DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 99–137. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.4

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Tra analogie e rappresentazioni grafiche: un percorso esplorativo per promuovere il pensiero strategico nei problemi di logica matematica

Between analogies and graphic representations: an exploratory pathway to foster strategic thinking in mathematical logic problems

Nina Dagani
Scuola elementare di Sorengo, scuola elementare di Croglio – Svizzera

nina.dagani@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo presenta un percorso didattico esplorativo rivolto a una classe di quinta elementare, finalizzato a promuovere il pensiero strategico nella risoluzione di problemi e giochi di matematica. Il percorso è nato dall'osservazione di alcune difficoltà degli allievi nell'organizzazione dei processi risolutivi e nell'uso di rappresentazioni grafiche, a fronte di un elevato coinvolgimento dei bambini nella risoluzione di giochi e indovinelli logici. Attraverso problemi e giochi, gli allievi sono stati guidati a riconoscere, sviluppare e riutilizzare strategie risolutive efficaci, valorizzando in particolare il ricorso a rappresentazioni grafiche e al ragionamento per analogia. L'analisi dei protocolli di risoluzione evidenzia un progressivo affinamento delle strategie adottate e una maggiore capacità di riflessione sull'errore.

Parole chiave: risoluzione di problemi; giochi di strategia; strategie risolutive; analogia; rappresentazioni grafiche.

Abstract / The article presents a teaching experience aimed at a fifth-grade class, designed to promote strategic thinking in mathematical problem-solving and games. The teaching experience arose from the observation of certain difficulties experienced by pupils facing organizing problem-solving processes and using graphic representations, despite the children's high level of engagement in solving logic puzzles and riddles. Through problems and games, pupils were guided to recognize, develop, and reuse effective problem-solving strategies, with particular emphasis on the use of graphic representations and reasoning by analogy. Analysis of the problem-solving protocols highlights a gradual refinement of the strategies adopted and a greater ability to reflect on mistakes.

Keywords: problem-solving; strategy games; problem-solving strategies; analogical reasoning; graphical representations.

1 Introduzione

Il percorso didattico descritto in questo articolo è stato proposto a una quinta elementare ticinese ed è stato ideato sulla base delle necessità e delle caratteristiche del gruppo classe. Da un lato, durante l'osservazione dello svolgimento degli esercizi e dei problemi matematici affrontati nella prima parte dell'anno scolastico, erano emerse negli allievi[1] alcune difficoltà nell'organizzazione del processo risolutivo e nell'uso delle rappresentazioni grafiche. D'altro canto, era stato individuato un grande coinvolgimento e interesse degli allievi nei momenti in cui venivano proposti loro indovinelli e piccoli problemi di logica. Nella seconda parte dell'anno scolastico, si è quindi deciso di proporre agli allievi un percorso didattico che, da una parte, potesse essere coinvolgente creando un clima di lavoro favorevole al loro apprendimento e, dall'altra, potesse promuovere la capacità di trasferire nella risoluzione di un problema dato le strategie e i procedimenti appresi in situazioni analoghe affrontate in precedenza, valorizzando in particolare le possibili rappresentazioni grafiche in linea con quanto promosso dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022). Si è colta quindi l'opportunità delle iniziative organizzate dall'istituto scolastico legate alla Giornata Mondiale della Logica[2] per introdurre il percorso didattico qui descritto costituito da attività di risoluzione di problemi e giochi di logica. Al termine degli interventi sono stati poi analizzati i protocolli di risoluzione degli allievi per valutare l'emergere e lo svilupparsi delle diverse strategie risolutive adottate dagli allievi. Per maggiori dettagli si rimanda al lavoro di tesi,[3] da cui è tratto il presente contributo.

2 La risoluzione di problemi

Quotidianamente ogni individuo, consapevolmente o inconsapevolmente, si confronta con una o più situazioni che richiedono di affrontare problemi di diverso genere. Si definisce *problema*, infatti,

> «Ogni quesito di cui si richieda ad altri o a sé stessi la soluzione, partendo di solito da elementi noti. […] Qualsiasi situazione, caso, fatto che, nell'ambito della vita pubblica o privata, presenti difficoltà, ostacoli, dubbî, inconvenienti più o meno gravi da affrontare e da risolvere».
> (Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, 2023b)

Il problema risulta essere distinto dalla situazione problematica che viene invece descritta come «il sistema di competenze reali nelle quali si può immaginare quanto descritto da un testo e dal suo significato, all'interno delle esperienze del singolo» (D'Amore & Marazzani, 2003, p. 4). Vi sono diverse proposte e puntualizzazioni in letteratura rispetto a questa differenza ma tutte sono accomunate dal fatto che «non c'è problema se non c'è una situazione problematica che crea una domanda, rispondere alla quale sia per qualche motivo causa di difficoltà» (D'Amore & Marazzani, 2003, p. 5). Risolvere un problema significa quindi «trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile». E, proprio dovuto alla natura dei

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.
2. La Giornata Mondiale della Logica (*World Logic Day*), proclamata dall'UNESCO nel 2019, si celebra ogni anno il 14 gennaio per valorizzare il ruolo fondamentale della logica nella promozione della conoscenza, nell'avanzamento scientifico e nella formazione del pensiero critico (https://www.unesco.org/en/days/world-logic).
3. Lavoro di Tesi di Nina Dagani (2025) svolto nell'ambito del Bachelor of Arts in Insegnamento per il livello elementare (anni scolastici 3-7), presso il Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrice: Marta Barbero.

problemi e alla frequenza con cui si affrontano, «risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano» (Polya, 1945, citato da D'Amore & Marazzani, 2003, pp. 4–5). Guardando alla didattica della matematica, risulta difficile definire in modo univoco un problema per il fatto che lo stesso compito può risultare un ostacolo per alcuni mentre per altri no; l'essere un problema o meno non è infatti legato a proprietà intrinseche del compito proposto quanto alla relazione tra l'allievo e il compito che «rende il compito un problema per quella persona» (Schoenfeld, 1985, p. 74, traduzione dell'autrice). È utile quindi sottolineare ai fini didattici la differenza tra un "esercizio" e un "problema" che spesso vengono utilizzati come sinonimi. «Entrambi concernono situazioni problematiche causate da vari fattori: una proposta dell'insegnante (più o meno motivata), test o quiz, effettiva e reale nella quale l'alunno o la classe si ritrova» (D'Amore & Marazzani, 2003, p. 2), ma vi è una sostanziale differenza tra le due tipologie. Un esercizio può essere risolto dall'allievo applicando conoscenze e competenze già acquisite in precedenza o in via di consolidamento, attivando quindi un comportamento automatico esecutivo e riproduttivo di strategie e regole. In questo caso le conoscenze e le competenze dell'allievo sono sufficienti al fine di trovare la soluzione al compito, e l'errore, quando presente, è sintomo di una lacuna legata ad esse o alla loro applicazione. Contrariamente, nella risoluzione di un problema, l'allievo si confronta con la messa in campo di conoscenze e competenze che non sono ancora all'interno del suo bagaglio cognitivo. In un problema, infatti, l'allievo, attingendo alle sue risorse, è tenuto ad applicare anche scelte strategiche e creative al fine di identificare la strada risolutiva del compito più rapida ed efficace. Non si tratta quindi di un consolidamento o un'applicazione di conoscenze e competenze, come nel caso degli esercizi, ma di uno strumento di acquisizione di conoscenza che avviene tramite la combinazione inedita di esperienze pregresse, la scoperta di nuove strategie risolutive, il confronto con i possibili errori o ostacoli incontrati e superati ecc. (D'Amore & Marazzani, 2003). Ogni individuo che si confronta con un problema matematico dovrà probabilmente cambiare il suo punto di vista numerose volte; in alcune occasioni, ad esempio, si tende a precipitarsi verso una soluzione apparentemente semplice e immediata, comprendendo in seguito che questa non è applicabile o risulta errata (Polya, 1967).
Al fine di procedere in maniera efficace nella risoluzione di un problema sono state identificate da diversi autori alcune fasi caratteristiche del processo di risoluzione, in questo lavoro si farà riferimento alle fasi di risoluzione identificate da Polya (1967):

1. *Comprensione del problema.* Questa prima fase è di fondamentale importanza per identificare le informazioni principali, le incognite e le condizioni presentate nel problema. Se vi è una figura legata al testo, che risulti quindi essere fondamentale per la sua risoluzione, allora la sua rappresentazione diventa una parte importante della comprensione del problema stesso.
2. *Compilazione o elaborazione di un piano.* In questa fase, si tratta di passare dalla comprensione del problema alla progettazione di azioni e strategie da operare per procedere alla sua risoluzione. È la più complessa poiché vi sono numerose strategie possibili per la risoluzione di un problema, e non è facile a volte trovare «un'idea luminosa» (Polya, 1967, p. 28) quando non si conosce in maniera precisa il tema trattato.
3. *Sviluppo del piano.* La terza fase prevede la messa in pratica del piano e delle strategie sviluppate nella fase precedente per proseguire verso la risoluzione del problema. In questa fase sono presenti dei momenti di controllo dell'efficacia delle strategie applicate che permettono di rendersi conto se la scelta è stata efficace o se non porterà a una soluzione corretta; nel secondo caso sarà necessario tornare alla fase precedente (compilazione o elaborazione di un piano) per studiare una nuova strategia differente e per applicarla successivamente nello sviluppo del nuovo piano.
4. *Verifica.* La fase conclusiva è importante per verificare la correttezza della soluzione e l'efficacia del processo di risoluzione adottato. Grazie a quest'ultima fase si analizza l'intero operato e, in caso di errore, si ripercorrono le quattro fasi al fine di procedere verso una risoluzione differente.

Scelto efficacemente un problema, in modo che sia motivante e accessibile agli allievi, il docente può supportare gli allievi lungo le quattro fasi di risoluzione quando necessario. Ma non solo, anche al termine della risoluzione, la messa in comune delle strategie adottate, la riflessione sulla loro applicazione e sulle soluzioni trovate permette di portare avanti un lavoro metacognitivo efficace per le risoluzioni future.

> «Un bravo insegnante dovrebbe riuscire a far comprendere, ed inculcare ai suoi allievi la consapevolezza, che nessun problema di matematica può essere considerato definitivamente chiuso. Resta sempre qualcosa da dire ancora sopra di esso […], si può sempre giungere ad una più profonda comprensione del risultato».
>
> (Polya, 1967, p. 33)

2.1 I giochi di strategia e l'analogia con la risoluzione di problemi

I giochi di strategia, siano essi da tavolo o digitali, per uno o più giocatori, si basano su determinate regole e obiettivi per i giocatori coinvolti. Per conseguire i diversi obiettivi, i giocatori scelgono autonomamente il percorso da seguire, elaborando tattiche e strategie fondate sulle informazioni disponibili e sulle proprie competenze. Lo scopo è individuare una strategia vincente che permetta loro di prevalere, e in cui la fortuna abbia un ruolo minimo o sia totalmente assente (Barbero, 2020).
Diversamente da altre tipologie di giochi risulta rilevante nella loro risoluzione lo sviluppo del pensiero strategico e la capacità di pianificazione e organizzazione di un pensiero logico. Risolvere un gioco di strategia richiede infatti la comprensione della situazione iniziale e l'analisi dei vincoli posti dal problema che avvengono generalmente nelle fasi iniziali di familiarizzazione con il gioco, l'elaborazione di un piano d'azione e la scelta di strategie al fine di poterle applicare per giungere all'obiettivo. La struttura stessa del gioco inoltre consente un riscontro quasi immediato sull'efficacia o meno della strategia messa in atto. Successivamente, la riflessione sulle strategie sviluppate e sul percorso seguito permette al giocatore di affinare e generalizzare la strategia vincente per poterla applicare in partite successive o in giochi analoghi. In questo senso, la dinamica dei giochi di strategia è analoga a quella dei problemi matematici: entrambi richiedono di selezionare e combinare delle conoscenze pregresse, portano a sviluppare un ragionamento strategico e creativo e favoriscono riflessioni sui risultati ottenuti. Le fasi di risoluzione di problemi e giochi sono infatti analoghe e analoghe sono anche le tipologie di strategie che si possono applicare in entrambi i contesti; si pensi ad esempio alle strategie che si applicano facendo riferimento alla simmetria del gioco o del problema, al supporre il gioco o il problema risolto, all'uso di rappresentazioni grafiche come supporto alla risoluzione, all'applicazione di analogie ecc. I giochi di strategia offrono un contesto ideale per lavorare sulla risoluzione dei problemi e sulle strategie ad essa associate (Barbero, 2015). I giochi di logica rappresentano una forma particolare di giochi di strategia. Problemi classici come "Il lupo, la capra e i cavoli", ad esempio, mostrano chiaramente come ogni scelta comporta delle conseguenze immediate, rendendo evidente la necessità di pianificare e verificare le varie mosse effettuate. Guardando al problema "Il lupo, la capra e i cavoli":

> «Un contadino deve attraversare un fiume con un lupo, una capra e dei cavoli. La barca è così piccola che può trasportare solo il contadino e con lui solamente il lupo, o la capra, o i cavoli. Se il contadino lasciasse il lupo solo con la capra, il lupo si mangerebbe la capra; se lasciasse la capra sola con i cavoli, la capra si mangerebbe i cavoli. Come riesce il contadino ad attraversare il fiume con il suo carico?»
>
> (Ignátiev, 1978, p. 25, traduzione dell'autrice)

Esso si può risolvere con strategie differenti. Si possono usare degli oggetti a rappresentare i diversi elementi per poi spostarli da un lato all'altro del "fiume" rappresentato dallo spazio tra due tavoli, si può procedere per tentativi ed errori, si può rappresentare il problema algebricamente, graficamente, tramite tabelle e diagrammi ecc. Ad esempio, rappresentando graficamente la situazione, si potrebbe ottenere una risoluzione che coinvolge simboli e frecce e mostra i diversi spostamenti della barca per trasportare i tre oggetti sulla sponda opposta del fiume senza che la capra rimanga mai da sola con il lupo o con i cavoli (**Figura 1**).

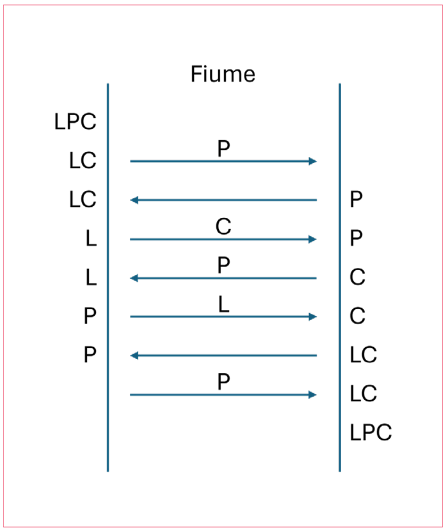


Figura 1. Possibile diagramma risolutivo del problema "Il lupo, la capra e i cavoli" dove L sta per lupo, P sta per capra e C sta per cavoli e le frecce indicano i viaggi della barca da una sponda all'altra del fiume.

I giochi di strategia e i giochi di logica rientrano nel campo più ampio della matematica ricreativa, che, oltre a questi, comprende diversi altri giochi come enigmi, rompicapi, puzzle, indovinelli ecc. Queste attività generalmente vengono affrontate per piacere personale soprattutto in ambito non scolastico. La pratica di tali attività anche in classe consente agli alunni di affrontare problemi di diversa natura in modo coinvolgente e stimolante, affinando le loro capacità di ragionamento e promuovendo un approccio strategico sempre più consapevole, offrendo agli allievi la possibilità di vedere concretamente un legame tra pianificazione, azione e conseguenza e di imparare a riflettere sulle proprie strategie risolutive (Peres & Sbaragli, 2021).

2.2 Strategie di risoluzione

Insieme alle fasi di risoluzione di problemi si è cominciato ad approfondire anche lo sviluppo delle strategie risolutive messe in atto nel processo di risoluzione, ovvero di quella che viene chiamata *euristica*, il cui scopo è «lo studio dei metodi e delle leggi di invenzione e di scoperta» (Polya, 1967, p. 119) di compiti come i problemi che stimolano la mente e la cui risoluzione è possibile solo attraverso indagini e riflessioni (Schoenfeld, 1985). Nel corso del tempo sono state proposte diverse descrizioni e classificazioni delle tecniche che vengono utilizzate singolarmente o in combinazione tra loro per compiere progressi nella risoluzione, in questo paragrafo verranno presentate quelle maggiormente implicate e osservate nel percorso didattico proposto alla classe (Barbero, 2015; Polya, 1967; Schoenfeld, 1985).

