DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
2026 (19), 39–66. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.2
OPEN ACCESS

"Confrontare senza Calcolare": la ricerca del progetto ArAl sulla verifica di equivalenze tra espressioni matematiche

"Comparing without Calculating": the ArAl project's research on verifying the equivalence of mathematical expressions

Giancarlo Navarra• ed Emma Pareti°
•Responsabile scientifico del Progetto ArAl; già professore a contratto, Università di Modena e Reggio Emilia – Italia
°Scuola primaria "Galliano-Rossini", Firenze – Italia

giancarlonavarra@gmail.com, paretiemma@gmail.com

Sunto / Nell'articolo si presenta il progetto di ricerca "Confrontare senza Calcolare" (CsC), nato nell'ambito del progetto ArAl con l'obiettivo di verificare quanto e come un insegnamento relazionale dell'aritmetica possa favorire l'argomentazione sulla verità di equivalenze fra rappresentazioni numeriche, superando la tendenza degli alunni a interpretarle come calcoli. Si descrivono il contesto teorico e metodologico di riferimento e le competenze promosse dalle attività di CsC. Si analizzano diversi episodi tratti da attività svolte nella scuola primaria e nella secondaria di primo grado, allo scopo di individuare strategie didattiche, e relative competenze del docente, per promuovere lo sviluppo di competenze relazionali negli allievi. I risultati riassumono tali strategie, tra le quali esaltare e favorire il colpo d'occhio, distinguere tra calcoli locali e globali, individuare premesse e conclusione in un'argomentazione, evitare la "gabbia relazionale", e mettono al contempo in luce la necessità di specifiche competenze del docente per poter adottare in modo efficace tali strategie.

Parole chiave: *early algebra*; progetto ArAl; pensiero relazionale; equivalenza fra espressioni; confronto tra espressioni.

Abstract / This article presents the research project "Comparing without Calculating" (CsC), developed within the ArAl project. Its aim is to investigate to what extent and in what ways a relational approach to teaching arithmetic can foster students' argumentation about the truth of equivalences between numerical representations, overcoming their tendency to interpret them merely as calculations. The theoretical and methodological framework of the project is outlined, together with the competencies promoted by the proposed CsC activities. Several episodes drawn from classroom activities in primary and lower secondary school are analysed with the aim of identifying teaching strategies – together with the corresponding teacher competences – capable of fostering the development of students' relational competences. The findings summarize such strategies, which include enhancing and supporting intuitive insight, distinguishing between local and global calculations, identifying premises and conclusions within an argument, and avoiding the so-called "relational cage". At the same time, the results highlight the need for specific teacher competences to implement these strategies effectively.

Keywords: early algebra; ArAl project; relational thinking; equivalence of expressions; comparison of expressions.

1 Premessa

Questo articolo illustra il progetto di ricerca e sperimentazione "Confrontare senza Calcolare", avviato nel 2022 all'interno del "Progetto ArAl: percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico"[1] nella cornice teorica dell'*early algebra*.[2] L'articolo intende mostrare come i risultati ottenuti sinora offrano contributi significativi non solo per lo sviluppo ulteriore degli studi interni al progetto stesso, ma anche in relazione ad aspetti metodologici e teorici più generali del progetto ArAl.
Il progetto "Confrontare senza Calcolare" nasce dalla constatazione che gli alunni[3] tra i 6 e i 14 anni tendono a "vedere" le scritture matematiche quasi esclusivamente come operazioni da eseguire. Questa prospettiva li porta a incontrare difficoltà quando, nel loro progressivo avvicinarsi alla generalizzazione, devono misurarsi con competenze relative non solo all'operare, ma soprattutto all'interpretare, al confrontare e al gestire rappresentazioni numeriche con numeri noti o sconosciuti.
L'ipotesi che orienta il progetto è che *un approccio relazionale possa contribuire a superare tali difficoltà.* In particolare, si ritiene che tale approccio favorisca lo sviluppo di competenze fondate sull'esplorazione delle relazioni tra i numeri coinvolti – noti o sconosciuti – e sull'uso consapevole, quando necessario, di semplici strategie di calcolo mentale e di riconoscimento delle strutture numeriche. Come scrivono Carpenter et al. (2003):

> «Molte importanti idee che favoriscono lo sviluppo del pensiero pre-algebrico coinvolgono relazioni fra rappresentazioni differenti di numeri. Le frasi in linguaggio matematico contenenti equivalenze vere o false con al loro interno numeri e numeri "da scoprire" costituiscono contesti stimolanti per esplorare tali relazioni. Gli alunni, mentre argomentano sulla verità delle equivalenze, si confrontano con concetti fondamentali dell'aritmetica e dell'algebra».
> (Carpenter et al., 2003, p. 39, traduzione degli autori)

Scritto a quattro mani, l'articolo trae origine da una tesi di laurea[4] la cui parte sperimentale è stata condotta durante l'anno scolastico 2024/2025 in cinque classi di scuola primaria[5] nella provincia di Siena.
Di seguito, viene introdotto il progetto CsC[6] tracciando i principali costrutti che costituiscono la sua base teorica.

1. Il progetto ArAl ha origine dai lavori condotti dai primi anni '80 dal GREM (Gruppo di ricerca in Educazione Matematica presso l'Università di Modena e Reggio Emilia) sotto la direzione scientifica di Nicolina A. Malara. Negli anni '90 le premesse sociali e culturali del progetto si evolvono sempre più verso la didattica dell'aritmetica e dell'algebra con alunni fra i 5 e i 14 anni, collocandosi all'interno dell'area di ricerca denominata *early algebra*. Nel 2001 vince il concorso nazionale SeT (Progetto per lo sviluppo Scientifico e Tecnologico) e inizia la collaborazione con scuole o reti di scuole di quasi tutte le regioni italiane. Ha partecipato a progetti europei ed è attivo in ambito nazionale e internazionale.
2. Principi di metodo ed esempi di situazioni problematiche relativi a "Confrontare senza Calcolare", sperimentate in classi di scuola primaria e secondaria di primo grado di istituti che collaborano con il progetto ArAl, si trovano in Navarra et al. (2024) (seconda e terza primaria, Cap. 8) e in Navarra et al. (2025) (quarta e quinta primaria, prima secondaria, Cap. 5).
3. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.
4. Lavoro di Tesi di Emma Pareti (2025), svolto nell'ambito della laurea magistrale a ciclo unico in Scienze della Formazione Primaria, Dipartimento di Formazione Lingue Intercultura Letterature e Psicologia, Università degli Studi di Firenze. Relatore: Samuele Antonini; correlatore: Giancarlo Navarra.
5. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.
6. Ci si riferirà d'ora in poi al progetto di ricerca "Confrontare senza Calcolare" con "ricerca" o "CsC", e alla tesi con "studio".

2 L'*early algebra*

2.1 L'*early algebra* e il curricolo di matematica

Gli studi e le attività afferenti all'*early algebra* hanno come obiettivo la promozione dello sviluppo del pensiero pre-algebrico in alunni dai 5 ai 14 anni d'età. Decenni di ricerca in questo campo di studi (tra i principali, si vedano Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1994; Sfard & Linchevski, 1994) hanno mostrato come gli ostacoli che gli studenti più grandi incontrano nello sviluppo del pensiero algebrico siano imputabili alla difficoltà nell'estendere all'algebra i processi cognitivi acquisiti in ambito aritmetico negli anni di scuola precedenti. Infatti, sebbene tra aritmetica e algebra esista una forte continuità tanto sul piano concettuale quanto su quello epistemologico, tale legame generalmente non viene né evidenziato né sviluppato nella consueta didattica della matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado.[7]

L'*early algebra* risiede silenziosamente nel curriculum di matematica di ogni livello scolare: negli argomenti, nei problemi e nei sistemi di rappresentazione; ma, come scrivono Carraher et al. (2007):

> «Per quanto riguarda gli insegnanti di scuola secondaria di primo grado [...] molti ritengono che l'apprendimento algebrico debba iniziare solo a 13 anni, sottovalutando così la capacità degli studenti della scuola primaria di affrontare queste attività e discostandosi dall'approccio del movimento dell'early algebra, che cerca la continuità dell'apprendimento tra la scuola primaria e quella secondaria».
>
> (Carraher et al., 2007, p. 26, traduzione degli autori)

Si ritiene invece fondamentale che gli insegnanti contribuiscano a *rendere visibile il carattere algebrico dell'aritmetica* proponendo concetti e attività capaci di favorire lo sviluppo del *pensiero relazionale*. Tali proposte non dovrebbero essere considerate come argomenti *aggiuntivi* rispetto alla didattica quotidiana, bensì come elementi *da integrare in modo organico* al suo interno. A conferma di questa affermazione Carpenter et al. (2003) scrivono:

> «Lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti non dovrebbe essere percepito come un ulteriore argomento da insegnare. Idealmente, dovrebbe essere una parte integrante dell'insegnamento dei concetti e delle abilità aritmetiche. Una volta che gli studenti hanno imparato a riflettere sulle relazioni, allora le proposizioni vero/falso e le frasi numeriche aperte possono essere utilizzate per sostenere l'apprendimento di molti concetti e abilità aritmetiche».
>
> (Carpenter et al., 2003, p. 38, traduzione degli autori)

Una delle radici epistemologiche dell'*early algebra* è quindi la dualità *procedurale-relazionale*, ampiamente esplorata all'interno del progetto ArAl (si vedano, ad esempio, Cusi et al., 2011; Malara & Navarra, 2003, 2018; Navarra, 2019, 2022).

2.2 I fondamenti teorici dell'*early algebra*

La prima a formulare la differenza tra significato operazionale (*operational meaning*) e significato relazionale (*relational meaning*) dell'uguale è Kieran (1981, 2004, 2018; Kieran et al., 2016), che evidenzia

7. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

come la concezione operazionale sia largamente diffusa tra gli studenti e persista anche a livelli scolari avanzati. Questa impostazione è coerente con il quadro teorico proposto da Sfard (1991, 2008), che distingue tra *concezioni operazionali* e *concezioni strutturali* degli oggetti matematici e introduce la necessità di guidare gli studenti nel passaggio dai *processi* agli *oggetti*, favorendoli nell'impadronirsi dei termini specifici per designare gli oggetti attraverso il processo della *nominalizzazione*. Sfard evidenzia anche come guidare a comprendere il significato di una definizione matematica costituisca un'impresa complessa ma necessaria per costruire negli studenti una crescente consapevolezza nei confronti del pensiero matematico. Knuth et al. (2006), Carpenter et al. (2003), Mason (2013), Schliemann et al. (2003) sono fra i primi ricercatori a sottolineare come il punto di vista relazionale possa essere sviluppato fin dai primi anni della scuola primaria e sia strettamente correlato alla successiva graduale comprensione dei significati in algebra. Mason scrive molto esplicitamente che «Non è mai troppo presto [per pensare in modo algebrico]. Per imparare l'aritmetica è necessario pensare in modo algebrico» (Mason, 2013, p. 329, traduzione degli autori). Parallelamente, lavori di Carraher e Schliemann (2007) sottolineano come il pensiero algebrico emerga naturalmente quando gli studenti sono coinvolti in attività che richiedono di *analizzare relazioni tra quantità*, piuttosto che *eseguire calcoli*. La dualità *procedurale-relazionale* è stata approfondita anche da Falkner et al. (1999) e da Jacobs et al. (2007) che hanno introdotto il concetto di *pensiero relazionale* (*relational thinking*), evidenziando come gli allievi possano sviluppare strategie basate sullo studio delle relazioni tra quantità anche in assenza di un rigoroso formalismo algebrico.
L'analisi delle relazioni fra quantità porta ad uno dei temi nodali dell'*early algebra*: il segno uguale, uno dei nodi fondativi del quadro teorico del progetto ArAl. La difficoltà degli studenti di riconoscervi il significato di *uguaglianza simmetrica fra due quantità*, a fronte di una sua consolidata interpretazione come *comando che genera un calcolo*, è ampiamente documentata e analizzata, tra altri, da Carpenter et al. (2003) che, come Knuth et al. (2006), individuano nelle discussioni coinvolgenti l'intera classe o piccoli gruppi di alunni, e quindi nell'argomentazione, l'ambiente più produttivo per porre a confronto le diverse concezioni del segno. Blanton e Kaput (2011) collegano il significato dell'uguale al *pensiero funzionale*, cioè alla capacità di riconoscere, descrivere e generalizzare relazioni tra quantità che variano insieme.
Si può affermare che tutti gli studi sull'*early algebra* esaltano il ruolo dell'*argomentazione* nel lungo processo di costruzione dei saperi matematici; si fa qui riferimento in particolare a quelli fondamentali di Sfard (2008) e alle sue riflessioni sul *discorso matematico*. Pur non direttamente collegati con gli studi sull'*early algebra*, si ricordano quelli di Ferrari (2021) sulla relazione fra "lingua", "linguaggio" e apprendimento matematico e di Mariotti (2022) sull'argomentazione come *cuore* dell'attività matematica e premessa per la dimostrazione. Vi sono ampie convergenze tra molti ricercatori nell'ambiente dell'*early algebra* (Blanton & Kaput, 2011; Carpenter et al., 2003; Carraher & Schliemann, 2007) sul fatto che, se l'argomentazione nasce attraverso la riflessione su situazioni concrete, alunni anche molto giovani sono in grado di giustificare relazioni e ragionare su quantità incognite. La capacità di confrontare relazioni fra enti noti e sconosciuti è connessa alle competenze legate all'interpretazione e alla gestione delle rappresentazioni di un numero.
Il tema delle *rappresentazioni dei numeri* è strettamente intrecciato allo sviluppo del pensiero algebrico e alla capacità di cogliere *relazioni* e *strutture*. Kaput (2008) sottolinea, in merito a questo aspetto, il ruolo fondamentale del coordinamento tra rappresentazioni multiple nella costruzione di significati matematici profondi fin dai primi anni della scuola primaria. Nel loro insieme questi studi convergono nel riconoscere che la comprensione dei numeri non risiede in una singola rappresentazione, ma emerge dalla capacità di interpretare e trasformare diverse forme rappresentative, processo che costituisce uno dei fondamenti dello sviluppo del pensiero pre-algebrico. Se questo non avviene, *una concezione operativa (procedurale) dell'uguale ostacola l'apprendimento dell'algebra.*
Centrale rispetto a questi temi è quindi la *traduzione* tra linguaggi o tra diversi registri di rappresentazione, e ciò comporta la coordinazione di una pluralità di sistemi di rappresentazione. Kaput (2008)

e Blanton e Kaput (2011) sottolineano come comprendere e risolvere problemi algebrici richieda competenze che si acquisiscono nel passare attraverso modi diversi di esprimere lo stesso concetto: rappresentazioni verbali, tabulari, iconiche, grafiche, simboliche. Da queste premesse nasce, in particolare, l'importanza della traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico (e viceversa) in quanto presuppone da parte del traduttore il controllo sulle relazioni fra le loro *semantiche* e le loro *sintassi*.
Il tema del *numero sconosciuto* e delle sue diverse forme di rappresentazione – uno dei tre nodi fondativi, come si vedrà, nel progetto ArAl – è stato ampiamente studiato perché rappresenta un passaggio cruciale dall'aritmetica all'algebra. Ancora Carpenter et al. (2003) illustrano – con il supporto di una grande quantità di esempi – come alunni anche molto giovani possano essere guidati a ragionare su quantità ignote, rappresentate anche in modo informale (caselle vuote, icone di fantasia, simboli, lettere ecc.), attraverso lo studio di equivalenze tra rappresentazioni formalmente differenti.
I temi delineati sinora si intrecciano all'interno della dualità *risolvere-rappresentare* trattata, fra altri, da Kaput (2008), il quale mostra come risolvere un problema sia strettamente collegato con la costruzione e il coordinamento di rappresentazioni che rendono visibili le relazioni matematiche fra gli enti che vi compaiono. Mason (2002) analizza la struttura profonda del pensiero matematico, che presenta come una serie di passaggi dal "vedere" ("*the discipline of noticing*", traducibile con "la pratica dell'accorgersi") al rappresentare, al generalizzare, contrapponendo questa prospettiva al punto di vista del risolvere.
Il progetto ArAl nasce e matura nella cornice teorica dell'*early algebra*. Uno dei suoi principali obiettivi è la condivisione con gli insegnanti di alunni dai 5 ai 14 anni di una visione *relazionale* della matematica, contrapposta alla classica visione *procedurale*. Promuovere una visione *relazionale* significa guidare all'osservazione *complessiva* di una situazione al fine di rivelare eventuali legami tra i termini in gioco, spostando l'attenzione dalle operazioni numeriche alle relazioni fra gli enti, noti o sconosciuti. La visione *relazionale* è centrale al fine di cogliere la continuità fra aritmetica e algebra, favorire i processi mentali comuni ai due ambiti disciplinari, stimolare la riflessione sul significato dei concetti matematici osservati. Al contrario, una visione marcatamente *procedurale* della matematica – dove l'attributo *procedurale* esprime il carattere di procedura da eseguire o da analizzare in modo sequenziale rispettando regole predeterminate – tende a favorire atteggiamenti proiettati verso il *fare* (trovare operazioni, eseguire calcoli, sviluppare espressioni, risolvere equazioni ecc.) e verso un apprendimento mnemonico e acritico.

3 Il progetto di ricerca e sperimentazione "Confrontare senza Calcolare"

Il progetto CsC, a sua volta, si inserisce nella cornice teorica del progetto ArAl, sposandone i nodi fondativi (delineati nel **par. 2**) e mirando allo sviluppo di una visione relazionale nel confronto tra espressioni numeriche. La consegna tipo che si pone agli alunni chiede di argomentare se un'equivalenza sia verificata senza svolgere *calcoli globali*, bensì concentrando la propria attenzione sulle relazioni che collegano i suoi membri appoggiandosi solo a *calcoli mentali locali*. Si consideri ad esempio l'equivalenza:

$$47 + 38 \stackrel{?}{=} 40 + 30 + 7 + 8.$$

Come si vedrà nel **par. 5**, un tipo di argomentazione promossa dal progetto CsC parte dal riconoscere a colpo d'occhio come equivalenti 47 e 40 + 7 e 38 e 30 + 8: si limita ad intuitivi *calcoli mentali locali* concentrando la propria attenzione sulle relazioni esistenti tra i numeri in gioco. Diverso sarebbe il caso di un'argomentazione del tipo: «L'uguaglianza è vera perché 47 più 38 fa 85 e anche 40 più 30 più 7 più 8 fa 85» perché comporterebbe lo svolgimento di *calcoli globali*, non rispettosi della consegna, indicativi di un punto di vista *procedurale*.

Le competenze che il progetto CsC si propone di analizzare e di promuovere, all'interno dell'ampio quadro teorico delineato nel par. 2, vengono ricondotte a:

- tre *nodi fondativi*:
  1. il significato del simbolo "=" come "è", "è uguale a";
  2. il concetto che un numero può essere rappresentato in infinite forme;
  3. l'approccio al numero sconosciuto e la conquista della lettera per rappresentarlo;
- tre *temi chiave*:
  1. verbalizzare e argomentare;
  2. risolvere vs rappresentare;
  3. tradurre dal linguaggio matematico al linguaggio naturale e viceversa.

Per ognuno dei nodi e dei temi si farà riferimento ad alcuni fra i principali studi sull'*early algebra* che hanno messo in luce la loro crucialità. Data la stretta interconnessione fra temi e nodi, alcuni riferimenti compariranno più volte.

3.1 I nodi fondativi

3.1.1 Il significato relazionale del segno uguale

Il significato relazionale del segno uguale è stato ampiamente discusso in letteratura (fra i più importanti, si vedano Carpenter et al., 2003; Kaput, 2008; Kieran, 1981; Schwarzkopf et al., 2018; Sfard & Linchevski, 1994).

Nell'aritmetica "scolastica" il significato prevalente del segno uguale è quello *procedurale* di *operatore direzionale*, con una forte connotazione spazio-temporale: *prima* si fanno dei calcoli *a sinistra* e *poi* si trova un risultato *a destra*. Tale significato è supportato e veicolato dalla traduzione del simbolo uguale con il termine "fa": «Otto più tre *fa* undici», traduzione operata tanto dagli alunni quanto dagli insegnanti.

Con *significato relazionale* del segno "=" si intende attribuire al simbolo una valenza a-temporale e a-direzionale, riconoscendolo come indicatore di equivalenza fra due rappresentazioni formalmente differenti dello stesso numero. Questo porta a superare l'uso di "fare" come "verbo di risultato" e a tradurre il simbolo "=" con l'espressione "è uguale a": «Otto più tre è *uguale* a undici», esattamente come «Undici è *uguale* a otto più tre». Una visione *relazionale* del segno uguale è prerequisito fondamentale per svolgere attività in CsC: gli alunni vanno guidati a capire che quelle che si pongono a confronto non sono *operazioni* ma *rappresentazioni*.

3.1.2 La rappresentazione canonica e non canonica di un numero

Questa distinzione è un costrutto originale nel quadro teorico del progetto ArAl;[8] si sviluppa a partire dagli studi di Carpenter et al. (2003), Kieran (1981), Knuth et al. (2006).

Nell'insieme dei numeri naturali, per rappresentazione (o forma) canonica di un numero si intende la sua rappresentazione posizionale in base dieci. Ad esempio, la rappresentazione canonica del numero diciotto è il simbolo 18. Possiamo dire che la forma canonica di un numero è il suo *nome*, ed è evidente che ogni numero ne ha una sola. Le rappresentazioni non canoniche di un numero sono invece le infinite forme con cui esso può essere espresso mediante operazioni che coinvolgono altri numeri; ad esempio, nel caso del diciotto, $15 + 3$, 9×2, $54 : 3$ ecc.

8. Il costrutto di rappresentazione "canonica" e "non canonica" è stato concepito in riferimento ai numeri naturali per far sì che alunni molto giovani, di fronte a una rappresentazione come $5 - 2$, imparino a leggerla come una delle molteplici rappresentazioni possibili del numero 3. In questo modo si evita il radicarsi di quegli atteggiamenti automatici che li portano a vedere $5 - 2$ come qualcosa di incompleto, una scrittura in attesa, che acquista un'identità solo se viene completata con l'aggiunta di un "=" e l'inserimento del risultato: $5 - 2 = 3$. Poiché lo studio si sviluppa nell'ambito della scuola primaria anche nell'articolo si rimane nell'insieme dei numeri naturali. Nel momento in cui si estende l'ambito numerico si può estendere anche la definizione di forma canonica e non canonica di un numero. Per chi volesse approfondire questo aspetto si rimanda a Navarra (2022, pp. 273–274).

