si parla di estensione dei numeri reali ai numeri iperreali, perché possono essere estese all'insieme dei numeri iperreali le operazioni aritmetiche, la struttura d'ordine e, più in generale, tutte le funzioni definite sui numeri reali, in modo che ogni *proposizione elementare* (*o del primo ordine*)[1] vera nel sistema dei numeri reali sia

1

1. Possiamo dire, seguendo Di Nasso (2003, p. 5), che «una proprietà P è espressa in forma elementare quando è espressa da una formula in cui ogni quantificatore è ristretto ad un insieme. In altre parole, ogni volta che si ha una quantificazione "per ogni x..." oppure "esiste un y...", è necessario specificare all'interno di quali insiemi le variabili x e y stanno variando: "per ogni $x \in A$..." oppure "esiste $y \in B$...". Non è invece ammesso quantificare su sottoinsiemi, cioè formule che contengono espressioni del tipo "per ogni sottoinsieme $X \subseteq A$..." non sono espresse in forma elementare».

vera anche nel sistema dei numeri iperreali e viceversa:[2] per esempio gli assiomi di campo ordinato, ma anche la maggior parte di teoremi riguardanti limiti, derivate e integrali, generalmente insegnati al livello universitario, possono essere espressi in forma elementare e quindi valgono in entrambi i sistemi.[3]

Questo ha interessanti conseguenze: in effetti, all'interno del sistema dei numeri iperreali, alcune definizioni classiche di analisi standard possono essere sostituite con definizioni formalmente "più semplici" o possono essere addirittura evitate; questo, insieme alla possibilità di fare affidamento su definizioni rigorose di infiniti e infinitesimi, consente dimostrazioni "più semplici" di alcuni enunciati classici di analisi matematica (o se vogliamo della loro riformulazione nell'ambito degli iperreali).

Anche per questo, dalla sua introduzione, la NSA ha suscitato l'interesse di logici e matematici sia per le sue possibili applicazioni nella ricerca matematica sia in vista della sua possibile introduzione nei programmi di insegnamento. In effetti, negli anni, in diversi Paesi (e soprattutto negli USA), sono state formulate proposte di insegnamento centrate sulla NSA, prima nelle università e successivamente nelle scuole secondarie (Keisler, 1976a; 1976b; Harnik, 1986; O'Donovan & Kimber, 1996). Recentemente, anche in Italia alcuni, per ora pochi, insegnanti hanno iniziato a proporre un programma di NSA all'interno delle proprie classi.

Alla base di queste proposte didattiche sembra esserci, tra le altre, la convinzione da parte di chi le sostiene che la NSA consenta di definire i concetti centrali dell'analisi matematica in modi più vicini all'*immagine*, alla *concettualizzazione spontanea*, all'*intuizione* degli studenti. Mancano tuttavia studi di ricerca in didattica della matematica che possano confermare la solidità di un tale assunto che va quindi considerato con cautela, problematizzato e sottoposto a una analisi esplicita. Questo articolo riporta i risultati preliminari di uno studio pilota (Marzorati, 2018) condotto, proprio con questo obiettivo, tra gli studenti di alcune scuole italiane che hanno affrontato come parte del curriculum di classe, al posto del tradizionale studio della analisi matematica, lo studio degli iperreali e della NSA.

Prima di presentare lo studio e discuterne i risultati, illustreremo brevemente, nel prossimo paragrafo, le principali caratteristiche comuni alle proposte didattiche che emergono dalla letteratura, nonché i motivi principali documentati in letteratura che portano alla loro adozione, e presenteremo, nel paragrafo successivo, una panoramica degli studi in didattica della matematica inerenti alla NSA.

2. Il sistema di numeri iperreali può essere formalmente introdotto tramite un approccio assiomatico o può essere costruito a partire dal sistema di numeri reali attraverso tecniche sofisticate di teoria dei modelli. Infatti i numeri iperreali possono essere definiti come classi di equivalenza di sequenze arbitrarie di reali, in cui la relazione di equivalenza è definita in termini di ultraprodotti e ultrafiltri (Keisler, 1976b).

3. Vale la pena notare quanto segue. Consideriamo, come esempio, la proprietà archimedea: per ogni coppia di numeri x,y reali positivi esiste un numero naturale n tale che $n \cdot x > y$; questa proprietà può essere estesa agli iperreali, infatti l'enunciato corrispondente – per ogni coppia di numeri x,y *iperreali* positivi esiste un numero *ipernaturale* n tale che $n \cdot x > y$ – è valido nell'insieme degli iperreali; occorre tuttavia notare che in questo caso n è un ipernaturale e non un naturale standard e può in effetti essere un numero infinito. Quindi, anche se formalmente valida per gli iperreali, la proprietà archimedea ha in questo ambito un significato completamente diverso. Questo può accadere in generale: enunciati, che restano formalmente validi, possono mutare in un certo senso di significato nel passaggio da un sistema all'altro.

2 Caratteristiche principali delle proposte didattiche in NSA

Molte proposte di insegnamento della NSA, in Italia e all'estero, si ispirano ai lavori di Keisler (1976a), che hanno giocato un ruolo di primo piano per quel che riguarda la diffusione nelle scuole dell'opera di Robinson (Kleiner, 2001).
In sintesi, diversi autori propongono un approccio assiomatico alla NSA: si assume l'esistenza di un'estensione dei numeri reali, cioè l'esistenza di un insieme di numeri, gli iperreali, che contiene i numeri reali (o meglio una copia isomorfa dell'insieme dei numeri reali), numeri infiniti e infinitesimi, tale per cui ogni funzione reale di n variabili reali è estesa in modo unico a una funzione iperreale di n variabili iperreali e ogni relazione n-aria tra numeri reali è estesa in modo unico a una relazione n-aria tra numeri iperreali (assiomi di estensione) e per il quale vale il *principio* (*o assioma*) *di transfer*.
Il principio di transfer può essere formulato come segue:

> «Principio di transfer (o principio di Leibniz):
> Sia $P(a_1,\ldots,a_n)$ una proprietà degli oggetti standard $a_1,\ldots,a_n$ espressa in *forma elementare*. Allora $P(a_1,\ldots,a_n)$ vale se e solo se la stessa proprietà vale per le corrispondenti estensioni non standard, $[a_1^*,\ldots,a_n^*]$, cioè:
> $$P(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow P(a_1^*,\ldots,a_n^*)»$$
> (Di Nasso, 2003, p.18)

In questo approccio, il problema dell'esistenza o della costruzione dell'insieme degli iperreali non viene affrontato in modo esplicito, come d'altronde non viene affrontato (se non raramente) il problema dell'esistenza o della costruzione dell'insieme dei reali a partire dai razionali; l'insieme dei numeri iperreali viene presentato come un'estensione dell'insieme dei numeri reali, che a sua volta è un'estensione dell'insieme dei numeri razionali, che è un'estensione dei numeri interi… il processo di ampliamento di un insieme numerico con l'introduzione di nuovi "numeri" e il mantenimento di alcune proprietà formali dell'insieme di partenza non è in sé una novità per gli studenti, anche se talvolta è condotto senza essere problematizzato o senza essere accompagnato da una riflessione esplicita.
Per dare maggior concretezza ai numeri infiniti e infinitesimi e facilitare una loro visualizzazione sono frequentemente introdotti, come espediente, strumenti ottici immaginari: il microscopio infinitesimo e il telescopio infinito, che a seconda del fattore di scala (finito, infinito, infinitesimo) possono rendere visibili i numeri iperreali (**Figura 1**).

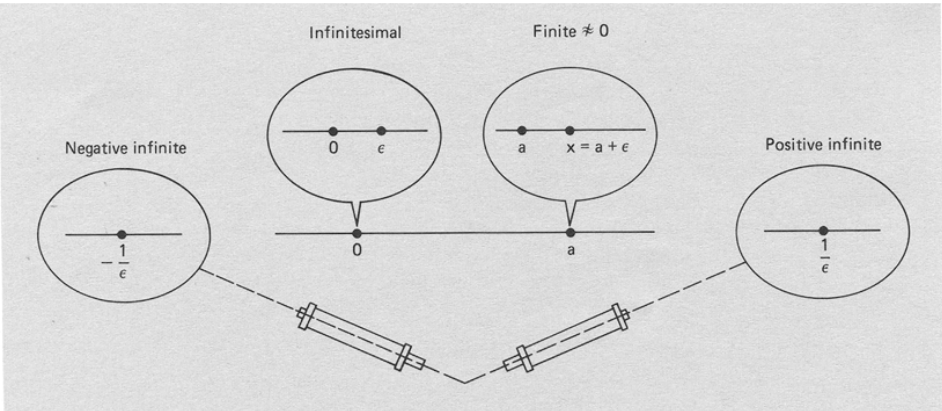

Figura 1
Microscopi infinitesimi con fattore di scala $\frac{1}{\varepsilon}$ centrato in 0 e in un numero reale a e telescopi infiniti puntati su $\frac{1}{\varepsilon}$ e $-\frac{1}{\varepsilon}$ (tratta da Harnik, 1986, p. 45).

Sono centrali in NSA le relazioni di *infinitamente vicino*, di *indistinguibile* e la funzione *parte standard*, perché a partire da queste si possono riformulare in NSA le definizioni delle principali nozioni dell'analisi standard; vediamone le definizioni.

Definizione (*infinitamente vicini*): due numeri si dicono *infinitamente vicini* se e solo se la loro differenza è un infinitesimo.
Definizione (*indistinguibili*): due numeri iperreali si dicono *indistinguibili* se e solo se il loro rapporto è infinitamente vicino a 1.