2.2.1 Le rappresentazioni nella risoluzione di problemi

Nella risoluzione di problemi risulta efficace al ragionamento rappresentare il problema ovvero adottare «un conveniente sistema di notazioni facilmente riconoscibile e particolarmente utile a tradurre il nostro pensiero» (Polya, 1967, p. 141) che può essere grafico, verbale, simbolico, numerico ecc. a seconda della tipologia di problema e delle competenze e abilità del solutore. L'utilizzo di elementi a

supporto delle considerazioni e dei ragionamenti nella risoluzione risulta efficace solo se strutturato in maniera pertinente, ovvero «quando l'ordine e la connessione dei simboli riflettono l'ordine e la connessione degli enti a cui si riferiscono» (Polya, 1967, p. 141).
Tra le diverse rappresentazioni, può facilitare il processo di risoluzione la rappresentazione grafica del problema, che sia essa una figura geometrica, un disegno, una tabella, un grafico, un diagramma ecc. La rappresentazione grafica è infatti «un elemento ausiliario fondamentale in ogni problema» (Polya, 1967, pp. 111–112), sia quando è lei stessa parte del problema, sia quando la si costruisce come supporto ausiliare al ragionamento. In entrambi i casi può essere usata per analizzare al meglio la situazione, ovvero per studiare le caratteristiche e la configurazione delle informazioni iniziali, e per esaminarne i dettagli, ovvero per focalizzare l'attenzione sulle diverse parti del problema e sulle possibili connessioni tra esse. La rappresentazione grafica oltre ad essere un passaggio essenziale per lo sviluppo di ragionamenti e riflessioni logiche matematiche, per organizzare e rappresentare sinteticamente le informazioni e per cogliere relazioni tra esse, può facilitare il trasferimento di conoscenze e competenze ad altre situazioni. È una strategia che per poter essere usata ha alla base la «capacità di trasferimento da un contesto all'altro, da un linguaggio verbale a un linguaggio iconico […] e di porre in relazione in modo flessibile, non legato a una sola formulazione o a una modalità» (Pontecorvo & Pontecorvo, 1985, p. 310). Questa abilità, però, non si acquisisce se non esercitandola. Durante la risoluzione del problema ogni allievo è libero di rappresentarlo in modo diverso e personale, cercando di raffigurare al meglio e secondo le proprie esigenze quanto necessario al raggiungimento della soluzione. La scelta di inserire i particolari nelle rappresentazioni grafiche varia per ciascun allievo, ma rimane costante il legame con gli elementi in gioco. L'utilizzo di colori, ad esempio, può aiutare l'allievo a mettere in risalto alcuni elementi ritenuti più importanti o che necessitano di maggiore attenzione. Tra le rappresentazioni grafiche citate dagli autori vi sono i diagrammi. Questa tipologia, tra le altre cose, permette di produrre uno «schema grafico che ha lo scopo di rappresentare sinteticamente l'andamento di un determinato fenomeno […], di una successione di fatti o manifestazioni […]» (Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, 2023a); risulta essere molto importante in riferimento alla risoluzione di problemi, in quanto permette di rappresentare, osservare e analizzare anche eventuali relazioni, movimenti e variazioni nel tempo dell'organizzazione spaziale degli elementi caratteristici e degli oggetti coinvolti nel problema. Oltre ai diagrammi, gli allievi utilizzano altre rappresentazioni nel processo risolutivo come disegni, segni, lettere e numeri. Al fine di poter analizzare le rappresentazioni prodotte dagli allievi durante la risoluzione del problema e valutare il tipo di supporto al processo di risoluzione scelto, vengono utilizzate per queste rappresentazioni le definizioni proposte da Sbaragli et al. (2021c, p. 2) – che riprendono quelle di Hughes (1982), in particolare per problemi aritmetici – distinguendo tra rappresentazione pittorica, iconica (entrambe rappresentazioni grafiche), linguistica e simbolica:

- *Pittografica o pittorica*: gli allievi riproducono fedelmente uno o più elementi descritti dal problema. Prendendo come esempio il problema "Il lupo, la capra e i cavoli" (par. 2.1) l'allievo si troverebbe a raffigurare con dei disegni realistici gli animali, il pastore e/o la barca che attraversa il fiume.
- *Iconica*: gli allievi non riproducono fedelmente gli elementi presentati dal problema, ma utilizzano altri segni grafici per distinguerli. Nel caso del problema de "Il lupo, la capra e i cavoli" potrebbero utilizzare segni grafici come un cerchio, un quadrato, un triangolo, una croce, o in generale un segno per distinguere i vari personaggi.
- *Linguistica*: gli allievi non utilizzano disegni specifici o segni grafici per raffigurare il problema, ma scrivono vere e proprie frasi di senso per descrivere quanto avviene nella situazione proposta.
- *Simbolica*: gli allievi utilizzano numerali indo-arabi, segni relativi alle operazioni o una notazione simbolica. La notazione simbolica viene intesa sia in modo convenzionale, quando si usano le lettere per indicare gli elementi del problema che vengono trattati come variabili all'interno di formule, sia in modo non convenzionale, quando si utilizzano lettere specifiche per indicare oggetti o elementi del problema.

2.2.2 Analogia

L'analogia è «una specie di somiglianza fra cose distinte. Oggetti simiglianti concordano fra loro sotto qualche aspetto, oggetti analoghi concordano per determinate relazioni che intercedono fra le loro parti corrispondenti» (Polya, 1967, p. 57). Guardando alla risoluzione di problemi, usare l'analogia come strategia risolutiva consiste nell'individuare tra i problemi affrontati in precedenza un problema simile a quello che si sta risolvendo, così da poter utilizzare le conoscenze pregresse, acquisite nella risoluzione del problema già affrontato, per facilitare la risoluzione. Conoscendo già un problema simile, infatti, gli allievi possono fare riferimento alle strategie adottate in precedenza per riprodurle nel nuovo problema. Spesso non si riesce ad individuarne uno esattamente uguale a quello su cui si lavora, ma si tratta di trovare degli elementi comuni che possano essere fonte di ispirazione o aiuto nel processo di ricerca della soluzione. Il «modello da seguire» (Polya, 1967, p. 60) potrebbe riguardare il metodo applicato nella risoluzione, i passaggi effettuati, il risultato ottenuto o una combinazione di questi aspetti; infatti, che sia la struttura del testo, l'immagine proposta, la richiesta o il modello risolutivo «ogni aspetto del problema attuale che abbia avuto una parte essenziale nella risoluzione di qualche altro problema può rivelarsi di nuovo importante» (Polya, 1967, p. 118).
L'analogia ha un ruolo molto importante nella seconda fase di risoluzione di un problema, la compilazione o l'elaborazione di un piano: facendo riferimento a problemi già noti e alle loro esperienze pregresse, gli allievi sono in grado di selezionare alcune possibili strategie risolutive; la ricerca di problemi analoghi può essere di notevole aiuto nella risoluzione, tuttavia, non è sempre facile individuare e dichiarare delle analogie tra problemi noti. Infatti, spesso gli allievi utilizzano l'analogia in maniera totalmente inconsapevole senza riferirsi esplicitamente alle loro conoscenze pregresse. In questa fase l'insegnante può essere di supporto agli alunni con «un'assistenza discreta» (Polya, 1967, p. 28), cercando di fornire loro dei suggerimenti che li portino a pensare a situazioni vissute in precedenza e che possano essere di supporto. L'analogia può anche essere utilizzata esplicitamente come «strumento didattico per ragionare, pensare, sperimentare, porsi domande intelligenti ed acute» (Sbaragli et al., 2008, p. 5), proponendo attività specifiche in successione, e discutendo delle strategie adottate nelle diverse situazioni, favorendo così una messa in comune dei processi risolutivi e una riflessione metacognitiva sugli approcci utilizzati. In questo modo, gli allievi hanno l'opportunità di riconoscere elementi ricorrenti tra problemi diversi e di comprendere come una stessa strategia possa essere utilizzata e adattata a contesti differenti. Un uso più consapevole dell'analogia contribuisce pertanto a superare una risoluzione basata unicamente su tentativi casuali, orientando l'azione dei bambini verso scelte intenzionali e motivate. All'interno di un percorso didattico strutturato, l'analogia diventa uno strumento per promuovere il pensiero strategico sostenendo gli alunni nella costruzione di procedimenti risolutivi sempre più autonomi e consapevoli.

3 Metodologia

Il percorso didattico che viene descritto in questo articolo è stato proposto a una classe quinta elementare ticinese, composta da 18 allievi durante i mesi primaverili dell'anno scolastico.

3.1 Struttura e giustificazione delle scelte del percorso proposto

Il percorso è costituito da tre parti: la prima dedicata ai problemi di attraversamento, la seconda ai problemi con i fiammiferi e l'ultima ad attività di risoluzione della torre di Hanoi. È stata presa questa decisione in quanto tutte e tre le tipologie di problemi e giochi permettono di proporre problemi analoghi, diversi tra loro per difficoltà e configurazione iniziale ma sempre appartenenti alla stessa "famiglia". Inoltre, si tratta di tipologie di problemi che permettono di raffigurare la soluzione tramite una rappresentazione grafica, così da poter osservare se, nelle diverse risoluzioni, vi sono dei pattern ricorrenti indicatori dell'emergere di analogie. Sono tutti problemi di logica che non richiedono calcoli matematici specifici, ma puntano alla ricerca di strategie e ragionamenti per procedere nella risoluzione. Infine, queste tre tipologie differiscono nella presentazione dei contenuti, i primi sono espressi in forma scritta (*word problems*), i secondi presentano sempre un'immagine di partenza che deve essere modificata, mentre gli ultimi riguardano un gioco strategico fisico che gli allievi creano e utilizzano nella risoluzione. Durante il percorso, gli allievi si sono confrontati settimanalmente con due problemi o giochi di logica e un momento di condivisione delle strategie utilizzate nella risoluzione e delle eventuali difficoltà incontrate. Un primo approccio ai problemi del percorso è avvenuto il 14 gennaio in vista della Giornata Mondiale della Logica, in cui si è colta l'occasione per introdurre il tema in classe presentando sinteticamente l'origine della logica e le sue molteplici applicazioni, e proponendo agli allievi alcuni giochi di logica, sudoku e quadrati magici, e alcuni problemi, indovinelli più semplici e il classico problema di attraversamento "Il lupo, la capra e i cavoli" (par. 2.1) che è stato proposto come incipit della prima fase del percorso.

3.1.1 Fase 1: problemi di attraversamento

Questa tipologia di problemi ha avuto una grande diffusione nel Medioevo, proprio grazie al problema "Il lupo, la capra e i cavoli" molto conosciuto anche oggi (par. 2.1). Vi sono moltissime versioni del problema, alcune semplificate ed altre più complesse, tutte però presentano delle caratteristiche molto simili. Generalmente si tratta di problemi in cui dei personaggi devono attraversare un fiume (con una barca) o un ponte per muoversi da un punto A a un punto B. Ad avere un forte impatto sulla risoluzione sono le condizioni poste nelle diverse varianti, come il numero di individui che possono stare contemporaneamente sulla barca o sul ponte e le limitazioni riguardanti l'attesa in entrambe le sponde del fiume (o estremi del ponte).

In alcuni casi vengono presentati ulteriori vincoli per facilitare o complicare la risoluzione del problema stesso. Per esempio, riprendendo il problema "Il lupo, la capra e i cavoli" vi sono varianti che aggiungono uno o più elementi che è necessario far attraversare, ad esempio questa, che risulta impossibile:

> Il pastore Raimondo torna dal suo amico per fare altri acquisti. Questa volta compra un cane, un lupo, una pecora e dei cavoli. Sulla strada del ritorno c'è un fiume e quindi Raimondo deve traghettare, al di là del fiume, il cane, il lupo, la pecora e i cavoli. Per farlo, Raimondo ha a disposizione una piccola barca, che riesce a portare – oltre a lui – solo uno fra cane, lupo, pecora e cavoli. Purtroppo, in assenza del pastore, il cane si azzuffa col lupo, il lupo mangia la pecora, la pecora mangia i cavoli. D'altra parte, il lupo e i cavoli possono essere lasciati soli senza che accada nulla, così come il cane può essere lasciato solo sia con la pecora sia con i cavoli.
> Come fa Raimondo a traghettare sull'altra sponda tutti sani e salvi?[4]

Oppure varianti che modificano oltre al numero di elementi da far attraversare la quantità di elementi che possono stare all'interno della barca, come questa variante che risulta avere più soluzioni:

> Il pastore Raimondo torna dal suo amico per fare altri acquisti. Questa volta compra un gatto, un cane, un lupo, una pecora e della lattuga. Sulla strada del ritorno c'è un fiume e quindi Raimondo deve traghettare, al di là del fiume, il gatto, il cane, il lupo, la pecora e la lattuga. Data la sua precedente esperienza negativa, Raimondo si procura una barca più grande: oltre a lui, la barca riesce a portare due fra gatto, cane, lupo, pecora e lattuga. Purtroppo, in assenza del pastore: il gatto litiga col cane, il cane si azzuffa col lupo, il lupo mangia la pecora, la pecora mangia la lattuga.
> Come fa Raimondo a traghettare sull'altra sponda tutti sani e salvi?[5]

4. Tratto da https://it.oiler.education/scuola/materiali/primaria/lullo/248/lupo-capra-e-cavoli.
5. Tratto da https://it.oiler.education/scuola/materiali/primaria/lullo/248/lupo-capra-e-cavoli.

In questo percorso sono stati proposti dei problemi di attraversamento modificando il numero di elementi da trasportare, la quantità di elementi possibili da trasportare contemporaneamente e, nell'ultimo problema, inserendo un vincolo riguardante il tempo massimo da impiegare per far attraversare ciascun elemento.

3.1.2 Fase 2: problemi con i fiammiferi

A differenza dei problemi di attraversamento, quelli con i fiammiferi presentano delle immagini in cui vengono proposte delle configurazioni di fiammiferi che risultano essere molto significative sia per essere osservate e analizzate, sia per essere riprodotte con materiale concreto. Vi sono numerosi problemi, diversi tra loro, che vedono l'utilizzo di fiammiferi (o stuzzichini). Alcuni richiedono di analizzare la configurazione statica e di contare il numero di figure presenti (Figura 2).

Osserva con attenzione questa griglia e tocca una e una sola volta ogni quadrato che riesci a vedere. Attento, i quadrati possono anche essere formati da più quadrati piccoli messi insieme!

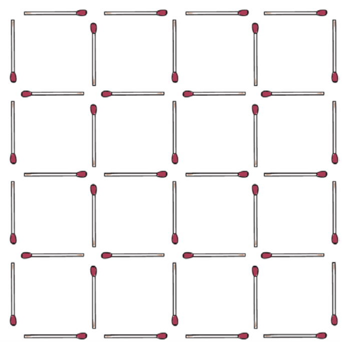


Figura 2. Problema con i fiammiferi tratto da Sbaragli et al. (2021b), immagine elaborata da Sbaragli et al. (2023).

Altri chiedono di spostare dei fiammiferi per ottenere una determinata configurazione (Figura 3).

Silvia propone una nuova sfida a Daniele: provare a togliere otto fiammiferi da questa figura, in modo da ottenere al suo interno due quadrati oltre ad altre forme. Prova anche tu a risolvere questa nuova sfida. Se necessario, aiutati con il materiale presente in aula.

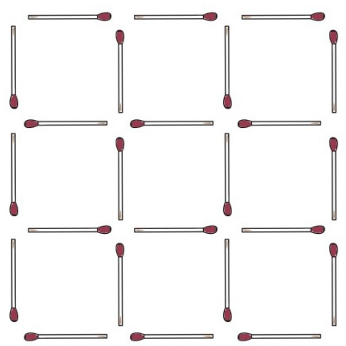


Figura 3. Problema con i fiammiferi tratto da Sbaragli et al. (2023).

Altri ancora sono problemi di generalizzazione come ad esempio (**Figura 4**).

Osserva le tre figure create con i fiammiferi. Ipotizzando che da una figura alla sua successiva si aggiungano dei fiammiferi mantenendo sempre la stessa logica, quanti fiammiferi saranno necessari per creare l'ottava figura? Motiva la tua risposta.

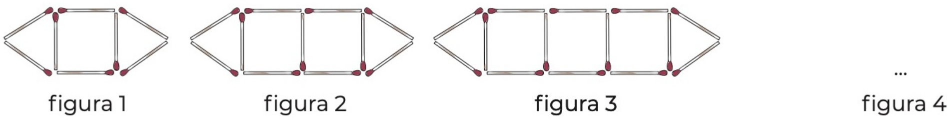


Figura 4. Problema con i fiammiferi tratto da Sbaragli et al. (2021a).

Quelli che sono stati proposti in questo percorso prevedono l'aggiunta, l'omissione o lo spostamento di un numero definito di fiammiferi per modificare la disposizione iniziale. Le indicazioni proposte nel testo riguardano il numero di pezzi che devono essere tolti/spostati e la rappresentazione finale che si intende ottenere.

3.1.3 Fase 3: torre di Hanoi

La torre di Hanoi (**Figura 5**), gioco venduto per la prima volta in Francia da N. Claus de Siam nel 1883, è un rompicapo matematico formato da tre paletti e una serie di dischi di diversa grandezza impilati in maniera decrescente (Castellani, 2013).

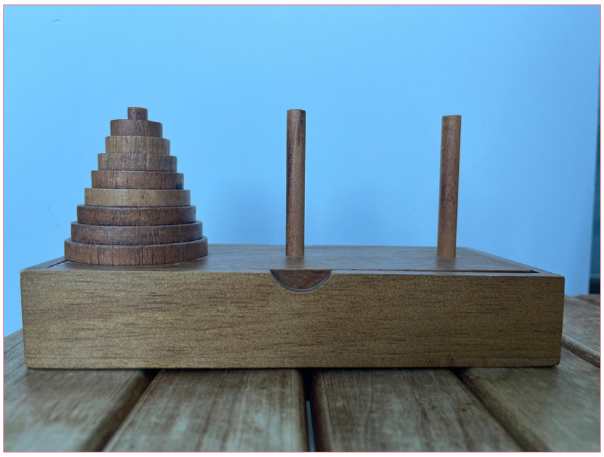


Figura 5. La torre di Hanoi.

Lo scopo del gioco è quello di trasportare la torre di dischi (impilati in maniera decrescente come a formare un cono) da un paletto iniziale a uno qualsiasi degli altri due a disposizione. Vi sono due uniche regole da seguire nel processo risolutivo: è possibile muovere un solo disco alla volta, in nessun caso si può posizionare un disco con diametro maggiore sopra a un disco con diametro minore.
Vi sono diverse possibili strategie da adottare nella risoluzione del rompicapo, così come vi è una formula matematica volta a indicare il minor numero di mosse da effettuare per poter spostare la torre da un paletto ad un altro. In questa proposta è stato importante osservare e verificare in che

maniera gli allievi muovevano i dischi in diverse situazioni senza arrivare alla formula matematica. Il rompicapo è stato proposto inizialmente con tre dischi, questi sono stati poi aumentati gradualmente al fine di indagare e osservare delle analogie negli spostamenti e nella risoluzione andando verso una generalizzazione della strategia risolutiva.

