

Dalla descrizione alla definizione: un itinerario didattico sui quadrilateri

From description to definition: an educational path on quadrilaterals

Jessica De Putti Cattaneo

Scuola elementare Davesco-Soragno – Svizzera

✉ jessica.cattaneo@edu.ti.ch

Sunto / Questo articolo descrive un'esperienza didattica sul tema dei quadrilateri condotta in una classe quarta delle scuole elementari. L'obiettivo del percorso è stato favorire il passaggio graduale dalla descrizione alla definizione dei quadrilateri attraverso un approccio interdisciplinare che integra in modo significativo la riflessione sul linguaggio. Dopo una panoramica sul quadro teorico di riferimento, vengono illustrate le diverse fasi del percorso e analizzate le produzioni degli alunni. In allegato sono forniti i materiali didattici utilizzati.

Parole chiave: quadrilateri; descrizione; definizione; linguaggio; pensiero geometrico.

Abstract / This article describes a teaching experience on the topic of quadrilaterals conducted in a fourth-grade primary school class. The aim of the educational path was to encourage a gradual transition from the description to the definition of quadrilaterals through an interdisciplinary approach that significantly integrates reflection on language. After an overview of the theoretical framework of reference, the different phases of the path are illustrated and the pupils' productions analyzed. The teaching materials used are attached.

Keywords: quadrilaterals; description; definition; language; geometric thinking.

1 Introduzione

In questo contributo si presenta un percorso didattico svolto in una quarta elementare focalizzato sulla descrizione e definizione dei quadrilateri in cui è stata posta particolare attenzione al linguaggio. Il percorso nasce dall'esigenza di rendere gli alunni¹ protagonisti attivi nella costruzione dei concetti geometrici, partendo da esperienze concrete e sviluppando parallelamente la consapevolezza linguistica necessaria per esprimere con precisione il pensiero geometrico.

L'osservazione delle difficoltà linguistiche riscontrate dagli alunni nelle prime fasi di descrizione e di classificazione dei quadrilateri ha evidenziato quanto il lessico sia fondamentale per una comprensione profonda dei concetti geometrici. A partire da questa consapevolezza, il percorso ha integrato attività di manipolazione, giochi strutturati e momenti di discussione collettiva, con l'obiettivo di stimolare negli alunni una riflessione sia sul significato dei termini utilizzati sia sulle proprietà dei quadrilateri. Attraverso l'uso di strumenti come le carte che indicano proprietà delle figure, diagrammi di Euler-Venn e attività collaborative, gli allievi sono stati accompagnati in un graduale processo di formalizzazione che ha intrecciato il pensiero geometrico con lo sviluppo delle competenze linguistiche. L'interdisciplinarietà tra geometria e linguaggio ha rappresentato non solo uno sfondo metodologico, ma anche un'occasione per promuovere un approccio critico e riflessivo nei confronti della matematica.

2 Quadro teorico

In questo capitolo vengono trattati brevemente alcuni riferimenti teorici che hanno guidato la progettazione a priori del percorso e la riflessione attivata durante e dopo lo svolgimento delle varie attività. Questi riferimenti riguardano da un lato l'interdisciplinarietà tra matematica e italiano nella didattica della matematica, dall'altro il pensiero geometrico.

2.1 L'interdisciplinarietà tra matematica e italiano nella didattica della matematica

Per molti anni si è creduto, e ancora oggi si crede, che tra il pensiero scientifico e il pensiero umanistico non vi sia alcuna comunicazione. Nell'immaginario comune, questa distanza è ancora più marcata nel caso della matematica e della lingua, discipline che facilmente vengono prese come rappresentanti del mondo scientifico da un lato e di quello umanistico dall'altro. In realtà, i due mondi della matematica e della lingua sono strettamente connessi e possono supportarsi e arricchirsi a vicenda. Sbaragli e Demartini (2021) affermano, infatti, che la matematica è caratterizzata da un linguaggio specialistico e che, rispetto al linguaggio della quotidianità, questo linguaggio possiede caratteristiche specifiche quali la precisione, la sinteticità e l'efficacia, che comportano generalmente una grande densità lessicale e informativa. Questo linguaggio ricco di parole nuove, di costrutti linguistici speciali, di attese semantiche diverse e di parole polisemiche può complicare il processo di lettura e comprensione testuale da parte dell'allievo, portandolo a difficoltà nello svolgere processi metacognitivi importanti, come controllare e gestire la propria comprensione. D'altra parte, anche difficoltà nell'acquisizione, nella comprensione e nella gestione del linguaggio quotidiano possono essere tra le diverse cause delle difficoltà in matematica. Se la lingua non è adeguatamente padroneggiata può divenire un ostacolo pervasivo nelle altre discipline. In particolare, dal momento che i significati scientifici sono costruiti dalla lingua, è necessaria una buona padronanza linguistica per poter costruire un sapere scientifico solido e permanente. Inoltre, secondo Dodman (2007) gli allievi spesso percepiscono la matematica in modo negativo perché viene insegnata come una materia isolata, contraddistinta da rigore, precisione e astrazione, senza alcun legame con le altre discipline.

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

Approcciarsi invece a un lavoro interdisciplinare, in cui le singole discipline, matematica e italiano, forniscono il proprio contributo, dà origine a una didattica dalle caratteristiche uniche. Evitando rigide separazioni tra i due ambiti e proponendo percorsi didattici esperienziali che coinvolgono matematica e linguaggio, l'apprendimento diverrà più solido e funzionale per entrambe le discipline (Sbaragli & Demartini, 2021).

Per la sua importanza in termini disciplinari e pedagogici, lo studio della geometria è promosso fin dai primi anni di scolarità e continua lungo tutto il processo di apprendimento della scuola dell'obbligo: in effetti, lo studio della geometria permette di esplorare le caratteristiche e le proprietà dello spazio, e le forme e le relazioni tra gli oggetti. D'altro canto, il linguaggio fornisce i mezzi per descrivere, definire e riflettere sui concetti geometrici in modo chiaro e strutturato. L'integrazione tra questi due ambiti non solo favorisce una comprensione più profonda della geometria, ma stimola anche il pensiero critico. Lavorare su questa connessione consente agli allievi di sviluppare una maggiore consapevolezza delle strutture logiche e degli elementi concettuali alla base della matematica, migliorando sia le competenze linguistiche che quelle geometriche.

Appare quindi estremamente significativo proporre degli itinerari didattici volti all'interdisciplinarietà tra matematica e lingua (Sbaragli & Demartini, 2021). Una delle possibilità da questo punto di vista risiede nel lavoro congiunto riguardante atti linguistici tipici del discorso matematico, quali ad esempio la definizione.

2.1.1 Descrivere e definire

Nella pratica didattica, si utilizzano spesso descrizioni e definizioni che, nell'uso comune della lingua, sono visti come atti linguistici sinonimici. In effetti, entrambi hanno lo scopo di far capire di cosa si sta parlando. In matematica, però, descrivere e definire sono due atti linguistici differenti. Infatti, «l'atto descrittivo è caratterizzato da una certa naturalezza e dall'abbondanza delle proprietà che vengono elencate (solitamente, più qualità di un concetto vengono esposte, più la descrizione è accurata)», mentre «la definizione in senso classico – soprattutto in matematica – ha storicamente assunto alcune caratteristiche più stringenti, rivolte all'essenzialità [...] che ne rendono tutt'altro che banale la formulazione» (Sbaragli & Canducci, 2023, p. 137). L'atto del definire ha dunque delle relazioni ma non è sovrapponibile con quello di descrivere, atto che è invece caratterizzato da una sovrabbondanza di termini ed espressioni volti a ricostruire con verosimiglianza un concetto in modo che il ricevente possa costruirsi un'immagine precisa (Sbaragli, 2020). Gli allievi si trovano frequentemente confrontati con descrizioni e definizioni fin dai primi anni del loro percorso scolastico. Ma se da un lato l'atto descrittivo sembra essere più immediato, le richieste di fornire delle definizioni matematiche risultano tutt'altro che semplici e molti allievi presentano delle difficoltà a livello sia matematico sia linguistico (Sbaragli & Canducci, 2023). Una delle difficoltà nel definire in matematica insorge dal concetto stesso di definizione, in quanto è fondamentale possedere una conoscenza dei termini e dei concetti espressi nell'enunciato per poterla formulare o comprendere. La descrizione delle caratteristiche di un concetto invece risulta più accessibile agli allievi che possono utilizzare più termini specialistici, e non, per delinearli ed eventualmente rappresentarli.

2.2 Il pensiero geometrico

La geometria può essere considerata come uno strumento per comprendere, descrivere e interagire con lo spazio che ci circonda: coglie alcuni elementi dell'esperienza spaziale e li formalizza a livello teorico. Il pensiero geometrico nasce dall'osservazione e interpretazione dello spazio, dei suoi oggetti, delle immagini e delle relazioni tra di essi, includendo le loro possibili trasformazioni (Clements & Battista, 1992).

Per questo motivo i primi approcci alla didattica della geometria, fondamentali per lo sviluppo del pensiero geometrico del bambino ovvero per sviluppare i concetti astratti che gradualmente diventano sempre più rigorosi, formali e generalizzati, dovrebbero basarsi su esperienze senso-motorie

che coinvolgono la vista, il tatto, il movimento e l'interazione con gli oggetti (Gallese & Lakoff, 2005; Sbaragli & Mammarella, 2011). Si passa in seguito ad individuare gli elementi che riguardano la dimensione spaziale e gradualmente si organizzano in maniera autonoma fino ad ottenere una formalizzazione sempre più strutturata e rigorosa (Arrigo & Sbaragli, 2004).