In attività di CsC, al fine di poter confrontare i due membri di un'equivalenza, è necessario saper riconoscere di volta in volta le sostituzioni più opportune tra la rappresentazione canonica e quelle non canoniche di un numero; ad esempio, valutare se sia opportuno *sostituire*:

- forme canoniche con forme non canoniche: 520 con 52×10; n con $n \times 1$;
- forme non canoniche con forme canoniche: $9 + 9 + 9$ con 27; $4 \times 3 + 3$ con 15;
- forme non canoniche con altre forme non canoniche: $4 \times (n + 9)$ con $4 \times n + 4 \times 9$.

3.1.3 Il numero sconosciuto e le sue rappresentazioni
L'argomento è stato trattato da diversi punti di vista in molti studi basilari sull'*early algebra*, ad esempio, Carpenter et al. (2003), Kieran (1992), Radford (2010), Sfard (1991).
È attraverso l'uso delle lettere che in algebra è possibile esprimere concetti generali e generalizzabili, pertanto comprendere il loro significato è una condizione necessaria per poter costruire ragionamenti di matrice algebrica.
Esercizi del tipo $4 + \ldots = 10$ o $4 + \square = 10$ o $4 + \_\_\_ = 10$ che si trovano nei testi sin dalla prima primaria, infatti, visti in una prospettiva *procedurale*, hanno lo scopo di far allenare gli alunni con le quattro operazioni («Quale numero aggiunto a 4 permette di ottenere 10?»): esauriscono la loro funzione in ambito aritmetico. Visti in una prospettiva *relazionale*, invece, sono delle *equazioni* e i puntini, il quadratino, i trattini bassi non sono più semplicemente uno spazio da riempire, ma assumono una dignità algebrica: sono interpretabili come rappresentazioni di un numero sconosciuto. In attività di CsC si propongono anche equivalenze contenenti delle incognite, ad esempio $15 + 3 = 5 \times 3 + a$ (che verrà analizzata nel par. 5).

3.2 I temi chiave
3.2.1 Verbalizzare e argomentare
Agli autori citati nel par. 2.2 che hanno studiato l'argomentazione in campo matematico si aggiungono qui Blanton et al. (2018), Kaput (2008), Lins & Kaput (2004) e Radford (2018).
La capacità di argomentare in ambito matematico matura lungo un percorso al quale dovrebbe essere dedicata una grande attenzione sin dalla scuola dell'infanzia. Le *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (Ministero dell'Istruzione e del Merito [MIM], 2025), come le precedenti, si riferiscono in termini generici all'argomentazione in matematica associandola in più riprese (pp. 67–71) all'analisi critica, alla giustificazione, alla capacità di formulare ipotesi e di verificarle attraverso metodi matematico-scientifici anche con l'ausilio della tecnologia. A fronte di tali affermazioni di principio, però, l'esperienza mostra come l'argomentazione non sia diffusa nelle classi durante le attività matematiche, a causa di un'attenzione concentrata da parte degli insegnanti più sugli aspetti del fare che della riflessione linguistica e metalinguistica che, come sostiene il progetto ArAl, dovrebbe diventare un *forte* valore condiviso all'interno della comunità-classe.
Abituare gli alunni a organizzare frasi pur brevi ma di senso compiuto favorisce sia colui che verbalizza sia i compagni che lo ascoltano creando le condizioni per una maturazione sociale e culturale della classe che non vede più nell'insegnante l'unico interlocutore. L'argomentazione rappresenta l'evoluzione della verbalizzazione: gli alunni, grazie a un'opportuna conduzione delle discussioni matematiche collettive, imparano a fornire ragioni a favore o contro una determinata affermazione anche intrecciando linguaggi diversi e avvicinandosi al concetto di *dimostrazione*. In questo modo il linguaggio naturale svolge il ruolo fondamentale di mediatore verso la graduale appropriazione da parte degli alunni di un linguaggio specifico come quello matematico.
Un passaggio nodale in questo senso è rappresentato dalla *contrapposizione verbale-nominale*. Guidare gli allievi verso un uso consapevole e autonomo di termini come “somma”, “differenza”, “doppio”, “triplo”, significa aiutarli a impadronirsi di un linguaggio nominale, com'è quello scientifico, caratterizzato da testi in cui si fa uso di pochi verbi per privilegiare invece nomi e aggettivi. Per esempio:

una scrittura come 2 × 3 viene espressa abitualmente attraverso frasi centrate su verbi come «Moltiplicare 2 per 3», «Eseguire una moltiplicazione», «Trovare il risultato della moltiplicazione fra 2 e 3». Sono frasi “operative”, *procedurali*, frutto di una lettura sequenziale del testo. Imparare a definire 2 × 3 costruendo delle frasi *nominali* come «2 × 3 è il prodotto fra 2 e 3», «2 × 3 è il doppio di 3», «2 × 3 è il triplo di 2», «2 × 3 è un multiplo di 2 e di 3» significa saper puntare l’attenzione non soltanto sugli enti in gioco (2 e 3), ma soprattutto sulla relazione che li collega (in questo caso moltiplicativa).
Saper distinguere e gestire questi due punti di vista è uno degli aspetti centrali di CsC, in quanto educa gli alunni a superare la concezione *dominante* di scritture del tipo di 8 + 1, 9 × 4 × 3, (3 + 2) × 10 come *operazioni* e a vederle come *oggetti matematici*, identificabili proprio attraverso modi specifici di usare il linguaggio, la sua semantica e la sua sintassi.

3.2.2 Risolvere vs rappresentare

Questa dualità è nodale nell’ambito della ricerca riguardante l'*early algebra* e il *problem solving*. Tra i principali autori, si ricordano Bednarz e Janvier (1996) e Kieran (1981, 1990, 2018). Essa induce una modifica radicale nel modo in cui si affronta un problema. *Risolvere* un problema significa puntare al *prodotto*, cioè all’individuazione delle operazioni che portano al risultato. *Rappresentare* un problema significa puntare al *processo*, cioè all’individuazione delle scritture che consentono di esplicitare in linguaggio matematico le relazioni fra gli elementi del problema. Nel primo caso si privilegia il punto di vista procedurale, nel secondo quello relazionale. Di seguito si chiarisce la differenza tra i due punti di vista attraverso un problema accompagnato da due consegne diverse *a* e *b* (si consideri la versione *a* come *standard* e la versione *b* come *non-standard*).

> Nel giardino della scuola stanno facendo l’intervallo tre classi: una prima, una seconda e una terza. La prima è formata da 21 alunni e la seconda da 23. In totale nel giardino ci sono 59 alunni.

a. Trova il numero degli alunni della terza.	*b.* Rappresenta in linguaggio matematico la situazione in modo che si possa trovare il numero degli alunni della terza.

La consegna *a* chiede di *risolvere* il problema: l’alunno individua i tre dati (21, 23, 59) e due operazioni su di essi (l’addizione 21 + 19 = 40 e la sottrazione 59 – 40) che permettono di trovare il risultato (19). Il simbolo “=” è un *operatore direzionale*. L’alunno è concentrato sull’individuazione del *prodotto*.
La consegna *b* chiede di *rappresentare* il problema: l’alunno individua: (i) quattro enti, tre *noti* (21, 23, 59) e uno *sconosciuto*, al quale dà un nome usando, per esempio, la lettera *t* per indicare il numero degli alunni della terza; (ii) due *relazioni* (quella additiva e quella di equivalenza). Raccoglie enti e relazioni nella frase espressa in linguaggio matematico:

$$21 + 23 + t = 59.$$

L’alunno si concentra sulla *rappresentazione* del *processo*, che può esprimere a parole in questo modo:

> «La somma fra il numero degli alunni della prima, quello degli alunni della seconda e quello degli alunni della terza è uguale al numero totale degli alunni che fanno l’intervallo nel giardino».

Conoscere la differenza fra i due punti di vista è un prerequisito fondamentale per lo svolgimento di attività su CsC, in cui non vi è infatti niente da “risolvere” poiché le scritture che formano l’equivalenza non vanno viste come “operazioni che portano a un risultato”, ma come “rappresentazioni da confrontare”.

3.2.3 Tradurre dal linguaggio matematico al linguaggio naturale e viceversa

Il tema della traduzione fra linguaggi è centrale perché, per comprendere, rappresentare e risolvere problemi, si richiede una pluralità di competenze riguardanti la capacità di esprimere lo stesso concetto attraverso parole, simboli, rappresentazioni grafiche o tabulari. Oltre a Duval (2006), si ricordano Carraher et al. (2000), Kaput (2008) e Kieran (1996).

Per allievi di 6-14 anni d'età saper tradurre una frase dal linguaggio matematico a quello naturale e viceversa costituisce l'esito di una didattica che propone l'approccio alla matematica come a un nuovo linguaggio: saper tradurre un testo significa infatti conoscere gli aspetti semantici e sintattici di entrambi i linguaggi, e questa competenza si costruisce grazie a un contratto didattico che dedichi ampio spazio alla riflessione su di essi e sulle relazioni che intercorrono fra i loro lessici e le loro grammatiche. Ad esempio, alunni ai quali si chieda di *tradurre in linguaggio naturale* un'espressione come $10 + 7 \times 2$ propongono una grande varietà di scritture, ad esempio «10 più 7 per 2» o «Moltiplico 7 per 2 e aggiungo 10», riconoscibili come frasi procedurali in quanto spiegano *ciò che si fa*. Saper interpretare in termini *relazionali* la *struttura* di $10 + 7 \times 2$ definendola come «La somma tra 10 e il doppio di 7» comporta che gli alunni sappiano riconoscere in 7×2 «il *prodotto* fra 7 e 2» o un più evoluto «il *doppio* di 7». È necessario cioè che essi sappiano *dare un nome agli oggetti matematici*.

Saper produrre/interpretare traduzioni dal linguaggio matematico al linguaggio naturale e viceversa è un altro requisito necessario in CsC, in quanto porta al saper riconoscere rappresentazioni equivalenti (per esempio $6 + 5$, $5 + 3 \times 2$, $22 : 2$ come forme non canoniche dello stesso numero 11); saper gestire le parentesi; riconoscere proprietà; applicare principi; attribuire significato a una lettera.

4 Obiettivi di ricerca e metodologia applicata nello studio: la metodologia delle trascrizioni pluricommentate

La metodologia delle trascrizioni pluricommentate applicata nello studio riportato in questo articolo è uno strumento del progetto ArAl concepito per favorire l'auto-riflessione e lo sviluppo professionale dei docenti (Navarra, 2022).[9] L'autrice l'ha utilizzata nella parte sperimentale dello studio, condotta in cinque classi di scuola primaria, in ognuna delle quali ha partecipato per diciotto ore alla normale attività didattica avendo modo di osservare, in tale arco di tempo, le attività connesse a CsC. Ognuna delle cinque insegnanti partecipanti allo studio ha audio-registrato una lezione e ha trascritto la registrazione in un apposito template convenzionalmente denominato "diario". Dopo aver commentato il diario lo ha inviato agli autori che lo hanno commentato a loro volta prima separatamente e poi incrociando i rispettivi commenti. Ogni diario è stato infine rinviato all'insegnante, che lo ha condiviso con gli altri docenti dell'istituto. I commenti delle insegnanti sono collegati al contesto-classe, quelli degli autori pongono in relazione la prassi (ciò che è avvenuto in aula) e la teoria (gli obiettivi di CsC, i costrutti del progetto ArAl e, in generale, dell'*early algebra*).