3.2 Modalità di raccolta e analisi dei dati

Durante la risoluzione dei vari problemi è stato importante osservare e comprendere le strategie applicate dagli allievi, per poter lavorare assieme a loro nei momenti di discussione e favorire la costruzione di una nuova conoscenza per poterla applicare in situazioni analoghe successive.
Come strumenti per la raccolta dati sono stati utilizzati i protocolli risolutivi dei problemi svolti dai singoli allievi. In tutti i problemi ogni allievo ha lavorato individualmente su una scheda: nella prima parte veniva esplicitato il testo del problema da risolvere, e la relativa figura qualora presente, sotto al quale vi era dello spazio che gli allievi potevano usare come meglio credevano per mostrare la risoluzione, tenendo traccia di tutti i tentativi svolti; sul retro del foglio invece venivano poste alcune domande di approfondimento per indagare le strategie utilizzate, le difficoltà affrontate e la conoscenza o meno di problemi analoghi. Durante le discussioni a grande gruppo sono state osservate le strategie adottate per la risoluzione. Inoltre, in diversi momenti della settimana sono state svolte delle interviste individuali che hanno permesso di approfondire e chiarire le strategie utilizzate dagli allievi nella risoluzione, e di indagare le modalità di lavoro e la trasposizione di esse nei problemi analoghi.
Successivamente, in fase di analisi, sono stati creati dei grafici per poter rappresentare al meglio quanto emerso dalla classe e per facilitare il confronto tra le strategie utilizzate e l'osservazione di analogie nei protocolli risolutivi. L'analisi ha visto una prima parte più generale sull'intera classe e successivamente una selezione su alcuni allievi in particolare per osservare nel dettaglio l'evoluzione delle risoluzioni del singolo allievo e la presenza di analogie nelle sue risoluzioni individuali. A conclusione dell'analisi relativa all'analogia, per ogni fase è stato approfondito uno studio di caso riguardante due allievi T. e N. osservando l'evoluzione delle loro strategie nelle diverse risoluzioni. T. e N. sono stati scelti perché nelle diverse risoluzioni è possibile osservare delle analogie evidenti e significative seppur diverse tra loro. Inoltre, i due allievi presentano differenti conoscenze e capacità a livello matematico, il secondo riscontra maggiori difficoltà rispetto al primo nella risoluzione dei problemi e più in generale nelle attività di matematica. È stato interessante osservare le risoluzioni di due alunni con competenze differenti al fine di comprendere le loro riflessioni e ragionamenti nella risoluzione dei problemi proposti.
Attraverso i problemi di logica proposti nell'itinerario si è voluta osservare ed analizzare una doppia relazione: da una parte, come l'uso delle rappresentazioni – grafiche e non – possa rivelare l'emergere di strategie e processi analoghi nella risoluzione del problema; dall'altra, come l'emergere dell'analogia permetta l'osservazione di un'evoluzione delle rappresentazioni grafiche a supporto della risoluzione del problema.

4 Il percorso e le analisi

La successione dei problemi, proposta nella **Tabella 1**, ha accompagnato gli allievi lungo un percorso graduale di difficoltà, valorizzando l'analogia tra situazioni diverse e incoraggiando l'utilizzo di molteplici strategie risolutive.

Intervento	Attività	Durata
Introduzione	Introduzione sul tema della logica e proposta di problemi e giochi di logica tra cui "Il lupo, la capra e i cavoli".	2 UD
Fase 1: problemi di attraversamento		
Problema 1	"Agenti e detenuti".	2 UD
Problema 2	"Una gita in famiglia".	2 UD
Problema 3	"Il ponte".	2 UD
Condivisione	Discussione sui problemi di attraversamento.	1 UD
Fase 2: problemi con i fiammiferi		
Problema 4	"Cinque quadrati congruenti".	2 UD
Problema 5	"Otto quadrati congruenti".	2 UD
Problema 6	"Il pesce".	2 UD
Problema 7	"Il granchio".	2 UD
Condivisione	Discussione sui problemi con i fiammiferi.	1 UD
Fase 3: torre di Hanoi		
Creazione del gioco	Spiegazione delle regole e del funzionamento della torre di Hanoi e creazione dei vari pezzi del gioco.	3 UD
Problema 8	Torre di Hanoi con tre dischi.	2 UD
Problema 9	Torre di Hanoi con quattro dischi.	2 UD
Problema 10	Torre di Hanoi con cinque dischi.	2 UD
Condivisione	Discussione sulla torre di Hanoi.	1 UD

Tabella 1. Articolazione operativa del percorso.

Le attività proposte si sono articolate in tre momenti principali. Nel primo, gli allievi hanno affrontato individualmente il problema proposto, cercando di applicare strategie risolutive e di esplorare possibili percorsi in maniera autonoma; qualora fosse necessario, dopo una prima parte individuale, gli allievi in difficoltà hanno potuto collaborare con un compagno al fine di condividere le proprie idee e strategie nella risoluzione del problema. Successivamente, nel secondo, le soluzioni e le procedure adottate sono state condivise all'interno del gruppo classe: in questo momento di discussione collettiva gli allievi hanno proposto alla lavagna le strategie utilizzate, condiviso le difficoltà riscontrate e sottolineato le analogie con problemi affrontati in precedenza. Infine, nel terzo momento, si è promosso un confronto metacognitivo sulle strategie più efficaci, sulle possibili alternative e sulle procedure da consolidare per poter affrontare con maggiore sicurezza i problemi successivi, favorendo così

l'acquisizione di competenze di pensiero strategico e di riflessione sul processo risolutivo. Alla fine di ogni attività sono state svolte delle interviste individuali con alcuni allievi per andare ad approfondire alcuni elementi significativi emersi durante i vari momenti di risoluzione e condivisione.
Per ciascun problema si è prestata particolare attenzione alle modalità di rappresentazione dei dati e delle risoluzioni degli allievi. Riguardo ad ogni risoluzione individuale del problema si è identificato il tipo di rappresentazione scelto per elaborare le informazioni e pianificare una soluzione, ad esempio con rappresentazioni iconiche, linguistiche ecc., ma anche tabelle, schemi ecc. Separatamente, si è osservato l'utilizzo di diagrammi efficaci alla rappresentazione del movimento degli elementi nei diversi problemi. Questa osservazione ha permesso di comprendere gli strumenti utilizzati dagli allievi nell'organizzazione dei dati, il modo in cui li mettono in relazione e la misura in cui le rappresentazioni grafiche fanno parte della pianificazione strategica per la risoluzione, diventando un supporto concreto al pensiero strategico che consente di rendere esplicite le scelte, valutare delle alternative e monitorare l'evoluzione e la progressione della risoluzione del problema.

4.1 Fase 1: problemi di attraversamento

Nei problemi di attraversamento, nessun allievo ha proceduto attraverso la manipolazione di oggetti concreti; tutti hanno deciso di lavorare direttamente sulla scheda raffigurando la situazione descritta dal problema e spiegando le proprie strategie risolutive.

4.1.1 Problema 1: "Agenti e detenuti"

> Il direttore di un carcere vuole far spostare 3 detenuti da una zona ad un'altra dell'area di detenzione incaricando del trasporto 4 agenti penitenziari.
> Durante il viaggio è necessario oltrepassare un fiume con una barca che può contenere al massimo 3 uomini. Il direttore prende la precauzione che gli agenti siano in ogni momento almeno pari al numero dei detenuti, vista la loro pericolosità. Come organizza gli spostamenti in barca?[6]

Nonostante il primo problema non presenti nessuna immagine, tutti gli allievi hanno proceduto tramite una rappresentazione grafica della risoluzione. La maggioranza ha realizzato una raffigurazione pittorica accompagnata da una linguistica. Due allievi hanno risolto il problema tramite una spiegazione a parole accompagnata da una rappresentazione iconica, mentre i restanti hanno optato per una rappresentazione grafica (pittorica o iconica) senza una rappresentazione linguistica (Figura 6). Tutti gli allievi hanno usato un diagramma a frecce per indicare l'attraversamento del fiume.

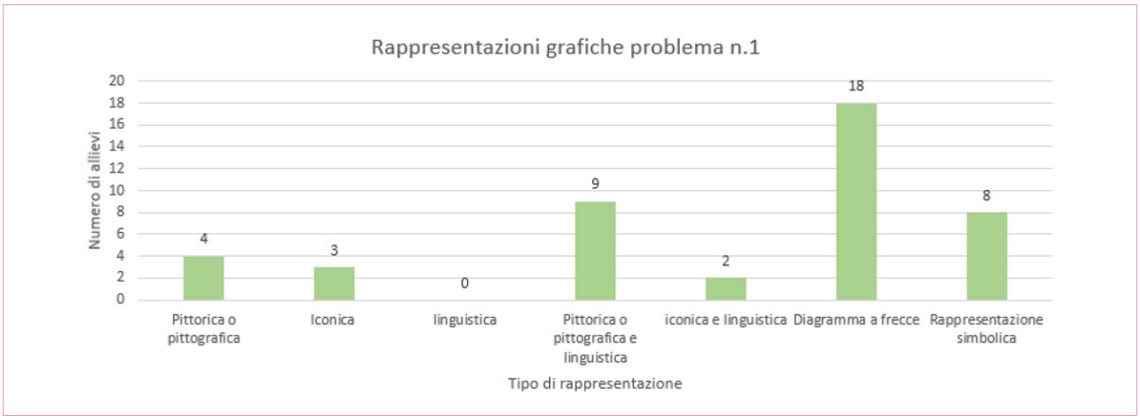


Figura 6. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Agenti e detenuti".

6. Tratto da: https://www.nienteperniente.it/lm3_12_gennaio/4agenti_3detenuti_s.html.

Guardando qualitativamente ai protocolli di risoluzione, indipendentemente dalla rappresentazione grafica utilizzata, gli allievi hanno evidenziato la distinzione tra agenti e detenuti attraverso degli escamotage pittorici (ad esempio, l'uso dei cappelli per le guardie, **Figura 7**) o iconici (con l'uso di × e ○ per differenziare agenti e detenuti, **Figura 8**) e hanno utilizzato delle frecce come diagramma per simboleggiare i vari viaggi effettuati.

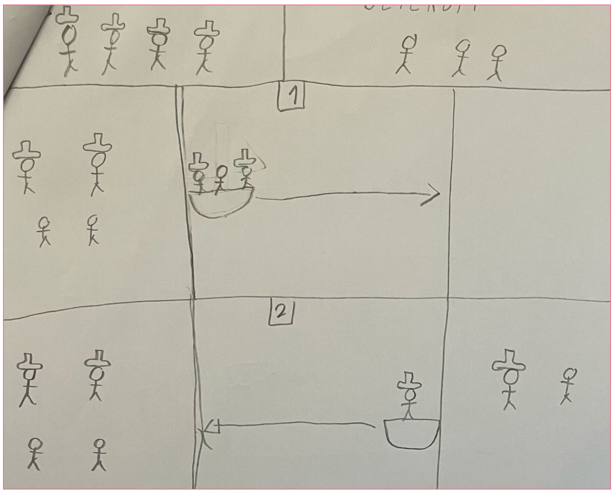


Figura 7. Protocollo di C., rappresentazione pittorica con diagramma a frecce.

Alcuni allievi hanno sentito la necessità di rappresentare le diverse situazioni che si presentano ad ogni viaggio della barca, come nel protocollo in **Figura 7**, mentre altri hanno rappresentato i diversi movimenti della barca in modo "condensato", individuando solamente quali e quanti viaggi svolgono i diversi personaggi del problema attraverso delle frecce senza esplicitare le diverse configurazioni in ogni viaggio (**Figura 8**).

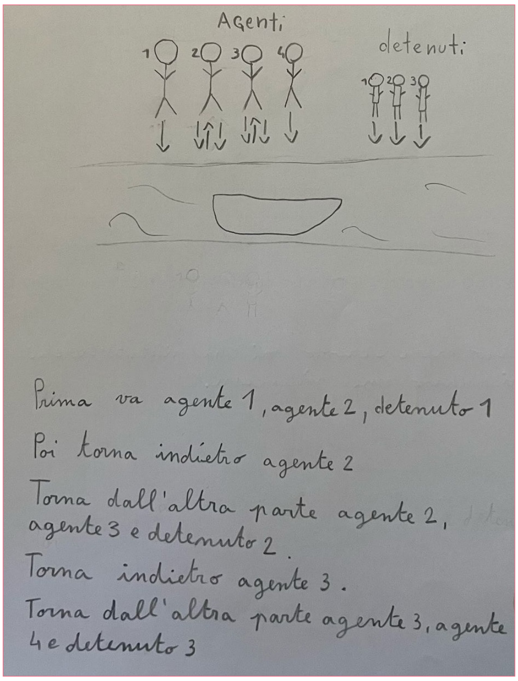


Figura 8. Protocollo di L., rappresentazione pittorica e linguistica con diagramma a frecce "condensato".

Vi è inoltre un'allieva che ha utilizzato una rappresentazione iconica molto semplice ma efficace, come si può osservare in **Figura 9**. In questo caso G. ha differenziato agenti e detenuti con i simboli × e ○ indicando poi sia i vari viaggi effettuati (**Figura 9b**), mostrando quali individui si trovano sulla barca e indicando con un diagramma a frecce se il viaggio è di andata o di ritorno, sia esplicitando qual è lo stato delle due sponde del fiume ad ogni passaggio (**Figura 9a**).

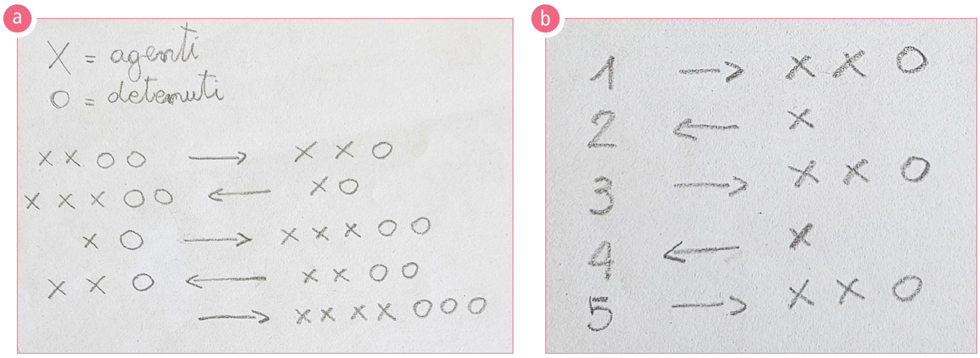


Figura 9a, b. Protocollo di G., rappresentazione iconica con diagramma a frecce.

Nei momenti di verifica ed eventuale modifica della propria strategia, la diversità delle rappresentazioni è risultata essere un valore aggiunto e un supporto alla variazione del ragionamento. Guardando alla globalità del gruppo, quattro allievi hanno necessitato di due o più tentativi di applicazione delle strategie per ottenere la soluzione. Alcuni perché inizialmente non avevano rispettato i vincoli posti dal problema, mentre altri perché la rappresentazione utilizzata in un primo momento non era efficace per la risoluzione. Per esempio, N. (**Figura 10**) ha iniziato con una rappresentazione pittorica con l'utilizzo di frecce per rappresentare i movimenti, ha poi tentato con una rappresentazione simbolica indicando ogni personaggio con una "P" (poliziotto) o con una "d" (detenuto) (sempre utilizzando delle frecce per indicare i viaggi) e ha infine proceduto con una rappresentazione linguistica. Nel primo tentativo la rappresentazione non gli permetteva di distinguere chiaramente i viaggi effettuati e gli individui che si trovavano nelle varie sponde del fiume creando confusione. Ha successivamente interrotto il secondo tentativo di rappresentazione simbolica in quanto ha riscontrato la medesima difficoltà. Nel terzo ha deciso di utilizzare una rappresentazione linguistica descrivendo a parole i viaggi effettuati.

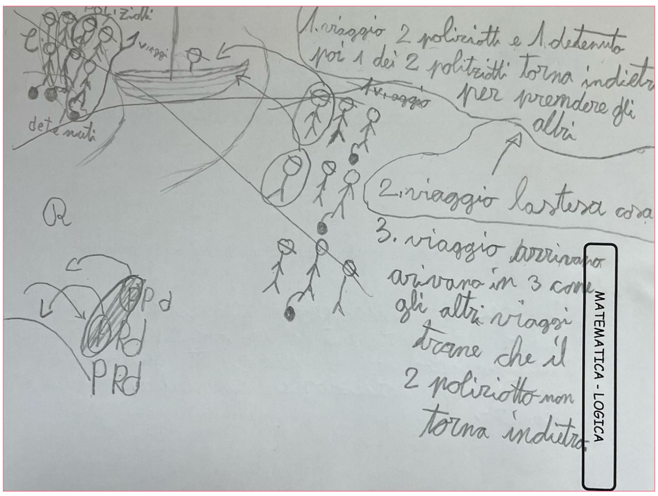


Figura 10. Protocollo di N.

4.1.2 Problema 2: "Una gita in famiglia"

> Mamma, papà e due bambini devono attraversare un fiume con una barchetta che può trasportare al massimo un adulto o in alternativa uno o due bambini. Quanti viaggi di attraversamento dovranno fare prima di arrivare tutti dall'altra parte del fiume? Quanti sono i viaggi minimi necessari per attraversare il fiume?[7]

Nel secondo problema si osserva che quattro allievi hanno proceduto alla risoluzione tramite una rappresentazione linguistica. Questi allievi, che anche nel problema precedente avevano utilizzato la spiegazione a parole dei movimenti effettuati dalla barca accompagnata dai disegni, hanno motivato la loro scelta dicendo che «descrivere a parole è più veloce e crea meno confusione». Molti hanno comunque utilizzato delle rappresentazioni grafiche (pittoriche o iconiche) a supporto dello scritto o hanno unicamente rappresentato graficamente la risoluzione. Anche in questo caso tutti gli allievi che hanno optato per una rappresentazione iconica o pittorica, hanno accompagnato i disegni con un diagramma a frecce per indicare il movimento della barca o gli spostamenti effettuati (Figura 11).