In questo percorso verso la formalizzazione, due componenti fondamentali, la figura e il concetto, devono coesistere in maniera equilibrata ed armoniosa per favorire l'apprendimento geometrico degli allievi (Mariotti, 1992). Per condurre un ragionamento geometrico in termini logici è necessario infatti visualizzare concretamente la figura alla quale ci si riferisce. Il riferimento agli aspetti spaziali può avvenire attraverso il disegno che consente di rappresentare un concetto geometrico attraverso sistemi di tratti grafici organizzati spazialmente. Tuttavia, il disegno geometrico non coincide automaticamente con l'oggetto geometrico che intende rappresentare. La sua interpretazione può infatti variare in base al lettore, alle conoscenze pregresse e al contesto. Già all'epoca di Euclide si era riconosciuto un divario tra i concetti formalizzati e gli oggetti mentali intuitivi. Al tempo stesso, si comprese come le figure tracciate su carta potessero essere utilizzate per rappresentare oggetti geometrici. La relazione tra figura, disegno e oggetto geometrico rimane quindi centrale per la costruzione di corrispondenti oggetti mentali e per la comprensione dei concetti geometrici (Angulo Romero et al., 2024).

Gli aspetti figurali e concettuali degli enti della geometria sono stati integrati da Fischbein (1993) nell'idea di concetto figurale, ovvero nell'idea che ogni "oggetto" della geometria coinvolge sia elementi di concetto (idee astratte) sia rappresentazioni figurali (immagini della figura). Ogni oggetto geometrico è un concetto figurale con delle caratteristiche spaziali legate alla forma, alla posizione e alla grandezza, e con delle caratteristiche più concettuali relative alla sua idea, all'astrazione e alla generalizzazione. È fondamentale che l'insegnante stimoli la costruzione del concetto figurale attraverso una didattica continuativa e sistemica che favorisca un'armonia tra l'aspetto di percezione sensoriale e quello concettuale.

In mancanza di equilibrio tra la componente figurale e concettuale di un determinato oggetto geometrico possono emergere delle misconcezioni (Sbaragli, 2005). In particolare, tale equilibrio non deve diventare una sovrapposizione delle due componenti figurale e concettuale. Se infatti, come sostiene Duval (1993), le rappresentazioni semiotiche (tra cui quella figurale) sono fondamentali per comprendere un oggetto matematico, poiché quest'ultimo non è direttamente accessibile nella percezione o nell'esperienza pratica, d'altro canto gli oggetti matematici non devono mai essere confusi con la loro rappresentazione. A lungo termine, una tale confusione ha delle conseguenze sulla comprensione e sulla conoscenza acquisita, le quali divengono inutilizzabili al di fuori del contesto d'apprendimento poiché sono associate a una rappresentazione inefficace dal punto di vista dell'elaborazione concettuale. Fischbein aggiunge che, tra le due componenti figurale e concettuale, quella che deve assumere un ruolo predominante è quella concettuale.

L'aspetto figurale degli oggetti geometrici, infatti, è fortemente influenzato dalla sfera percettiva. La comprensione percettiva è ciò che riconosce una persona nel primo momento in cui osserva una figura geometrica. A partire dagli stimoli sensoriali esterni, ognuno di noi interiorizza un'immagine soggettiva che va a definire la percezione visiva. È chiaro quindi che la rappresentazione figurale è qualcosa di interpretabile e deve essere studiata con senso critico: è importante sensibilizzare gli allievi alla questione e far prevalere l'aspetto concettuale (Sbaragli, 2006).

È proprio a partire dal livello visivo che si struttura il modello di van Hiele (1986) per lo sviluppo del pensiero geometrico nei bambini. Tale modello, in cui si pone una particolare enfasi sul linguaggio, si compone di cinque livelli che non solo descrivono lo sviluppo del pensiero, ma possono anche essere considerati cinque fasi dell'insegnamento della geometria, utili per promuovere tale sviluppo.

- *Livello visivo*: gli allievi sono in grado di riconoscere le figure in maniera percettiva. Le loro proprietà non appaiono ancora esplicite, ma sono condensate in una figura geometrica di cui hanno avuto esperienza assumendo un carattere simbolico. Grazie alla conoscenza di un numero elevato

di simboli (ad esempio i simboli quadrato, rettangolo, rombo e così via), l'alunno è in grado di organizzare, almeno in parte, il campo di studio.

- *Livello descrittivo-analitico*: il riconoscimento delle figure avviene attraverso le proprietà delle figure in maniera disorganizzata e disordinata. Gli alunni fissano stabilmente le proprietà se possono confrontarle in maniera analoga con altre figure, ma non sono ancora in grado di organizzare le proprietà in termini di definizioni o proposizioni. I simboli (per esempio, il rombo) divengono un insieme di segnali, ovvero tutte le proprietà caratteristiche del simbolo (lati congruenti, due coppie di lati paralleli, due coppie di lati congruenti ecc.). Tra tutti questi segnali ne risalta uno, il segnale significativo, da cui l'allievo sarà in grado di anticipare tutti gli altri.
- *Livello delle deduzioni informali*: gli allievi iniziano a osservare le relazioni dal punto di vista logico, stabiliscono delle interrelazioni di proprietà delle figure e tra le figure. In questa fase lo sviluppo del linguaggio e di una terminologia tecnica risulta fondamentale.
- *Livello deduttivo*: all'interno di una teoria assiomatica parziale, gli allievi sono in grado di formulare delle successioni di affermazioni deducendone una dall'altra. Possono comprendere il ruolo dei termini non definiti, degli assiomi, dei postulati, delle definizioni, dei teoremi e delle dimostrazioni; comprendono inoltre, l'interazione tra condizioni necessarie e condizioni sufficienti.
- *Livello strutturale*: gli alunni mettono in relazione teorie assiomatiche diverse e sanno lavorare in una varietà di sistemi assiomatici, si studia la natura delle leggi logiche. È il livello più alto che van Hiele descrive e che ritiene essere il più raro da raggiungere a livello scolastico.

Il passaggio da un livello all'altro è sequenziale, ovvero avviene solo quando il livello precedente è veramente acquisito, ed è fortemente influenzato dal linguaggio. In tal senso è fondamentale il ruolo dell'insegnante in quanto promuove lo sviluppo di ciascun livello e allo stesso tempo riconosce il livello raggiunto dall'alunno.

Per stimolare il passaggio da un livello all'altro van Hiele propone delle fasi di apprendimento da tenere in considerazione.

Nella prima fase, chiamata *fase d'informazione*, gli allievi prendono familiarità con il materiale didattico e l'argomento di lavoro, sviluppando una base comune su cui potranno comunicare e scambiare opinioni. La fase seguente è definita come *fase di orientazione guidata* ed è caratterizzata dall'esplorazione del campo di studio attraverso l'utilizzo di materiali. Nella terza fase, la *fase di esplicitazione*, gli allievi individuano le relazioni e sono in grado di affiancare alle esperienze un linguaggio adeguato mostrando di sapersi esprimere al riguardo. La *fase di orientazione libera* è caratterizzata dalla scoperta individuale delle relazioni attraverso dei compiti che possono essere affrontati attraverso diversi metodi. Nell'ultima fase, la *fase d'integrazione*, gli alunni sviluppano una visione globale del campo di studio e degli strumenti. Per questo motivo l'insegnante dovrà svolgere un lavoro di sintesi di quanto affrontato precedentemente senza introdurre concetti nuovi. Alla fine di tale percorso d'apprendimento, l'allievo sarà pronto per giungere a un nuovo livello di pensiero (Batini et al., 2004).

3 Metodologia

Il percorso didattico qui proposto si focalizza sul passaggio dalla descrizione dei quadrilateri alla loro definizione e classificazione. L'itinerario è costituito da una sequenza di 11 attività incentrate sulla costruzione dei concetti geometrici dei quadrilateri, attraverso esperienze sensoriali e riflessioni sulla lingua. Le prime otto attività sono state sperimentate in classe con un gruppo di 9 bambini di quarta elementare di una pluriclasse (quarta-quinta) del Luganese, mentre le lezioni seguenti sono state ideate per essere proposte durante l'anno scolastico successivo. Il gruppo di allievi è piuttosto

eterogeneo dal punto di vista delle competenze matematiche e linguistiche, per questo motivo, le attività proposte sono state talvolta differenziate in base alle loro caratteristiche e necessità. Nella presentazione del percorso didattico viene illustrato, se presente, il tipo di differenziazione proposto agli allievi. In particolare, vista l'attenzione posta al linguaggio, sono stati integrati alcuni supporti per un allievo non di madrelingua italiana.

In generale il percorso didattico va a toccare competenze legate alla matematica, all'italiano ma anche alle caratteristiche personali dell'allievo. Le diverse forme e modalità di lavoro delle attività stimolano le competenze trasversali contenute nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022) relative alla comunicazione, alla collaborazione e al pensiero riflessivo e critico. Dal punto di vista più strettamente disciplinare, inoltre, in questo percorso didattico sono sviluppate competenze nell'ambito tematico della geometria che coinvolgono la risorsa cognitiva "sapere e riconoscere" e i processi cognitivi "esplorare e provare", "matematizzare e modellizzare" e "comunicare e argomentare" (DECS, 2022).