Si tratta di due relazioni d'equivalenza. I termini utilizzati *infinitamente vicino* e *indistinguibile* possono evocare significati intuitivi molto vicini tra loro, ma le due nozioni non coincidono. Ad esempio, se ε è un infinitesimo, ε e ε^2 sono due infinitesimi e dunque infinitamente vicini ma non indistinguibili (il loro rapporto non è infinitamente vicino a 1), e d'altra parte se M è un numero infinito e a un numero finito non infinitesimo, $M+a$ e M non sono infinitamente vicini ma sono invece indistinguibili.
Per quel che riguarda la relazione *infinitamente vicini*, è possibile dimostrare che dato un numero iperreale finito esiste ed è unico un numero reale infinitamente vicino a esso. Questo consente di definire la parte standard di un numero iperreale finito.

Definizione (*parte standard*)*:* definiamo *parte standard di un numero iperreale non infinito* l'unico numero reale infinitamente vicino ad esso.

A partire da queste nozioni è possibile definire le nozioni di limite (anche se alcuni insegnanti non la presentano, in quanto non strettamente necessaria nello sviluppo della teoria), continuità, derivata e integrale senza ricorrere al formalismo $\varepsilon-\delta$. Ad esempio, se f è una funzione reale di variabile reale, e x_0 è un punto di accumulazione del dominio di f, il limite di f per x che tende a x_0 può essere definito nel modo seguente:

Definizione: diciamo che f ha limite finito per x che tende a x_0, se esiste un numero reale L tale che per ogni numero x infinitamente vicino a x_0 ma diverso da x_0, $f(x)$ è infinitamente vicino a L.

Notiamo, nella definizione, che se x è infinitamente vicino a x_0 allora è un numero iperreale non reale, e dunque le due occorrenze del simbolo f indicano sia una funzione reale di variabile reale sia la sua estensione agli iperreali, e infatti $f(x)$ dovrà essere un numero iperreale altrimenti non potrebbe essere infinitamente vicino a L.
In questa definizione, come avviene abitualmente, per non appesantire la notazione, non si distingue tra funzione reale f e la sua estensione iperreale f^*.
Concludiamo questa breve panoramica sugli aspetti specificamente matematici citando la definizione di retta tangente al grafico di una funzione. In NSA questa viene definita come la retta che passa per due punti infinitamente vicini del grafico di una funzione (**Figura 2**); e viene introdotta contestualmente alla nozione di derivata, definita come la parte standard del coefficiente angolare di tale retta.

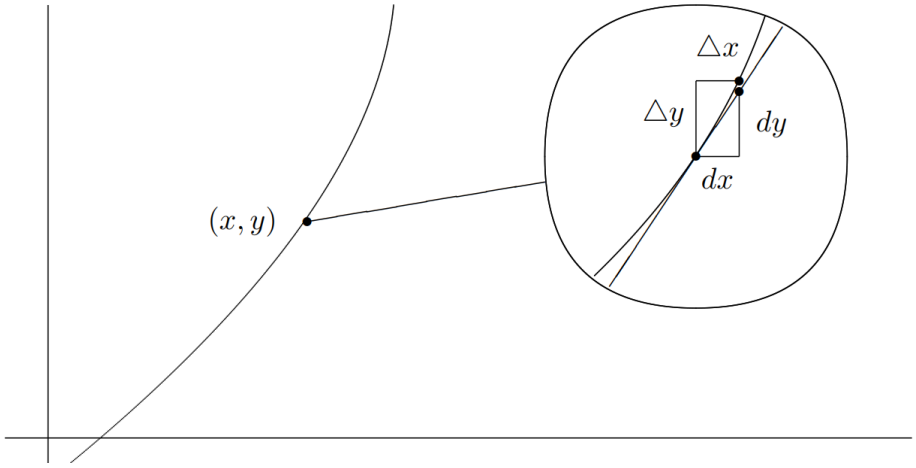

Figura 2
Microscopio infinitesimo con fattore di scala $\frac{1}{dx}$ centrato in (x,y) (tratta da Keisler, 1976b, p. 37).

Una volta introdotta la derivata è possibile enunciare e dimostrare il teorema dell'incremento, che consente di attribuire un significato preciso all'affermazione che la retta tangente al grafico di una funzione in un punto e il grafico stesso sono tra loro indistinguibili (in punti infinitamente vicini al punto di tangenza).

Teorema (*dell'incremento*). Siano f una funzione derivabile e dx un infinitesimo non nullo. Allora esiste un infinitesimo non nullo ε tale che $f(x+dx)-f(x)=f'(x)dx+\varepsilon dx$.

Come avevamo anticipato le definizioni appaiono "più semplici", alleggerite dall'aver abbandonato la formalizzazione usuale e ricorrono a termini come "infinitamente vicino" o "indistinguibili", fortemente evocativi, e allo stesso tempo definiti in modo rigoroso nel quadro della NSA.
Non ci dilunghiamo oltre nella presentazione delle caratteristiche che appaiono comuni nelle proposte di insegnamento della NSA; l'obiettivo era quello di darne una rapida illustrazione per consentire al lettore di farsi un'idea delle ragioni per le quali alcuni docenti hanno adottato questo approccio, e seguire poi la presentazione del nostro studio e la discussione dei risultati. Il lettore interessato ad approfondire questo tema può trovare indicazioni tra i riferimenti bibliografici.

2.1 Le ragioni della scelta di un approccio alla NSA

Keisler (1976a; 1976b) individua tre ragioni principali a favore dell'insegnamento della NSA: fornire agli studenti ulteriori strumenti matematici, rispetto a un approccio tradizionale, per possibili importanti applicazioni per il futuro; rendere centrali nell'impostazione teorica concetti, come quelli di derivata e integrale, più facili da comprendere e da applicare per gli studenti rispetto al concetto di limite; e, soprattutto, introdurre concetti più vicini all'intuizione degli studenti. Si tratta di posizioni generalmente condivise da chi promuove tale approccio. Machover, ad esempio, asserisce: «L'analisi non standard è uno strumento molto potente: rende molti concetti matematici molto più intuitivi; e le dimostrazioni non standard sono spesso più brevi, più facili e più "naturali" rispetto alle loro controparti standard» (Machover, 1993, p. 207, traduzione degli autori).
Harnik evidenzia anche come la NSA, fornendo la possibilità di definirle in modo esplicito e rigoroso, rende preciso e ammissibile in un discorso formale il ricorso a

espressioni quali "infinitamente piccolo" altrimenti utilizzabili solo in modo figurato o metaforico. «A livello di classe, l'importanza principale del contributo di Robinson è che rassicura noi, gli insegnanti, che quando diciamo "infinitesimo" possiamo finalmente affermare di sapere di cosa stiamo parlando» (Harnik, 1986, p. 63, traduzione degli autori).

Infine c'è chi vede nella NSA il coronamento di un percorso storico durato secoli, se non millenni, che conferisce piena riconoscibilità e dignità, dal punto di vista matematico, alle idee di infinitamente piccolo e infinitamente grande che caratterizzano l'analisi matematica rispetto agli altri settori della matematica, e che in quanto tali devono far parte del bagaglio di conoscenze di insegnanti e studenti. «Per oltre due millenni metodi infinitesimali sono stati utilizzati con grande successo da Archimede, Leibniz, Newton, Eulero e Cauchy. L'analisi non standard di Robinson è il culmine, se non una giustificazione, di queste idee» (Kleiner, 2001, p. 172, traduzione degli autori).

Nel corso del nostro studio abbiamo intervistato 5 insegnanti che insegnano NSA da almeno 3 anni, in scuole diverse di diverse città[4] per conoscere, tra le altre cose, le ragioni per le quali hanno scelto tale approccio, quali potenzialità vi vedessero e quali criticità avessero riscontrato. Anche se non intendiamo soffermarci troppo su questo punto, ci sembra interessante rilevare che, per quel che riguarda le ragioni a favore dell'insegnamento della NSA e le potenzialità che gli insegnanti vi scorgono, troviamo piena rispondenza con quanto emerge dalla letteratura. Costituiscono in generale elemento di preoccupazioni l'individuazione di un adeguato livello di rigore nell'introduzione dei numeri iperreali e la necessità di dover introdurre in poco tempo nuove relazioni che gli studenti potrebbero non distinguere facilmente.

Nonostante gli argomenti a favore della NSA sopra menzionati possano apparire ragionevoli, non c'è un corpus di ricerca in didattica della matematica che possa confermare in modo convincente che i concetti di NSA siano più vicini all'intuizione degli studenti (qualunque cosa si intenda per intuizione) dei concetti di analisi standard. Al contrario, la ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento su questo aspetto è piuttosto povera.

3 Ricerche sull'apprendimento degli studenti dei concetti base di analisi non standard

Come accennato sopra, la proposta dell'insegnamento della NSA al posto dell'analisi standard non sembra fino ad ora aver suscitato un grande dibattito nel panorama della ricerca in didattica della matematica.