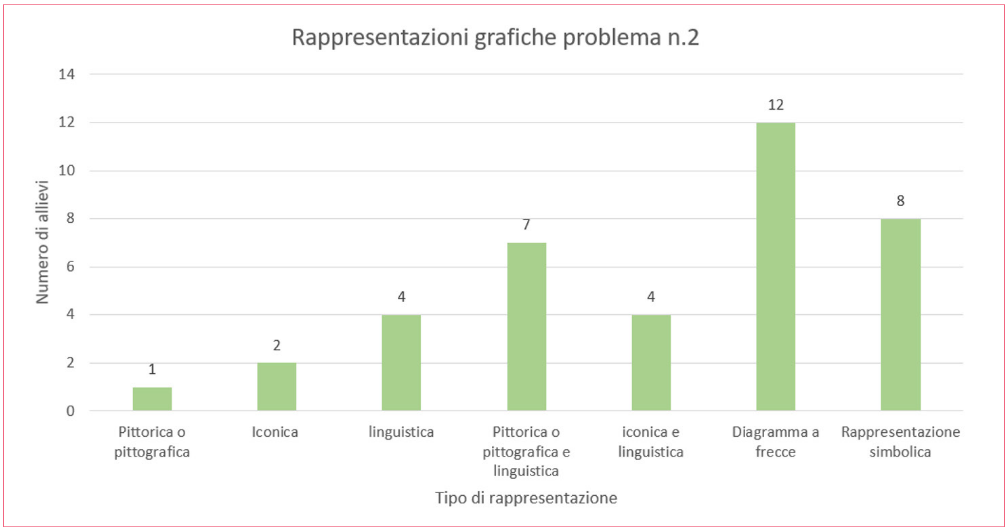


Figura 11. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Una gita in famiglia".

In questo problema sei allievi hanno necessitato di più tentativi per ottenere la soluzione.
Dall'intervista con L., ad esempio, è emerso che l'allieva ha sfruttato al meglio il primo tentativo errato (la rappresentazione pittorica con frecce ad indicare gli attraversamenti del fiume con la barca) comprendendo che, traghettando prima un adulto, necessariamente questo doveva ritornare per portare la barca, trovandosi così al punto di partenza. Si riporta di seguito un estratto dell'intervista ("Ins." sta per insegnante).

Ins.: «Cosa non ha funzionato nella prima prova di risoluzione del problema?»
L.: «Ho iniziato spostando la mamma dall'altro lato del fiume. Poi ho spostato il papà però ho capito che non funzionava».
Ins.: «Cosa non funzionava?»
L.: «Ho portato la mamma e poi il papà però in realtà il papà non aveva la barca perché era ancora dalla mamma e poi se sposto prima la mamma o il papà per forza devono tornare indietro con la barca e mi ritrovo al punto di partenza. Quindi se porto i due bambini assieme posso lasciarne là uno e portare indietro l'altro».

7. Tratto da https://www.youtube.com/watch?v=pQWrxhrbuqA.

La scelta migliore per lei è stata quindi quella di iniziare trasportando i due bambini. Per risolvere il problema ha quindi utilizzato una rappresentazione linguistica accompagnata da un diagramma con le frecce ad indicare gli spostamenti (Figura 12).

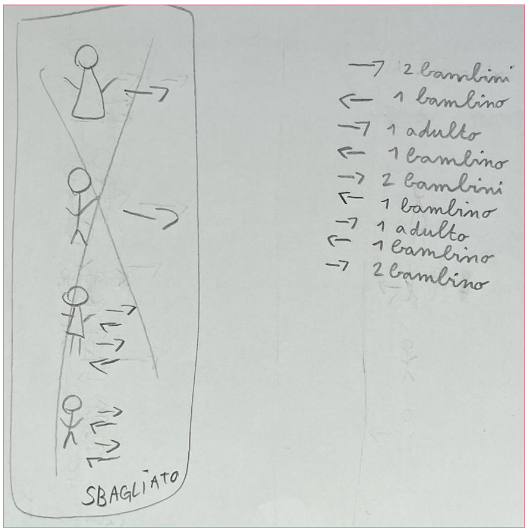


Figura 12. Protocollo di L., rappresentazione pittorica con diagramma poi abbandonata per una rappresentazione linguistica con diagramma.

4.1.3 Problema 3: "Il ponte"

> Un atleta, un giovane, un bambino ed un anziano sono davanti ad un ponte e devono andare dall'altra parte. È notte, il ponte è vecchio e parzialmente rotto e pertanto è bene che ad attraversarlo non siano più di due persone alla volta. Durante l'attraversamento occorre una torcia per vedere la strada da percorrere.
> I tempi di attraversamento sono i seguenti:
> – atleta: 1 minuto
> – giovane: 2 minuti
> – bambino: 5 minuti
> – anziano: 10 minuti
> La batteria della torcia ha una durata massima di 17 minuti.
> Come possono procedere per trasferirsi tutti dall'altra parte del ponte?[8]

Nell'ultimo problema di attraversamento si può notare che, a differenza dei precedenti, nessun allievo ha unito una rappresentazione pittorica o iconica a una linguistica. Una sola allieva ha deciso di descrivere a parole il proprio procedimento. La maggior parte della classe ha proceduto tramite una rappresentazione iconica con un diagramma a frecce per indicare gli spostamenti dei personaggi. Molti hanno inoltre deciso di aggiungere le tempistiche di percorrenza di ogni individuo, utilizzando una rappresentazione simbolica con l'utilizzo di numerali indo-arabi, così da avere più controllo sulla durata della batteria (Figura 13).

8. Tratto da https://www.7ecnologie.it/01-problem-solving/02-problemi-di-logica/02-attraversamento-del-ponte.

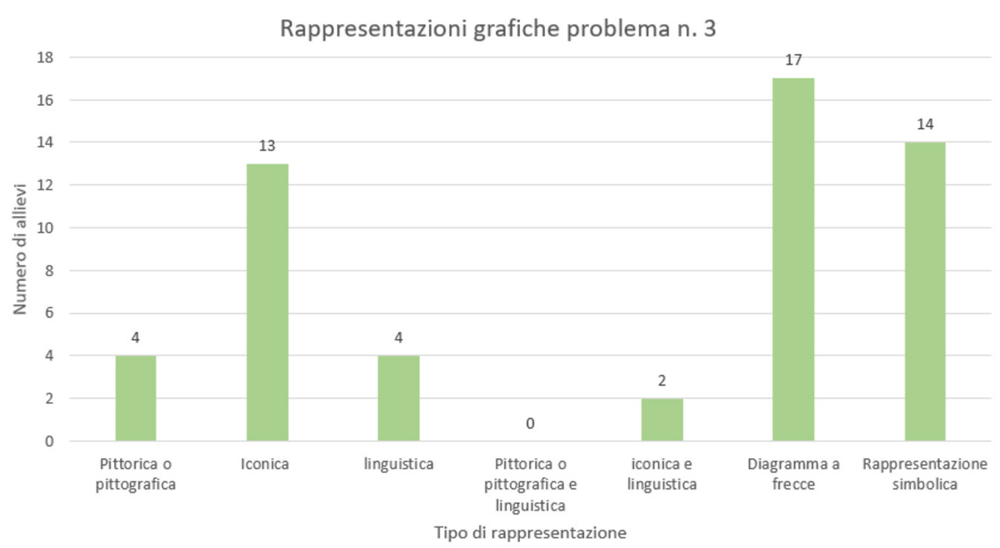


Figura 13. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Il ponte".

Si può notare in questo problema un'inversione dei risultati rispetto al problema precedente: sono ora 12 gli allievi che hanno necessitato di più tentativi per ottenere il risultato. In fase di condivisione è emerso che quasi tutti hanno iniziato la risoluzione spostando il bambino e l'anziano. Così facendo però uno dei due era costretto a tornare indietro impiegando 5 o 10 minuti, allungando notevolmente le tempistiche di completamento degli attraversamenti, oltre il limite massimo di 17 minuti. Procedendo in questa maniera, infatti, non si riesce in nessun caso a trasferire tutti i personaggi dall'altro lato del ponte senza scaricare la batteria della torcia.

4.1.4 Analogie nei problemi di attraversamento

Per quanto riguarda l'analogia, in riferimento ai tre problemi di attraversamento, si nota che nonostante siano molto simili tra loro, alla domanda: «Conoscevi già un problema analogo a questo?», circa metà della classe ha risposto di no (Figura 14).

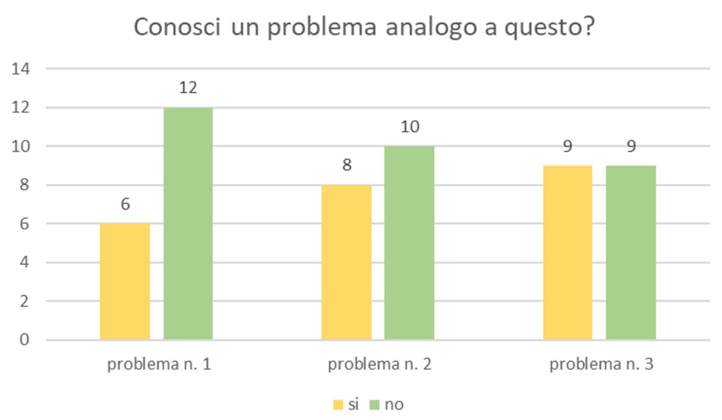


Figura 14. Risposte alla domanda del questionario riguardante l'analogia per i problemi di attraversamento.

Quanto emerso può essere spiegato dal fatto che, molto spesso, gli allievi utilizzano l'analogia in maniera inconsapevole riproducendo disegni o strategie simili a quelle già effettuate in problemi analoghi, senza essere però coscienti di sfruttare le proprie conoscenze pregresse.

Evoluzione delle strategie di T.

Analizzando nello specifico le risposte alla domanda dell'allievo T. nei primi tre problemi, nella prima risoluzione afferma di conoscere già un problema simile riferendosi a "Il lupo, la capra e i cavoli", mentre nei due problemi successivi afferma di non conoscerne di analoghi. Dalle risposte si evince che T. non è realmente consapevole dell'analogia, analizzando le sue risoluzioni è però possibile osservare delle analogie nelle rappresentazioni e nelle strategie adottate (**Figura 15a, b, c**).

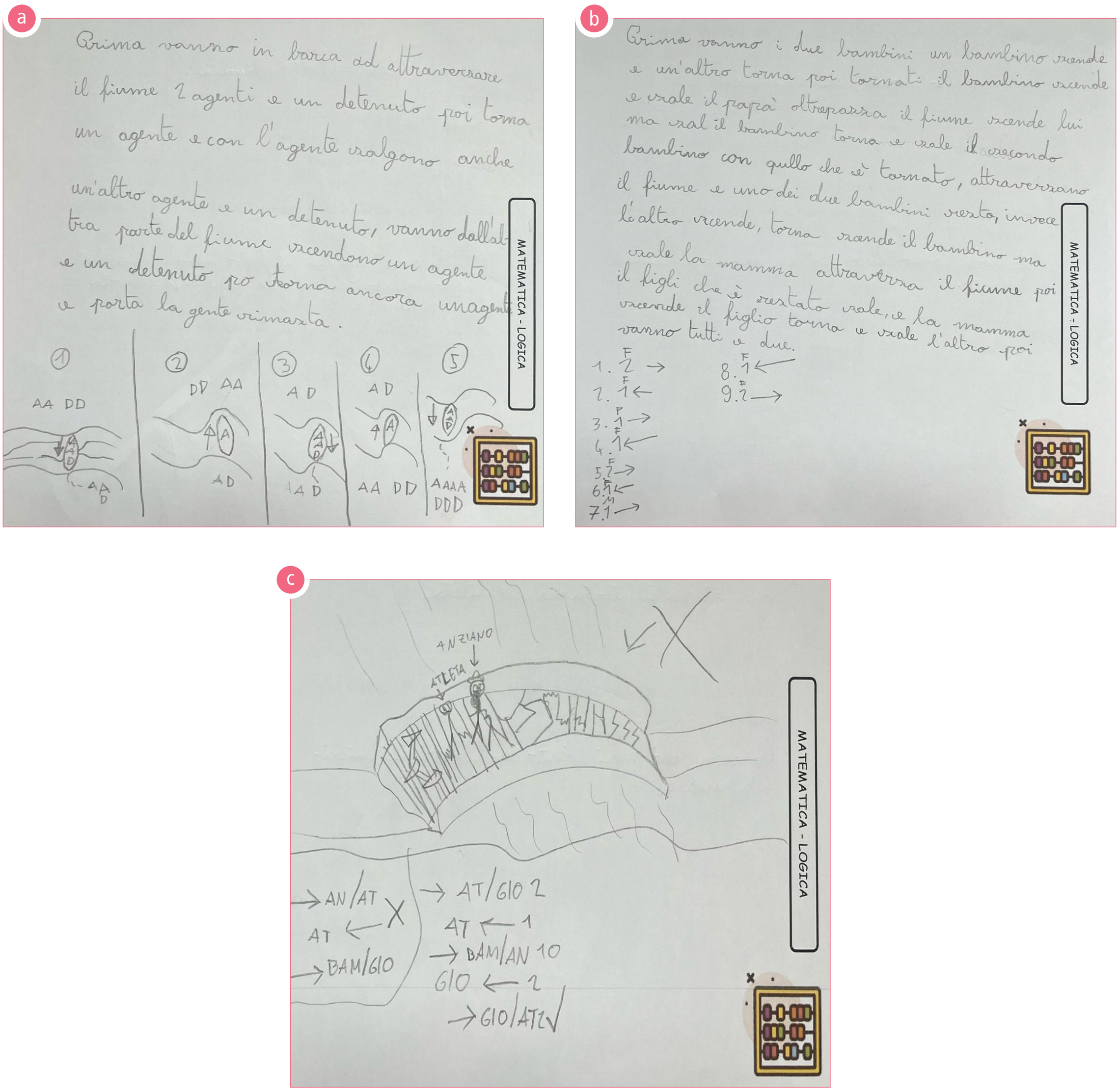


Figura 15a, b, c. Protocolli di T. dei problemi di attraversamento.

Nei primi due problemi T. inizia con una rappresentazione linguistica. Nel primo aggiunge in seguito una rappresentazione pittorica e simbolica accompagnata da un diagramma a frecce, mentre nel secondo si limita a una rappresentazione simbolica con un diagramma. Nel terzo problema invece abbandona la rappresentazione linguistica ma mantiene una rappresentazione pittorica, e una simbolica accompagnata da un diagramma a frecce.

Per quanto riguarda la scelta delle rappresentazioni simboliche, T. ha sempre deciso di utilizzare delle lettere per distinguere i vari attori in gioco: A/D per il primo problema, F/M/P per il secondo (aggiungendo 1 o 2 per indicare quando i due figli viaggiano separati o insieme) e AT/GIO/BAM/AN per il terzo problema. A differenza di alcuni suoi compagni che li hanno numerati o segnalati utilizzando simboli differenti, T. non ha fatto distinzione tra i quattro agenti, i tre detenuti o tra i due figli; avendo capito che per i diversi elementi valevano le stesse condizioni all'interno del problema.
Si possono inoltre notare delle evoluzioni nelle risoluzioni: nella prima T. ha aggiunto il fiume e le sue sponde, mostrando chi si trovava sulla barca e chi ai lati, avvicinandosi ancora a una rappresentazione pittorica. Nella seconda ha omesso i dettagli grafici indicando unicamente i numeri dei viaggi e chi si trovava sulla barca specificando con un diagramma a frecce se lo spostamento era di andata o di ritorno. Per il terzo problema invece ha omesso totalmente la rappresentazione linguistica, probabilmente perché aveva già affinato delle strategie nelle risoluzioni precedenti. In questo ultimo problema T. ha però iniziato con un primo tentativo di rappresentazione pittorica, che gli è servita per capire la configurazione generale degli elementi del problema, abbandonandola subito per procedere con due nuovi tentativi di rappresentazione simbolica accompagnata da un diagramma a frecce. In fase di colloquio T. ha riportato che la rappresentazione pittorica è stata abbandonata perché non sarebbe stata efficace ai fini della risoluzione, afferma infatti che «con il ponte disegnato non riuscivo a mettere tutti i viaggi, avrei dovuto disegnare altri mille ponti e diventava troppo lungo». Ha quindi proceduto utilizzando la stessa strategia che era risultata efficace nella precedente risoluzione.

Evoluzione delle strategie di N.

Prendendo ora le risoluzioni di un altro allievo, N., si possono osservare strategie e analogie differenti (**Figura 16a, b, c**).