I diari hanno permesso di analizzare i processi di insegnamento-apprendimento con l'obiettivo di:

- raccogliere informazioni sulla conduzione delle attività da parte di insegnanti che affrontano per la prima volta CsC e sugli atteggiamenti, i processi cognitivi, le difficoltà degli alunni;
- sviluppare riflessioni teoriche e di metodo sulle informazioni raccolte;
- elaborare indicazioni di carattere operativo che favoriscano l'affinamento dell'azione didattica attraverso il superamento di atteggiamenti *procedurali* e lo sviluppo di competenze *relazionali*.

9. Attualmente (dall'a.s. 2006/2007 a dicembre 2025) sono consultabili nel sito del progetto ArAl (https://www.progettoaral.it/diari-2/) quasi 400 diari (70 della scuola dell'infanzia, 240 della scuola primaria, 90 della scuola secondaria di primo grado) corredati con più di 7'000 commenti.

In particolare, le domande di ricerca che hanno guidato l’osservazione e l’analisi dei diari da parte degli autori sono le seguenti: *Quali strategie didattiche favoriscono lo sviluppo di competenze relazionali negli allievi coinvolti in attività di CsC relative alla verifica di equivalenze matematiche? Quali competenze deve possedere l’insegnante per promuovere e guidare tale sviluppo?*
Dai cinque diari, e da attività analoghe svolte nello stesso periodo dall’autore assieme a insegnanti della scuola secondaria di primo grado, sono stati estratti gli episodi che fungono da esempi per i principali temi che costituiscono gli attuali risultati del progetto di ricerca “Confrontare senza Calcolare”. Ogni episodio è contrassegnato con una sigla, ad esempio EP1 (P1), che indica il suo numero d’ordine (EP1, EP2, …), seguito da un codice tra parentesi che indica l’ordine scolastico – primaria (P) o secondaria di primo grado (S) – seguito dal numero che indica la classe.

4.1 Identificazione e analisi degli episodi

La scelta degli episodi richiede una premessa di metodo che si sintetizza attraverso il grafico della Figura 1 che illustra le relazioni all’interno del progetto ArAl tra le attività in classe, il confronto tra insegnanti ed esperti facenti parte della comunità di pratica, lo sviluppo del quadro teorico e delle competenze degli insegnanti.

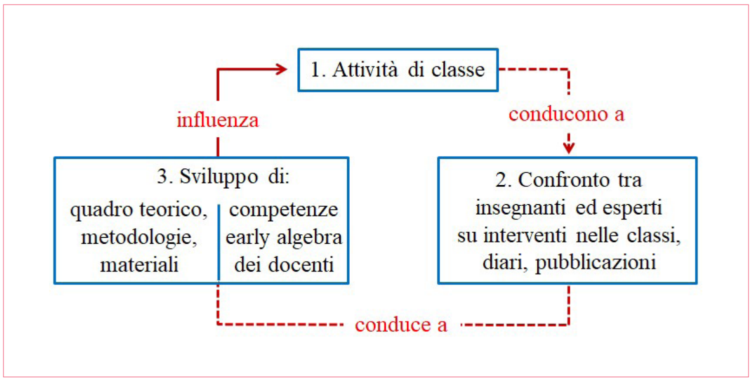

Figura 1. La circolarità delle relazioni fra teoria e prassi nel progetto ArAl.

Nello specifico del progetto CsC, durante (1) le attività di classe emergono nodi e ostacoli (difficoltà nell’analizzare le equivalenze, nel riconoscere rappresentazioni formalmente diverse dello stesso numero, nell’applicare proprietà ecc.) che (2) vengono periodicamente analizzati da docenti ed esperti con l’obiettivo di individuare scelte didattiche e strategie che (3) indirizzino le successive attività nelle classi. Il ripetersi di questo ciclo ha fatto gradualmente maturare le sei strategie che verranno illustrate di seguito.
Come già detto, l’autrice ha svolto 90 ore di effettiva presenza in cinque classi di scuola primaria; nello stesso periodo l’autore ha effettuato 130 ore in meeting con classi di scuola primaria e secondaria dello stesso istituto; ogni meeting è stato effettuato con l’utilizzo della tavoletta grafica e in tutto sono stati prodotti 55 file di lavoro .notebook. Alle attività in classe si sono aggiunte 60 ore di meeting tra docenti ed esperti – ai quali spesso partecipava anche l’autrice – in parte di gruppo, in parte bilaterali. Diari e file di lavoro hanno fornito la fonte dalla quale sono stati selezionati gli episodi, che possiedono una duplice fisionomia: ognuno di essi esemplifica un tema chiaramente definito, *oggettivato*, che esprime il *prodotto* del progetto CsC; allo stesso tempo, rappresenta il *processo*, alla maturazione del quale ha fornito un importante contributo, che ha portato a quel prodotto.
Per esempio, il primo episodio EP1 (P1) documenta il tema “Esaltare e favorire il colpo d’occhio”. Questo tema non emerge tanto da un’analisi *a posteriori* dei materiali raccolti, ma esprime la graduale, lenta *condensazione* di continue osservazioni dei comportamenti degli alunni e delle loro argomen-

tazioni che, alla fine, ha fatto maturare la convinzione che favorire il colpo d'occhio possa realmente promuovere lo sviluppo delle competenze relazionali, non solo in attività di CsC. Un microepisodio esemplifica la ricchezza del processo: l'alunna L. (intervento 11 dell'episodio) usa proprio la locuzione "a colpo d'occhio", ispirando in questo modo l'attribuzione di un "nome" a quegli atteggiamenti molto frequenti rilevati negli alunni, che hanno portato alla definizione della strategia.
Per quanto concerne le ragioni alla base della scelta degli episodi, ognuno dei cinque diari, commentato all'origine dalle docenti che l'hanno redatto, è stato analizzato e commentato separatamente dagli autori. Successivamente tutti i commenti relativi a uno stesso diario sono stati raccolti in un unico file e gli autori hanno incrociato le loro considerazioni (complessivamente, fra tutti e cinque i diari, i commenti sono 223). Gli episodi sono stati scelti quindi in base sia alla qualità dell'*impianto relazionale* dell'azione didattica sia all'interesse dei relativi commenti del diario per quanto concerne, ad esempio, l'interazione docente-alunni e alunni-alunni, la pluralità dei ruoli assunti dall'insegnante nella conduzione delle discussioni, la qualità dell'argomentazione, la consapevolezza degli alunni relativamente ai concetti in gioco.
Ai fini dell'articolo, i commenti sono stati opportunamente selezionati, intrecciati e rielaborati dagli autori al fine di collocare ogni episodio all'interno di una cornice teorica e metodologica.

5 Risultati emersi dall'analisi degli episodi

L'analisi dei dati raccolti con la metodologia descritta nel par. 4 ha condotto all'identificazione di sei strategie chiave che, se messe in atto dal docente in ambito di attività di CsC, permettono di favorire negli allievi lo sviluppo di competenze relazionali nel trattare le equivalenze matematiche.
In questo paragrafo vengono presentati e analizzati quindici episodi tratti dai diari raccolti, che permetteranno di esemplificare queste strategie. Le sei strategie individuate sono le seguenti:

1. esaltare e favorire il colpo d'occhio;
2. appoggiarsi a strategie che si rivelano efficaci per individuare numeri e relazioni: la "strategia cromatica", la verbalizzazione in forma relazionale dell'equivalenza;
3. favorire l'interpretazione complessiva di un'equivalenza distinguendo tra calcoli locali e calcoli globali;
4. distinguere premesse e conclusione in un'argomentazione;
5. appoggiare il pensiero a un supporto scritto;
6. evitare/ridurre la "gabbia relazionale".

5.1 Esaltare e favorire il colpo d'occhio

Si può definire il *colpo d'occhio* come la capacità di cogliere velocemente dettagli importanti in una situazione complessa. In questo senso, gli alunni maturano la capacità di osservare un'equivalenza nel suo insieme e di cogliere le relazioni tra i numeri e i simboli presenti nei suoi due membri. Imparano a non focalizzarsi sulla singola relazione o sulle rappresentazioni di singoli numeri e a cogliere *a colpo d'occhio* la struttura dei due membri dell'equivalenza.
Il docente può esaltare il colpo d'occhio negli allievi attraverso opportune consegne, richieste e riscontri come quelli riportati nel seguente episodio avvenuto in una classe di prima primaria. Il dialogo si sviluppa all'interno di un'attività di CsC che implica l'uso di mattoncini da costruzione uguali nelle dimensioni e diversi nel colore. L'insegnante (abbreviata in "Ins." nel dialogo che segue) dispone dei mattoncini da costruzione su due tavoli come in Figura 2 e chiede agli allievi di descrivere la situazione. Gli alunni devono verificare se sui due tavoli c'è lo stesso numero di mattoncini.

Figura 2. I due tavoli e i gruppi di mattoncini.

EP1 (P1)

1. Ins.: «Come descrivereste questa situazione?»
2. L. [dopo aver contato i mattoncini]: «Io vedo nel tavolo a sinistra un gruppo di cinque mattoncini gialli e un gruppo di nove mattoncini rossi. Poi vedo nel tavolo a destra cinque mattoncini gialli e nel secondo gruppo otto mattoncini rossi e uno blu».
3. Ins.: «Bravissima! Vieni V., vieni a scrivere in linguaggio matematico quello che ha detto L.».
4. [V. scrive 5 + 9 e accanto, 5 + 8 + 1].
5. Ins.: «È vera questa uguaglianza?»
6. V.: «Non lo so… no».
7. Ins.: «Cosa rimane uguale? Cosa cambia?»
8. V.: «8 + 1 è la forma non canonica del 9 e 9 è la forma canonica del 9».
9. Ins.: «Poi cos'altro c'è di uguale?»
10. V.: «5 è sia qui che qui in forma canonica [indica correttamente i blocchi sui due tavoli]».
11. L.: «Maestra, io avevo ragionato così: 5 è sia a destra che a sinistra e anche 9 è sia a destra che a sinistra, perché io l'ho fatto solo con la testa. Ho guardato e, *a colpo d'occhio*, ho visto che 8 più 1 è la forma non canonica di 9».

L'episodio mette in luce quanto attività di CsC possano indirizzare l'attenzione di alunni così giovani verso calcoli *locali*. L. (intervento 11), infatti, si concentra («Ho guardato a colpo d'occhio») solo su *una parte delle rappresentazioni* (9 a sinistra e 8 + 1 a destra). Coerentemente con tali premesse applica in modo intuitivo il principio di cancellazione (intervento 11: «5 è sia a destra che a sinistra») e in questo modo verifica l'equivalenza.
Gli alunni affinano il colpo d'occhio se l'insegnante sa sostenere lo sviluppo della loro *attenzione selettiva* favorendo la capacità di cogliere, quasi allo stesso tempo, sia gli aspetti salienti sia la totalità della scena. Viene da chiedersi: per esempio, in un'equivalenza da verificare come

$$30 \times 9 + 420 \stackrel{?}{=} 10 \times 42 + 270$$

cosa può aiutare a *vedere* che 30 × 9 a sinistra è una rappresentazione non canonica moltiplicativa del 270 a destra? E che 420 a sinistra è la forma canonica di 10 × 42? Che quindi sono rappresentazioni solo formalmente differenti degli stessi numeri?
In base alle verifiche condotte sia nelle cinque classi di scuola primaria sia in quelle di scuola secondaria di primo grado si è riscontrato che, per favorire il colpo d'occhio, sia importante l'intreccio fra i seguenti aspetti.