Costituisce un'eccezione lo studio svolto negli anni '70 da Kathleen Sullivan (1976). In questa ricerca è stato proposto ad alcuni insegnanti con esperienza nell'insegnamento dell'analisi matematica standard di sperimentare un percorso didattico. Lo studio ha coinvolto 68 studenti di 5 diverse scuole. Per valutare i risultati Sullivan ha somministrato un test al gruppo di studenti coinvolto nella sperimentazione e a

4. Verona, liceo delle scienze umane, opzione economico-sociale, NSA da 3 anni; Modena, istituto tecnico industriale, NSA da 7 anni; Morbegno, istituto tecnico per geometri, NSA da 5 anni; Venezia, liceo classico, NSA da 18 anni; Milano, liceo scientifico, NSA da 7 anni.

un gruppo di controllo e ha confrontato le risposte. L'obiettivo del test era studiare le abilità degli studenti di definire e applicare concetti di base di analisi, calcolare limiti, e produrre prove nell'ambito della NSA stabilendo un confronto con l'ambito dell'analisi standard.
Anche se lo studio ha evidenziato alcune differenze interessanti tra le prestazioni dei due gruppi, le conclusioni tratte sono state piuttosto caute: da un lato, si afferma che la NSA può rappresentare un valido approccio alternativo all'insegnamento dell'analisi; dall'altro si sottolinea che la NSA non può essere considerata un modo per semplificare l'analisi – «non si tratta di "analisi resa facile"» (Sullivan, 1976, p. 375, traduzione degli autori). In particolare, nessun risultato sembra supportare la conclusione che i concetti della NSA siano più intuitivi di quelli dell'analisi.
Se consideriamo d'altro canto la letteratura relativa all'analisi standard, possiamo osservare come alcuni studi rivelino che gli studenti possano sviluppare intuizioni o idee apparentemente simili o in linea con concetti di analisi non standard. Questo può accadere ad esempio con il concetto di limite, quando gli studenti sono esposti all'uso continuo di espressioni quali "rendere una variabile arbitrariamente piccola" o "arbitrariamente grande" (Tall, 1990; Cornu, 1991). Tuttavia si tratta spesso di somiglianze solo superficiali; Tall infatti osserva: «anche se l'uso informale degli infinitesimi può sembrare più vicino all'analisi non standard, le convinzioni spontanee degli studenti sono spesso incoerenti anche con la teoria non standard» (Tall, 1993, p. 18, traduzione degli autori).
Un'eccezione interessante è rappresentata da Sarah, studentessa universitaria, che, nel contesto di un'indagine sulle concezioni degli studenti in analisi standard (Ely, 2010), ha mostrato di avere sviluppato un sistema di concezioni apparentemente coerenti con la formalizzazione non standard delle stesse: «solide concezioni della linea di numeri reali che includono quantità e distanze infinitesime e infinite» (Ely, 2010, p. 117, traduzione degli autori).

4 Il nostro progetto di ricerca

Questo articolo, lo ricordiamo, riporta i risultati di uno studio pilota il cui obiettivo principale è quello di indagare le concezioni[5] degli studenti in NSA per discutere, eventualmente confermare o respingere, l'affermazione secondo cui i concetti di NSA siano più vicini all'intuizione o alla concettualizzazione spontanea degli allievi. L'obiettivo dello studio è quindi di natura molto aperta ed esplorativa; d'altra parte il numero esiguo di studi in letteratura su questo tema non ha permesso di assumere un punto di vista meglio delineato e focalizzato.
Per preservare il carattere esplorativo e l'apertura del nostro studio, abbiamo deciso di inquadrarlo all'interno della teoria generale su *concept-image* e *concept-definition* elaborata da Tall e Vinner (1981) e ampiamente diffusa nella ricerca in didattica della matematica.

5

5. Utilizziamo nell'articolo il termine concezione secondo un'accezione comune in didattica della matematica (Artigue, 1991) per riferirci all'esistenza di una pluralità di punti di vista diversi su uno stesso oggetto matematico e distinguere la maggior o minor adeguatezza di questi punti di vista per la risoluzione di una data classe di problemi.

4.1 *Concept-image* e *concept-definition*

In ambito didattico è ampiamente riconosciuta la necessità di distinguere la definizione di una nozione all'interno di un sistema di conoscenze esplicite dal significato personale che a tale nozione viene assegnato da un individuo, esiste su questo una vasta letteratura. Nell'ambito della ricerca in didattica della matematica un riferimento classico è quello ai lavori di Tall e Vinner che propongono di distinguere tra *concept-definition* e *concept-image*.

L'espressione *concept-image* è introdotta per tener conto della dimensione non verbale, costituita da rappresentazioni visive, impressioni, esperienze, associata nella mente di un individuo alla definizione di un concetto. L'espressione *concept-image* descrive dunque «la struttura cognitiva associata ad un concetto, che include tutte le immagini mentali, le proprietà associate e i processi» (Tall & Vinner, 1981, p. 152, traduzione degli autori).

La *concept-image* si può modificare, evolve nel tempo man mano che lo studente acquisisce nuove informazioni e non costituisce necessariamente una struttura coerente: aspetti diversi, eventualmente tra loro incoerenti, possono emergere in momenti o situazioni differenti.

L'espressione *concept-definition* indica invece un'entità linguistica: una parola o una combinazione di parole e simboli usata per specificare quel determinato concetto (Tall & Vinner, 1981). Può essere formale o personale e può variare di volta in volta.

Concept-definition e *concept-image* dovrebbero idealmente interagire in sinergia nella soluzione di problemi, come ad esempio schematizzato in Figura 3. Nella figura, *concept-definition* e *concept-image* relative a una stessa nozione sono schematizzate da due celle distinte, le frecce indicano che, in questo caso, il processo di risoluzione del problema inizia con il ricorso alla *concept-definition* sollecitato direttamente nell'interpretazione della consegna, si sviluppa attraverso l'interazione tra *concept-definition* e *concept-image* e conduce a una risposta controllata in ultima istanza ancora dalla *concept-definition*.

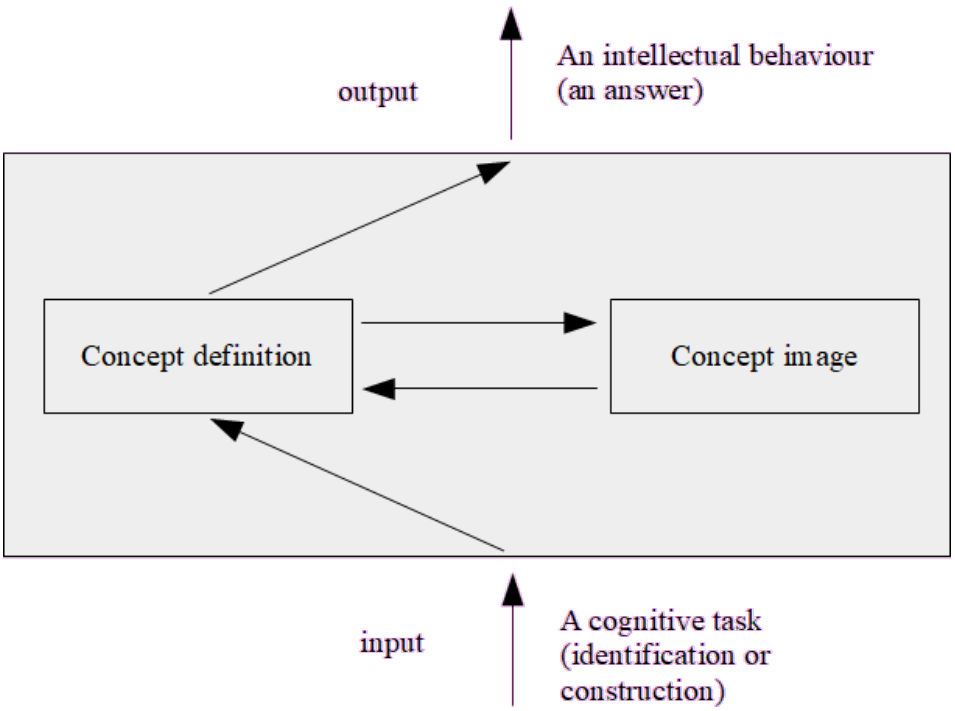

Figura 3
Interazione ideale tra *concept-image* e *concept-definition* (tratta da Vinner, 1991, p. 71).

La situazione schematizzata è ideale; in generale la dinamica tra *concept-image* e *concept-definition* può assumere forme diverse a seconda della situazione. Ad esempio un individuo può attingere alla sola *concept-definition* quando deve produrre una definizione esplicita di un concetto, o attingere alla sola *concept-image* quando una definizione non è richiesta. È il caso, ad esempio, delle risposte intuitive, in cui l'allievo risolve un problema o risponde a una domanda senza consultare la *concept-definition* (Figura 4).

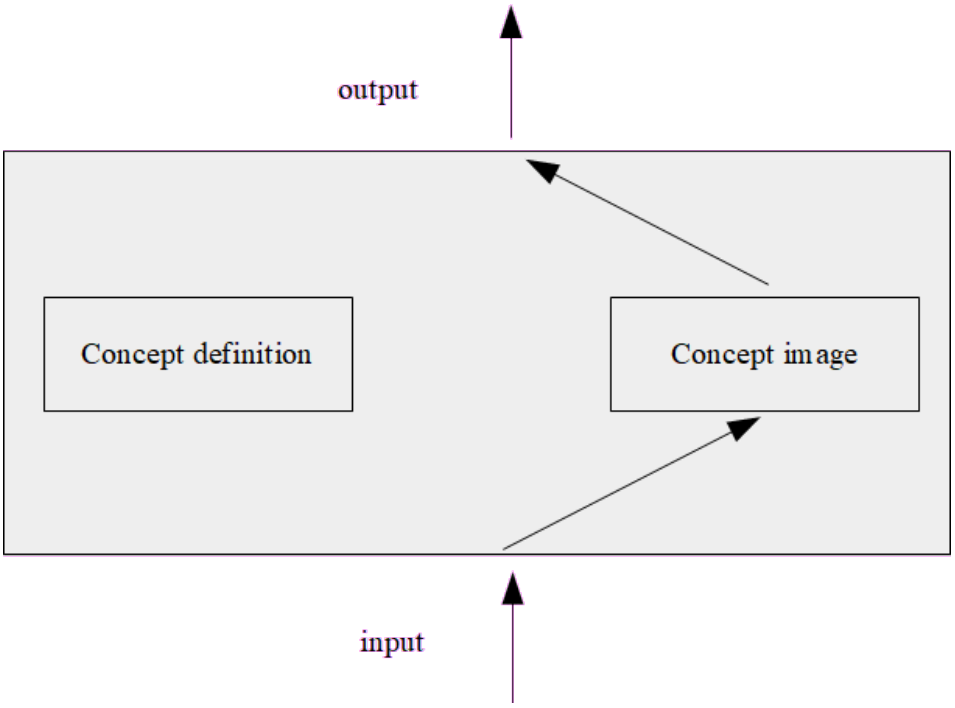

Figura 4
Mancata interazione tra *concept-image* e *concept-definition* nel caso di risposta intuitiva (tratta da Vinner, 1991, p. 73).