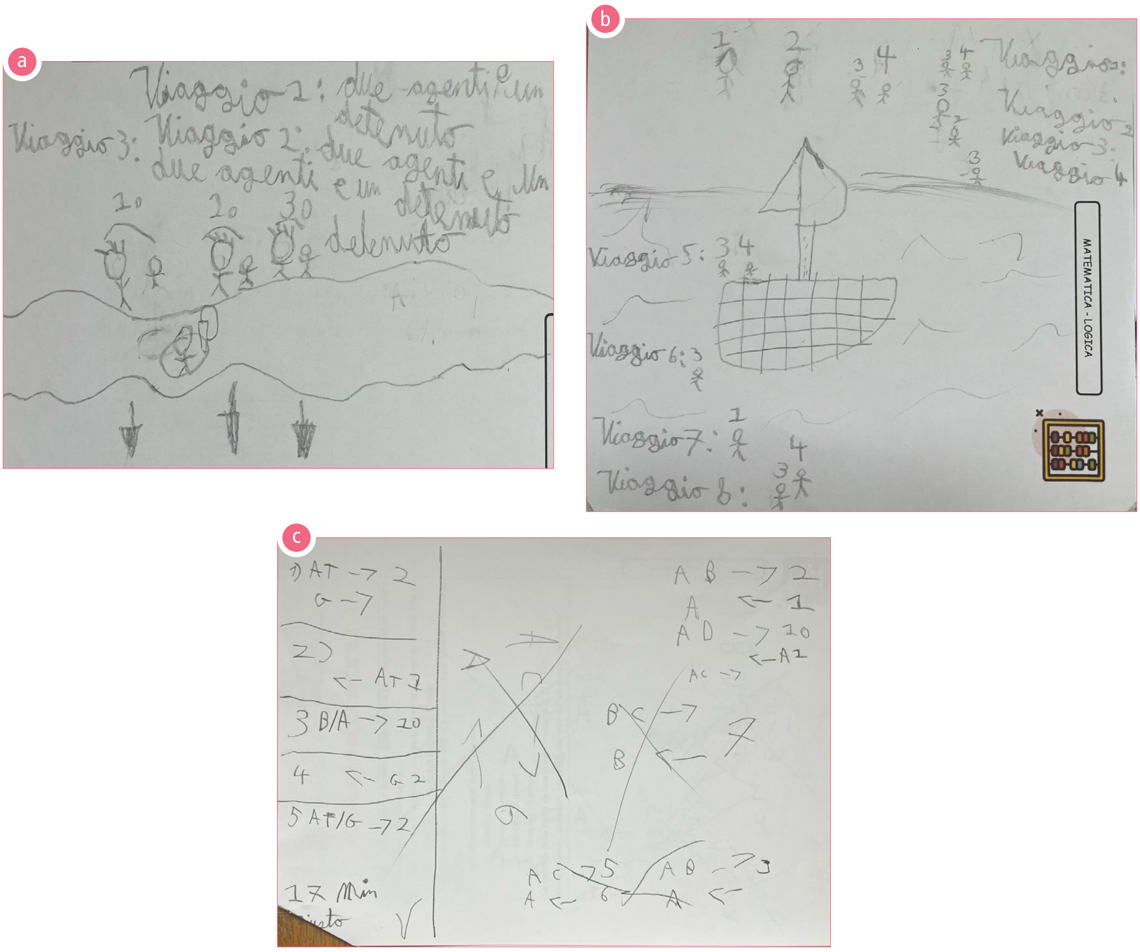


Figura 16a, b, c. Protocolli di N. dei problemi di attraversamento.

N. ha proceduto in maniera simile nei primi due problemi, inserendo una rappresentazione pittorica e iconica seguita da una linguistica molto sintetica. La sua rappresentazione iconica risulta essere più incompleta e meno comprensibile rispetto a quella di T. Nella seconda risoluzione si nota un'evoluzione: invece di scrivere chi si spostava in ogni viaggio, ha rappresentato gli individui con un disegno specificando con un numero di chi si trattasse.
Dalle immagini si può osservare come il metodo di N. cambia radicalmente nel terzo problema, questa variazione può essere dovuta all'osservazione dei protocolli dei compagni o a una necessità di essere più sintetico in quanto il problema risulta essere più complesso. Osservando i tentativi effettuati nel terzo problema si vede che non sono casuali, infatti N. ha più volte interrotto la risoluzione senza arrivare al termine accorgendosi di aver impiegato già troppo del tempo a disposizione senza riuscire quindi ad arrivare alla fine degli spostamenti con la torcia ancora funzionante. N. ha rappresentato i viaggi tramite una sintetizzazione del nome degli individui, accompagnandoli con un diagramma a frecce per indicare il tragitto di andata/ritorno inserendo anche i tempi di percorrenza. Così facendo ha avuto un controllo sulle tempistiche di utilizzo della torcia che gli ha permesso di individuare i vari attori in gioco e di modificare la propria strategia sulla base dei tentativi errati effettuati in precedenza facilitando la risoluzione nei tentativi successivi.

4.2 Fase 2: problemi con i fiammiferi

Lavorando su questi problemi molti allievi hanno avuto la necessità di sperimentare manualmente con matite o pennarelli a rappresentare i fiammiferi presenti nell'immagine di partenza (Figura 17).

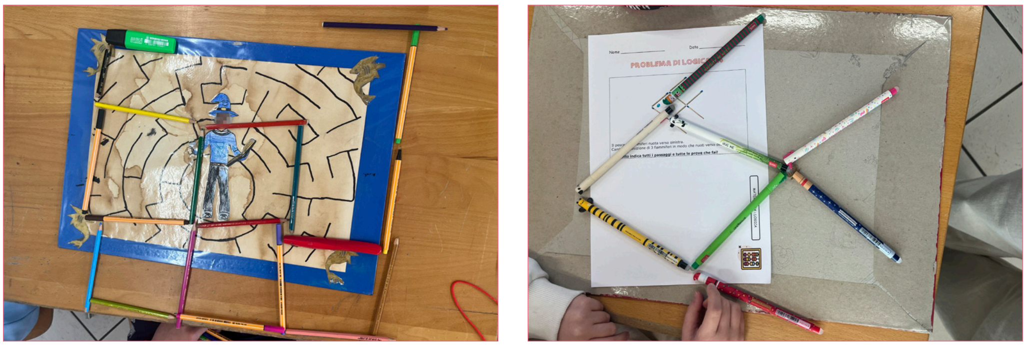
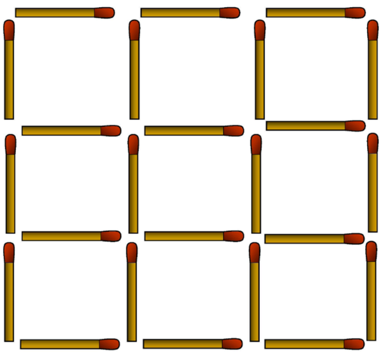


Figura 17. Esempi di manipolazione nei problemi con i fiammiferi.

4.2.1 Problema 4: "Cinque quadrati congruenti"

Rimuovi esattamente 4 fiammiferi per ottenere 5 quadrati congruenti.[9]



9. Tratto da https://www.fantasiaweb.it/v_progetto_scomescuola_2013/files/TUTTI-FIAMMIFERI.pdf.

Nel primo problema con i fiammiferi si può notare che tutti gli allievi eccetto uno hanno proceduto tramite una rappresentazione iconica raffigurando i fiammiferi con dei tratti rettilinei. L'immagine di partenza ha probabilmente influenzato gli allievi a procedere tramite una rappresentazione grafica, nonostante non fosse richiesto dal problema. Due allievi hanno usato un diagramma a frecce per mostrare i fiammiferi tolti, mentre cinque allievi hanno numerato i fiammiferi tolti, usando quindi una rappresentazione simbolica (**Figura 18**).

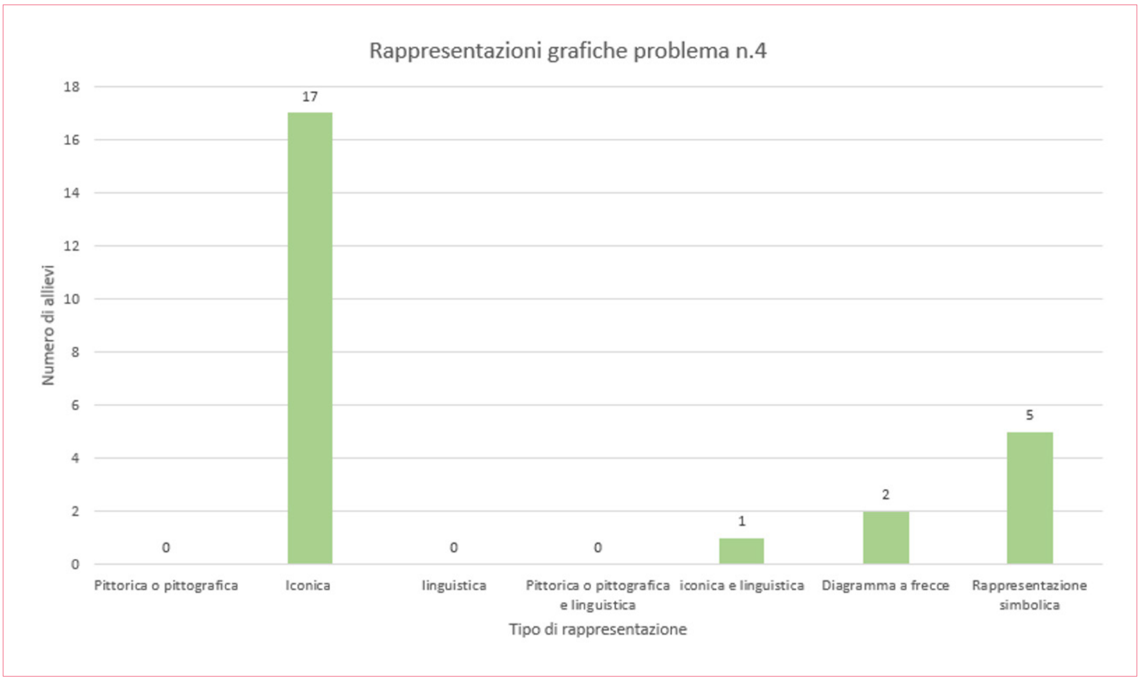


Figura 18. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Cinque quadrati congruenti".

Tra le varie risoluzioni si possono notare delle differenze: alcuni allievi hanno lavorato direttamente sull'immagine di partenza, altri hanno riprodotto lo schema marcando successivamente con una linea o una croce i fiammiferi da togliere (**Figura 19a, b, c, d**).

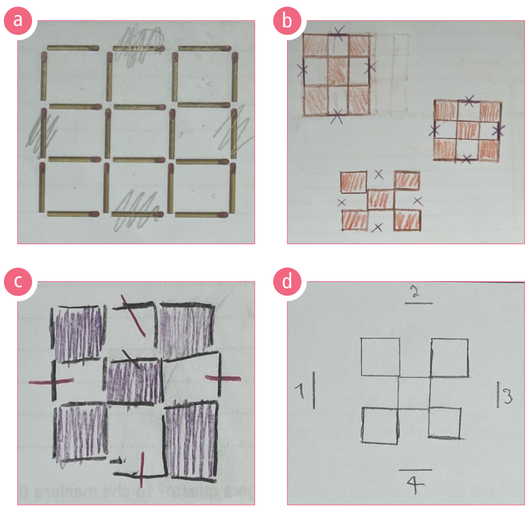
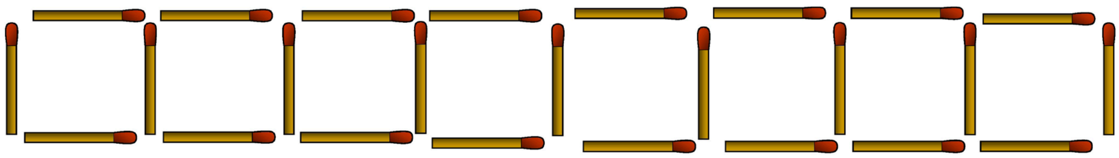


Figura 19a, b, c, d. Alcuni protocolli risolutivi del problema "Cinque quadrati congruenti".

In alcuni casi (**Figura 19a, b, c**) è stato ricreato lo schema rimuovendo i fiammiferi superflui. Nel protocollo in **Figura 19d** si può osservare un movimento più evidente, sembra che l'allievo in questione abbia cercato di mostrare effettivamente di aver rimosso i fiammiferi appoggiandoli di lato. In questo caso l'allievo ha utilizzato una rappresentazione simbolica numerando i 4 fiammiferi estratti dallo schema, questo metodo è stato molto efficace per rispettare i vincoli posti dal problema, difficoltà che hanno invece riscontrato molti altri compagni. In fase di discussione è emerso che molti provavano inizialmente a "cancellare" dei quadrati interi, eliminando ogni fiammifero che costituiva il lato di un quadrato venivano però già tolti quattro fiammiferi ogni volta che veniva eliminato il primo quadrato, non rispettando i vincoli del problema. Si è poi riflettuto sul fatto che bastasse rimuovere un fiammifero al centro di un lato esterno per "cancellare" un unico quadrato lasciando intatti quelli adiacenti, strategia che è risultata adatta per conseguire la risoluzione del problema.

4.2.2 Problema 5: "Otto quadrati congruenti"

> Questi 8 quadrati congruenti sono stati costruiti utilizzando 25 fiammiferi.
> In che modo puoi ottenere 8 quadrati congruenti utilizzando solo 22 fiammiferi?[10]



Nel secondo problema sui fiammiferi si osserva un'analogia rispetto al primo. Anche in questo caso la maggioranza degli allievi ha proceduto tramite una rappresentazione iconica, vi sono però due allievi che hanno aggiunto al disegno una spiegazione linguistica della risoluzione.
Come in precedenza gli allievi hanno risolto il problema in modalità differenti, alcuni utilizzando dei colori per mostrare le modifiche effettuate all'immagine di partenza, altri hanno raffigurato il prodotto finale e alcuni hanno utilizzato un diagramma a frecce per mostrare quali fiammiferi erano stati spostati. Chi ha usato una rappresentazione simbolica ha numerato i quadrati ottenuti muovendo i fiammiferi (**Figura 20**).

10. Tratto da https://www.fantasiaweb.it/v_progetto_scomescuola_2013/files/TUTTI-FIAMMIFERI.pdf.

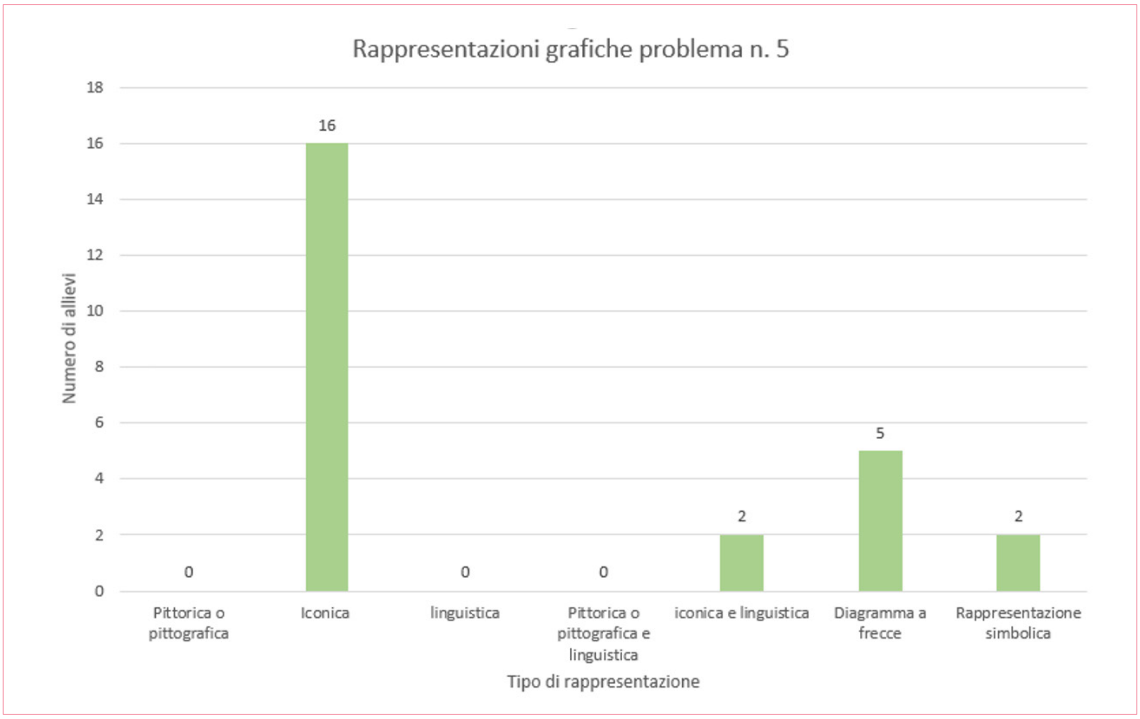


Figura 20. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Otto quadrati congruenti".

Come nel problema precedente, tra le risoluzioni si possono notare analogie e differenze. Alcuni allievi hanno lavorato direttamente sull'immagine di partenza eliminando 3 fiammiferi più a destra nella configurazione, rendendosi poi conto che rimangono solamente 7 quadrati costituiti da 22 fiammiferi (**Figura 21a**). Altri sono arrivati alla stessa conclusione provando però a disporre i 22 fiammiferi uno dopo l'altro a formare una fila di quadrati seguendo una configurazione analoga a quella proposta in partenza. Altri hanno provato a costruire gli 8 quadrati della configurazione finale partendo dalla configurazione del problema precedente: togliendo due fiammiferi da un vertice della configurazione si ottengono 8 quadrati, costituiti da 22 fiammiferi (**Figura 21b**). Altri ancora hanno disposto gli 8 quadrati in una configurazione in due file e hanno contato da quanti fiammiferi fosse composta, trovando quindi una soluzione accettabile al problema (**Figura 21c**).

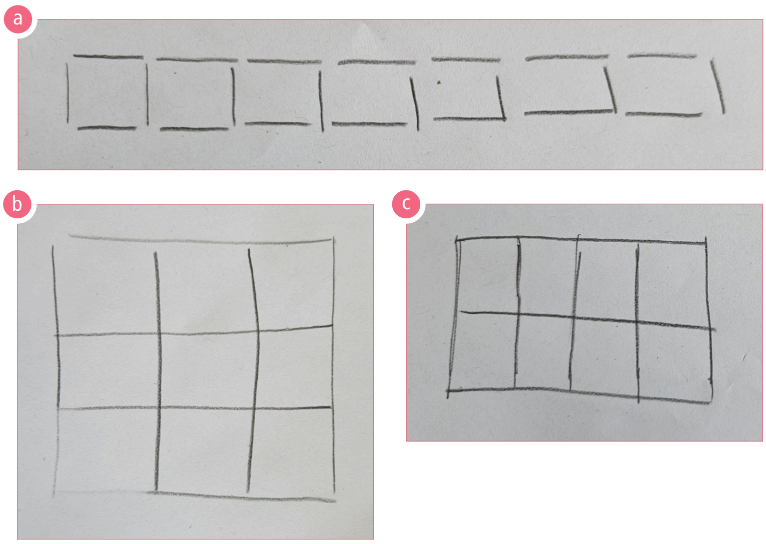
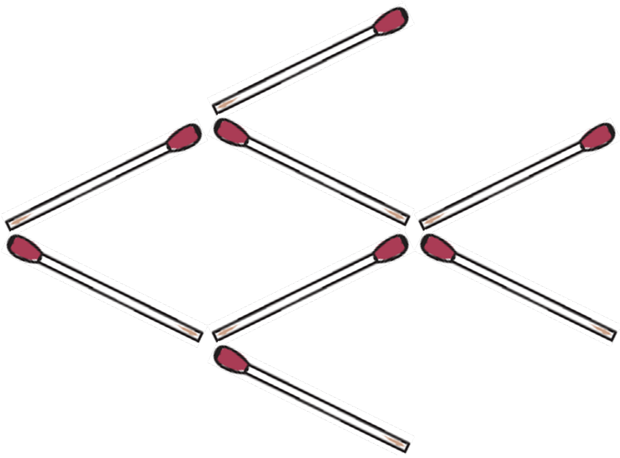


Figura 21a, b, c. Alcuni protocolli risolutivi del problema "Otto quadrati congruenti".