5.1.1 Praticare costantemente un calcolo mentale "di qualità"

L'insegnante dovrebbe mettere gli alunni nella condizione di ricorrere al calcolo mentale spontaneamente applicando, a seconda della convenienza, opportune strategie come, ad esempio, la scomposizione di un numero dato in forma canonica in opportune forme non canoniche; per esempio, per calcolare 34 + 75, "vedere" 34 come 30 + 4 e 75 come 70 + 5, associare 30 con 70 e 4 con 5 e trovare 109.

5.1.2 Allenare la capacità di riconoscere confronti promettenti

Si consideri il seguente episodio avvenuto in una classe di prima secondaria di primo grado.

EP2 (S1)
L'alunno A. argomenta la verità di questa equivalenza:

$$120 \times (80 + 10) \stackrel{?}{=} 240 \times 45.$$

A.: «Sostituisco a destra 240 con la rappresentazione non canonica 120 × 2:

$$120 \times (80 + 10) \stackrel{?}{=} 120 \times 2 \times 45.$$

Non considero 120 che sta nei prodotti a sinistra e a destra dell'uguale:

$$80 + 10 \stackrel{?}{=} 2 \times 45.$$

80 + 10 e 2 × 45 sono due rappresentazioni non canoniche di 90. L'equivalenza è vera:

$$120 \times (80 + 10) = 240 \times 45».$$

Un confronto "promettente" ha in realtà un valore relativo: nell'equivalenza dell'episodio l'alunno comprende che il confronto tra 120 e 240 è *più promettente* di quello tra 120 e 45. Questo significa, per esempio, in generale, insegnare a vedere le relazioni "doppio di", (riconoscere *a colpo d'occhio* che 240 è il doppio di 120) o "metà di" (riconoscere che 120 è la metà di 240).
Un altro aspetto che emerge è il fatto che attività come quelle di CsC supportano l'apprendimento di importanti concetti matematici; per esempio, quando A. dice «Non considero il fattore 120 che sta nei prodotti a sinistra e a destra dell'uguale» di fatto applica il primo principio di equivalenza.

5.1.3 Promuovere un uso consapevole delle proprietà

Questa competenza è strettamente intrecciata alla precedente, ma per costruirla è necessario far superare una conoscenza superficiale delle proprietà, viste spesso come elementi "di contorno" rispetto alle operazioni, e costruire la capacità di riconoscere l'utilità della loro applicazione in determinate situazioni. Sono significativi in questo senso i seguenti due episodi, avvenuti rispettivamente in una classe di terza e di quarta primaria.

EP3 (P3)

1. Ins. [propone l'equivalenza: $47 + 38 \stackrel{?}{=} 40 + 30 + 7 + 8$]: «Argomentate la verità di questa equivalenza».
2. G.: «L'uguaglianza è vera, perché la bilancia è in equilibrio [inizia a disegnare alla LIM una bilancia]».
3. Ins.: «Spiega a tutti noi perché pensi che sia così».
4. G.: «Perché qui c'è 47 e anche di là, perché sposto il 7 vicino a 40 e la loro somma è 47 [disegna degli archetti sul piatto a destra della bilancia della **Figura 3**]».
5. Ins.: «Quale proprietà hai applicato?»
6. G.: «Ho usato la proprietà commutativa».

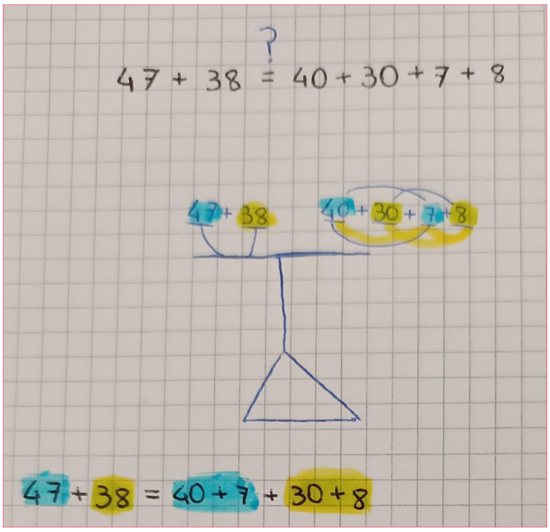

Figura 3. Disegni alla LIM di G. per “dimostrare” la verità dell’equivalenza.

Nel prossimo episodio, in una classe di quarta primaria viene proposta la seguente immagine (**Figura 4**) che rappresenta una sfida di Brioshi:[10]

$$5 \times 10 = \boxed{} = 3 \times 10 + 2 \times 10$$

Figura 4. La sfida di Brioshi.

Gli alunni devono capire quale rappresentazione, che faccia da “ponte” tra 5 × 10 e 3 × 10 + 2 × 10, si celi sotto il rettangolo verde.

EP4 (P4)

P. scrive: «Per passare da 5 × 10 a 3 × 10 + 2 × 10 faccio così. In 5 × 10 rappresento 5 in forma non canonica:

$$(3 + 2) \times 10.$$

Poi applico la proprietà distributiva [l’alunno sa che con quest’ultimo passaggio ha “dimostrato” l’equivalenza e, invece di “$\stackrel{?}{=}$”, scrive “=”:

$$(3 + 2) \times 10 = 3 \times 10 + 2 \times 10.]$$

Sotto il rettangolo verde Brioshi ha scritto (3 + 2) × 10».

10. Brioshi è un personaggio virtuale del progetto ArAl, un alunno giapponese che non conosce la lingua italiana (come del resto è improbabile trovare un alunno italiano che capisca gli ideogrammi giapponesi) ma sa esprimersi in un corretto linguaggio matematico, che diventa quindi *linguaggio della comunicazione*. All’interno di una strategia di lavoro abituale e condivisa, ha la funzione di mediatore didattico di fronte a questioni legate all’uso dell’incognita, alla rappresentazione e all’interpretazione di scritture in linguaggio matematico, alla traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico e viceversa e ai relativi aspetti *semantici* e *sintattici*. La sua “presenza” permette agli alunni, chiamati a confrontarsi con lui, di comprendere la necessità del *rispetto delle regole* nell’uso di un linguaggio formalizzato.

5.1.4 Favorire l'individuazione e la costruzione di rappresentazioni equivalenti

Queste competenze possono essere mobilitate attraverso attività preparatorie opportunamente costruite. Si consideri ad esempio un'attività proposta in più occasioni, e le relative risposte attese:

> Modificate 9 × 2 × 2 × 3 in modo da ottenere scritture equivalenti che contengano i numeri:
>
> A. 4 B. 18 C. 27 D. 6.
>
> Argomentate la strategia.

Nell'affrontare queste attività, gli alunni devono mostrare di saper "vedere" in 9 × 2 × 2 × 3:

A. "4" nella forma non canonica "2 × 2", scrivendo: 9 × 4 × 3;
B. "18" nella forma non canonica "9 × 2", scrivendo: 18 × 2 × 3;
C. "27" nella forma non canonica "9 × 3", scrivendo: 27 × 2 × 2;
D. "6" nella forma non canonica "2 × 3", scrivendo: 9 × 2 × 6.

Questa attività dà nelle classi gli stessi esiti, nel senso che quasi tutti gli alunni (con soddisfazione degli insegnanti) sono in grado di riscrivere, per esempio, 9 × 2 × 2 × 3 come 18 × 2 × 3. Ma è stato evidente come l'omogeneità sia solo apparente, e come solo la richiesta esplicita da parte dell'insegnante di *argomentare le proprie scelte* faccia emergere la profonda differenza tra due punti di vista: alunni che danno giustificazioni del tipo «Ho scritto 18 perché è il risultato di 9 per 2» o «Ho scritto 18 perché 9 per 2 fa 18» mostrano di interpretare la scrittura iniziale come una sequenza di *moltiplicazioni* e affrontano la prova *svolgendo operazioni*; coloro che spiegano di aver visto che «9 per 2 è la forma non canonica di 18» interpretano la scrittura iniziale come un *prodotto* (invece che come una moltiplicazione), e ragionano *confrontando rappresentazioni*.
Si configura qui una risposta alla seconda parte della domanda di ricerca: quali competenze deve possedere l'insegnante per promuovere e guidare lo sviluppo del pensiero relazionale? Un insegnante, per svolgere un ruolo efficace (anche) in CsC, dev'essere in grado di *notare*, cioè deve aver maturato quella che Mason (2002) chiama "l'arte di accorgersi": essere sensibile alle situazioni e rispondere in modo appropriato. In questo caso comprendere, promuovendo l'argomentazione come pratica quotidiana abituale, se sta guidando i suoi alunni in modo *autentico* verso il pensiero relazionale o se invece il cambiamento è solo *di facciata*, e nel profondo i suoi alunni rimangono procedurali.

5.2 Appoggiarsi a strategie che si rivelano efficaci per individuare numeri e relazioni

Si riportano nello specifico due strategie: la "strategia cromatica" e la verbalizzazione in forma relazionale dell'equivalenza da verificare prima di avviare la riflessione sul confronto fra i due membri.

5.2.1 La strategia cromatica

La strategia cromatica[11] consiste nell'evidenziare con lo stesso colore le parti che si corrispondono in un'equivalenza per favorire il confronto tra le rappresentazioni ai due lati dell'uguale alle quali venga attribuito lo stesso significato, portando così l'attenzione sia sui numeri sia sulle relazioni che li collegano. Si consideri il seguente episodio in cui una classe di terza primaria sta analizzando l'equivalenza

$$47 + 38 \overset{?}{=} 40 + 30 + 7 + 8.$$

11. La strategia cromatica è usata abitualmente nelle attività del progetto ArAl, in particolar modo per favorire l'evidenziazione delle parti che si corrispondono in una frase in linguaggio naturale e nella relativa traduzione in linguaggio matematico. Per esempio:

La somma fra | un numero | e | il suo successivo | è uguale alla | somma fra | il doppio del numero stesso | e | 1

↓

n + (n + 1) = 2 × n + 1.

Per gli approfondimenti rimandiamo il lettore a Navarra (2022).

EP5 (P3)

1. M. [alza la mano]: «Allora io ho fatto così [viene alla LIM, **Figura 5**]».

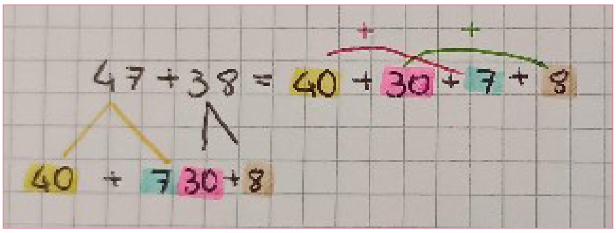

Figura 5. Disegni alla LIM di M. per "dimostrare" la verità dell'equivalenza.

2. M.: «[parla mentre costruisce la **Figura 5**] Io vedo a sinistra la somma tra 47 e 38 e di là vedo la somma tra 40 e 7, e 30 e 8. Io ho fatto così… allora: io comincio da 47 e faccio due frecce, lo smonto in 40 e 7 [disegna due linee che da 47 portano a 40 e 7, ma non mette nessun segno tra i due numeri]».
3. Ins.: «Ma tra 40 e 7 che relazione c'è?»
4. M.: «Ah, metto il segno… [aggiunge il "+" tra i due numeri] è la forma non canonica di 47. Poi prendo il 38 [traccia da 38 altre due linee verso il basso] e anche qui scrivo la somma tra 30 e 8 che è la forma non canonica di 38, sicché è 38».
5. Ins.: «Ora come fai a dimostrare che è un'uguaglianza?»
6. M.: «Vedrai, sono uguali! [colora nello stesso modo le parti uguali: in giallo i 40, in celeste i 7, in viola i 30 e in rosa gli 8]. Ecco, ora ho fatto la verifica, ho controllato che è vera!»