4 Il percorso didattico dalla descrizione alla definizione dei quadrilateri

Ogni attività è introdotta con la sua descrizione, seguita da un'analisi preliminare delle possibili difficoltà didattiche e di apprendimento. Le scelte metodologiche vengono motivate in relazione al quadro teorico di riferimento e alle caratteristiche specifiche della classe. In seguito vengono analizzate le produzioni degli allievi discutendole rispetto allo sviluppo del pensiero geometrico e al linguaggio utilizzato.

4.1 Attività introduttiva

Descrizione dell'attività. Occorre precisare che gli allievi avevano già affrontato il tema dei poligoni, i concetti di angolo, rette parallele e perpendicolari.

All'inizio del percorso didattico sui quadrilateri è stato pertanto ripreso il termine "quadrilatero", che era già stato introdotto con il concetto di poligono, attraverso un'attività individuale seguita da una discussione collettiva. Lo scopo finale di questa attività era quello di scrivere una definizione condivisa di quadrilatero.

Inizialmente agli allievi è stato chiesto di scrivere con parole proprie cos'è un quadrilatero e di disegnarne alcuni esempi. Attraverso questa prima attività del percorso didattico, si è voluto introdurre la tematica stimolando l'allievo a verbalizzare e rappresentare le proprie conoscenze pregresse e le proprie idee in maniera spontanea e libera, creando un ambiente sereno dove è stato possibile rilevare numerose informazioni fondamentali per il proseguimento del percorso inerenti le modalità di comunicazione utilizzate dagli allievi (descrizioni, definizioni, esempi, supposizioni ecc.) e le eventuali misconcezioni presenti.

Analisi delle produzioni degli allievi. Tutti i disegni proposti dagli allievi, realizzati a mano libera o con l'aiuto del righello, rappresentavano un quadrilatero convesso. Le spiegazioni a parole invece si differenziavano maggiormente: alcune erano delle descrizioni abbastanza approfondite di quadrilatero (ad esempio «È un poligono, una linea semplice spezzata chiusa, con quattro lati, quattro angoli e quattro vertici»), altre erano delle descrizioni incomplete (ad esempio «Ha quattro angoli e quattro lati»), mentre una piccola parte degli allievi ha tentato di fare delle supposizioni partendo dalla parola stessa "quadrilatero" (ad esempio «Quadri-latero mi fa pensare a quadrato»).

A seguito del lavoro autonomo, si è svolto un momento di condivisione in plenaria riflettendo con gli allievi sul concetto di essenzialità ed efficacia dei concetti nel dare una definizione e arrivando, con la

guida dell'insegnante, a scrivere una definizione concisa e precisa di quadrilatero: «Il quadrilatero è un poligono che ha quattro lati». Nella discussione si è chiarito che esistono altre formulazioni possibili, ovvero che «Il quadrilatero è un poligono che ha quattro angoli» e che «Il quadrilatero è un poligono che ha quattro vertici».

In questa fase iniziale del percorso didattico, gli studenti si collocano tra il primo e il secondo livello del modello di sviluppo del pensiero geometrico di van Hiele: il livello visivo e quello descrittivo-analitico. Tutti gli alunni sono spontaneamente in grado di riconoscere i quadrilateri attraverso l'intuizione visiva, mentre alcuni hanno già identificato alcune proprietà caratteristiche della figura, mostrando così un approccio più analitico e descrittivo.

4.2 Caccia ai quadrilateri

Descrizione dell'attività. La seconda attività del percorso didattico ha previsto l'osservazione puntuale dell'ambiente che circonda gli allievi con lo scopo di individuare i quadrilateri.

In questa attività, gli allievi sono stati invitati a osservare l'ambiente circostante con gli occhi della geometria. Sono poi andati alla ricerca dei quadrilateri nel sedime scolastico e hanno annotato le loro scoperte attraverso un disegno o una fotografia. Inoltre, hanno potuto provare a nominare i quadrilateri trovati. Al termine della caccia, ogni allievo ha presentato brevemente ai compagni le proprie scoperte.

Dal punto di vista didattico quest'attività ha lo scopo di condurre l'alunno verso il livello descrittivo-analitico del pensiero geometrico di van Hiele attraverso le fasi di esplicitazione e d'integrazione dell'apprendimento. Gli allievi vivono esperienze visive e tattili in modo che possano prendere familiarità con l'argomento di lavoro, sviluppare un simbolismo e soprattutto costruirne un senso attraverso un compito aperto e che permette l'individuazione di relazioni tra la geometria e la realtà. La presentazione finale stimola la costruzione di un linguaggio e di espressioni adeguati ed efficaci attraverso la comunicazione orale e l'ascolto.

Analisi delle produzioni degli allievi. In questa prima fase del percorso il linguaggio utilizzato è risultato ancora povero e poco specialistico (ad esempio «Sui lati dei banchi ci sono dei fori a forma di rettangolo messi storti»; «Il carrello delle matite ha dei quadrati allungati»), e sono emerse diverse misconcezioni sia a livello contenutistico sia linguistico (ad esempio «Un libro è un quadrilatero»). È risultato opportuno riflettere insieme agli allievi sull'efficacia comunicativa, costruendo un linguaggio comune e condiviso importante per l'intero percorso. Ad esempio, a partire dall'espressione «Un libro è un quadrilatero», è emersa la necessità di utilizzare un linguaggio più preciso e completo per evitare ambiguità e imprecisioni. L'affermazione, rielaborata insieme al gruppo classe, è stata corretta in: «Un libro è un parallelepipedo con le facce rettangolari».

4.3 Descrizione spontanea dei quadrilateri

L'attività è composta da due momenti diversi: un lavoro di descrizione di alcuni quadrilateri e un momento di gioco, sfruttando la dinamica del memory. In questa lezione si è ritenuto necessario differenziare l'attività creando gruppi di lavoro eterogenei per competenza: gli allievi più competenti hanno ricevuto i quadrilateri più "ricchi" dal punto di vista delle caratteristiche (quadrato e rettangolo o rombo) e gli allievi più in difficoltà hanno descritto i quadrilateri più "poveri" (quadrilatero generico, trapezio e parallelogramma). Inoltre, all'allievo non di madrelingua italiana si è lasciata la possibilità di usare il traduttore per svolgere l'attività.

4.3.1 Descrizione dei quadrilateri

Descrizione dell'attività. Inizialmente gli allievi sono stati suddivisi in gruppi da 3 e ciascun bambino ha ricevuto l'immagine di due quadrilateri che doveva descrivere approfonditamente in maniera libera e spontanea, senza indicazioni da parte della docente relativamente alle modalità di descrizione. Ogni

gruppo, quindi, si trovava ad avere le descrizioni di 6 quadrilateri diversi (ciascun bambino ne descrive 2 senza confrontarsi con i compagni di gruppo) utilizzando la scheda allegata ([Allegato 1](#)): quadrilatero generico, trapezio, parallelogramma, rombo, rettangolo e quadrato. Il deltoide è stato volutamente utilizzato in un secondo momento per proporre un esempio di descrizione in plenaria.

Analisi delle produzioni degli allievi. In generale, come ci si aspettava, si è potuto osservare che gli allievi hanno scelto di affrontare il compito misurando la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli con gli strumenti di misura a loro disposizione. La maggior parte degli allievi ha utilizzato l'immagine del quadrilatero per marcare gli elementi riconosciuti (lati e angoli) utilizzando i colori e per scrivere le misure ottenute come negli esempi in [Figura 1a](#) e [Figura 1b](#), trascrivendo poi a parole le informazioni individuate nella descrizione del quadrilatero.

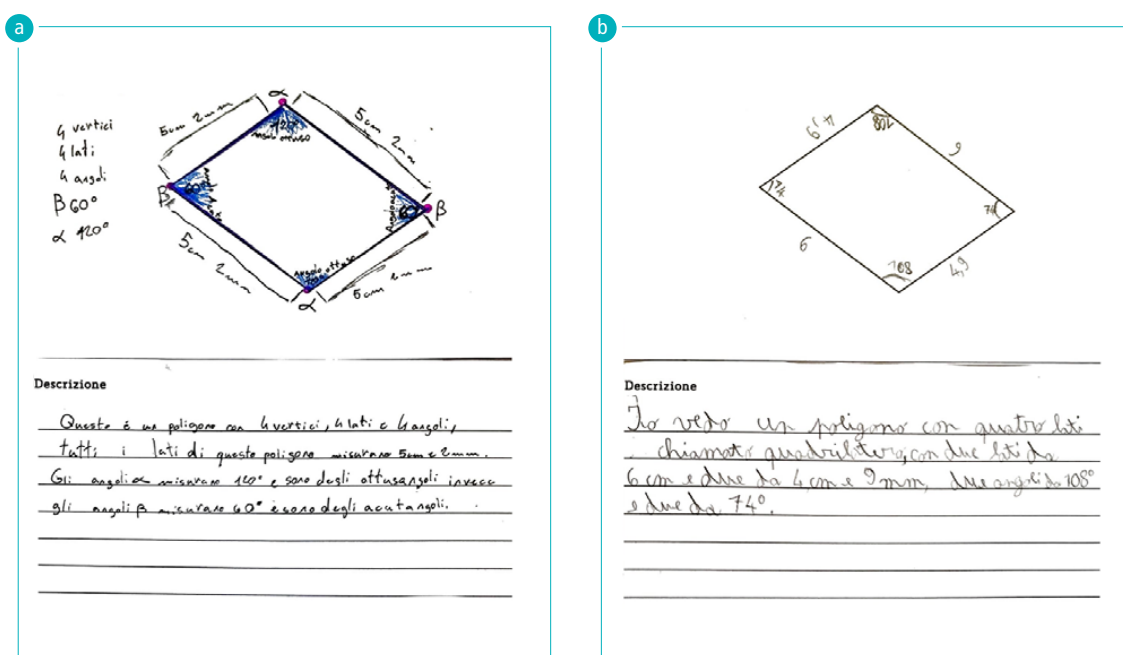


Figura 1a, b. Esempi di descrizioni complete del parallelogramma con informazioni metriche rilevate sulla figura.