4.2.3 Problema 6: "Il pesce"

> Il pesce di fiammiferi nuota verso sinistra.
> Cambia la posizione di 3 fiammiferi in modo che nuoti verso destra.[11]



Si passa ora a problemi nei quali non vi è più la richiesta di rimuovere dei fiammiferi, ma di spostarne alcuni per capovolgere l'immagine di partenza. Dal grafico si evince che tutta la classe ha proceduto tramite la realizzazione di una rappresentazione iconica della soluzione e la maggior parte di loro ha usato delle frecce per rappresentare gli spostamenti dei fiammiferi nella configurazione (Figura 22).

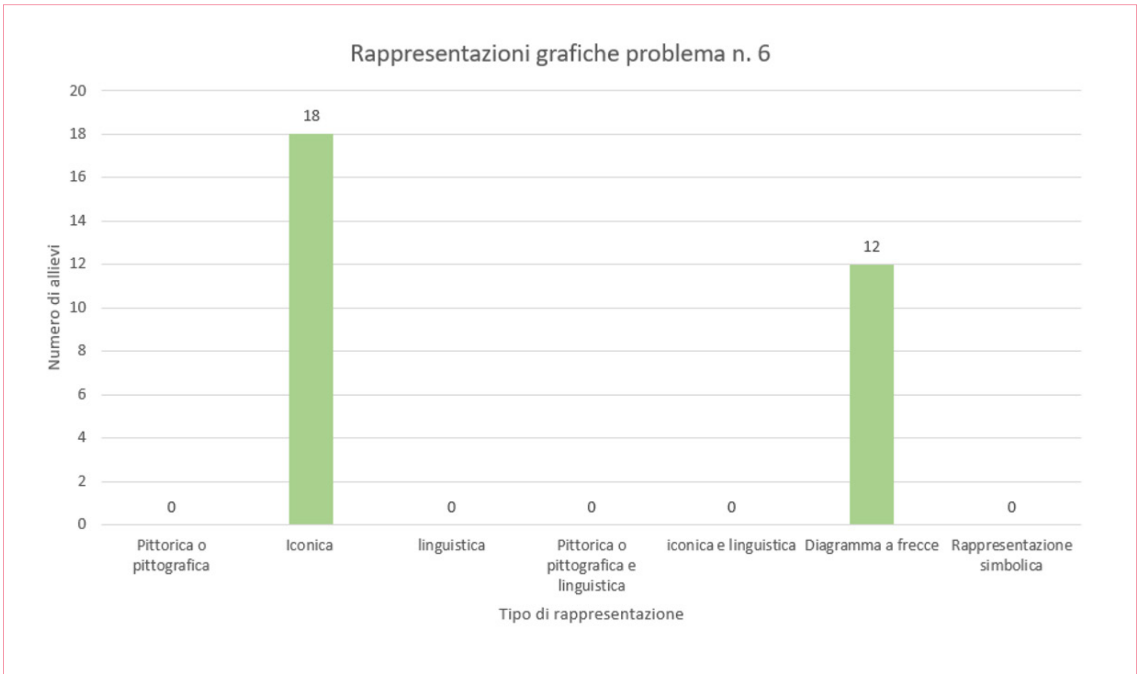


Figura 22. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Il pesce".

11. Riformulazione del problema "Il granchio" tratto da Ignátiev (1978, p. 12). Immagine elaborata da Sbaragli et al. (2021a).

Anche in questo caso, nonostante sia stato utilizzato lo stesso tipo di rappresentazione, all'interno della classe vi sono numerose differenze. Alcuni allievi hanno utilizzato dei colori per mettere in evidenza i diversi fiammiferi e facilitare l'osservazione degli spostamenti (**Figura 23a**). Altri hanno invece proceduto disegnando il pesce di partenza e accanto il risultato finale che si intendeva ottenere, paragonando poi le due immagini hanno spostato i fiammiferi per farle combaciare (**Figura 23b**). Infine, molti bambini hanno spostato (sfruttando delle frecce) i fiammiferi all'interno della configurazione (**Figura 23a, c**). In tutti i casi si può osservare l'intenzione di mostrare il movimento compiuto dai fiammiferi.

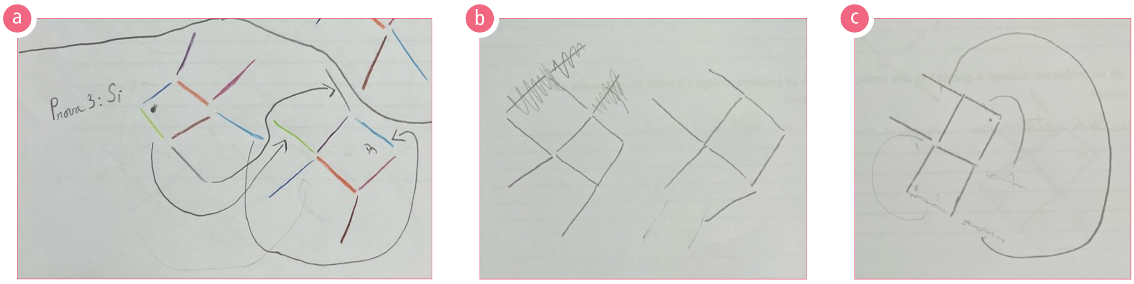
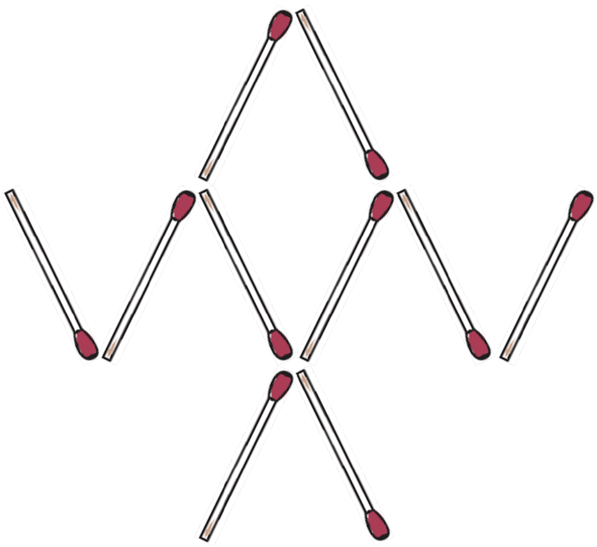


Figura 23a, b, c. Alcuni protocolli risolutivi del problema "Il pesce".

La maggior parte degli allievi ha necessitato di diversi tentativi per la risoluzione di questo problema. La più grande difficoltà è stata quella di comprendere che il pesce, nonostante debba essere capovolto da sinistra verso destra, compiuti gli spostamenti non si troverà esattamente nella medesima posizione, bensì risulterà essere traslato leggermente verso l'alto o verso il basso rispetto alla posizione di partenza.

4.2.4 Problema 7: "Il granchio"

Il granchio di fiammiferi cammina verso l'alto.
Cambia la posizione di 3 fiammiferi in modo che cammini verso il basso.[12]



12. Tratto da Ignátiev (1978, p. 12). Immagine elaborata da Sbaragli et al. (2021a).

Nelle risoluzioni dell'ultimo problema con i fiammiferi si può notare un'analogia nelle rappresentazioni grafiche utilizzate rispetto al problema precedente. Ancora una volta tutti gli allievi hanno risolto il problema usando rappresentazioni iconiche. In questo problema, analogo al problema "Il pesce", gli allievi hanno utilizzato nuovamente i colori per evidenziare i vari fiammiferi, così da rendere più evidente la posizione di ognuno di loro e gli spostamenti, arricchendo le illustrazioni con dei diagrammi a frecce per mostrare i movimenti dei fiammiferi (**Figura 24**). Rispetto al problema precedente vi sono stati meno studenti in difficoltà probabilmente perché consapevoli che anche in questo caso la configurazione finale risulta essere leggermente traslata rispetto all'originale.

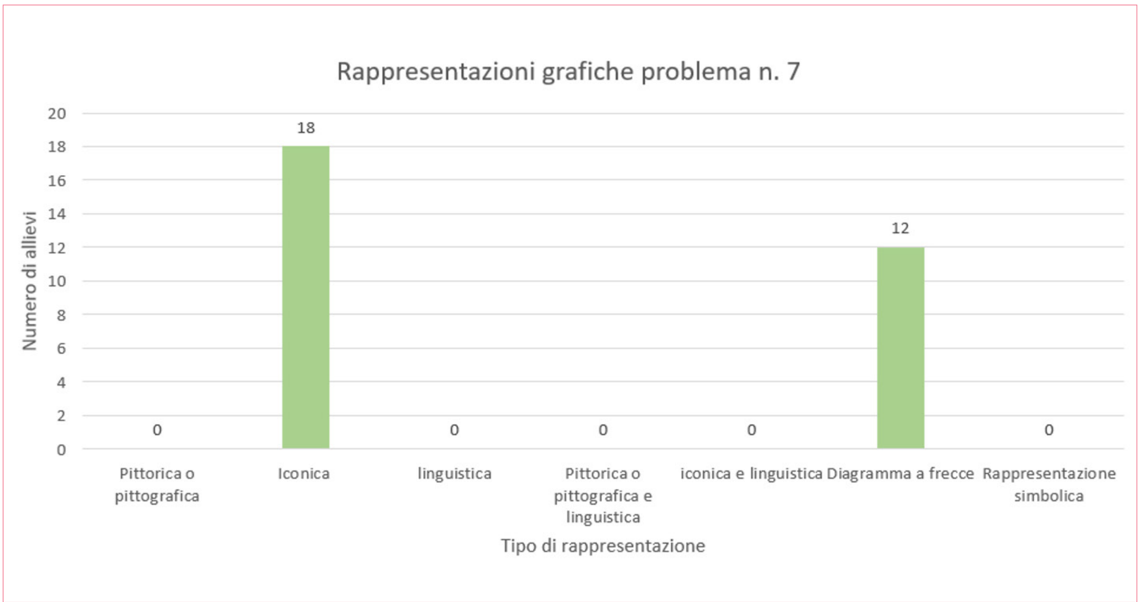


Figura 24. Modalità di rappresentazione nella risoluzione del problema "Il granchio".

4.2.5 Analogie nei problemi con i fiammiferi

Come per i problemi di attraversamento, anche per quelli con i fiammiferi è sempre stato chiesto agli allievi se conoscessero dei problemi analoghi. Per ogni problema, più della metà della classe ha affermato di non conoscere nessun problema simile (**Figura 25**).

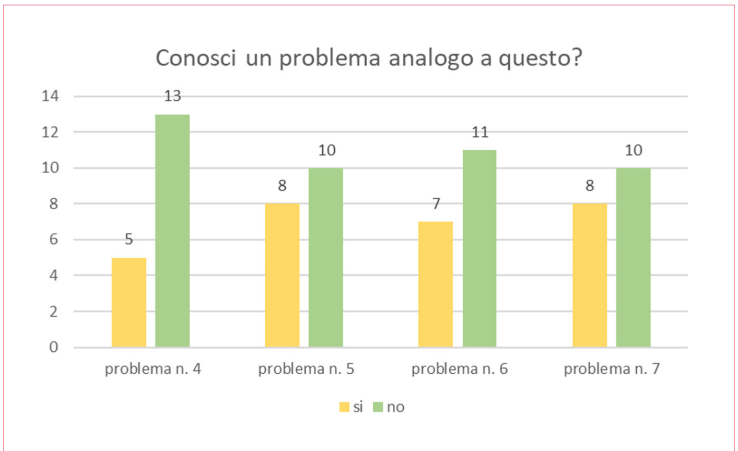


Figura 25. Analogie tra i problemi con i fiammiferi.

In riferimento al problema 4, gli allievi che hanno dichiarato di conoscere problemi analoghi hanno fatto riferimento a problemi di spostamento di monete o altri problemi con i fiammiferi visti su libri di enigmi e indovinelli. Per gli altri tre problemi, spesso gli allievi che hanno risposto di sì hanno però specificato che conoscere un problema analogo non è stato di aiuto per la nuova risoluzione, anche se, in fase di colloquio individuale, hanno poi dichiarato il contrario. Si può quindi pensare che non sia chiaro per gli allievi il significato di problema analogo, in ogni caso si possono osservare numerose analogie e similitudini nella risoluzione dei problemi, sia globalmente, sia considerando i singoli individui.

Evoluzione delle strategie di T.

Come per i problemi di attraversamento, si prendono ora in considerazione le quattro risoluzioni di un singolo allievo per analizzarle nello specifico. Nelle quattro risoluzioni di T. relative ai problemi con i fiammiferi si possono notare dei pattern ricorrenti. T. ha sempre raffigurato in modo iconico la soluzione. Nei problemi 4 e 5 l'allievo ha utilizzato delle linee per indicare quali fossero i fiammiferi da rimuovere (**Figura 26a, b**), mentre nei problemi 6 e 7 ha introdotto l'utilizzo di colori per distinguere i fiammiferi (**Figura 26c, d**). Nel primo tentativo del problema 4 (**Figura 26a**, indicato con "P. 1" che sta per "prova 1") T. ha proceduto eliminando i quattro fiammiferi centrali e un quinto al centro a destra, si è accorto che questa risoluzione era errata in quanto non rispettava i vincoli e non permetteva l'ottenimento di cinque quadrati congruenti. Nel secondo tentativo (indicato con "P. 2") ha correttamente rimosso i fiammiferi (**Figura 26a**). T. ha inoltre affermato: «Quando ho provato la prima volta mi sono accorto che togliendo quei fiammiferi lasciavo dei quadrati aperti con solo tre lati e non quattro».

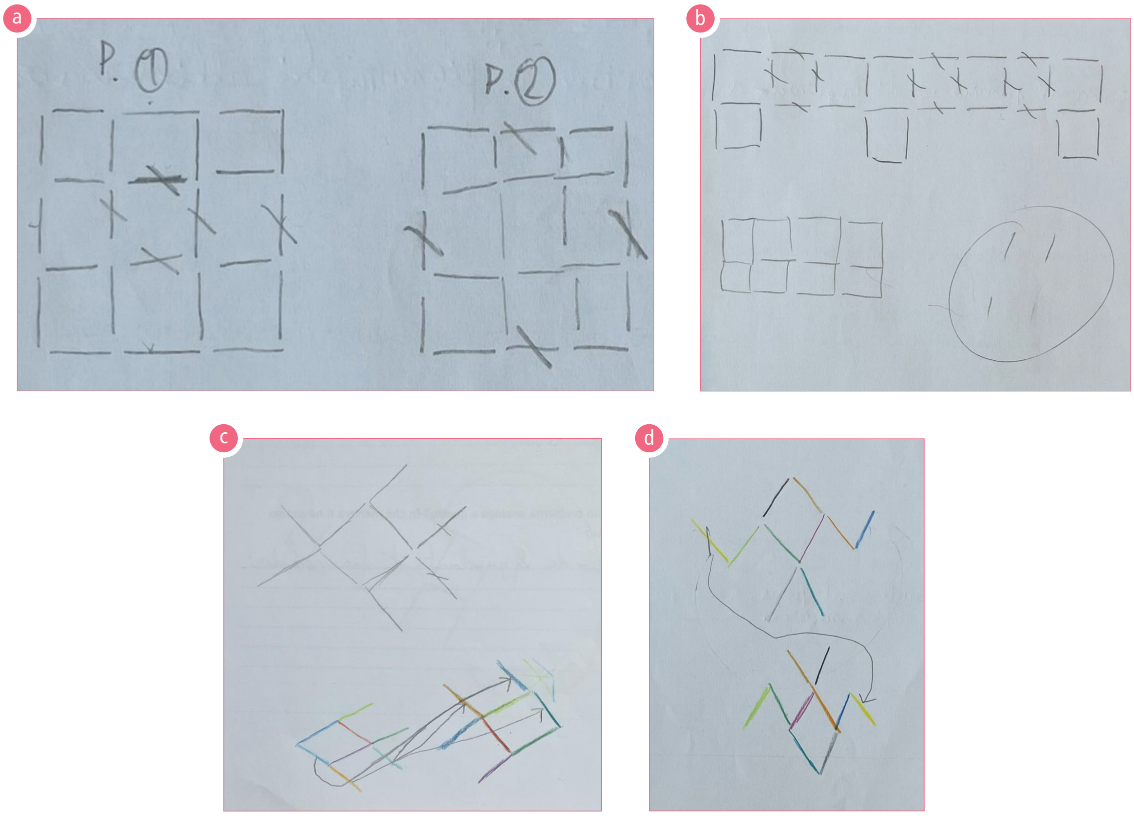


Figura 26a, b, c, d. Protocolli di T. nei problemi con i fiammiferi.