La strategia cromatica, promossa con costanza dall'insegnante, se fatta propria dall'allievo, come accade in questo episodio, è un importante *traghetto semantico* sia per l'alunno che la applica sia per i compagni che assistono; in quanto tale possiede una forte valenza sociale in quanto fornisce a tutti un rinforzo visivo per individuare le rappresentazioni che l'alunno pone in relazione e che supportano il suo ragionamento nello stabilire la verità dell'equivalenza.

5.2.2 La verbalizzazione in forma relazionale dell'equivalenza

Con *verbalizzazione relazionale* si intende una verbalizzazione costruita attraverso la *nominalizzazione*, cioè la sostituzione nella costruzione di una frase dell'uso dei verbi attraverso i quali l'alunno spiega *ciò che fa* (addiziono, sottraggo, moltiplico ecc.), con quello dei sostantivi, attraverso i quali l'alunno spiega *ciò che la scrittura* è (una somma, una differenza, il doppio di ecc.). In questo modo si condensano significati che, altrimenti, si dovrebbero esprimere attraverso giri di parole che, a volte, non solo non migliorano la loro comprensione ma giungono persino a comprometterla. Questo passaggio, preliminare all'elaborazione di congetture sulla verità di un'equivalenza, comporta che gli alunni, per poter assegnare loro un nome, sappiano riconoscere cosa sono gli oggetti matematici rappresentati nell'equivalenza. Fare proprio il passaggio dai *processi* agli *oggetti* e impadronirsi dei termini specifici per designarli costituiscono un'impresa complessa ma necessaria a una maturazione consapevole del pensiero matematico. A tale scopo è importante che, prima che si avvii la verbalizzazione, l'insegnante negozi con gli alunni *i termini da usare per costruire una buona argomentazione*. Si consideri il seguente episodio in cui, data l'età degli alunni (prima primaria), non si inizia da un'equivalenza ma: (i) l'insegnante propone una situazione concreta in cui si confrontano due gruppi di oggetti; (ii) gli alunni la descrivono; (iii) la rappresentano in linguaggio matematico; (iv) argomentano se i due gruppi sono numericamente uguali. In particolare, l'insegnante dispone due gruppi di mattoncini da costruzione su due banchi (**Figura 6**) e chiede di descrivere la situazione. Si concordano le parole "banco", "destra", "sinistra" e "mattoncini".

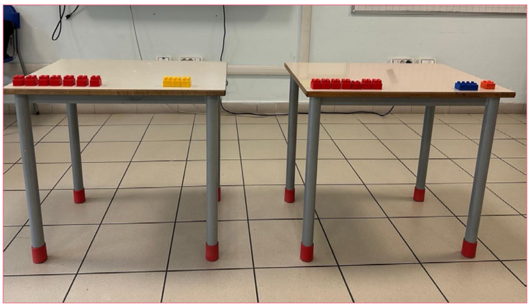

Figura 6. I due tavoli e i gruppi di mattoncini.

EP6 (P1)

1. A.: «Sul banco di sinistra vedo sette mattoncini rossi a sinistra e tre mattoncini gialli a destra e sul banco di destra vedo sette mattoncini rossi a sinistra e due mattoncini blu e un arancione a destra».
2. [Ricorrendo al *mediatore linguistico* familiare agli alunni («Facciamo finta che qui con noi ci sia Brioshi») si elabora collettivamente la traduzione in linguaggio matematico della frase di A.]

$$7 + 3 = 7 + 2 + 1.$$

3. Ins.: «Secondo voi, questa uguaglianza è vera? Mi spiego meglio: dobbiamo scoprire insieme se il numero dei mattoncini sul banco a sinistra è lo stesso di quelli sul banco a destra, ma *senza fare i calcoli*».
4. A.: «Io non ho fatto calcoli! Ho visto che il 7 c'è da tutte e due le parti. Poi il 3 a sinistra è in forma canonica, il 3 a destra è in forma non canonica ed è scritto 2 più 1».
5. Ins.: «Wow! Bravissima! Prova a leggere quest'ultima scrittura come una bambina grande».
6. A.: «La somma tra 2 e 1 è la forma non canonica di 3».

Si noti come nell'ultimo intervento (intervento 6) A. conclude lo scambio con l'insegnante costruendo una verbalizzazione in forma relazionale. A. non definisce 2 + 1 come operazione, ma come *oggetto* e gli attribuisce il nome *somma*, completando il suo intervento con la precisazione che si tratta di una *forma non canonica*.

5.3 Favorire l'interpretazione complessiva di un'equivalenza distinguendo tra calcoli locali e calcoli globali

Le attività di CsC sono centrate sulla capacità di valutare se un'equivalenza sia verificata o meno senza svolgere *calcoli globali*, bensì analizzando le relazioni presenti nei membri dell'equivalenza appoggiandosi a *calcoli locali*, cioè a semplici calcoli mentali ridotti al minimo. L'alunno che senta la necessità di appoggiarsi ai *calcoli globali* esprime un retro-pensiero *procedurale*, poiché si pone l'obiettivo di verificare l'equivalenza fra i due membri puntando all'*uguaglianza dei rispettivi risultati*. Al contrario, l'alunno che si limita a svolgere *calcoli locali* mostra di maturare un atteggiamento *relazionale*, poiché si concentra sulla *struttura* dei due membri dell'equivalenza, confronta rappresentazioni canoniche e rappresentazioni non canoniche, individua analogie e differenze, applica proprietà. Di seguito si riporta un episodio significativo documentato in una classe di terza primaria.

EP7 (P3)

1. Ins.: «Quale numero mettereste al posto di "*a*" per fare in modo che l'uguaglianza sia vera?»

$$15 + 3 = 5 \times 3 + a.$$

2. S.: «[si propone, dicendo che ha già capito] Qui [indica a sinistra dell'uguale] c'è la somma tra 15 e 3… e qui la somma tra… la somma tra *a* e questo… [indica 5 × 3]… secondo me *a* deve essere uguale a 10».
3. V.: «Secondo me *a* è uguale a 3».
4. S.: «*a* è uguale a 15».
5. D.: «Ma che dici, così sarebbe 30 a destra!»
6. [Tutti dicono che è giusta solo quella di V.].
7. Ins.: «V., adesso vediamo come puoi spiegarci che *a* vale 3… usa i colori o segna come vuoi…».
8. V.: «Allora… [prende un colore ma è indecisa su cosa colorare]. Questo è uguale a questo [colora il 15 e 3 × 5]… sono il numero 15… questa [indica 3 × 5] è la forma non canonica. Sì, [con convinzione] è il 3, perché se questi due sono uguali [si riferisce a 15 e 3 × 5] allora 3 è a sinistra e *a* è 3 a destra».

L'insegnante, che cura molto la significatività delle argomentazioni, prosegue con l'obiettivo di condurre la classe a riflettere sul valore errato proposto da S. (intervento 2); approfitta di questa occasione per promuovere il confronto fra il significato dei simboli "≠" e "<".

9. Ins.: «Bene! Adesso riprendiamo la risposta di S.: aveva detto che *a* è uguale a 10…»
10. S.: «Sì… ma mi sa che ho sbagliato».
11. Ins.: «S., che succede se ci metti 10 al posto di *a*? Come mi potresti far capire che relazione c'è tra questi due? [indica 15 + 3 e 5 × 3 + *a*] C'è un simbolo adatto…»
12. S.: «Quello che "non è uguale"».
13. V.: «Io metterei il simbolo minore».
14. Ins.: «V. dimmi tutta la frase».
15. V.: «La somma tra 15 e 3 è minore del prodotto tra 5 e 3... anzi, della somma tra il prodotto di 3 e 5 e 10 [alla LIM vengono riprodotte entrambe le scritture $15 + 3 \neq 3 \times 5 + 10$ e $15 + 3 < 3 \times 5 + 10$]».
16. Ins.: «Ma secondo voi quale segno mi dà più informazioni, quale messaggio sarebbe più utile a Brioshi?»
17. L., G.: «Il secondo [intendono $15 + 3 < 3 \times 5 + 10$]».
18. L.: «Mi dice che quello a sinistra è più piccolo dell'altro a destra».
19. G.: «Il "non è uguale" non mi fa capire come sono, è meno trasparente!»
20. L.: «È opaco! A Brioshi non serve tanto... non gli fa capire molto, invece il segno minore gli fa capire chi è più grande e chi è più piccolo, Brioshi li può mettere in ordine di grandezza».

L'insegnante trova un altro spunto per arricchire ulteriormente la riflessione collettiva. Può permettersi di farlo avendo lavorato sin dalla prima primaria in modo continuativo (e competente) sui nodi fondativi (par. 3.1) e i temi chiave (par. 3.2), come si può evincere dalla sicurezza con cui anche gli allievi usano i termini "forma canonica" e "forma non canonica", scrittura "trasparente" o "opaca".

21. Ins.: «Bene, e ditemi... che valore dovrebbe avere *a* per far sì che la relazione sia con il simbolo maggiore $15 + 3 > 5 \times 3 + a$?»
22. D.: «*a* deve essere 2... anzi tutti i numeri minori di 3: 2, 1, e 0».
23. Ins.: «Posso mettere il 3?»
24. D.: «No, dovevo mettere il segno uguale, come ha detto prima V., non posso mettere il segno maggiore».

Nel prossimo episodio, gli alunni di una classe di quinta primaria devono argomentare la correttezza di questa equivalenza riducendo al minimo i calcoli:

$$26 \times 7 \stackrel{?}{=} 13 \times (10 + 5).$$

EP8 (P5)
A. scrive: «26 a sinistra è il doppio di 13 a destra e lo scrivo in forma non canonica:

$$2 \times 13 \times 7 \stackrel{?}{=} 13 \times (10 + 5).$$

13 è da tutte e due le parti e non mi interessa, rimane:

$$2 \times 7 \stackrel{?}{=} 10 + 5.$$

Il prodotto 2×7 è una forma non canonica di 14 e la somma $10 + 5$ è una forma non canonica di 15, $14 < 15$. Conclusione:

$$26 \times 7 < 13 \times (10 + 5).$$

L'equivalenza è falsa».

Guidare a ideare strategie di confronto piuttosto che a "buttarsi nei calcoli" si dimostra funzionale non solo allo sviluppo di un'ottica relazionale ma anche, allo stesso tempo, alla promozione di una costruzione sociale della conoscenza. I risultati raggiunti durante le sperimentazioni nelle classi evidenziano, infatti, quanto sia importante che gli alunni vengano abituati a condividere le proprie strategie di confronto con i compagni e a dibatterne nel corso di una discussione.
La conoscenza da parte degli alunni delle equazioni (tramite l'uso della bilancia a piatti) costituisce un prerequisito efficace (per molti aspetti *necessario*) anche per l'esplorazione delle equivalenze. L'alunno A. nell'EP8 esprime in modo ingenuo («Non mi interessa») la conoscenza del secondo principio di equivalenza; sa che se in un'equivalenza fra prodotti compaiono due fattori uguali (indipendentemente dal fatto che siano rappresentati in forma canonica o non canonica) li si può trascurare, col vantaggio che l'equivalenza diventa più semplice da esplorare.