Nella descrizione della [Figura 1a](#), l'alunna C. definisce la figura come «un poligono con 4 vertici, 4 lati e 4 angoli» senza utilizzare la parola “quadrilatero”. Misura la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli che infine nomina. Nella descrizione della [Figura 1b](#), invece, l'allievo B. inizia con una definizione appropriata di quadrilatero («un poligono con 4 lati chiamato quadrilatero») continuando con l'elenco delle caratteristiche specifiche del parallelogramma che sta descrivendo. Sul disegno B. indica gli angoli con un archetto e scrive la loro ampiezza e la misura della lunghezza dei lati solo con dei valori numerici tralasciando l'unità di misura, informazioni che sono però state aggiunte nella descrizione. Nel lavoro di altri allievi invece sono presenti molte imprecisioni linguistiche e l'omissione di informazioni come negli esempi in [Figura 2a](#) e [Figura 2b](#).

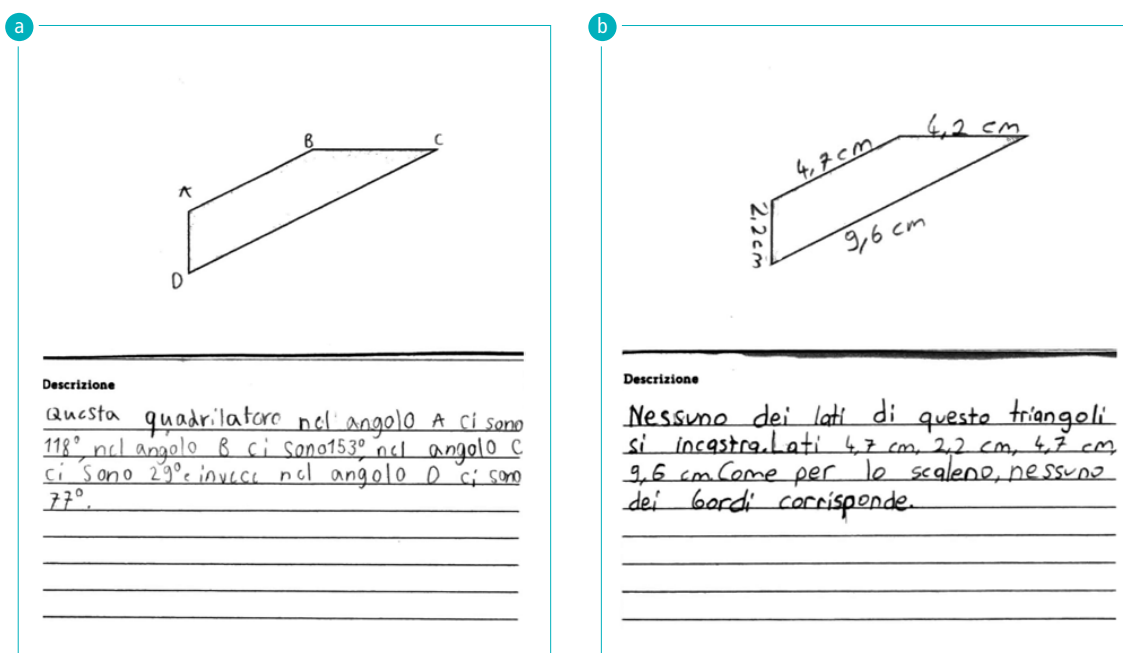


Figura 2a, b. Esempi di descrizioni del trapezio con informazioni incomplete o con imprecisioni linguistiche.

Nella descrizione della Figura 2a l'allievo J. si focalizza unicamente sullo studio degli angoli, usando l'espressione poco corretta «nell'angolo A ci sono 118° », cosa che può sollevare dubbi per quanto riguarda la sua comprensione concettuale di angolo e di ampiezza. Innanzitutto, le lettere che generalmente indicano i vertici del quadrilatero in questo caso vengono utilizzate per nominare gli angoli, e ci si può chiedere se l'allievo confonda il concetto di angolo con il concetto di vertice o se sia la gestione del linguaggio ad averlo messo in difficoltà. È inoltre interessante riflettere sull'espressione «ci sono 118° ». Appare subito spontaneo pensare all'influenza del linguaggio meteorologico nella formulazione della descrizione; dato che l'unità di misura utilizzata per la temperatura e per l'ampiezza degli angoli è nominata allo stesso modo a livello linguistico informale, è possibile che J. abbia usato tale espressione per via delle sue interpretazioni personali e delle sue esperienze vissute.

Nella descrizione della Figura 2b, invece, l'allievo I. si concentra unicamente sulla lunghezza dei lati utilizzando una terminologia scorretta: «triangoli» al posto di «trapezio», «si incastra», «bordi» al posto di «lati», «corrisponde» al posto di «congruente».

Tuttavia, è interessante notare che l'allievo sembra aver individuato un'analogia con i triangoli scaleni riconoscendo che le misure delle lunghezze dei lati del trapezio sono tutte diverse come lo sono le misure delle lunghezze dei lati nel triangolo scaleno.

Le ultime due descrizioni presentate in Figura 3a e Figura 3b appaiono corrette a livello linguistico e contenutistico.

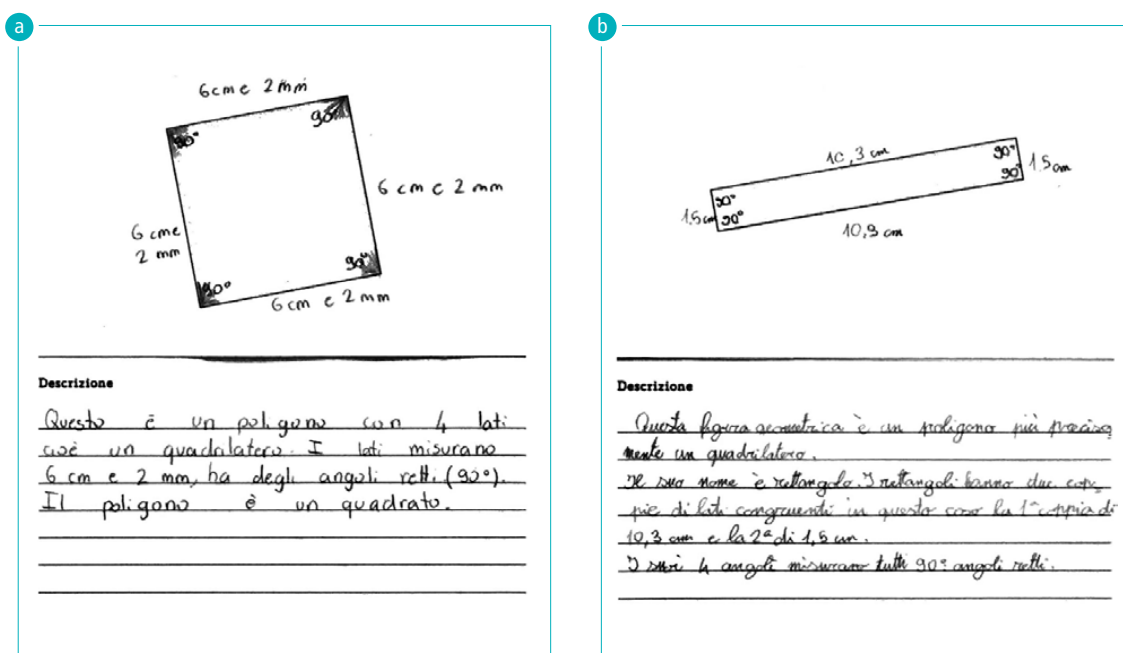


Figura 3a, b. Esempi di descrizioni del quadrato e del rettangolo con alcune imprecisioni linguistiche.

Nella prima parte della descrizione della Figura 3a l'allieva G. riprende la definizione di quadrilatero, seguita dalla descrizione delle misure dell'ampiezza degli angoli e della lunghezza dei lati. Potrebbe essere discutibile l'espressione «Ha degli angoli retti» in quanto ci si potrebbe chiedere: «Quanti? Due? Tre? Quattro... E allora perché non dire tutti?».

Nella descrizione della Figura 3b, invece, l'allieva A. mostra di aver riconosciuto la figura e di saperne indicare il nome. Anche in questo caso, dopo la definizione di quadrilatero, scrive la misura dei lati della figura rappresentata, specificando la proprietà di congruenza di due coppie di lati senza chiarire che le coppie di lati congruenti sono opposte, mostrando di aver compreso in parte la generalizzazione della proprietà caratteristica dei rettangoli. Nella frase finale relativa alla misura dell'ampiezza degli angoli, l'uso del termine «suoi» fa ipotizzare che questa caratteristica sia invece associata solamente al rettangolo specifico disegnato.