La stessa difficoltà si è ripresentata nel problema successivo, dove l'allievo, ancora tramite una rappresentazione iconica, ha rimosso dei fiammiferi lasciando dei «quadrati aperti». Dal primo tentativo (Figura 26b in alto) si può osservare che T. aveva compreso di non dover solamente cancellare dei fiammiferi ma anche di spostarne altri al fine di utilizzare uno stesso fiammifero come lato di più quadrati. Nel secondo tentativo (Figura 26b in basso) si può notare un'analogia, anche in questo caso T. ha utilizzato la strategia di sfruttare un fiammifero per più quadrati giungendo alla risoluzione del problema. Nel problema 6 si nota un'evoluzione: nel primo tentativo (Figura 26c in alto) T. ha ripetuto la strategia dei problemi precedenti, tracciando una linea sui fiammiferi da spostare cambiando il loro posizionamento. Nel secondo tentativo (Figura 26c in basso) ha invece introdotto l'utilizzo dei colori per identificare ogni singolo fiammifero accompagnando la rappresentazione iconica con un diagramma a frecce per mostrare quali fiammiferi sono stati spostati. Ottenendo buoni risultati, T. ha utilizzato la stessa strategia anche nel problema 7 (Figura 26d), questa volta però ha indicato con una freccia lo spostamento di un unico fiammifero.

Evoluzione delle strategie di N.

Considerando ora le risoluzioni di N., si evince che, tranne nel problema 5 (Figura 27b), l'allievo ha sempre necessitato di più tentativi per l'ottenimento della soluzione e ha sempre utilizzato una rappresentazione iconica.

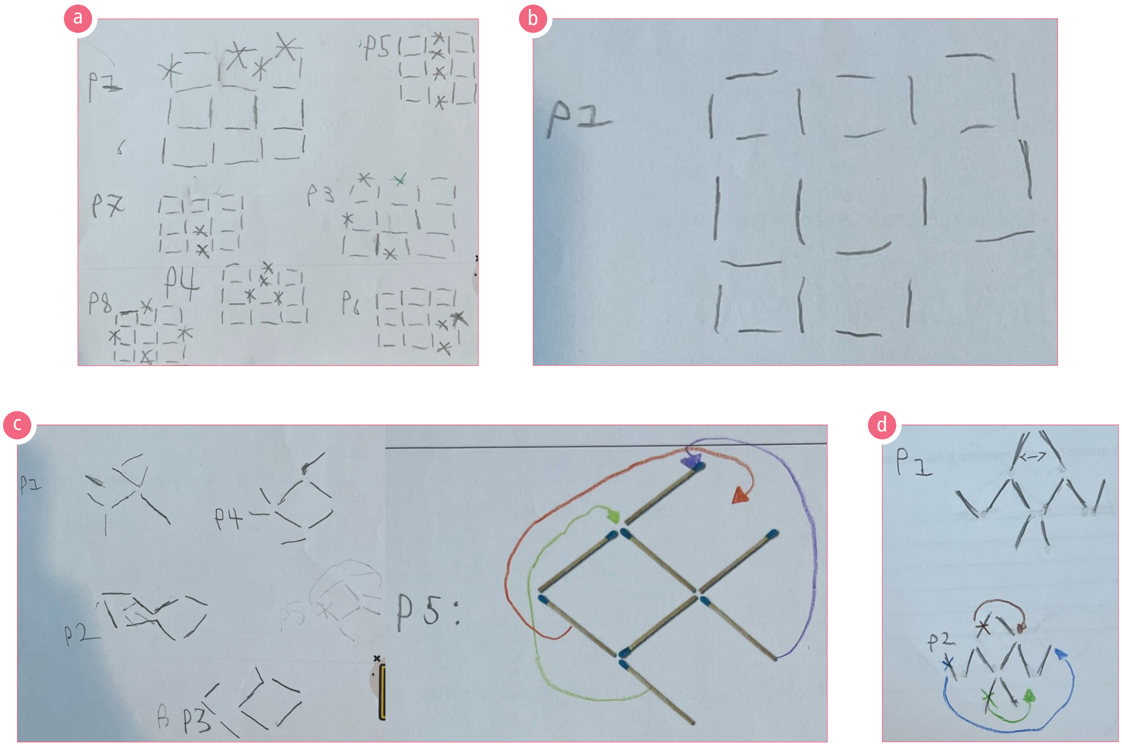


Figura 27a, b, c, d. Protocolli di N. nei problemi con i fiammiferi.

Nel problema 4 il bambino ha effettuato sette tentativi prima di ottenere la soluzione (Figura 27a). In tutti i tentativi si può notare una difficoltà ricorrente: la rimozione di fiammiferi lasciando dei quadrati incompleti. Nella sesta e settima risoluzione l'allievo si è interrotto togliendo solo tre e rispettivamente due fiammiferi. Si può ipotizzare che N. abbia fatto un confronto con i tentativi precedenti comprendendo di ripetere un errore. Per quanto riguarda il problema successivo (svolto l'ora successiva) N. ha affermato: «Questo è stato facilissimo, avevo disegnato così tante volte il primo problema che sapevo

fossero 9 quadrati con 24 fiammiferi. Ora devo disegnare 8 quadrati con 22 fiammiferi, quindi mi basta togliere questi due in basso» (Figura 27b). Sembra che l'allievo non abbia fatto riferimento all'immagine del problema 5, avendo ancora in mente quello precedente.
Nel problema 6 si possono notare delle difficoltà nel comprendere quali fiammiferi spostare per poter raffigurare il pesce (Figura 27c). N. ha inizialmente utilizzato una rappresentazione iconica disegnando i fiammiferi, mentre nella risoluzione finale (indicata con "P5") ha utilizzato delle frecce colorate direttamente sull'immagine di partenza per mostrare gli spostamenti. La stessa situazione, con minori difficoltà, si è riproposta nell'ultimo problema, in un primo tentativo (Figura 27d, indicato con "P1") N. ha raffigurato in modo iconico il granchio inserendo una freccia ad indicare che nella configurazione finale i due fiammiferi in alto avrebbero dovuto avere orientamenti opposti; ha poi proceduto con un secondo tentativo finale (Figura 27d, indicato con "P2") mostrando con dei colori gli spostamenti da effettuare (diagramma a frecce). In entrambi i problemi riguardanti gli animali l'allievo, a differenza dei suoi compagni, non ha mai rappresentato l'immagine finale del pesce o del granchio capovolto.

4.3 Fase 3: torre di Hanoi

Per la risoluzione della torre di Hanoi ogni allievo ha lavorato con una versione fisica del gioco creata in aula (Figura 28). Rispetto alla versione classica, vengono utilizzati dischi di cartone colorati (uguali per tutti i bambini) e una griglia con tre quadrati (A, B e C) in sostituzione ai tre pioli, dunque il gioco risulta come la torre di Hanoi classica ma vista dall'alto.

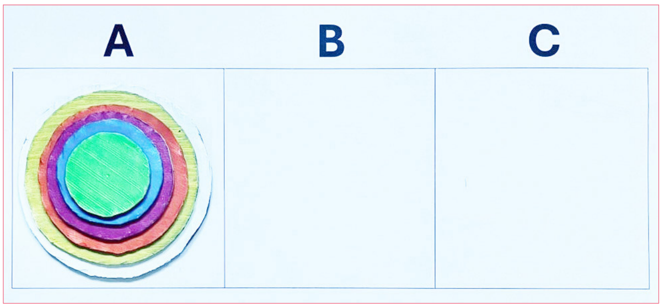


Figura 28. Torre di Hanoi realizzata in classe.

4.3.1 Problema 8: "Torre di Hanoi con 3 dischi"

Come si evince dal grafico (Figura 29) le rappresentazioni utilizzate dalla classe sono di tipo pittorico o iconico. In tutte le risoluzioni si può osservare una rappresentazione simbolica legata al numero di mosse effettuate dagli alunni. Quasi tutti hanno infatti inserito sulla sinistra o sulla destra un numero legato ai passaggi svolti. Alcuni hanno inserito la mossa «0» che rappresenta lo stato iniziale della risoluzione, con la torre impilata sulla sinistra, mentre altri hanno iniziato dalla «1» inserendo già il primo spostamento.

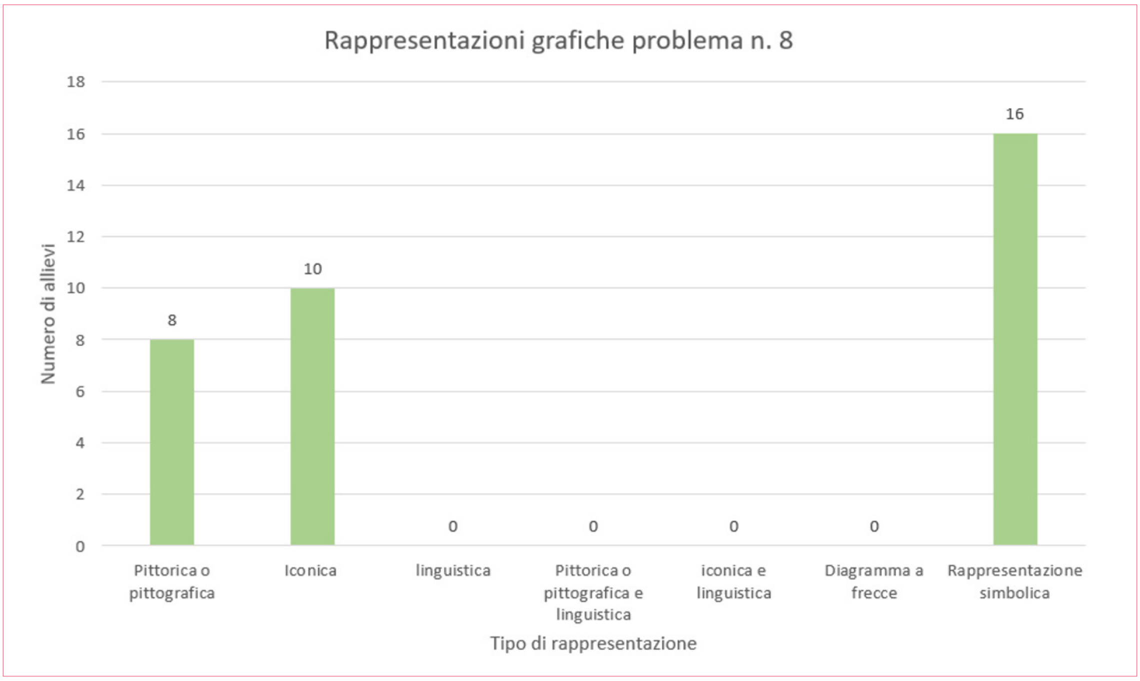


Figura 29. Modalità di rappresentazione nella risoluzione della "Torre di Hanoi con 3 dischi".

A differenza dei problemi precedenti, tutte le rappresentazioni proposte dai bambini sono iconiche o pittoriche, simili agli esempi riportati in **Figura 30a, b**. Tutti hanno disegnato la griglia mostrando gli spostamenti ad ogni mossa. Nel primo protocollo (pittorico, **Figura 30a**) l'allieva ha riprodotto fedelmente la griglia e i tre dischi iniziali, disponendoli in ordine uno sopra l'altro. Nel secondo (iconico, **Figura 30b**), invece, l'allieva ha stilizzato i dischi utilizzando delle linee colorate, posizionandole anche in questo caso in ordine crescente una sull'altra. Tutti gli allievi hanno manipolato la torre di Hanoi reale, ma solo alcuni hanno riportato sulla scheda anche i tentativi errati. La maggior parte degli allievi ha unicamente rappresentato la risoluzione corretta.

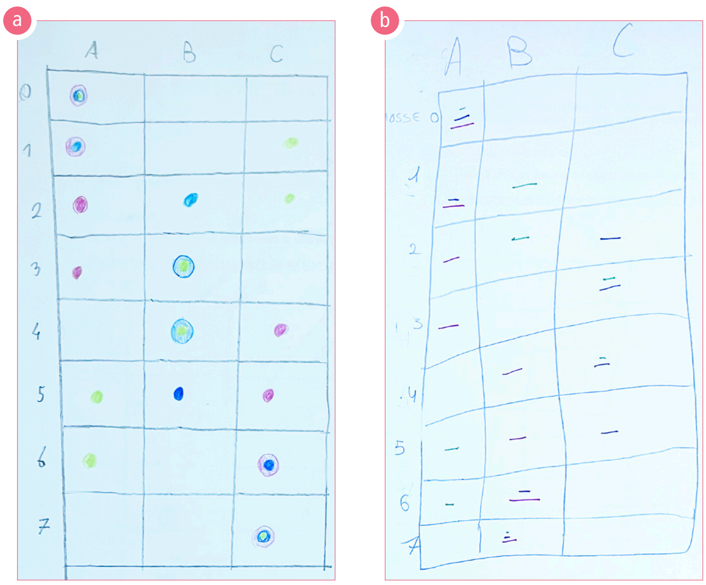


Figura 30. Esempi di rappresentazione del problema 8: **a)** Risoluzione pittorica; **b)** Risoluzione iconica.

4.3.2 Problema 9: "Torre di Hanoi con 4 dischi"

Anche in questo caso gli allievi hanno optato per una rappresentazione pittorica o iconica (Figura 31). Questa volta però risultano essere notevolmente più numerose quelle iconiche, probabilmente perché il numero di mosse da effettuare è aumentato e risulta più immediato stilizzare la raffigurazione dei vari dischi della torre. Così come per il problema 8 le rappresentazioni degli allievi sono molto simili tra loro, differiscono unicamente per le mosse effettuate: alcuni sono riusciti a spostare l'intera torre compiendo il numero minimo di mosse possibili, ovvero 15, altri invece hanno ottenuto la soluzione utilizzando delle mosse in più.

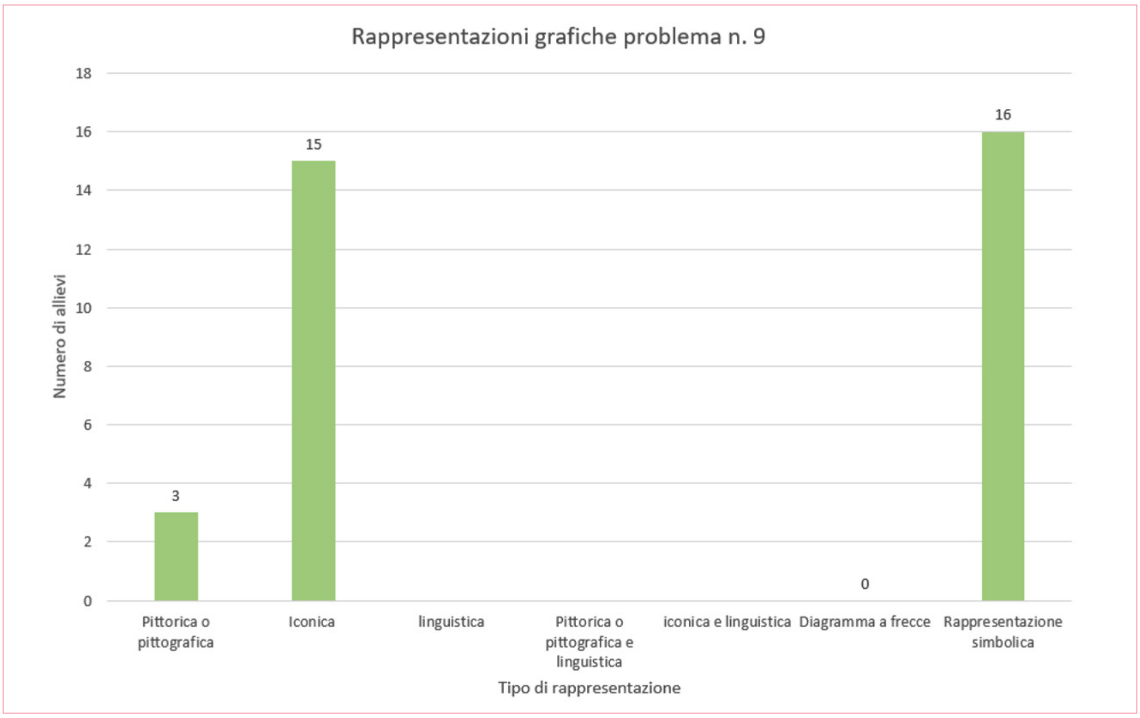


Figura 31. Modalità di rappresentazione nella risoluzione della "Torre di Hanoi con 4 dischi".

4.3.3 Problema 10: "Torre di Hanoi con 5 dischi"

Anche nell'ultimo problema quasi la totalità della classe ha proceduto tramite una rappresentazione iconica degli spostamenti (Figura 32).

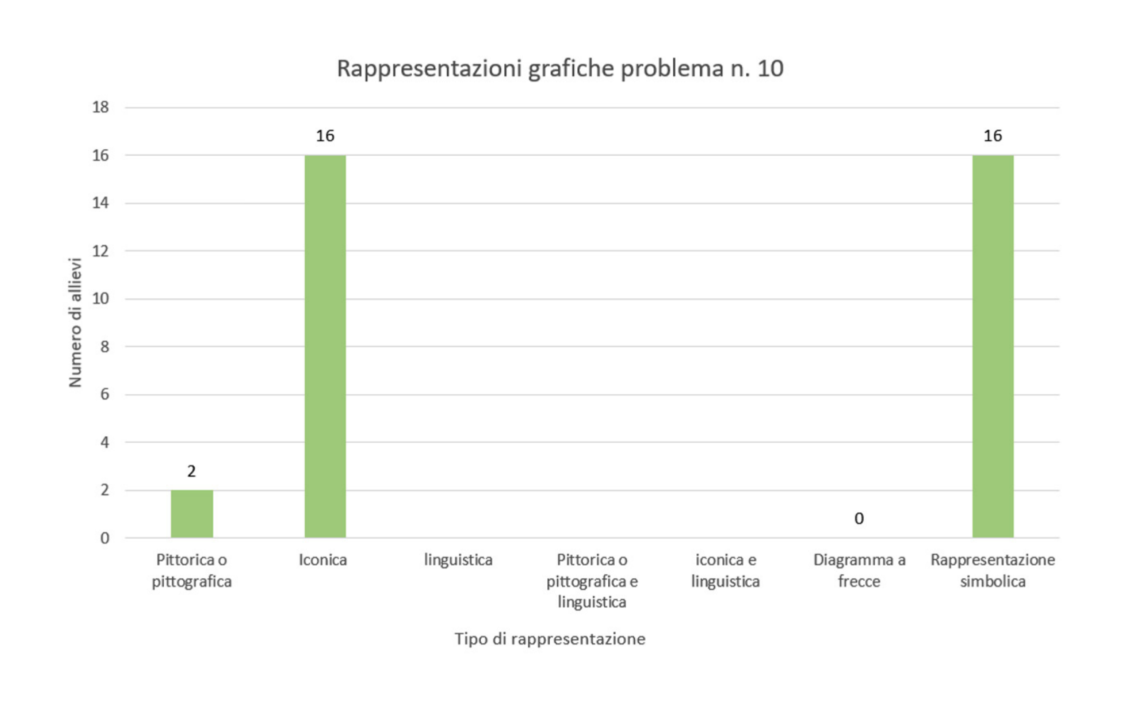


Figura 32. Modalità di rappresentazione nella risoluzione della "Torre di Hanoi con 5 dischi".