Nel seguente episodio in una classe di prima secondaria di primo grado viene chiesto di dimostrare questa equivalenza: $37 + 56 = 39 + 54$. Tre alunni elaborano queste conclusioni:

EP9 (S1)
1. M.: «È vera perché 39 è la forma canonica di $37 + 2$ e 54 è la forma canonica di $56 – 2$ [scrive alla LIM]:

$$37 + \cancel{56} = 37 + 2 + \cancel{56} – 2 \rightarrow 37 + 56 = 37 + 56 + 2 – 2».$$

2. E.: «L'uguaglianza è giusta perché nel $39 + 54$ ci sono due numeri in più e due numeri in meno, cioè $37 + 2 = 39$ e $56 – 2 = 54$».
3. A.: «È vera perché 39 è maggiore di 37 di due unità e 56 è maggiore di 54 di due unità».

Nel prossimo estratto invece in una classe di quinta primaria l'insegnante scrive alla lavagna:

$$49 + 32 = 45 + 36.$$

EP10 (P5)

1. Md.: «Dobbiamo confrontare. Allora Brioshi stavolta ce l'ha mandata vera. Perché la differenza tra 49 e 45 è di 4 e anche tra 32 e 36 è di 4».
2. Mr.: «Il 4 dove lo trovi? Md. hai calcolato, perché se tu hai saputo che la differenza tra 49 e 45 è di 4 e anche tra 36 e 32 hai dovuto calcolare».
3. Ins.: «Che ne pensate? Md. ha fatto un calcolo?»
4. Md.: «Avevo pensato come a voce alta. Non stavo proprio calcolando… confrontavo per capire la forma non canonica che serve».

Mr. (intervento 2) non accetta la risposta/spiegazione di Md. (intervento 1) in quanto, secondo lei, Md., per trovare il numero 4, ha *calcolato* e non *confrontato*. Effettivamente la risposta di Md. è frutto di un calcolo, ma si tratta di un semplice calcolo *locale*, *necessario* per poter svolgere il confronto. Mr. avrebbe avuto ragione se Md. avesse detto «49 più 32 è uguale a 81, 45 più 36 è uguale a 81 quindi i due membri sono uguali». Nella sua risposta (intervento 4) Md. chiarisce proprio questo punto di vista: «Avevo pensato come a voce alta. *Non stavo proprio calcolando… confrontavo* per capire la forma non canonica che serve». Dunque in questo caso la riflessione, stimolata dall'insegnante, serve proprio a mettere in luce l'importanza di un calcolo mentale locale che serve per realizzare il confronto. D'altronde la strategia di calcolo verbalizzata da Md. (intervento 1) è del tutto relazionale («la differenza tra 49 e 45 è 4»).

5.4 Distinguere premesse e conclusione in un'argomentazione

Questo aspetto è molto importante quando gli alunni giustificano la verità o la non-verità di un'equivalenza perché si è notato con crescente evidenza che essi, man mano che diventano competenti nell'individuare forme equivalenti ai due lati dell'uguale, tendono a ritenere, così facendo, di aver esaurito il loro compito, e non comprendono che quelle sono solo le premesse che consentono di esprimere la verità dell'equivalenza. Il riferimento all'*investigatore* – che cerca gli indizi in quanto informazioni necessarie alla scoperta dell'autore del crimine, atto conclusivo della sua indagine – è utile per favorire la comprensione della differenza fra i due momenti. Gli alunni vanno guidati a capire che l'individuazione delle forme locali equivalenti non è fine a sé stessa ma che esse vanno inserite in un ragionamento globale che permetta di affermare la verità o meno dell'equivalenza.
Nel seguente episodio, con un'allieva di terza primaria, ciò non accade e si rimane fermi alle premesse, seppur corrette, da lei formulate. L'insegnante propone $25 : 5 \stackrel{?}{=} 250 : 50$.

EP11 (P3)

1. E.: «Tra 25 : 5 e 250 : 50 è solo per 10 quindi non cambia il numero, è solo che c'è la proprietà… [rimane un attimo incerta] c'è applicata la proprietà invariantiva».
2. Ins.: «E., puoi spiegarci cosa intendi?»
3. E.: «C'è la proprietà invariantiva perché qui [indica la parte a destra dell'uguale] 250 *diviso 10* è 25 e 50 *diviso 10* è 5».

Le argomentazioni di E., pur se deboli nella forma (intervento 1: «è solo per 10 quindi non cambia il numero»), esprimono delle intuizioni corrette. L'alunna, e la stessa insegnante, si sono però arrestate alle premesse ed E. non è stata guidata verso una conclusione; ad esempio: «Ho applicato a destra la proprietà invariantiva e ho diviso sia 250 che 50 per 10; ho scritto: 250 : 10 = 25 e 50 : 10 = 5. In questo modo a destra al posto di 250 : 50 ho scritto 25 : 5. Ho concluso che 25 : 5 = 250 : 50».

Un’argomentazione come questa avrebbe permesso di *rendere visibile* l’applicazione della proprietà invariantiva, che porta a due rappresentazioni formalmente uguali ai lati dell’uguale e quindi alla verifica dell’equivalenza. Cosa che, invece, avviene nel prossimo episodio, svoltosi in una classe di prima secondaria di primo grado, tratto da un file di lavoro.
L’insegnante propone il seguente problema:

> Brioshi ci ha mandato questa frase:
>
> $$(21 + 4) + (38 + 11) \stackrel{?}{=} (38 + 11) + (21 + 2).$$
>
> Argomentate la risposta e scrivetela in linguaggio matematico per Brioshi.

EP12 (S1)

1. M. [scrive]: «Non è vera perché 21 + 4 nella parte a destra non c’è, c’è 21 + 2. 38 + 11 c’è da tutte e due le parti».
2. Ins.: «Ma da cosa capisci che non è vera?»
3. M.: «Si vede dal 21 + 4 e dal 21 + 2 perché 21 + 4 non è uguale a 21 + 2 e 38 + 11 è uguale a 38 + 11».
4. Ins.: «Sì, ok… ma, come abbiamo detto, concentratevi sulle parti che rimangono uguali ed evidenziatele con un colore [Su indicazione di molti si scrive alla LIM]:

   $$(21 + 4) + (38 + 11) \stackrel{?}{=} (38 + 11) + (21 + 2)».$$

5. A.: «Avevamo detto che si possono togliere!»
6. T.: «Sono forme non canoniche di 48… no, di 49 [alla LIM rimane $21 + 4 \stackrel{?}{=} 21 + 2$]».
7. Ins.: «E adesso cosa potete dire?»
8. M.: «Che 21 + 4 è la forma non canonica di 25, e 21 + 2 è la forma non canonica di 23, e 25 è più grande di 23».
9. K.: «Io ho pensato in un modo diverso. 21 + 4 e 21 + 2 sono tutte e due somme, ma la prima è più grande perché a sinistra è aggiunto 4 e a destra 2».
10. Ins.: «Bene, e come potremmo tradurre per Brioshi quello che hanno detto K. e M.?»
11. T.: «Si può dire che 21 + 4 non è uguale a 21 + 2, ma è meglio che 21 + 4 è maggiore di 21 + 2 così si capisce che è più grande [alla LIM scrive $21 + 4 \neq 21 + 2$; $21 + 4 > 21 + 2$]».
12. Ins.: «T. ha detto cose corrette, ma ha finito il suo lavoro di investigatore?»
13. T.: «No… questi sono gli indizi, sì, volevo dire… le premesse».
14. Ins.: «E quindi?»
15. M.: «La conclusione! [Alla LIM scrive $(21 + 4) + (38 + 11) > (38 + 11) + (21 + 2)$]».

Gli alunni sintetizzano alla LIM il ragionamento:

> PREMESSE: $38 + 11 = 38 + 11$; $21 + 4 > 21 + 2$.
> CONCLUSIONE: $(21 + 4) + (38 + 11) > (38 + 11) + (21 + 2)$.

L'insegnante guida la classe verso la comprensione della distinzione fra premesse e conclusione appoggiandosi alla strategia cromatica (par. 5.2.1) e alla metafora dell'investigatore. Guida, attraverso un susseguirsi di argomentazioni verbali (nelle quali gli allievi evidenziano un buon controllo anche sui termini) e di traduzioni in linguaggio matematico, verso la sintesi finale. L'intervento 11 di T. sulla distinzione fra i segni "≠" e ">" mette in luce l'importanza di una didattica rivolta, innanzitutto, alla riflessione sui concetti in gioco.

5.5 Appoggiare il pensiero a un supporto scritto

Man mano che gli alunni diventano competenti nel *colpo d'occhio*, nel riconoscimento delle rappresentazioni parziali equivalenti, nell'applicazione di principi e proprietà, maturano anche le loro capacità di argomentare. Questa capacità si esprime a livelli diversi, utilizzando il linguaggio naturale e/o il linguaggio matematico. Di seguito si riportano due episodi, in cui ad allievi di seconda secondaria di primo grado è stato chiesto di verificare l'equivalenza $40 \times 8 + 560 \stackrel{?}{=} 10 \times a + 320$. Il primo episodio riporta un esempio di argomentazione prevalentemente verbale, il secondo un esempio di argomentazione prevalentemente matematica. In entrambi i casi la possibilità di poter scrivere l'argomentazione aiuta l'allievo a organizzare e strutturare il pensiero relazionale.

EP13 (S2)

G. scrive: «Il valore di *a* è uguale a 56 perché 320 è la forma canonica di 40 moltiplicato a 8. Quindi avendo la forma canonica in un lato e quella non canonica nell'altro lato e applicando il principio di cancellazione si scopre che 560 è la forma canonica di 10 moltiplicato ad *a*. Quindi *a* è uguale al quoziente tra 560 e 10, ovvero 56».

Le parti in linguaggio matematico inserite all'interno del testo "sostengono" il ragionamento. La classe di G. ha ricevuto un'educazione matematica nella prospettiva dell'*early algebra* sin dalla scuola primaria. In tale contesto ha seguito dalla quarta un percorso che, iniziato con l'uso della bilancia a piatti, ha condotto gli alunni all'incontro con le equazioni. Gli alunni che conoscono quindi il primo e il secondo principio di equivalenza e, di conseguenza, la *regola del trasporto* e il *principio di cancellazione* al quale fa riferimento G. nella sua argomentazione.

EP14 (S2)

Ga. scrive:

«$40 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$	scrivo 40 in forma non canonica:
$10 \times 4 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$	il prodotto tra 10, 4 e 8 a sinistra è uguale a 320 a destra:
$10 \times 4 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$	applico il principio di cancellazione:
$\cancel{10 \times 4 \times 8} + 560 = 10 \times a + \cancel{320}$	resta:
$560 = 10 \times a$	scrivo 560 in forma non canonica:
$56 \times 10 = 10 \times a$	applico il secondo principio e divido i due membri per 10:
$56 = a$».	

I trattamenti sintattici sono i protagonisti di questa argomentazione, e i brevi testi che accompagnano lo sviluppo del ragionamento illustrano i passaggi con il corredo della strategia cromatica (par. 5.2.1). L'aver esplorato le equazioni tramite la bilancia a due piatti permette all'alunno di gestire con sicurezza il secondo e il quinto passaggio esplicitando l'applicazione del primo e del secondo principio di equivalenza.