Questo non significa che la risposta intuitiva sia necessariamente sbagliata, ma solo che non è sottoposta al controllo esplicito della definizione dei concetti in gioco. I problemi sorgono quando la *concept-image* include aspetti non coerenti con la teoria matematica di riferimento e *concept-image* e *concept-definition* entrano in conflitto tra loro.

4.2 Contesto dello studio e partecipanti

Lo studio si è svolto nel corso dell'anno scolastico 2017/2018 e ha coinvolto 76 studenti di 4 diverse classi di 2 scuole secondarie di secondo grado[6]: una terza, una quarta e una quinta di un liceo delle scienze umane ad indirizzo economico-sociale di Verona e una quarta di un istituto tecnico industriale (perito elettronico) di Modena. Gli studenti delle classi terza e quarta di Verona hanno seguito nel corso dell'anno un percorso di introduzione all'insieme dei numeri iperreali; quelli della classe quinta di Verona hanno visto l'introduzione dei numeri iperreali in uno degli anni precedenti e nel corso dell'anno scolastico 2017/2018 hanno seguito un percorso di NSA che prevedeva l'introduzione dei concetti centrali della teoria; gli studenti della classe quarta

6

6. La scuola secondaria di secondo grado italiana corrisponde al quarto anno di scuola media e alla scuola media superiore del Canton Ticino.

di Modena hanno seguito nel corso dell'anno scolastico 2017/2018 un percorso che a partire dall'introduzione ai numeri iperreali è arrivato a trattare i concetti centrali di NSA, tutto in un unico anno scolastico. Questi percorsi, svolti come parte integrante dell'attività curriculare, sono stati progettati e realizzati dall'insegnante della classe. Al termine dell'anno scolastico abbiamo proposto agli studenti un questionario da svolgere in 45 minuti che descriviamo nel prossimo paragrafo.

4.3 I questionari: struttura generale e quesiti

In questo articolo presentiamo e discutiamo i risultati raccolti tramite questionari che sono stati proposti ai 76 studenti coinvolti nello studio. Dato che gli studenti hanno svolto percorsi didattici differenti che, per via anche del diverso livello scolare, hanno coperto differenti porzioni del curriculum di NSA, abbiamo deciso di non elaborare un unico questionario, ma di assemblarne 4 diversi, uno per ogni classe coinvolta, a partire però da un unico corpo di quesiti con tratti comuni.
Abbiamo dunque progettato una serie di quesiti, alcuni aperti e altri chiusi, riguardanti diversi aspetti della NSA. Nello specifico, abbiamo individuato diversi aspetti inerenti alla NSA su cui ci sembrava importante indagare le *concept-image* degli studenti.

I. *La natura degli iperreali.* L'obiettivo di questo gruppo di quesiti è indagare se la presentazione esplicita, gli esempi e i problemi introduttivi proposti agli studenti hanno contribuito a creare un efficace contesto di senso per l'introduzione dei numeri iperreali.
II. *Le nozioni di infinitamente vicini, indistinguibili e parte standard.* I quesiti di questo gruppo hanno l'obiettivo di indagare concezioni sulle nozioni di infinitamente vicino, indistinguibile e parte standard.[7]
III. *La struttura d'ordine e la struttura di campo dell'insieme degli iperreali.* Questi quesiti sollecitano le *concept-image* degli studenti in riferimento rispettivamente alla relazione d'ordine, in particolare al confronto tra infinitesimi e tra infiniti, e all'estensione delle operazioni di campo (somma e prodotto) a infinitesimi e infiniti.
IV. *Le nozioni di limite, retta tangente al grafico di una funzione e integrale.* Come abbiamo visto, tra le ragioni a sostegno della NSA c'è la convinzione che le definizioni delle nozioni più importanti dell'analisi risultino più semplici e intuitive e più facili da trattare operativamente; questi quesiti vogliono indagare proprio questo aspetto.

Gli aspetti sopra menzionati sono tra loro intrecciati, abbiamo comunque fatto lo sforzo di elaborare quesiti che coinvolgessero prioritariamente e in modo prominente uno solo di essi, per poter meglio individuare e discutere eventuali criticità.
A partire dai quesiti prodotti, abbiamo dunque assemblato 4 diversi questionari – uno per ciascuna classe coinvolta – in modo da toccare quanti più aspetti possibili e

7. Dal punto di vista didattico pensiamo che l'introduzione troppo ravvicinata di nozioni diverse come quelle di infinitamente vicino e indistinguibile, che formalizzano aspetti che possono apparire molto simili agli studenti, possa generare confusione. Riteniamo inoltre che il concetto di infinitamente vicino possa essere interpretato come "molto vicino", quindi con un significato differente rispetto a quello formale. Secondo questa prospettiva, ad esempio, i numeri 0,0000001 e 0,0000002 possono essere considerati molto vicini, ma non sono infinitamente vicini.

facendo attenzione a inserire quesiti comuni in tutti i questionari. Il numero di quesiti varia da questionario a questionario e va da 11 a 13. La differenza principale tra i questionari riguarda la porzione di curriculum coperta. La formulazione dei quesiti e i questionari completi sono stati sottoposti ai docenti degli studenti coinvolti perché ne valutassero la coerenza con gli argomenti trattati e gli obiettivi didattici dei rispettivi corsi.

Per ciascun quesito, tranne il quesito I.1, che vedremo più avanti, abbiamo chiesto agli studenti di indicare anche il proprio grado di fiducia rispetto alla correttezza della risposta data; gli studenti potevano scegliere tra tre possibili opzioni (**Figura 5**).

Negli esercizi troverai spesso delle faccine affianco alle opzioni di risposta, queste indicano quanto sei certo della risposta data:

Sono molto certo della risposta

Sono abbastanza certo della risposta

Sono piuttosto incerto della risposta

Per ogni risposta indica con una crocetta quella che rappresenta meglio quanto sei certo della risposta data.

Figura 5
Indicatori del grado di fiducia nella correttezza delle risposte ai quesiti.

5 Discussione dei risultati

Dato il suo carattere esplorativo e, comunque, la non omogeneità tra i diversi questionari che rende difficile una sintesi unificante, abbiamo deciso di condurre una analisi di tipo qualitativo; in questa sede ci concentriamo sui quesiti le cui risposte sembrano offrire gli spunti più ricchi e stimolanti.
Per tentare di dare comunque una panoramica, il più possibile completa, andremo a esaminare (almeno) un quesito per ognuno degli aspetti toccati nei questionari: I) la natura degli iperreali; II) le nozioni di *infinitamente vicini*, *indistinguibili*, e *parte standard*; III) la struttura d'ordine e di campo degli iperreali; IV) le nozioni di limite, retta tangente al grafico di una funzione e integrale. I quesiti sono identificati con una etichetta così composta: un numero romano, che indica l'aspetto della NSA con cui il quesito può essere messo in relazione in modo prominente (I, II, III e IV, richiamati sopra); un numero (1, 2, 3…), che serve a distinguere gli uni dagli altri i problemi relativi a quello specifico aspetto; un altro numero (3, 4 o 5) con il quale si indicano le classi alle quali il quesito è stato somministrato (3ª, 4ª o 5ª); una combinazione di lettere che indicano la provincia in cui ha sede l'istituto (MO per Modena, VR per Verona). Nei testi dei questionari forniti agli studenti, i quesiti erano numerati progressivamente.

5.1 Sulla natura degli iperreali e perché sono introdotti

Nel quesito I.1 (Figura 6), presente in tutti i questionari, chiediamo agli studenti di esplicitare perché secondo loro vengono definiti i numeri iperreali. Se consideriamo gli oggetti matematici come strumenti concettuali definiti per particolari scopi (ad esempio, per risolvere problemi teorici o pratici), comprendere la natura degli oggetti matematici richiede anche avere un'idea dei contesti problematici che questi aiutano ad affrontare. Con questo quesito abbiamo quindi voluto indagare il senso che gli studenti hanno attribuito alla loro attività con i numeri iperreali: tali attività e i problemi che hanno affrontato sono sufficienti a offrire agli studenti un contesto di senso per questi nuovi numeri? Se non quello proposto, quale contesto di senso è stato attribuito dagli studenti ai numeri iperreali? Data la natura del quesito non ci sembra aver senso una classificazione delle risposte in corrette o errate. Inoltre, la richiesta di indicare il proprio grado di fiducia ci è sembrata da un lato poco significativa e dall'altro una possibile fonte di disorientamento per gli studenti.

Quesito N°1 Perché si introducono i numeri iperreali?

Indica quanto sei d'accordo con le seguenti motivazioni.