Oltre ai modelli riportati in Figura 30, in questo caso un allievo (S.) ha utilizzato una rappresentazione differente e più efficace disegnando in una tabella con le celle molto strette (che non gli permettono di raffigurare i dischi uno sopra l'altro come nella realtà) dei cerchietti a rappresentare i dischi, posizionando in ogni cella a sinistra il disco che si trova più in basso e in ordine alla sua destra gli altri (Figura 33).

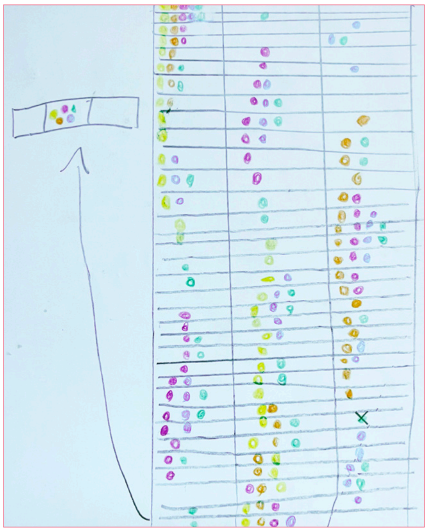


Figura 33. Protocollo di S., rappresentazione iconica.

Molti bambini hanno identificato nel corso della risoluzione dei tre problemi la sequenza di spostamenti che permette di risolvere la torre di Hanoi indipendentemente dal numero di dischi utilizzati. Ripetendo sempre determinati movimenti (mettere il cerchio più piccolo avanti di una posizione, poi eseguire l'unica altra mossa possibile), si riesce infatti a procedere allo spostamento completo della torre. Scoprire questa strategia vincente ha permesso ai bambini di raffigurare in maniera iconica o pittorica la soluzione senza più sperimentare manualmente con i materiali concreti a disposizione, risolvendo il gioco strategico al primo tentativo. Ha inoltre permesso loro di generalizzare il problema, gli allievi che hanno individuato la strategia vincente saranno sempre in grado di completare lo spostamento della torre indipendentemente dal numero di dischi presenti.

4.3.4 Analogie nei problemi della torre di Hanoi

Nel primo problema sulla torre di Hanoi solo un bambino ha dichiarato di conoscere il gioco e di averci già giocato senza però aver riflettuto sulle regole e sulle strategie risolutive (Figura 34). Nonostante si trattasse esattamente della stessa torre, nei problemi 9 e 10, vi sono alcuni allievi che hanno dichiarato di non conoscere problemi analoghi. Si può ipotizzare che gli allievi abbiano interpretato la domanda pensando ad altri giochi analoghi ma diversi dalla torre di Hanoi.

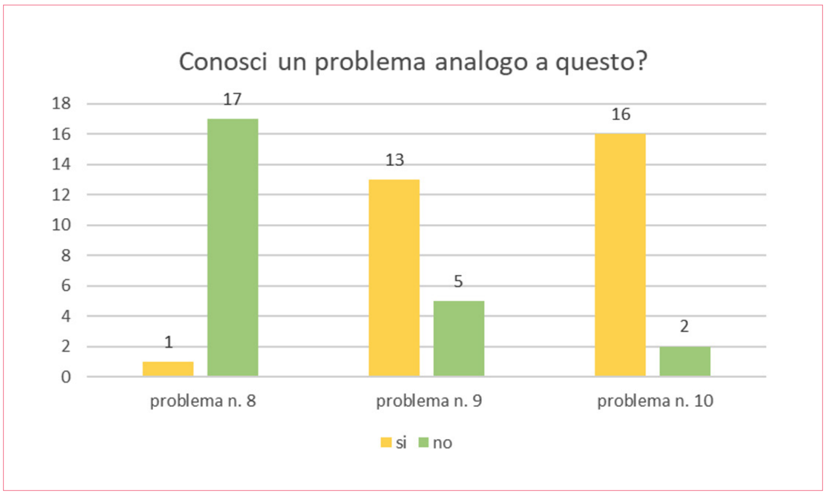


Figura 34. Analogie nella risoluzione della torre di Hanoi.

Vi è un'analogia evidente nelle tipologie di rappresentazioni pittoriche e iconiche raffigurate dagli allievi. In alcuni casi è possibile osservare delle analogie anche nella sequenza di spostamenti, come l'uso del meccanismo risolutivo che lo stesso allievo utilizza nella risoluzione di problemi successivi. In altri casi invece i movimenti non seguono una logica ricorrente, ma rispettano i vincoli posti dal problema.

Evoluzione delle strategie di T.

Osservando le risoluzioni di T., si può notare che nella risoluzione con tre dischi l'allievo ha proceduto tramite una rappresentazione pittorica (Figura 35a), mentre in quelle successive è passato ad una iconica (Figura 35b, c). Questo cambiamento può essere dovuto all'aumento dei dischi e di conseguenza delle mosse da raffigurare, la rappresentazione iconica risulta essere più stilizzata e di conseguenza più veloce.

Figura 35a, b, c. Protocolli di T. nella risoluzione della torre di Hanoi.

Osservando nello specifico le mosse effettuate si può vedere che, nel problema 8 non vi è ancora l'utilizzo di una sequenza ricorrente di movimenti (**Figura 35a**). L'allievo riesce comunque a trovare la soluzione con sette spostamenti (mosse minime per risolvere la torre con tre dischi). Nel problema 9 si nota un'evoluzione: T. ha individuato la sequenza risolutiva (**Figura 35b**). Si osserva infatti che il bambino ripete sempre le seguenti mosse: sposta il cerchio più piccolo in avanti di una cella e successivamente esegue l'unica mossa possibile. Una volta arrivato con il cerchio più piccolo nella casella più a destra lo riporta in quella a sinistra continuando ad applicare l'algoritmo. Nel problema 10 T. ripete lo stesso algoritmo trovando la soluzione con facilità (**Figura 35c**).

Evoluzione delle strategie di N.

N., d'altro canto, ha proceduto in tutti e tre i problemi utilizzando una rappresentazione iconica della soluzione (**Figura 36a, b, c**).

Figura 36a, b, c. Protocolli di N. nella risoluzione della torre di Hanoi.

A differenza del compagno, N. non ha mai indicato il numero di mosse di fianco alla griglia, questo lo ha obbligato quindi in un secondo momento a dover ricontare le mosse effettuate. La risoluzione del problema 8 è avvenuta al primo tentativo (**Figura 36a**), anche N. non ha utilizzato la sequenza risolutiva

come il compagno T. Il problema 9 è risultato per lui più complesso, necessitando di tre tentativi (Figura 36b). Nel primo l'allievo si è interrotto a metà della quinta mossa, in quanto ha compreso di essere tornato nella stessa posizione della terza mossa. Nel secondo ha interrotto il processo all'ottava mossa, mentre il terzo tentativo si è concluso in 17 spostamenti. In quest'ultima risoluzione N. ha riprodotto le prime quattro mosse uguali ai tentativi precedenti, apportando però delle modifiche nel quinto spostamento. Si può notare una ciclicità nei suoi movimenti, l'allievo ha sempre iniziato spostando il primo disco verso destra di due caselle, il secondo nella casella al centro spostandoci poi sopra il più piccolo. Lo stesso processo è stato poi ripetuto con terzo disco, aggiustando e modificando le mosse successive al fine di rispettare i vincoli posti dal problema.
Anche nella risoluzione del problema 10, che vede la torre formata da cinque dischi, N. riporta le prime 8 mosse in maniera analoga al problema 9 (Figura 36c). Apporta poi delle modifiche in quanto si trova a dover spostare un disco in più. La torre viene spostata in 34 mosse finali, l'allievo non ha scoperto la sequenza risolutiva più efficace; è però riuscito a trovare la propria strategia per risolvere la torre.

5 Riflessioni sul percorso

5.1 Rappresentazioni grafiche, evoluzione verso l'efficacia

Uno degli aspetti più rilevanti riscontrati nelle analisi del percorso è l'evoluzione nell'uso delle rappresentazioni da parte degli allievi. Inizialmente, molti allievi realizzavano rappresentazioni pittoriche dettagliate, ma non sempre efficaci. In alcuni casi, soprattutto nei problemi di attraversamento, gli allievi accompagnavano i disegni a descrizioni linguistiche, questo porterebbe alla conferma che le rappresentazioni iniziali non erano sufficientemente esemplificative e necessitavano di un'ulteriore spiegazione. Proseguendo nell'analisi dei problemi nelle diverse fasi si può osservare un passaggio verso le rappresentazioni iconiche e simboliche, che risultano essere più essenziali, più chiare e comode nella risoluzione del problema. I diagrammi a frecce, usati da quasi tutti gli allievi in accompagnamento alle diverse rappresentazioni, non solo indicano lo spostamento dei personaggi, ma rappresentano la comprensione della dinamicità dei vari problemi affrontati. Questa rappresentazione risulta infatti essere molto efficace sia in fase di pianificazione che di sviluppo del piano (Polya, 1967).
Dai protocolli degli allievi si può notare che le rappresentazioni sono diventate progressivamente più sintetiche e schematiche, suggerendo una maggiore consapevolezza degli allievi sull'utilizzo dei disegni per comunicare e rappresentare la risoluzione. Alcuni di loro hanno infatti sviluppato un proprio stile personale di rappresentazione che si è riprodotto nelle varie tipologie di problemi.

5.2 Dalla sperimentazione all'ottimizzazione

Un altro aspetto centrale del percorso è stato l'approccio alla risoluzione con diverse strategie risolutive. Inizialmente è evidente che molti allievi cercassero la soluzione "a caso" con più tentativi, utilizzando la stessa rappresentazione o rappresentazioni diverse fino ad ottenere quella corretta ma senza avere un piano risolutivo preciso. Anche in questo caso si è vista una notevole evoluzione con la progressione del percorso, caratterizzata da una diminuzione del numero di tentativi necessari a incontrare la soluzione. Come già ipotizzato in precedenza, molti allievi manipolando e sperimentando manualmente materiali nelle fasi 2 e 3, non hanno riportato sulla scheda tutti i tentativi realmente effettuati, quelli che lo hanno fatto però hanno dimostrato di avere maggiore consapevolezza nello sfruttamento dei tentativi precedenti. In più casi, infatti, si può osservare come i bambini abbiano più volte interrotto le strategie a metà grazie all'osservazione e al confronto con quelle già attivate. Le nuove prove non sono più casuali ma orientate, dimostrando come gli allievi abbiano maggiore consapevolezza e controllo sull'efficacia delle loro risoluzioni. In molti casi l'errore diventa l'occasione per tornare a ripensare alla strategia applicata, al fine di verificarne l'efficacia, modificarla o addirittura cambiarla. Questa evoluzione porta l'allievo a considerare l'errore come un passo verso la soluzione e non un fallimento. Si osserva quindi una reale connessione alle fasi della risoluzione di un problema proposte da Polya (1967).

5.3 Analogia e transfer, connessioni che nascono spontaneamente

Relativamente al ruolo dell'analogia, dai dati emerge che, nonostante siano pochi gli allievi ad aver dichiarato di riconoscere le somiglianze tra i problemi proposti, molti hanno inconsapevolmente portato a termine la risoluzione utilizzando strategie già applicate nelle risoluzioni precedenti. La capacità di trasferire quanto già svolto in un problema a un altro è emersa da un lato a livello grafico, con l'utilizzo ripetuto delle stesse rappresentazioni pittoriche o iconiche, con l'inserimento di diagrammi a frecce per indicare un movimento o con l'uso di colori per evidenziare alcuni particolari; dall'altro a livello procedurale, con sequenze di mosse simili o identiche; e infine a livello cognitivo, come ad esempio nell'identificazione dell'algoritmo risolutivo della torre di Hanoi che ha permesso di generalizzare la risoluzione indipendentemente dal numero di dischi utilizzati. Anche se utilizzata in maniera inconsapevole, l'analogia permette agli allievi di affrontare il problema recuperando informazioni e conoscenze pregresse utili nella risoluzione.

6 Conclusioni

Il percorso didattico presentato in questo articolo, costituito da problemi e giochi motivanti per gli allievi, ha permesso di lavorare in modo efficace sulle loro competenze relative alle rappresentazioni grafiche e alle analogie nella risoluzione di problemi. L'analisi dei dati raccolti durante la sua realizzazione, infatti, permette di osservare la doppia relazione descritta in precedenza tra l'uso e l'evoluzione delle strategie di rappresentazione grafica e l'emergere dei processi di analogia nella risoluzione di problemi.

Le diverse rappresentazioni e in particolare quelle grafiche emerse nella sperimentazione rivelano molto del modo di pensare e affrontare i problemi logici in ambito matematico degli allievi. Sono diverse le analogie nelle risoluzioni dei bambini, nelle quali è possibile osservare un'evoluzione che indica una maggiore consapevolezza degli alunni. Grazie alle rappresentazioni pittoriche, iconiche, linguistiche e simboliche, arricchite da diagrammi a frecce (che indicano i movimenti effettuati), gli allievi dimostrano di aver compreso il problema esplicitando i ragionamenti effettuati per ottenere la soluzione. In molti casi gli allievi ripetono, consapevolmente o inconsapevolmente, strategie simili in problemi diversi. L'utilizzo di forme, colori, diagrammi o parole analoghe indica lo sfruttamento di conoscenze pregresse nell'affrontare nuovi problemi, facendo diventare le strategie gradualmente più funzionali, basando la loro scelta su riflessioni, confronti e miglioramenti delle strategie applicate precedentemente. Di fronte all'errore gli allievi si interrogano sugli elementi o i passaggi scorretti al fine di identificare un piano risolutivo differente che possa portarli all'ottenimento del risultato.

Grazie all'osservazione delle rappresentazioni grafiche e dei tentativi effettuati emerge chiaramente che, anche in modo a volte inconsapevole, gli allievi hanno gradualmente sviluppato e riutilizzato delle strategie analoghe in tutte le tipologie di problemi affrontati.

A questo proposito, proporre agli allievi ulteriori problemi (dello stesso tipo e/o differenti) e a un campione di riferimento maggiore (eventualmente esteso ad altre scuole dove si attuano quotidianamente metodologie didattiche differenti) potrebbe sicuramente permettere di avvalorare i risultati ottenuti e osservarne eventualmente di differenti approfondendo i diversi aspetti di questo studio. Risulterebbe inoltre interessante proseguire il percorso facendo creare agli allievi dei problemi simili a un problema dato, così da poter riflettere sulle analogie e le differenze evidenziate e valutare l'appartenenza o meno alla medesima categoria di problemi. In seguito, i problemi creati potrebbero essere risolti dai compagni per approfondire le strategie relative all'analogia nelle diverse risoluzioni e nelle modalità di rappresentazione della soluzione.

Bibliografia

Barbero, M. (2015). *Giochi di strategia e risoluzione di problemi: l'uso della strategia del ragionamento regressivo.* Tesi Master. Università degli Studi di Torino.

Barbero, M. (2020). *Backward Reasoning in problem-solving situations: a multidimensional model.* Tesi di Dottorato di Ricerca. Università degli Studi di Torino & Universidad Complutense de Madrid.

Castellani, T. (2013). *Risolvere i problemi difficili. Sudoku, commessi viaggiatori e altre storie.* Zanichelli.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria.* Pitagora Editrice.

Dagani, N. (2025). *Tra analogie e rappresentazioni grafiche. Un percorso esplorativo per promuovere il pensiero strategico nei problemi di logica matematica.* Tesi Bachelor. Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://doi.org/10.71910/supsi.12356

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://pianodistudio.edu.ti.ch/

Hughes, M. (1982). Rappresentazione grafica spontanea del numero nei bambini. *Età Evolutiva*, *12*, 5–10.

Ignátiev, E. I. (1978). *En el reino del ingenio.* Editorial MIR. (Prima edizione pubblicata nel 1908).

Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani. (2023a). Diagramma. In *Vocabolario Treccani on line.* Consultato il 4 dicembre 2025, da https://www.treccani.it/vocabolario/diagramma/

Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani. (2023b). Problema. In *Vocabolario Treccani on line.* Consultato il 29 aprile 2025, da https://www.treccani.it/vocabolario/problema/

Peres, E., & Sbaragli, S. (2021). Gioco e matematica: un connubio per la mente. *Scuola ticinese*, *4*(2), 29–36.

Polya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico.* Feltrinelli Editore.

Pontecorvo, C., & Pontecorvo, M. (1985). *Psicologia dell'educazione: Conoscere a scuola.* il Mulino.

Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023). Sfide quadrate. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1153

Sbaragli, S., Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., & Ricci, M. (2008). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in ambito geometrico.* Armando Editore.

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021a). Figure di fiammiferi. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=607

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021b). Quanti quadrati. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=75

Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021c). Rappresentazioni spontanee di problemi. *MaMa: matematica per la scuola elementare - Numeri e calcolo.* Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=343

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic press.