5.6 Evitare/ridurre la "gabbia relazionale"

Nel progetto ArAl si chiama *gabbia procedurale* l'insieme di conoscenze, convinzioni e comportamenti – generati da una didattica concentrata soprattutto sul fare, sul calcolare, sul trovare risultati – che

modellano le menti degli alunni dal momento in cui scoprono, da piccolissimi, il piacere per l'approvazione da parte degli adulti quando dicono frasi come: «Due più tre fa cinque».
In contrapposizione con questa impostazione, i cambiamenti introdotti da una didattica *relazionale* possono rivelarsi complessi da gestire da parte degli insegnanti (spesso prigionieri a loro volta di una gabbia procedurale) che li affrontano secondo schemi altrettanto rigidi.
Il rischio è che l'approccio relazionale, se non viene adeguatamente supportato sul piano della teoria e del metodo, possa diventare una *gabbia* tanto quanto quella rilevabile in un approccio procedurale, una gabbia in cui gli alunni non si sentono liberi di esplorare, di esprimersi, di sbagliare, di condividere la propria opinione ma sono vincolati da una richiesta continua di rigore che può soffocare la loro spontaneità.
A questo proposito, si riporta di seguito un episodio significativo documentato con allievi di seconda secondaria di primo grado alle prese con la verifica dell'equivalenza:

$$40 \times 8 + 560 \stackrel{?}{=} 10 \times a + 320.$$

La strategia attesa era quella riportata nell'episodio EP14, ma contrariamente alle aspettative, in una classe, in sei protocolli su otto, gli alunni hanno invece attivato lunghe sequenze di sostituzioni in sé corrette ma non necessarie.

EP15 (S2)
L. scrive: «$40 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$
$10 \times 4 \times 8 + 560 = 10 \times a + 320$
$10 \times 4 \times 8 + 56 \times 10 = 10 \times a + 32 \times 10$
$10 \times 4 \times 8 + 56 \times 10 = 10 \times a + 4 \times 8 \times 10$
$\cancel{10 \times 4 \times 8} + 56 \times 10 = 10 \times a + 4 \times 8 \times 10$
$a = 56$».

Viene da chiedersi perché questi alunni abbiano sentito il bisogno di organizzare così tante sostituzioni. In colloqui successivi all'attività, L. e i suoi compagni hanno affermato di aver scritto tutti quei passaggi – anche avendo capito sin dall'inizio che 40×8 è una forma non canonica di 320 – perché *pensavano di doverlo fare*. Questo porta a pensare che le loro scelte formali siano state condizionate da una gabbia relazionale che li ha condotti a ritenere che certi trattamenti siano *obbligatori* anche dove non sono necessari in quanto, nelle attività di CsC, essi venivano richiesti in modo pressante dall'insegnante.
Per portare gli alunni a *operare all'interno di un metodo, ma con consapevole spontaneità*, è necessario negoziare con loro, appena se ne ravveda l'opportunità, il significato della consegna "senza calcolare". A tale scopo, a nostro avviso, è di grande importanza la *condivisione dei principi teorici con gli alunni*: per arrivare a negoziare il significato della consegna "senza calcolare", infatti, essi dovranno aver fatto proprio il *senso* di CsC, imparando a gestire autonomamente e liberamente gli atteggiamenti emersi esplorando la verità delle equivalenze: il *colpo d'occhio*, il confronto tra rappresentazioni formalmente differenti di uno stesso numero, riconoscere proprietà, applicare principi, distinguere tra premesse e conclusione, elaborare argomentazioni in linguaggio naturale esprimendosi in un modo relazionale nominando gli oggetti matematici (utilizzando quindi termini come "somma", "prodotto", "doppio", "metà").

6 Considerazioni conclusive

Sulla base degli studi condotti all’interno del progetto CsC, si può concludere che le sei strategie presentate, oltre a fornire delle risposte alla prima domanda di ricerca relativamente alla verifica di equivalenze matematiche, possiedono allo stesso tempo una valenza generale. Le competenze relazionali manifestate dagli alunni nella maggior parte degli episodi analizzati nel par. 5 non valgono solo in contesti di attività CsC ma, se opportunamente coltivate e reinvestite, possono essere estese a più avanzate riflessioni in ambito aritmetico e algebrico. In particolare:

- affinare il colpo d’occhio nella ricerca della verità di un’equivalenza comporta l’individuazione di parti costanti e di parti variabili interne alle espressioni, e questa competenza sta alla base dell’individuazione della legge generale di una successione algebrica o figurale e favorisce quindi l’approccio alla modellizzazione;
- non appoggiarsi ai calcoli significa maturare la capacità di concentrarsi sulle relazioni fra gli enti di una situazione problematica e promuove la riflessione sul significato delle scritture matematiche;
- riconoscere premesse e conclusioni in un ragionamento significa imparare a decostruire problemi complessi in sotto-problemi più maneggiabili, e questa competenza è fondamentale in algebra perché prepara anche a comprendere il significato delle dimostrazioni.

Le principali competenze relazionali che le sei strategie favoriscono sono strettamente collegate a quelle connesse ai nodi fondativi (par. 3.1), e riguardano la capacità di intendere le scritture (tanto aritmetiche quanto algebriche) come rappresentazioni di numeri da interpretare, confrontare, sostituire; di vederle come oggetti dotati di un nome che si sa utilizzare per costruire argomentazioni chiare e complete; di riconoscere l’equivalenza tra scritture a una delle quali sia stata applicata una proprietà che la “allontana formalmente” dall’altra, per esempio riconoscere l’equivalenza di formule che esprimono in modi diversi il perimetro di un rettangolo, come $2 \times (a + b)$ e $2 \times a + 2 \times b$.
Queste strategie possono essere rilette, in prospettiva, in termini di interventi didattici efficaci per lo sviluppo del pensiero relazionale. Ma tale efficacia è subordinata alla didattica attuata, da cui la seconda domanda di ricerca: quali competenze deve possedere un insegnante per favorire tale sviluppo?
Oltre a possedere una solida competenza matematica concettuale, l’insegnante dovrebbe saper favorire i collegamenti e le traduzioni tra linguaggio naturale e linguaggio matematico nei loro aspetti semantici e sintattici; promuovere l’argomentazione individuale e la riflessione collettiva attraverso domande metacognitive («Cosa noti?», «Che relazione vedi fra questi numeri?», «Come spiegheresti ad un compagno quello che hai capito?»); cogliere nelle verbalizzazioni degli alunni segnali anche minimi della persistenza di un pensiero procedurale; valorizzare e confrontare strategie diverse; individuare misconcezioni, intuizioni, spunti promettenti verso la generalizzazione; progettare attività aperte e significative in cui si confrontano rappresentazioni equivalenti contenenti anche numeri sconosciuti, come nel progetto CsC.
In questa prospettiva, l’insegnante dovrebbe superare il ruolo di *trasmettitore di tecniche* per diventare *mediatore di significati*.
Per sviluppare autentiche competenze relazionali in questo senso negli insegnanti è necessario promuovere una loro graduale rilettura critica di conoscenze, concezioni, atteggiamenti, stereotipi, che spesso sono profondamente radicati. Questo processo viene avviato attraverso l’incontro con i principi dell’*early algebra* e con i nodi fondativi e i temi chiave del progetto ArAl.
Le sperimentazioni effettuate mostrano come questo sia appena il primo passo di un percorso formativo, che però non solo è insufficiente a generare i cambiamenti necessari, ma rischia anzi di produrre

un passaggio superficiale, povero nei contenuti e limitato negli sviluppi, dalla *gabbia procedurale* alla *gabbia relazionale*. Per sostenere una trasformazione reale, il progetto ArAl propone una didattica fondata su ambienti di apprendimento che supportino i docenti nell'attuare uno sviluppo efficace del pensiero relazionale (Navarra et al., 2024, 2025).[12] Anche le attività del progetto CsC, nate dalla collaborazione tra insegnanti e ricercatori (come mostrato nel ciclo in **Figura 1**), si collocano in questo quadro e richiamano la prospettiva, indicata da Sfard nella plenaria dell'ICME 10 intitolata *Cosa potrebbe essere più pratico di una buona ricerca?* (Sfard, 2004), centrata sulla necessità che ricercatori e docenti integrino saperi ed esperienze per unire in modo fecondo prassi e ricerca.

Bibliografia

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 115–136). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into Algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483–510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 27–49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669–705). Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2005). Treating the operations of arithmetic as functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*, 1.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235–272). Routledge.

Cusi, A., Malara, N. A., & Navarra, G. (2011). Theoretical issues and educational strategies for encouraging teacher to promote a linguistic and metacognitive approach to early algebra. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483–510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_25

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

12. Tra il 2003 e il 2022 le Unità della Collana ArAl (pubblicate da Pitagora Editrice Bologna) sono state concepite come modelli di processi di insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica per offrire agli insegnanti, prima ancora che percorsi didattici da attuare nelle classi, l'opportunità di riflettere sulle loro conoscenze e sul loro modus operandi.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for early algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(4), 232–236.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi.* UTET Università.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59–78. https://doi.org/10.1007/BF01284528

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258–288.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96–112). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 387–419). Macmillan.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: Some pros and cons. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 157–175). PME Program Committee.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvarez, M. Niss, A. Perez, L. Rico & A. Sfard (Eds.), *Selected lectures from the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 271–290). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 79–105). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer International Publishing.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 297–312.

Lins, R., & Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 47–70). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_4

Malara, N. A., & Navarra, G. (2003). Influences of a procedural vision of arithmetics in algebra learning. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 935–944). University of Pisa and ERME.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebra thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 51–77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3

Mariotti, M. A. (2022). *Argomentare e dimostrare come problema didattico.* UTET Università.

Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing.* The Falmer Press.

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 329–350). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

Ministero dell'Istruzione e del Merito. (2025). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e delle scuole del primo ciclo di istruzione.* MIM. https://www.mim.gov.it/documents/20182/10554370/curricolo_web.pdf/f91c31a0-5ed4-65f3-bfea-fb49adaba55f?version=1.0&t=1773224873548

Navarra, G. (2019). Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebrica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 70–94. https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.3

Navarra, G. (2022). *Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante.* UTET Università.

Navarra, G., Della Picca, M. G., & Traverso, A. (2024). *Matematica e pensiero relazionale: Un percorso educativo per la scuola primaria. Classe seconda e classe terza.* Sintab Edizioni.

Navarra, G., Della Picca, M. G., & Traverso, A. (2025). *Matematica e pensiero relazionale: Un percorso educativo per la scuola primaria. Classe quarta e classe quinta, con espansioni verso la scuola secondaria.* Sintab Edizioni.

Pareti, E. (2025). *Early Algebra: uno studio di attività di classe per lo sviluppo del pensiero relazionale alla scuola primaria nell'ambito del Progetto ArAl.* Tesi di laurea magistrale. Università degli Studi di Firenze.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73–80). PME.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 3–25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 4, pp. 127–134). University of Hawaii and PME.

Schwarzkopf, R., Nührenbörger, M., & Mayer, C. (2018). Algebraic understanding of equalities in primary classes. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 195–212). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_8

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2004). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. In M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 76–92). Roskilde University. https://doi.org/10.1007/s10649-005-4818-5

Sfard, A. (2008). *Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo.* Edizioni Erickson.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 191–228. https://doi.org/10.1007/BF01273663