1: completamente in disaccordo

2: abbastanza in disaccordo

3: indifferente

4: abbastanza d'accordo

5: completamente d'accordo

	1	2	3	4	5
Sulla retta ci sono punti che non corrispondono ad alcun numero reale, quindi introduciamo i numeri iperreali per riempire questi spazi					
I numeri iperreali vengono introdotti per risolvere alcuni problemi pratici, come la tangente ad una parabola, o la velocità istantanea					
I numeri iperreali vengono introdotti per poter identificare quantità molto grandi e quantità molto piccole					
I numeri iperreali vengono introdotti per giustificare il postulato di Eudosso – Archimede					
I numeri iperreali sono numeri fittizi che vengono introdotti per risolvere problemi che verranno studiati in futuro					

Ti vengono in mente altre motivazioni?

Figura 6
Quesito I.1 – 3VR, 4VR, 5VR, 4MO.

Il quadro generale che emerge dalle risposte è molto articolato, ma è possibile comunque individuare indicazioni interessanti. Focalizziamo la nostra analisi sulla prima, terza e quarta affermazione (che indichiamo con A, C e D), che sono proprio quelle che più direttamente riguardano il passaggio dai reali agli iperreali.[8]

8. Le tabelle complete con le percentuali di scelta per ciascuna affermazione di questo quesito e di altri, per i quali non inseriremo i dati completi nel corpo dell'articolo, si trovano nell'Allegato 1.

Nella **Tabella 1** sono mostrate le percentuali di risposte degli studenti a queste affermazioni: abbiamo accorpato le risposte "abbastanza d'accordo" e "completamente d'accordo" da un lato, e "completamente in disaccordo" e "abbastanza in disaccordo" dall'altro; non sono riportate in questa tabella le percentuali delle mancate risposte e delle scelte dell'opzione "indifferente".

Affermazione	Livello di accordo	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)	5VR (13)
A	Accordo (4,5)	62,5%	66,67%	38,89%	23,08%
	Disaccordo (1,2)	8,33%	4,76%	44,44%	61,54%
C	Accordo (4,5)	79,17%	80,95%	61,11%	100%
	Disaccordo (1,2)	8,33%	19,05%	22,22%	0%
D	Accordo (4,5)	25%	19,05%	27,78%	38,46%
	Disaccordo (1,2)	58,33%	61,90%	44,44%	23,08%

Tabella 1
Percentuali risposte quesito I.1.

Come si vede, pur con importanti differenze tra le classi, una percentuale molto alta di studenti è d'accordo o completamente d'accordo con l'affermazione C, secondo la quale i numeri iperreali vengono introdotti per definire quantità grandi e piccole. Questo risultato non è di immediata interpretazione dato che non sappiamo il senso che gli studenti hanno attribuito all'espressione "identificare quantità", che può da un lato evocare contesti e situazioni concreti e dall'altro essere usata in modo metaforico in contesti anche molto astratti; tuttavia, l'elevata percentuale di accordo segnala indubbiamente una criticità rispetto a come sono introdotti i numeri iperreali. Tali criticità emergono con ancora maggior forza se si considerano le risposte alle altre affermazioni. In particolare è da notare la forte differenza di risposte tra gli studenti delle 4 classi: da un lato gli studenti di 3VR e 4VR, dove l'introduzione degli iperreali è più recente, e dall'altro gli studenti di 4MO e 5VR, dove l'insegnamento della NSA è avviato da maggior tempo e l'introduzione degli iperreali più lontana nel tempo. Questa differenza sembra suggerire la possibilità che proprio l'introduzione dei numeri iperreali metta in crisi, almeno nell'immediato, il ruolo della retta geometrica come possibile modello dell'insieme dei numeri reali.
Infine, anche se non è altissima la percentuale di coloro che sembrano credere che l'introduzione dei numeri iperreali serva a giustificare la proprietà archimedea dei reali, appare comunque significativa la posizione degli studenti relativamente all'affermazione D: essa sembra testimoniare un marcato disorientamento e una scarsa consapevolezza da parte di più di un quarto degli studenti riguardo alle proprietà fondamentali di reali e iperreali e delle motivazioni che conducono a introdurre questi ultimi. Se consideriamo poi solo le classi 3VR, 4VR e 5VR che hanno avuto lo stesso insegnante, possiamo notare che questo straniamento sembra più diffuso tra gli studenti di quinta i quali da un lato sono quelli per i quali l'introduzione degli iperreali è più distante nel tempo ma dall'altro sono anche coloro che da più tempo lavorano con questo sistema numerico.
In sintesi, ci sembra di poter concludere che la maggior parte degli studenti consideri

inadeguato il sistema di numeri reali per trattare quantità grandi o piccole o per indicare tutti i punti su una linea. Questo potrebbe essere dovuto al modo in cui gli iperreali sono stati introdotti in queste classi: facendo uso di esempi in cui quantità molto grandi e molto piccole sono confrontate tra loro per introdurre l'idea di una quantità trascurabile rispetto a un'altra; o di dispositivi visivi che possono suggerire che ci sono punti sulla linea che non sono coperti dai reali. Le *concept-image* sia dei reali sia degli iperreali che emergono da queste risposte appaiono inadeguate dal punto di vista matematico. Lo sforzo degli insegnanti di introdurre gli iperreali facendo appello all'intuizione non sembra avere avuto successo: ciò porta a chiedersi se l'introduzione degli iperreali possa avere successo se gli studenti non sviluppano una *concept-image* appropriata del sistema dei numeri reali.

5.2 Sulle nozioni di infinitamente vicini, indistinguibili e parte standard

Come accennato nei paragrafi precedenti queste nozioni non hanno una controparte in analisi standard, ma assumono un ruolo centrale in NSA per la definizione delle nozioni di limite, derivata e integrale.
Esaminiamo 3 quesiti: i primi 2 inclusi nei questionari per le classi 3VR, 4VR e 4MO, l'ultimo incluso in tutti i questionari.

Quesito N°2 Secondo te, se *a* è un numero iperreale finito non reale:

a è infinitamente vicino ad un solo numero reale	V	F	
a è infinitamente vicino esattamente a due numeri reali	V	F	
a può essere infinitamente vicino a più numeri reali	V	F	
a può essere infinitamente vicino ad un infinito	V	F	

Figura 7
Quesito II.1 – 3VR, 4VR, 4MO.

Nel quesito in **Figura 7** l'unica affermazione vera è la prima, le altre 3 sono false. Come si vede dalla **Tabella 2** la percentuale di risposte corrette a questo quesito è complessivamente molto alta, con l'eccezione comunque significativa degli studenti della classe 3VR.

Affermazione	Opzione	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)
A	**Vero (corretto)**	**45,83%**	**85,71%**	**94,44%**
	Falso	54,17%	14,29%	5,56%
B	Vero	33,33%	4,76%	0%
	Falso (corretto)	**66,67%**	**90,48%**	**100%**
C	Vero	25%	14,29%	5,56%
	Falso (corretto)	**75%**	**80,95%**	**94,44%**
D	Vero	29,17%	28,57%	5,56%
	Falso (corretto)	**70,83%**	**71,43%**	**94,44%**

Tabella 2
Percentuali risposte quesito II.1.

Senza ulteriori approfondimenti non ci sembra possibile offrire un'interpretazione specifica del basso numero di risposte corrette per l'affermazione A dato dagli studenti della classe 3VR. È certo possibile che alcuni studenti abbiano dato risposte errate non tenendo in considerazione che il numero *a* è un iperreale finito (senza questa ipotesi l'affermazione A è falsa e la D vera); anche se, se così fosse, non si spiegherebbe perché sia avvenuto con percentuali così alte solo in questa classe. Il risultato complessivo può sembrare comunque in sé incoraggiante, ma occorre considerarlo insieme alle risposte date agli altri quesiti di questo gruppo. Vediamo ad esempio il quesito II.2 (Figura 8).

Quesito N°5 π è un numero con espansione decimale illimitata. Prendiamo una sua approssimazione: 3,1415. Possiamo dire che 3,1415 è infinitamente vicino a π?

SÌ NO

Figura 8
Quesito II.2 – 3VR, 4VR, 4MO.

La risposta è no: π e 3,1415 sono due numeri reali distinti, la loro differenza è ancora un numero reale e quindi non sono infinitamente vicini. Questa è una proprietà generale direttamente collegata al contenuto del quesito precedente (II.1): nessun numero può essere infinitamente vicino a due numeri reali, dato che questi a loro volta non possono essere infinitamente vicini tra loro.

Opzione	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)	Grado di fiducia[9]		
				Alto	Medio	Basso
Sì	79,17%	80,95%	38,89%	48,84%	37,21%	9,3%
No	**20,83%**	**19,05%**	**61,11%**	40%	45%	10%

Tabella 3
Percentuali risposte quesito II.2.

9. Le percentuali del grado di fiducia riportate sulle due righe sono calcolate in rapporto al numero totale di coloro che hanno risposto rispettivamente "Sì" (43 studenti) o "No" (20 studenti) alla domanda. La somma delle percentuali non è 100% perché ci sono studenti che pur avendo risposto alla domanda non hanno indicato il proprio grado di fiducia nella risposta data.

Se gli studenti avessero fatto ricorso alla definizione formale, avrebbero potuto facilmente rispondere correttamente alla domanda. Questa considerazione ci fa ipotizzare che gli studenti abbiano risposto sulla base di una *concept-image* della relazione "essere infinitamente vicino" e della nozione di infinitesimo, forse come "numero molto piccolo" o "piccolo a piacere", non adeguata a questo contesto, ma coerente con le risposte al primo quesito. Tale *concept-image* risulta inappropriata in questo caso, come inappropriate appaiono le *concept-image* di numero reale, espansione decimale, approssimazione ecc.
È da notare anche che circa l'85% degli studenti si dichiara completamente o abbastanza certo della propria risposta; se si considera quanto cauti sono in generale gli studenti prima di esprimere un elevato grado di fiducia in merito alle proprie risposte in matematica la percentuale appare davvero molto elevata, il che suggerisce che queste *concept-image* potrebbero essere solide, difficili da destabilizzare.