4.3.2 Il gioco del memory

Descrizione dell'attività. Al termine di questa prima parte, ritagliando la scheda con gli elaborati degli allievi sono state create due carte per ogni quadrilatero: una carta con la rappresentazione grafica e una carta con la descrizione proposta da un allievo, per un totale di 12 carte per ogni gruppo. Ogni gruppo ha poi ricevuto le carte realizzate da un altro gruppo e si è proposto agli allievi di utilizzarle per giocare al memory a carte scoperte; gli allievi hanno dovuto associare ad ogni immagine una descrizione adeguata. Al termine del gioco si è proposta una riflessione finale da svolgere prima individualmente con una scheda ([Allegato 2](#)) e successivamente con una condivisione collettiva. L'obiettivo era di far riflettere nuovamente gli allievi sull'importanza di sostenere una comunicazione efficace in matematica. Più nello specifico, risultava importante che emergessero le differenze e le similitudini delle proprietà individuate e dei termini utilizzati nelle descrizioni. Infatti, la progettazione di questa seconda parte della lezione – il memory a carte scoperte e la riflessione finale – è stata guidata dalla previsione che gli scritti prodotti dagli allievi presentassero descrizioni ricche di informazioni, ovvero testi caratterizzati da una sovrabbondanza di termini ed espressioni, esattamente come ci si aspetta da una descrizione. D'altra parte, si prevedeva anche la presenza di descrizioni più povere dal punto di vista linguistico e di contenuto.

Analisi delle produzioni degli allievi. Nella fase di gioco del memory tutti i gruppi sono riusciti ad associare la descrizione all'immagine corretta, anche se sono state riscontrate delle difficoltà legate alla completezza e alla precisione delle informazioni fornite nelle descrizioni (come, ad esempio, per la descrizione della Figura 2a), ostacolo in parte superato riconoscendo la grafia dei compagni.

Guardando alle caratteristiche dei quadrilateri approfondite nelle descrizioni dell'attività, tutti i gruppi hanno parlato di lunghezza dei lati, ampiezza degli angoli, numero di lati, vertici e angoli e congruenza dei lati individuando quindi alcuni degli elementi necessari da utilizzare nelle descrizioni dei quadrilateri. Nell'analisi a priori dell'attività, ci si aspettava anche eventualmente qualche indicazione relativa al parallelismo dei lati, alla congruenza e ai diversi tipi di angoli (ottusangolo, acutangolo e rettangolo). Nessun alunno invece ha descritto i quadrilateri dal punto di vista del parallelismo e della perpendicolarità dei lati e della congruenza degli angoli.

In questa fase del percorso, come progettato, la lezione ha stimolato lo sviluppo del pensiero descrittivo-analitico (van Hiele, 1986). In questa attività è risultato fondamentale il riconoscimento delle proprietà delle figure rispetto ai lati e agli angoli, mentre è stato messo in secondo piano il riconoscimento della figura stessa e l'esplicitazione del nome. Con la richiesta di descrivere il quadrilatero, gli allievi sono stati invitati a riconoscere le proprietà delle figure e a comunicarle in forma scritta, stimolando quindi le prime fasi dell'apprendimento in cui si prende familiarità con il campo di studio orientandosi all'esplorazione degli oggetti geometrici.

4.4 Descrivere e nominare i quadrilateri: una riflessione a grande gruppo

Descrizione dell'attività. L'attività successiva si è basata su un dialogo a grande gruppo guidato dalla docente. Il gruppo classe e la docente si sono seduti in cerchio e al centro sono stati esposti 9 quadrilateri colorati (un quadrilatero generico, un deltoide, un trapezio isoscele, un trapezio rettangolo, un trapezio scaleno, un parallelogramma, un rombo, un rettangolo e un quadrato). L'insegnante ha condotto una discussione con e tra gli allievi al fine di far emergere le supposizioni, le intuizioni, le conoscenze, le esperienze e le misconcezioni degli allievi sul tema dei quadrilateri. Le osservazioni degli alunni sono state messe in discussione in modo che potessero essere confermate o smentite e modificate.

Per la discussione, erano previste alcune possibili domande, di seguito riportate, volte a condurre il ragionamento e a stimolare la partecipazione degli allievi durante l'attività.

- «Riconoscete uno di questi quadrilateri?»
- «Cosa ti fa dire che questo quadrilatero è...?», «Questo quadrilatero possiede delle caratteristiche particolari che ti fanno dire che è...?»
- «Se ti chiedessi di disegnare un altro... a quali caratteristiche dovresti fare assolutamente attenzione? [Proporre la possibilità di disegnare il quadrilatero di cui si sta discutendo]».
- «Come potreste distinguere questo quadrilatero da quest'altro? [Eventualmente usare i nomi corretti]».
- «Questi due/tre/... quadrilateri hanno delle caratteristiche in comune? Quali?»
- «Avevi già visto questo quadrilatero? Dove? Cosa ti ricorda?»

L'intento era di accompagnare gli allievi verso lo sviluppo di descrizioni con l'utilizzo di espressioni e di una terminologia tecnica di base in cui emergessero i nomi dei quadrilateri e le proprietà caratteristiche delle figure. Dal punto di vista didattico, in questa lezione si è posto ancora l'accento sullo sviluppo del pensiero analitico-descrittivo, ma questa volta in forma orale e focalizzando l'attenzione sul riconoscimento e sulla nominalizzazione dei quadrilateri.

Analisi delle produzioni degli allievi. L'attività ha fatto emergere i concetti e le osservazioni/riflessioni svolte dai gruppi nell'attività precedente (par. 4.3), portandoli a riflettere sulla correttezza delle proprietà individuate, sulla formulazione linguistica utilizzata e su ulteriori caratteristiche delle figure non individuate in precedenza come il parallelismo dei lati e la congruenza degli angoli.

Per l'insegnante è stato inoltre possibile intuire il livello di pensiero raggiunto dagli allievi e ipotizzare chi era già in grado di stabilire delle interrelazioni tra le proprietà delle figure. Ad esempio, alcune alunne hanno riconosciuto con facilità le caratteristiche comuni tra diversi quadrilateri o gruppi di essi, formulando osservazioni come: «Il rettangolo e il quadrato sono gli unici quadrilateri con tutti gli angoli retti» oppure «Il quadrato e il rombo hanno tutti i lati congruenti». Queste frasi dimostrano che le alunne sono state in grado di individuare relazioni tra le caratteristiche dei quadrilateri e di saperle comunicare con un linguaggio efficace collocandosi quindi nella terza fase d'apprendimento di van Hiele, ovvero quella dell'esplicitazione, avvicinandosi sempre di più al livello del pensiero geometrico delle deduzioni informali. Per alcuni allievi sono emerse difficoltà di espressione linguistica, segno che si trovano in una fase precedente dello sviluppo dell'apprendimento, in cui è fondamentale un orientamento guidato da parte dell'insegnante. In particolare, sono state rilevate espressioni come:

- «Questi lati sono più dritti», per indicare lati perpendicolari;
- «Lato diagonale»;
- «È un quadrato storto», riferendosi al rombo.

Queste frasi, pur non utilizzando una terminologia corretta, rivelano comunque un'osservazione attenta di alcune caratteristiche dei quadrilateri. Ad esempio, definire il rombo come un «quadrato storto» potrebbe indicare che l'allievo ha riconosciuto la congruenza dei lati tra le due figure. In generale, tali espressioni evidenziano una tendenza a descrivere i quadrilateri focalizzandosi soprattutto sulle caratteristiche dei lati, trascurando o non mettendole in relazione con quelle degli angoli.

4.5 Ripresa delle descrizioni a gruppi

Descrizione dell'attività. Successivamente agli allievi è stato chiesto di descrivere nuovamente a gruppi ogni tipo di quadrilatero rilevando ed evidenziando le proprietà di ciascuno. Sulla scheda di lavoro ([Allegato 3](#)) era presente l'immagine di più quadrilateri dello stesso tipo, e non solo un rappresentante, in modo che gli allievi potessero individuarne le caratteristiche e generalizzare la descrizione realizzata in precedenza utilizzando ora un linguaggio più chiaro e completo e una terminologia tecnica. La scelta di fornire per ogni famiglia di quadrilateri più rappresentanti di dimensione e orientamento diversi è stata presa da un lato per fornire rappresentazioni in posizione non convenzionale in modo da contrastare la possibile insorgenza di misconcezioni (Sbaragli, 2005) e dall'altro per dare agli allievi la possibilità di verificare direttamente le loro intuizioni riguardo le caratteristiche che accomunano quella particolare tipologia di quadrilateri. Si è fatta inoltre la scelta di inserire tra le figure solo quadrilateri appartenenti alla specifica tipologia senza, ad esempio, inserire tra le rappresentazioni di trapezio il disegno di un parallelogramma o di un quadrato, anche se potevano sicuramente far parte di tale insieme. È stata fatta questa scelta poiché ci si aspettava che la maggior parte degli allievi si trovasse in una fase dello sviluppo del pensiero geometrico, secondo la teoria di van Hiele (1986), nella quale non si è ancora in grado di considerare adeguatamente le interrelazioni tra le proprietà delle figure geometriche studiate. È stato quindi ritenuto prematuro promuovere un ragionamento di questo tipo. Tuttavia, non si escludeva che alcuni allievi avrebbero potuto già sviluppare considerazioni di tipo relazionale.