Quesito N°7 Con ε indichiamo un numero infinitesimo non nullo. Indica nella tabella qui sotto, segnando con una crocetta le caselle corrispondenti, se $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ è uguale, infinitamente vicino, indistinguibile da $1, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\varepsilon}$.

	È uguale a	È infinitamente vicino a	È indistinguibile da	Nessuna delle precedenti		
$\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$					1	
					$\frac{1}{\varepsilon}$	
					$\frac{1}{2}$	
					$\frac{1}{2\varepsilon}$	

Figura 9
Quesito II.3 – 3VR, 4VR, 4MO, 5VR.

L'unica relazione vera, tra quelle da esaminare nel quesito presentato in **Figura 9**, è che $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ è indistinguibile da $\frac{1}{2\varepsilon}$, per il resto $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ non è uguale, né infinitamente vicino, né indistinguibile da 1, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{\varepsilon}$. Vale la pena osservare che, in linea di principio, le opzioni "è uguale", "è infinitamente vicino", "è indistinguibile", non sono mutuamente esclusive: ad esempio, due numeri non infinitesimi, infinitamente vicini sono anche indistinguibili. Le risposte a questo quesito variano molto a seconda della relazione da esaminare e da classe a classe; rimandiamo all'**Allegato 1** per un resoconto dettagliato delle percentuali di risposte. Qui ci limitiamo a riportare (**Tabella 4**) le risposte relative alle possibili relazioni che sussistono tra $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ che offrono comunque lo spunto per considerazioni più generali.

$\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ sono tra loro:	3VR (24)	4VR (21)	4MO (18)	5VR (13)
Uguali	45,83%	28,57%	5,56%	53,85%
Infinitamente vicini	12,50%	19,05%	5,56%	7,69%
Indistinguibili	**29,17%**	**52,38%**	**83,33%**	**30,77%**
Nessuna delle precedenti	4,17%	4,76%	5,56%	7,69%

Tabella 4
Percentuali risposte quesito II.3.

La percentuale di risposte corrette varia molto da classe a classe: passa dal 29,71% della classe 3VR all'83,33% della 4MO, che su questa specifica domanda sovrasta le altre classi. Quello che può stupire nelle risposte degli studenti delle classi di Verona a questo quesito non è solo la percentuale di coloro che non riconoscono che $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ sono indistinguibili, ma anche l'alta percentuale di coloro che affermano che i due numeri sono tra loro uguali: 45,83%, 28,57% e 53,85%; tra l'altro se due numeri sono uguali sono, in particolare sono anche infinitamente vicini e indistinguibili. Per rispondere correttamente a questo quesito, occorre richiamare le definizioni delle relazioni in gioco e poi svolgere i calcoli del caso. Ad esempio per stabilire se $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ e $\frac{1}{2\varepsilon}$ sono infinitamente vicini occorre stabilire se $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon}$ è infinitesimo oppure no. Svolgendo alcuni calcoli, in un paio di passaggi, si arriva alla forma $1+\frac{\varepsilon}{2}$ che non è infinitesimo.
Le risposte errate possono dunque essere dovute alla presenza di una *concept-image* non adeguata e abbastanza forte da inibire il ricorso alla definizione formale, ma anche a difficoltà nello svolgere i calcoli (che tuttavia si presentano formalmente come consueti calcoli con frazioni algebriche). Per quel che riguarda questo ultimo aspetto, notiamo che molto spesso, a seconda dell'obiettivo, i calcoli con gli iperreali possono essere semplificati, formalmente, trascurando opportunamente gli infinitesimi (lo si può fare ad esempio quando si vuole calcolare la parte standard di un numero iperreale finito). Questo modo di procedere può essere in parte automatizzato, ma talvolta richiede un forte controllo concettuale. Se questo controllo è debole o manca, ad esempio perché ai concetti in gioco non è associata una *concept-image* adeguata, il rischio di errori è molto alto, contro l'ipotesi avanzata da alcuni autori sulla supposta maggior semplicità dei calcoli con gli iperreali, ad esempio per il calcolo dei limiti o per lo svolgimento di manipolazioni algebriche nelle dimostrazioni in NSA.
Errori che possono essere ricondotti a un'interpretazione analoga, cioè errori in calcoli con gli iperreali non sostenuti da un adeguato controllo concettuale, si riscontrano anche nelle risposte ad altri quesiti di questa area, su cui però non ci soffermiamo.

5.3 Sulla struttura d'ordine e la struttura di campo dell'insieme degli iperreali

Le proprietà della struttura d'ordine e di campo dell'insieme degli iperreali sono coinvolte, come abbiamo visto, anche in diversi quesiti del gruppo precedente. Anche per questa ragione qui ci limitiamo a proporre l'analisi di un solo quesito (Figura 10).

Quesito N°6 Secondo te, se ho un infinito positivo e lo sommo a sé stesso:

Ottengo ancora lo stesso infinito	V	F	
Ottengo un infinito diverso, ma infinitamente vicino	V	F	
Ottengo un infinito diverso, dello stesso ordine, ma a distanza infinita	V	F	
Ottengo un infinito diverso di ordine superiore	V	F	

Figura 10
Quesito III.2 – 3VR, 4VR.

L'unica affermazione vera è la terza. Le quattro affermazioni sono comunque presentate indipendentemente per tentare di scovare eventuali elementi contraddittori nelle *concept-image* degli studenti. Avremmo potuto formulare il quesito chiedendo agli studenti di confrontare M e $2M$, o M e $M+M$, dove M indica un infinito; abbiamo invece optato per una formulazione interamente verbale al fine di non indirizzare gli studenti verso una traduzione e un trattamento del problema in termini simbolici. Volevamo lasciare a loro la decisione e la responsabilità di individuare la modalità di trattamento secondo loro più adeguata.

Affermazione	Opzione	3VR (24)	4VR (21)
A	Vero	62,50%	19,05%
	Falso (corretto)	**37,50%**	**80,95%**
B	Vero	33,33%	23,81%
	Falso (corretto)	**66.67%**	**76,19%**
C	**Vero (corretto)**	**50,00%**	**57,14%**
	Falso	50,00%	42,86%
D	Vero	62,50%	28,57%
	Falso (corretto)	**37,50%**	**71,43%**

Tabella 5
Percentuali di risposte al quesito III.2.

Come avevamo ipotizzato in fase di progettazione del quesito, l'aspetto più interessante non è tanto la percentuale di risposte corrette per ciascuna affermazione in sé, comunque generalmente bassa, quanto il fatto che ben 26 studenti su 45 abbiano indicato come vere affermazioni tra loro contraddittorie.
Da un'analisi puntuale delle risposte emerge infatti che:

– per 13 studenti la somma di un numero infinito con sé stesso è sia uguale che diverso dal numero infinito di partenza (combinazione delle affermazioni A-C, A-D, A-C-D vere);
– per 6 studenti la somma ha sia ordine uguale sia ordine diverso da quello dell'infinito di partenza (affermazioni C-D vere);

– per 13 studenti il risultato è sia infinitamente vicino, sia infinitamente lontano dall'infinito di partenza (affermazioni B-C, B-D, B-C-D vere).

Solo 19 studenti hanno dato risposte tra loro coerenti (hanno cioè indicato una sola risposta vera) e di questi solo 10 hanno risposto correttamente a tutte le affermazioni, hanno cioè indicato come vera l'affermazione C e come false le altre affermazioni. Le risposte a questo quesito confermano dunque che non solo le *concept-image* degli studenti possono presentarsi in certe situazioni in contraddizione con la teoria, ma anche presentare elementi in contraddizione fra loro. Notiamo infine che il grado di fiducia espresso dagli studenti per le risposte date è generalmente medio-basso, a ulteriore conferma del loro disorientamento difronte a questo quesito.

5.4 Sulle nozioni di limite, tangente e integrale

Come anticipato abbiamo elaborato alcuni quesiti il cui obiettivo era indagare se effettivamente le definizioni in NSA delle nozioni centrali dell'analisi standard risultino più semplici, intuitive e facili da trattare operativamente. Questi quesiti sono stati inseriti solo nei questionari di 4MO e 5VR che hanno coperto questa parte di curriculum, e alcuni di essi hanno avuto formulazioni diverse perché le due classi hanno sviluppato questi temi in modo molto diverso. È il caso del quesito IV.1, che nella formulazione per la 5VR menziona esplicitamente il concetto di limite (quesito IV.1a, **Figura 11**), sostituito nella formulazione per la 4MO dal riferimento al concetto di asintoto (quesito IV.1b, **Figura 12**).

Quesito N°6 Di una funzione $f(x)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sai che, se M è un infinito positivo, $f(M) = 1$ e $f(2\mathrm{M}) = -1$. Cosa puoi dire di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$? Scegli una fra le seguenti:

A) Non posso dire nulla, dipende da cosa succede per altri infiniti

B) Il limite non esiste perché in due infiniti diversi la funzione ha valori diversi

C) Il limite è 0 perché la funzione oscilla fra 1 e -1

D) Altro (spiega)

Figura 11
Quesito IV.1a – 5VR.

Quesito N°9 Di una funzione $f(x)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sai che, se M è un infinito positivo, $f(M) = 1$e $f(2\mathrm{M}) = -1$. Cosa puoi dire del comportamento della funzione all'infinito?