In seguito, ogni gruppo ha presentato le caratteristiche di uno dei quadrilateri ed i compagni in ascolto sono intervenuti per aggiungere, o per modificare, alcune informazioni. Nel mentre, l'insegnante ha redatto un cartellone con tutte le informazioni raccolte dai diversi gruppi.

Analisi delle produzioni degli allievi. Durante la discussione sono emerse delle questioni interessanti riguardanti le caratteristiche dei quadrilateri considerati.

Discutendo, ad esempio, delle caratteristiche del trapezio, un gruppo di allievi sosteneva che non fosse necessario specificare che fosse un quadrilatero e un poligono; altri compagni, al contrario, ritenevano fosse importante scriverlo. A questo punto è stato chiesto loro di motivare le proprie idee in maniera convincente. I primi hanno dichiarato che «si sa già che il trapezio è un quadrilatero e di conseguenza il quadrilatero è un poligono». In risposta, i compagni hanno ribattuto dicendo che «bisogna dire che cos'è il trapezio perché ci potrebbe essere qualcuno che non lo sa. Come quando dici, Gianni è un bambino... devi dirlo perché altrimenti non sai di chi si sta parlando».

In questa discussione sono emersi molti concetti interessanti che stanno alla base di una didattica interdisciplinare tra matematica e linguaggio. In primo luogo, sembra nascere un dialogo critico relativo all'essenzialità o all'abbondanza di informazioni. Tra alcuni allievi emerge la necessità di eliminare le ridondanze avvicinandosi quindi al concetto di definizione, mentre per altri appare necessario fornire tutte le informazioni possibili con l'idea di essere più precisi e completi in linea con il concetto di descrizione definito da Sbaragli (2020). In secondo luogo, da questa discussione è emersa l'utilità di ricorrere a un'analogia con lo studio della lingua per chiarire meglio il concetto. Descrivere una figura geometrica, come un trapezio, è simile a presentare una persona in un testo: così come si precisa che «Gianni è un bambino» per fornire un'informazione chiara e completa a chi ascolta o legge, allo stesso modo è importante specificare che il trapezio è un quadrilatero e un poligono, anche se può sembrare scontato. Questo confronto ha aiutato gli allievi a comprendere l'importanza di una comunicazione sovrabbondante e contestualizzata quando si fornisce una descrizione, in quanto lo scopo è di permettere all'interlocutore di costruirsi un'immagine precisa e verosimile dell'oggetto in questione. L'attività, pur concentrandosi sulla geometria, ha quindi evidenziato un forte elemento interdisciplinare con l'ambito linguistico, anche se tale collegamento non è stato esplicitamente dichiarato.

4.6 Gioco “Detective dei quadrilateri” con carte proprietà

Anche questa attività è stata divisa in due momenti: in un primo momento al gruppo classe è stato proposto il gioco “Detective dei quadrilateri”, con lo scopo di favorire il riconoscimento delle proprietà dei quadrilateri; in un secondo momento ogni allievo ha risolto individualmente una scheda basata sugli stessi principi del gioco in modo da consolidare le competenze attivate durante il gioco.

4.6.1 Il gioco “Detective dei quadrilateri”

Descrizione dell'attività. Il gioco descritto in Figura 4 è una variante del gioco dell'*Indovina chi* basato sulle proprietà dei quadrilateri. Le domande che si possono porre infatti sono domande chiuse (a cui si può rispondere solo con un sì o con un no) riguardanti le proprietà dei quadrilateri. A differenza del gioco originale in cui si pongono delle domande spontanee, in questa variante il docente, o il gruppo classe, prepara delle “carte proprietà” su cui sarà indicata una proprietà dei quadrilateri (ad esempio «ha quattro vertici»), ovvero la domanda che verrà posta per cercare di individuare il quadrilatero scelto. Il gioco potrebbe essere proposto anche con altre figure del piano o dello spazio.

DETECTIVE DEI QUADRILATERI

Preparazione del gioco

Sul pavimento sono disposti 9 quadrilateri diversi in una griglia 3×3 . Si definisce un giocatore "ladro" e un giocatore "capo detective", tutti gli altri saranno dei semplici "detective". Il ladro sceglierà segretamente un quadrilatero tra i 9 a disposizione, mentre il capo detective avrà a disposizione il mazzo delle "carte proprietà" con cui porre domande per individuare il quadrilatero in questione insieme alla sua squadra di detective.

Svolgimento

Il gioco inizia con il racconto del contesto narrativo:

In un museo d'arte geometrica un ladro ha rubato un'opera d'arte sostituendola con una falsa. I poliziotti l'hanno arrestato e ora i detective stanno cercando di capire qual è l'opera che ha sostituito. Dopo ore d'interrogatorio il ladro afferma: «Fatemi delle domande geometriche sulle proprietà dell'opera d'arte e io vi risponderò sinceramente solo con un sì o con un no. Vediamo se sarete tanto bravi da trovare l'opera sostituita, in tal caso io ve la restituirò». I detective ci stanno, «Ma a una sola condizione» dice il capo detective, «basta che tu ci dia un'informazione sbagliata e ti mettiamo in carcere!».

Il capo detective gira una carta proprietà e pone la domanda al ladro che risponderà solo con un sì o con un no. Il capo detective, insieme al suo gruppo, cercherà di trovare il quadrilatero giusto scartando ogni volta le figure che possiedono o non possiedono tale proprietà, in base alla risposta data dal ladro. Se i detective non sbagliano a scartare le figure, il gioco va avanti fino al ritrovamento dell'opera.

Al termine del gioco tutti i giocatori controllano che il quadrilatero individuato abbia effettivamente le proprietà affermate dal ladro.

Come si vince?

I detective vincono se trovano l'opera rubata o se il ladro sbaglia a rispondere alle domande. Il ladro vince se i detective scartano l'opera rubata.

Figura 4. Regole del gioco "Detective dei quadrilateri".

In generale risulta importante costruire e modificare il gioco insieme agli allievi, in modo che siano coinvolti nella riflessione sul contenuto e sull'accuratezza linguistica necessari per il suo svolgimento. La lingua diventa così uno strumento di riflessione determinante nella costruzione del sapere (Demartini & Sbaragli, 2022). In quest'ottica, prima di procedere con il gioco, un gruppo di allievi ha realizzato il mazzo delle carte proprietà sulla base delle descrizioni dei quadrilateri create nelle attività precedenti ([Allegato 4](#)). Tali descrizioni sono state poi lasciate a disposizione durante il gioco in modo che chi ne avesse bisogno, soprattutto chi giocava nel ruolo di ladro, potesse consultarle per verificare le informazioni necessarie all'individuazione del quadrilatero. All'inizio, il gioco è stato sperimentato con l'intero gruppo classe in modo che l'insegnante potesse spiegare le regole e guidare le prime partite. Successivamente lo si è svolto a gruppi di 5-6 allievi.

Analisi delle produzioni degli allievi. Il gioco proposto in questa lezione ha permesso agli allievi di riconoscere e di individuare le proprietà dei quadrilateri. Da una parte, attraverso l'"eliminazione" delle figure ad ogni turno, hanno individuato dei quadrilateri con caratteristiche analoghe. Hanno, ad esempio, potuto individuare tutti i quadrilateri «con due coppie di lati paralleli» oppure «con tutti gli angoli retti». D'altra parte il gioco ha permesso di lavorare, almeno in parte, sulla ridondanza di proprietà nelle

descrizioni delle figure in gioco. Dato che ad ogni turno il capo detective doveva girare, e non scegliere, una carta proprietà, gli allievi si sono accorti ben presto che alcune proprietà risultavano inutili ai fini dell'individuazione del quadrilatero: nel momento in cui un'altra proprietà apparsa in precedenza aveva già permesso di individuare un determinato insieme di quadrilateri (ad esempio, «ha due coppie di lati paralleli» comprendeva già la proprietà «ha una coppia di lati paralleli») oppure nel momento in cui una proprietà corrispondeva all'individuazione dell'insieme stesso dei quadrilateri (ad esempio «ha quattro vertici» e «ha quattro lati»).

Durante l'attività sono emerse interessanti discussioni nel gruppo di allievi detective che hanno iniziato a confrontarsi sulle proprietà dei diversi quadrilateri e a mettere in discussione l'utilità e il significato di alcune carte proprietà. Per esempio, si sono subito resi conto che alcune proprietà erano ridondanti e quindi inutili al fine del gioco (se si gioca solamente con i quadrilateri le carte proprietà «ha quattro angoli», «ha quattro lati» e «ha quattro vertici» appaiono inutili). Oltre a ciò, sono emerse delle perplessità attorno alla proprietà «ha due lati congruenti» poiché gli allievi vi attribuivano due significati differenti: per alcuni la proprietà faceva riferimento a un quadrilatero con *esattamente* due lati congruenti, mentre per altri a un quadrilatero con *almeno* due lati congruenti. Tale confusione ha permesso loro di riflettere sul linguaggio utilizzato e sulla necessità di introdurre una distinzione nelle espressioni in modo da evitare fraintendimenti. Sono state definite, con il supporto dell'insegnante, due espressioni distinte: «ha almeno due lati congruenti» e «ha due lati congruenti».