Scegli una fra le seguenti:

A) Non posso dire nulla, dipende da cosa succede per altri infiniti

B) La funzione all'infinito ha un comportamento non stabile perché in due infiniti diversi la funzione ha valori diversi

C) La funzione ha un asintoto in 0 perché la funzione oscilla fra 1 e -1

D) Altro (spiega)

Figura 12
Quesito IV.1b – 4MO.

L'opzione corretta per entrambe le formulazioni è la B. Infatti, in riferimento ad esempio alla formulazione IV.1a (**Figura 11**), esiste il limite finito di f per x che ten-

de a $+\infty$ se e solo se le immagini di tutti gli infiniti positivi tramite la funzione f (o meglio tramite la sua estensione agli iperreali) hanno la medesima parte standard; il limite è invece $+\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se e solo se le immagini di tutti gli infiniti positivi sono a loro volta infiniti positivi (rispettivamente negativi). Possiamo dunque affermare che il limite di f per x che tende a $+\infty$ non esiste. Analogamente per quel che riguarda il quesito come formulato in IV.1b (**Figura 12**) possiamo affermare che la funzione non ha asintoti orizzontali. La formulazione dell'opzione B può risultare ambigua nella misura in cui si fa riferimento all'idea, non meglio precisata, di "comportamento stabile/non stabile".

Opzione	IV.1b - 4MO (18)		IV.1a - 5VR (13)	
A	5	27,78%	5	38,46%
B	**10**	**55,56%**	**3**	**23,08%**
C	1	5,56%	2	15,38%
D	2	11,11%	1	7,69%

Tabella 6
Percentuali risposte quesiti IV.1a e IV.1b.

Il numero di studenti che hanno risposto a questi quesiti è davvero troppo modesto per tentare di trarre conclusioni (**Tabella 6**). Ci limitiamo solo a constatare che il numero di risposte corrette è per entrambe le formulazioni basso, molto basso per 5VR. Ciò suggerisce che anche se la NSA offre, per il calcolo dei limiti a partire dalle definizioni analitiche esplicite delle funzioni, strumenti operativi più semplici di quelli dell'analisi standard, questo non si traduce direttamente nella costruzione di una *concept-image* più efficace dal punto di vista matematico; per cui, quando, come in questo caso, non è richiesto nessun calcolo esplicito, emergono criticità analoghe a quelle che si riscontrano nell'apprendimento dell'analisi standard. Anche il fatto che il livello di fiducia espresso dagli studenti sia prevalentemente medio-basso può essere considerato indicativo del fatto che gli studenti per primi si sono trovati disorientati di fronte a questa richiesta.
I quesiti IV.2 e IV.3 (**Figura 13** e **Figura 14**) indagano le *concept-image* relative alla nozione di retta tangente al grafico di una funzione per un suo punto.

Quesito N°11 Come spiegheresti cos'è una retta tangente a un grafico di una funzione in un suo punto?

Figura 13
Quesito IV.2 – 4MO, 5VR.

Il quesito IV.2 non chiede esplicitamente una definizione di retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto: non vuole infatti sollecitare il recupero della definizione da parte degli studenti, ma piuttosto il tentativo di esplicitare il senso personale che essi danno al concetto di tangente, facendo ricorso, eventualmente in modi impropri, a termini matematici. È noto, dalla letteratura (Biza, 2007; Vinner, 1983), che alla retta tangente al grafico di una funzione in un punto sono frequentemente assegnate caratteristiche che possono entrare in conflitto con la definizione formale, quali: la tangente è una retta che tocca il grafico in un solo punto, che non

taglia il grafico (localmente o globalmente), che non può confondersi con il grafico nemmeno per un breve tratto, che esiste sempre. Uno degli obiettivi del quesito IV.2 è constatare la presenza o meno di questi elementi anche nella *concept-image* di studenti di NSA.
Le risposte degli studenti sono piuttosto varie; è comunque possibile rintracciare alcuni tratti comuni, che sono di particolare rilevanza nel nostro studio, nello specifico:

- 14 studenti su 31 menzionano il fatto che la retta tangente tocca il grafico della funzione in un solo punto (per queste risposte usiamo l'etichetta *punto* nella **Tabella 7** di sintesi);
- 7 studenti su 31 tentano di collegare esplicitamente il coefficiente angolare della retta tangente alla derivata, alcuni descrivendo questo collegamento solo a parole, altri utilizzando espressioni simboliche (*derivata* nella tabella di sintesi);
- 5 studenti su 31 menzionano esplicitamente il fatto che la retta tangente è indistinguibile dal grafico della funzione vicino al punto di tangenza (*indistinguibile* nella tabella di sintesi).

Cinque risposte (che sono già contate sopra) fanno riferimento esplicito a più di uno di questi aspetti, come ad esempio: «è una retta che tocca la funzione in un punto ed è indistinguibile da essa». Sette studenti non forniscono alcun tentativo di spiegazione esplicita di cosa intendono per tangente (alcuni si limitano a rappresentare solo graficamente una retta tangente a un grafico di funzione, altri nemmeno questo). Gli altri studenti hanno fornito risposte diverse che non fanno esplicito riferimento a nessuno di questi aspetti e tra le quali è più difficile trovare tratti comuni; in effetti alcune risposte sono di più difficile interpretazione, ad esempio: «la retta tangente è perpendicolare alla funzione».
Può stupire il basso numero di coloro che citano l'indistinguibilità locale tra la retta tangente e il grafico della funzione, dato che si tratta di una espressione allo stesso tempo definita rigorosamente in NSA e apparentemente molto evocativa.

Tabella 7
Sintesi risposte quesito IV.2.[10]

Etichetta	5VR (13)		4MO (18)	
Punto	7	87,50%	7	43,75%
Derivata	0	0,00%	7	43,75%
Indistinguibilità	0	0,00%	5	31,25%
Altro	3	37,50%	2	12,50%
Non rispondono/ grafico	5		2	

Ovviamente la domanda diretta «cosa intendi per…» non è sufficiente per aver accesso alla *concept-image* di un individuo. Per prima cosa, in una situazione collegata

10. Dato che alcune risposte si riferiscono a più aspetti e che alcuni studenti non hanno risposto, le percentuali sono calcolate sul numero di risposte raccolte in ciascuna classe che contengono il tentativo di descrizione in forma verbale o simbolica esplicita. La somma delle percentuali è superiore a 100% perché, appunto, alcune risposte fanno riferimento ad aspetti diversi.

all'esperienza scolastica, uno studente può essere portato a rispondere in modo da soddisfare quelle che ritiene le attese dell'insegnante, anche se non è l'insegnante a porre la domanda. In secondo luogo, in situazioni diverse possono emergere elementi diversi della *concept-image* di un individuo. Infine, un individuo non è in generale consapevole di tutti gli elementi che compongono la propria *concept-image* riferita a un determinato concetto, per cui non potrebbe, nemmeno volendo, esprimerle tutte a parole. Abbiamo dunque accoppiato questo quesito a un altro: il quesito IV.3 (**Figura 14**) che riguarda il riconoscimento a livello grafico della retta tangente a un grafico a prescindere dall'esplicita enunciazione delle sue caratteristiche. Il quesito è ispirato e riadattato a quello utilizzato da Biza nel suo studio (2007).

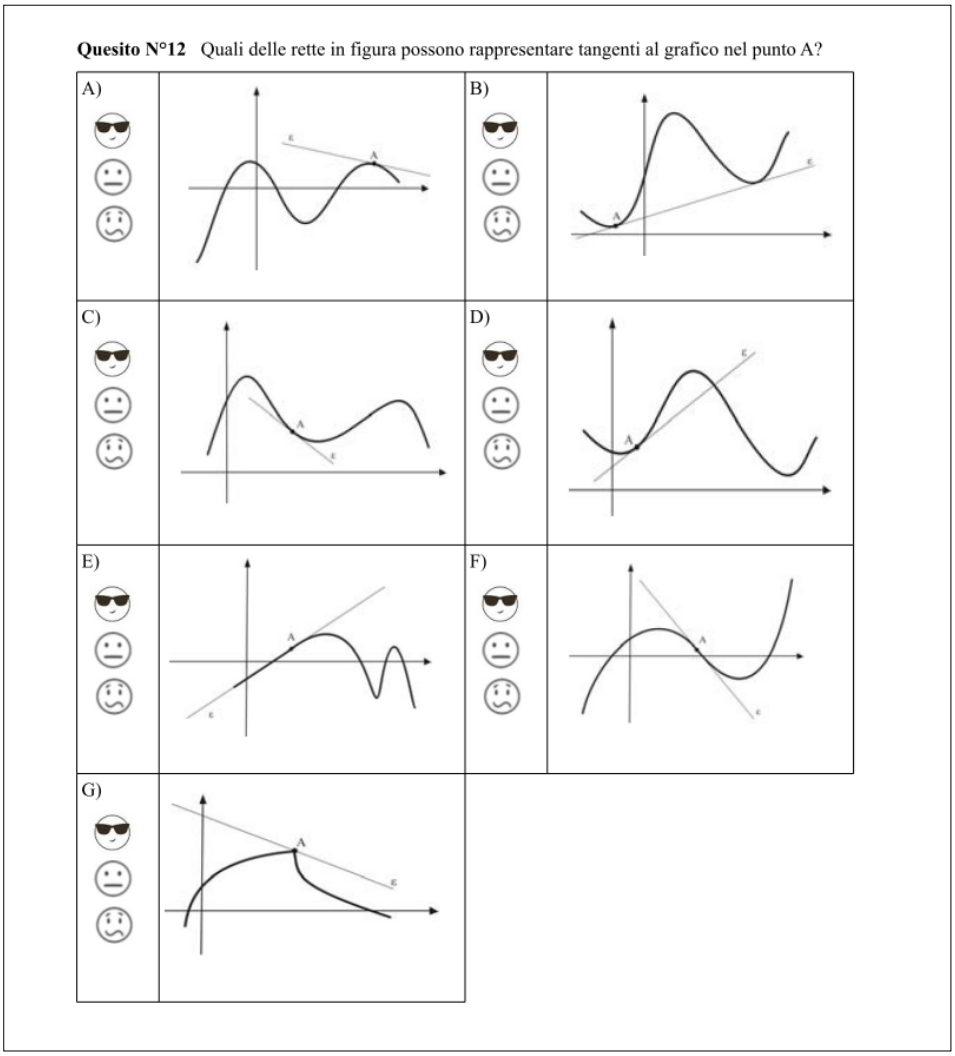

Figura 14
Quesito IV.3 – 4MO, 5VR.