Infine, dalle riflessioni è emerso che era necessario aggiungere alcune carte proprietà che non erano state prese in considerazione durante la stesura delle descrizioni nelle attività precedenti e quindi durante la preparazione del gioco:

- «Ha una coppia di lati congruenti»;
- «Ha due coppie di lati congruenti»;
- «Ha almeno due lati paralleli»;
- «Ha due angoli retti»;
- «Ha almeno un angolo retto»;
- «Ha almeno una coppia di lati adiacenti congruenti»;
- «Ha una coppia di lati adiacenti congruenti».

Infatti, alcuni allievi nel ruolo del ladro si sono ritrovati nella situazione in cui non era possibile far individuare il trapezio isoscele e il trapezio rettangolo in quanto non vi erano le carte con le loro proprietà caratteristiche («ha una coppia di lati congruenti» oppure «ha due angoli retti»).

Osservando gli allievi che hanno ancora incontrato difficoltà nel riconoscere i quadrilateri e nell'individuare facilmente le proprietà, è emersa la necessità di proporre ulteriori esperienze di orientamento guidato e di esplorazione delle relazioni, in linea con la seconda e terza fase del modello di apprendimento di van Hiele. Ciò permetterebbe agli alunni di sviluppare progressivamente un linguaggio più adeguato e di riconoscere in modo più consapevole le principali proprietà dei quadrilateri, come previsto dal livello descrittivo-analitico dello sviluppo del pensiero geometrico.

4.6.2 La scheda finale

Descrizione dell'attività. Dopo aver svolto alcune partite in cui gli allievi assumevano a turno ruoli differenti, diventando quindi partecipanti attivi e acquisendo dimestichezza con il compito, è stata proposta loro in forma individuale una scheda ([Allegato 5](#)) basata sugli stessi principi del gioco.

L'ultimo esercizio della scheda consisteva nello scegliere un quadrilatero qualsiasi tra i nove proposti e fornire delle indicazioni puntuali in modo che un compagno o una compagna in un secondo momento potesse poi individuarlo inequivocabilmente. La scheda di esercizio mira alle fasi di esplicitazione e di orientazione libera dell'apprendimento degli allievi in quanto è richiesto loro di individuare le relazioni tra i quadrilateri e di esplicitarne le caratteristiche chiaramente.

Analisi delle produzioni degli allievi. La risoluzione di questo ultimo esercizio ha suscitato l'interesse per un'analisi dal punto di vista linguistico e geometrico. Come si vede nelle Figure 5a-5d molti degli allievi hanno scelto di descrivere il quadrato, probabilmente per il fatto che è una delle figure maggiormente conosciute.

a

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

- Ha almeno un angolo retto;
- Ha almeno una coppia di lati paralleli;
- Ha tutti i lati della stessa lunghezza.

Che quadrilatero è? Quadrato

b

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha almeno un lato inclinato e perpendicolare;
Ha almeno un angolo retto;
Tutti i lati della stessa lunghezza.

Che quadrilatero è? Quadrato

c

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

- ha almeno un angolo di 90° ;
- ha due coppie di lati paralleli;
- ha tutti i lati congruenti.

Che quadrilatero è? Quadrato

d

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha almeno 1 coppia di lati adiacenti congruenti.
Ha tutti gli angoli retti.
È il quadrato

Che quadrilatero è? quadrato

Figura 5a, b, c, d. Quattro esempi di indicazioni per individuare il quadrato.

È curioso notare come i quattro testi siano tutti differenti, nonostante la figura da individuare fosse sempre la stessa. Le informazioni fornite dalle allieve G. (Figura 5a) e A. (Figura 5c) sono molto simili, sebbene presentino alcune varianti sia linguistiche sia concettuali. Ad esempio, espressioni come «ha almeno un angolo retto» e «ha almeno un angolo di 90° » oppure «ha tutti i lati della stessa lunghezza» e «ha tutti i lati congruenti» trasmettono lo stesso contenuto, ma attraverso formulazioni differenti. Una differenza significativa emerge invece tra le frasi «ha almeno una coppia di lati paralleli» e «ha due coppie di lati paralleli». Pur essendo entrambe corrette nel descrivere alcune proprietà dei quadrilateri, la prima risulta ridondante: non aggiunge informazioni utili per restringere ulteriormente il campo delle figure già selezionate. Infatti, dopo la prima affermazione fornita da G., le figure rimaste in gioco sono il quadrato, il rettangolo e il trapezio rettangolo; tutte con almeno una coppia di lati paralleli. Al contrario, l'affermazione di A. «ha due coppie di lati paralleli» consente di escludere il trapezio rettangolo, affinando così il processo di identificazione. In ogni caso, in entrambe le situazioni, sarebbe stato possibile individuare correttamente il quadrato già con la prima e l'ultima informazione, rendendo superflua l'aggiunta di ulteriori dettagli. Anche le informazioni determinanti fornite da B. (Figura 5b) risultano essere due e le medesime delle allieve G. (Figura 5a) e A. (Figura 5c). A differenza delle compagne, B. fornisce una prima indicazione («Ha almeno un lato adiacente congruente») irrilevante, soprattutto perché risulta poco chiara dal momento che è scorretta linguisticamente. Lo scritto di C. (Figura 5d) appare molto chiaro ed essenziale: con sole due informazioni riesce a rendere la selezione del quadrilatero inequivocabile. In questo caso, pur non potendo ancora parlare di una definizione vera e propria, in quanto manca una formulazione completa e formalmente corretta, si evidenzia comunque una buona capacità di selezione delle proprietà distintive e rilevanti della figura. Questo rappresenta un passo importante verso la costruzione del concetto di definizione geometrica. Nell'esempio riportato in Figura 6, invece, le informazioni fornite non portano a individuare univocamente il quadrilatero indicato (il rombo), ma a selezionarne di più (deltoide, rombo e parallelogramma).

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha due coppie di lati adiacenti.
 Non ha angoli retti.
 Ha due coppie di lati congruenti.

Che quadrilatero è? Rombo

Figura 6. Esempio di indicazioni non complete per individuare il rombo.

La prima indicazione presente nello scritto («ha due coppie di lati adiacenti») è piuttosto irrilevante poiché tutti i quadrilateri possiedono due coppie di lati adiacenti. È possibile perciò intuire che manchi un'informazione, ovvero la parola «congruenti», e/o che vi sia confusione attorno al termine «adiacente». La dicitura «non ha angoli retti» permette di escludere alcuni quadrilateri come il quadrato, il rettangolo e il trapezio rettangolo.

In questo caso si può intuire che l'allieva si colloca ancora nel livello descrittivo-analitico del pensiero geometrico secondo il modello di van Hiele e che ha bisogno di approfondire ulteriormente la fase di esplicitazione dell'apprendimento. Pur essendo in grado di individuare alcune proprietà corrette del quadrilatero scelto, non riesce ancora a selezionare quelle essenziali per una sua identificazione

univoca. Di conseguenza, il suo scritto non fornisce una definizione chiara della figura, ma si limita a offrirne una descrizione parziale.

Nell'esempio proposto in **Figura 7** risalta l'espressione «ha un lato adiacente congruente» poiché non è linguisticamente corretta. Inoltre, le informazioni fornite portano all'individuazione di due quadrilateri (deltoide e quadrilatero generico).

4) Scegli un quadrilatero e scrivi tu le indicazioni. Un tuo compagno dovrà poi poterlo individuare.

Ha almeno 1 angolo
 è un quadrilatero
 Ha 1 lato adiacente congruente
 Non ha lati paralleli

Che quadrilatero è? deltoide

Figura 7. Indicazioni per individuare il deltoide.

L'allievo Y., autore dello scritto in **Figura 7**, ha mostrato alcune difficoltà nell'utilizzo dell'espressione «ha un lato adiacente congruente», difficoltà riscontrate anche in altri compagni negli esercizi delle **Figure 6** e **5b**. Questa espressione era emersa per la prima volta durante una precedente discussione, in risposta al bisogno di descrivere due lati contigui con caratteristiche simili. È positivo notare il tentativo di impiegare termini e concetti appena appresi; tuttavia, l'imprecisione linguistica potrebbe essere indice di una comprensione ancora parziale o non del tutto corretta. È quindi importante intervenire per chiarire il significato e l'uso appropriato di tali termini, al fine di accompagnare l'allievo verso il passaggio al livello delle deduzioni informali del pensiero geometrico, secondo il modello di van Hiele. Come già affermato precedentemente, le indicazioni fornite da Y. portano all'individuazione di due quadrilateri: il quadrilatero generico e il deltoide. È interessante notare che nemmeno la compagna che ha svolto l'esercizio ha individuato l'errore. Una possibile spiegazione potrebbe essere correlata al disegno dei rappresentanti dei due quadrilateri: studiando unicamente la rappresentazione figurale, senza considerare il concetto geometrico, le indicazioni risultano effettivamente parzialmente corrette al fine di definire unicamente il deltoide rappresentato. Valutando invece l'aspetto concettuale di quadrilatero generico e di deltoide, entrambe le descrizioni risultano corrette.

4.7 Gioco “Detective dei quadrilateri” senza carte proprietà

Descrizione dell'attività. In questa lezione, il gioco del “Detective dei quadrilateri” è stato ulteriormente sviluppato per raffinare sempre di più le descrizioni, avvicinandosi sempre di più alle definizioni dei quadrilateri e alla loro classificazione, eliminando le carte proprietà e spingendo i detective a elaborare una strategia efficace nella formulazione di domande mirate sulle caratteristiche dei quadrilateri allo scopo di giungere rapidamente alla soluzione.