La **Tabella 8** mostra una grande differenza fra le due classi. La prima osservazione è che gli studenti della classe 4MO, che hanno mostrato anche nelle risposte al quesito IV.3 una maggior ricchezza, hanno in generale risposto meglio su tutti gli item. Guardando poi separatamente le risposte all'interno delle due classi, vediamo che gli studenti di 5VR hanno risposto meglio agli item A e C, che coinvolgono situazioni che meglio corrispondono alla *concept-image* di retta tangente come retta che tocca il grafico in un solo punto, rispetto a tutti gli altri item. Le percentuali di risposte

corrette agli item E ed F sono particolarmente basse: il primo rappresenta una situazione non conciliabile con una *concept-image* di retta tangente come retta che tocca il grafico di una funzione solamente in un punto, mentre il secondo rappresenta una situazione non conciliabile con una *concept-image* di retta tangente come retta che lascia il grafico di una funzione in un semipiano. Quest'ultimo elemento non emerge però in modo esplicito dalle risposte degli studenti al quesito IV.2. Nella classe 4MO la situazione è differente: per ciascun item la percentuale di risposte corrette è superiore al 70%. Può sorprendere che in questa classe gli item con le percentuali più alte di risposte corrette siano F e C, mentre è solo al terzo posto la percentuale di risposte corrette all'item A, pur rappresentando questo una situazione che possiamo dire prototipica.

Item	Opzione	5VR (13)	4MO (18)
A	**SI**	**69,23%**	**83,33%**
	NO	23,08%	16,67%
B	**SI**	**46,15%**	**72,22%**
	NO	53,85%	27,78%
C	**SI**	**61,54%**	**88,89%**
	NO	30,77%	11,11%
D	**SI**	**46,15%**	**72,22%**
	NO	46,15%	27,78%
E	**SI**	**23,08%**	**77,78%**
	NO	69,23%	22,22%
F	**SI**	**23,08%**	**100,00%**
	NO	76,92%	0,00%
G	SI	46,15%	22,22%
	NO	**53,85%**	**77,78%**

Tabella 8
Percentuali di risposte al quesito IV.3.

In generale, confrontando le risposte ai quesiti IV.2 e IV.3 possiamo osservare che gli studenti che in IV.2 hanno fatto riferimento alla indistinguibilità tra retta e grafico, o che hanno richiamato il fatto che la derivata di una funzione in un punto è il coefficiente angolare della tangente al grafico in quel punto, hanno dato un numero più alto di riposte corrette. Complessivamente sono solo 8 gli studenti che hanno risposto correttamente a tutti gli item di IV.3; di questi, nel quesito IV.2, 4 hanno fatto riferimento esplicito alla indistinguibilità, 3 alla derivata e 1 non ha risposto.

6 Conclusioni

In questo articolo abbiamo presentato e discusso i risultati preliminari di uno studio pilota condotto nel 2018 il cui obiettivo principale era quello di indagare le *concept-image* degli studenti in NSA con l'intenzione di discutere, eventualmente confermare o respingere, l'affermazione secondo cui i concetti di NSA siano più vicini all'intuizione o alla concettualizzazione spontanea degli allievi; come abbiamo ricordato, tale affermazione è alla base di molte proposte didattiche che mirano a introdurre l'insegnamento della NSA sia a livello universitario sia a livello secondario.
Dal nostro studio emerge che le *concept-image* sviluppate dagli studenti esposti a percorsi di insegnamento di NSA non appaiono in molti contesti matematicamente adeguate ed efficienti, o comunque non più di quelle sviluppate dagli studenti nei tradizionali percorsi di analisi e documentate in letteratura. In effetti molti studenti hanno dato non solo risposte errate ai compiti proposti, ma in diverse occasioni le risposte non erano coerenti tra loro, come per le risposte ai quesiti II.1 e II.2 (se confrontate tra loro), al quesito III.2 o per alcune delle opzioni del quesito II.3. In questi contesti gli studenti non sono sembrati consapevoli del conflitto tra le proprie risposte, oppure non sono riusciti a recuperare e applicare efficacemente le opportune definizioni.
Le risposte ai quesiti II.2 e I.1 inoltre suggeriscono che siano inadeguate dal punto di vista matematico anche le *concept-image* relative all'insieme dei numeri reali: inevitabilmente si pone la domanda se l'introduzione degli iperreali possa avere successo se gli studenti non hanno sviluppato una *concept-image* appropriata del sistema dei numeri reali.
Le risposte al quesito II.3 sollevano inoltre dubbi sulla supposta (maggior) semplicità dei calcoli con gli iperreali, grazie alla quale risulterebbero poi semplificate le dimostrazioni dei teoremi e la soluzione di problemi di NSA. Anche in NSA, come per altri ambiti della matematica, lo svolgimento di calcoli non opportunamente supportato da un attento controllo concettuale può generare gravi errori.
D'altra parte, le risposte al quesito IV.1 suggeriscono che anche se la NSA offre, per il calcolo dei limiti a partire dalle definizioni analitiche esplicite delle funzioni, strumenti operativi più semplici di quelli dell'analisi standard, questo non si traduce direttamente nella costruzione di una *concept-image* più efficace dal punto di vista matematico.
Per quel che riguarda i quesiti sulla *concept-image* di retta tangente al grafico di funzione in un punto, ci sembra che avere a disposizione e poter fare ricorso all'idea che tale retta è localmente indistinguibile dal grafico della funzione abbia potenzialità didattiche interessanti. Notiamo allo stesso tempo che per molti degli studenti coinvolti nello studio, questa idea non è sembrata facilmente accessibile o utilizzabile efficacemente nella soluzione dei quesiti proposti.
Ovviamente la dimensione ridotta del nostro studio e la sua natura esplorativa devono mettere in guardia dal rischio di trarre conclusioni troppo generali e affrettate. Tuttavia, riteniamo che i nostri risultati preliminari suggeriscano cautela prima di affermare che nozioni matematiche astratte – le nozioni NSA in questo caso – abbiano una natura intuitiva intrinseca. Non intendiamo opporci all'idea che sia possibile perseguire un approccio all'insegnamento dell'analisi attraverso l'introduzione della NSA o affermare che le proposte finora elaborate non possano avere interessanti potenzialità a tale riguardo: sono però necessarie ulteriori ricerche per esaminare tale potenziale e discutere eventualmente le modalità didattiche che possano consentire di sfruttarlo efficacemente.

Ringraziamenti
Desideriamo ringraziare gli insegnanti che hanno collaborato in diversi modi alla realizzazione di questo studio: Paolo Bonavoglia, Christian Bonfanti, Lucia Rapella, Daniele Zambelli e Roberto Zanasi. Ringraziamo inoltre tutti gli studenti che hanno partecipato al questionario e alle altre fasi del progetto non documentate in questo articolo.

Bibliografia

Artigue, M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10*(2/3), 241-285.

Biza, I. (2007). Is the tangent line tangible? Students' intuitive ideas about tangent lines. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into the Learning of Mathematics* (Vol. 27 pp. 6 - 11). London.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-166). Kluwer: Dordrecht.

Di Nasso, M. (2003). I numeri infinitesimi e l'analisi nonstandard. *Archimede, 1*, 13-22.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 117-146.

Harnik, V. (1986). Infinitesimals from Leibniz to Robinson. Time to bring them back to school. *The Mathematical Intelligencer, 8*(2), 41-63.

Keisler, J. (1976a). *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt. Disponibile in https://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-12-23-18.pdf (consultato il 14.01.2019).

Keisler, J. (1976b). *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt. Disponibile in https://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.pdf (consultato il 14.01.2019).

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 137-174.

Machover, M. (1993). The place of nonstandard analysis in mathematics and in mathematics teaching. *The British journal for the philosophy of science, 44*(2), 205-212.

Marzorati, A. (2018). *Uno studio sull'insegnamento dell'analisi non standard nelle scuole secondarie di secondo grado*. Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Pavia, Manoscritto non pubblicato.

O'Donovan, R., & Kimber, J. (1996). Nonstandard analysis at pre-university level: naive magnitude analysis. In N. Cutland, M. Di Nasso & D. Ross (Eds.), *Nonstandard Methods and Applications in Mathematics* (pp. 235-248). Cambridge: Cambridge University Press.

Robinson, A. (2013). *Analisi non standard*. Roma: Aracne. (Titolo originale: *Non-standard Analysis* pubblicato nel 1965).

Sullivan, K. (1976). The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis

Approach. *The American Mathematical Monthly, 83*(5), 370-375.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus, 12*, 49-63.

Tall, D. (1993). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992* (pp. 13-28). Québec, Canada.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vinner, S. (1983). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. *Proceedings of the 6th PME Conference* (pp. 24-28). Antwerp, Belgium.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Autori/Mirko Maracci* e Ambra Marzorati
*Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia, Italia
mirko.maracci@unipv.it, ambra.marzorati@gmail.com

© 2019 by the author(s).