L'introduzione di questa modalità di gioco è avvenuta in modo graduale, rispettando i tempi del gruppo classe. Prima della transizione completa, sono state introdotte delle carte bonus, che consentivano ai detective di porre una domanda libera, purché fosse relativa a una proprietà geometrica.

Analisi delle produzioni degli allievi. Durante la fase di gioco si è potuto notare che la maggior parte degli allievi utilizzava termini ed espressioni adeguate, mostrando di conoscerne il significato (ad esempio: «Ha almeno una coppia di lati paralleli?» per sapere se scartare il quadrilatero generico

e il deltoide). I confronti che si sono sviluppati all'interno del gruppo dei detective per scegliere le proprietà da annunciare al ladro hanno evidenziato la sensibilità di alcuni allievi nell'individuare proprietà efficaci al fine di scartare il maggior numero di quadrilateri e arrivare prima alla soluzione (ad esempio, chiedendo «Ha due coppie di lati paralleli?» oppure «Ha due coppie di angoli congruenti?») era possibile scartare o tenere il quadrilatero generico, il deltoide e tutti i trapezi). Per una piccola parte di allievi si è reso ancora necessario il supporto delle descrizioni dei quadrilateri redatti precedentemente, soprattutto quando assumevano il ruolo del ladro.

In questa fase del percorso didattico gli allievi hanno utilizzato sempre più spesso una terminologia specialistica (senza che vi fosse una forte imposizione da parte dell'insegnante) esprimendosi in maniera più puntuale e precisa. Gli allievi sono stati guidati verso il livello del pensiero deduttivo informale, secondo il modello dello sviluppo del pensiero geometrico, attraverso un esercizio progettato per stimolare in particolare la terza e la quarta fase dell'apprendimento. Entrambe le fasi sono state attivate poiché, trattandosi di un'attività ludica condotta in gruppo, da un lato è stata incoraggiata la libera interpretazione e sperimentazione del gioco, dall'altro è stata favorita la costruzione condivisa delle relazioni geometriche grazie al confronto e al supporto tra pari. Malgrado le difficoltà riscontrate nell'attività precedente, anche per J. è stato possibile seguire e partecipare al gioco grazie al confronto con i compagni e il supporto dell'insegnante in caso di bisogno.

È stato importante precisare che i quadrilateri in gioco dovevano essere considerati come dei rappresentanti di ogni "famiglia". Per questo motivo è stato efficace cambiare spesso le figure utilizzate proponendo in turni diversi figure della stessa "famiglia" ma con dimensioni diverse e non metterle in gioco nello stesso turno, in modo da focalizzare il riconoscimento delle proprietà ed evitare affermazioni legate alle misure delle figure.

4.8 Raggruppare i quadrilateri

La lezione è suddivisa in due momenti principali: un'attività di gruppo iniziale seguita da un'attività a coppie. Entrambe hanno lo scopo di ripassare i nomi dei quadrilateri e le loro proprietà, oltre che dare il via alla classificazione.

4.8.1 Attività a grande gruppo

Descrizione dell'attività. Ogni allievo ha ricevuto un quadrilatero diverso e come prima cosa doveva nominare la figura ricevuta comunicandolo al resto del gruppo. Successivamente l'insegnante ha letto ad alta voce delle proprietà sulla base delle carte create nei giochi delle lezioni precedenti. Ogni volta che l'allievo sentiva una proprietà relativa al quadrilatero in suo possesso, si doveva alzare.

Prima di iniziare il gioco, l'insegnante ha chiesto agli allievi di riflettere individualmente su alcune domande e di rispondere su un foglio: «Quale quadrilatero pensi che si alzerà più volte? Quale quadrilatero pensi si alzerà di meno?». Durante l'attività si è discusso sulla correttezza dei risultati e sulle motivazioni di ogni scelta, mentre al termine del gioco si sono prese in mano nuovamente le supposizioni individuali iniziali per verificarne la correttezza.

Analisi delle produzioni degli allievi. Le previsioni iniziali degli alunni si sono rivelate interessanti: la maggior parte degli allievi ha indicato il quadrilatero generico come quello che si sarebbe alzato meno spesso, mentre per quello che si sarebbe alzato più volte hanno scelto il rombo, il quadrato e il rettangolo. Quando è stato chiesto loro di motivare le proprie supposizioni alcuni allievi hanno proposto le seguenti risposte:

- «Mi ricordo che quando ho descritto il quadrilatero generico non ho scritto molto, mentre per il rombo ho scritto molte più proprietà».
- «Il quadrato mi sembra quello più completo».
- «Il quadrilatero generico non ha niente di particolare... è solo un quadrilatero!»

Durante il gioco è apparso significativo osservare le dinamiche tra gli allievi: spesso si consultavano con il compagno di banco prima di alzarsi in piedi oppure si davano delle indicazioni puntuali quando notavano che c'erano degli errori. Infine, la revisione delle supposizioni iniziali ha permesso agli allievi di consolidare i propri pensieri e di incoraggiare il confronto tra compagni. In particolare, è stata ripresa la frase «Il quadrato mi sembra quello più completo», chiedendo a tutti gli allievi di argomentarla meglio alla luce delle scoperte fatte durante l'attività.

L'allieva C. ha spiegato: «Il quadrato è quello più completo perché possiede tutte le proprietà che possiedono anche gli altri quadrilateri. Infatti, il B. [compagno a cui era stato assegnato il quadrato] si alzava quasi sempre». Tale discussione finale ha assunto, soprattutto per alcuni allievi, un ruolo di sintesi e di integrazione dei vari concetti appresi, caratteristiche dell'ultima fase dell'apprendimento prima del passaggio a un livello del pensiero geometrico successivo.

4.8.2 Attività a coppie

Descrizione dell'attività. In seguito, gli alunni hanno svolto un'attività ludica a coppie con lo scopo di classificare i quadrilateri. Gli allievi si sono seduti uno di spalle all'altro e a turno dovevano svolgere due compiti differenti: un compagno enunciava una proprietà e l'altro doveva individuare tutti i quadrilateri corrispondenti. L'allievo che doveva individuare i quadrilateri otteneva un punto se riusciva a identificarli tutti e un punto bonus se li nominava correttamente. Nominati i quadrilateri si cambiava ruolo. Vinceva chi arrivava per primo a 10 punti.

Gli allievi avevano a disposizione i quadrilateri ritagliati come nei giochi precedenti e delle carte proprietà (create dalla docente sulla base dei giochi svolti precedentemente) con la soluzione sul retro, come mostrato nell'esempio della Figura 8.

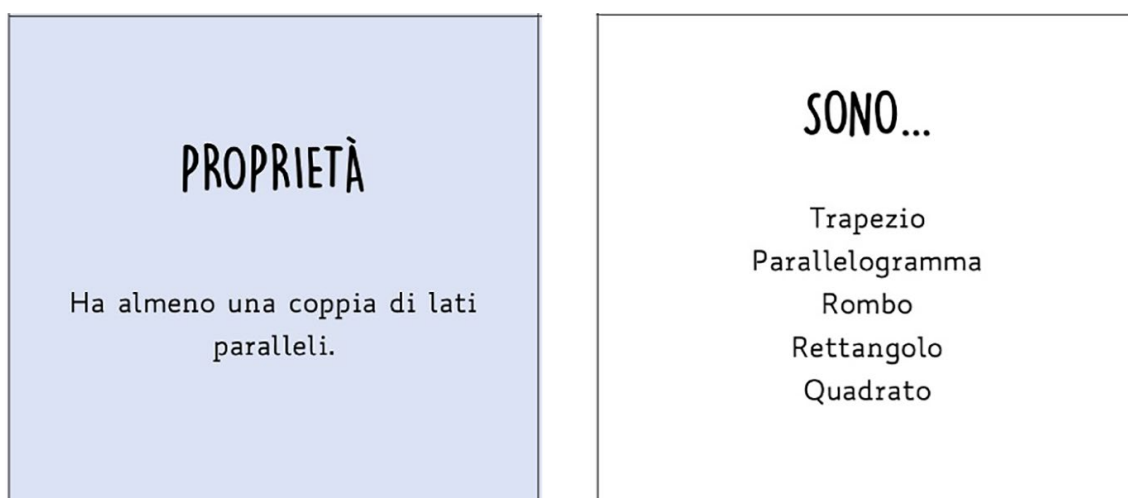


Figura 8. Esempio di carta proprietà fronte-retro.

Analisi delle produzioni degli allievi. L'attività svolta ha rappresentato un'importante occasione per gli allievi di approfondire le loro conoscenze sui quadrilateri, mettendo in gioco la capacità di analizzare e classificare in base alle proprietà delle figure.

All'inizio, gli allievi tendevano a indicare uno o pochi quadrilateri che presentavano le proprietà richieste. Con il tempo, grazie all'esercizio e alla motivazione suscitata dal carattere stimolante del gioco, hanno mostrato un progressivo miglioramento, diventando via via più precisi e completi nelle loro risposte.

Dal punto di vista didattico la lezione si prefiggeva l'obiettivo di condurre gli allievi verso una fase di esplicitazione delle relazioni tra i quadrilateri utilizzando un linguaggio adeguato e attraverso la manipolazione di materiale, tipico del livello deduttivo informale (van Hiele, 1986). Nell'attività ini-

ziale l'attenzione degli allievi si era concentrata sull'analisi di una singola figura, mentre nell'attività a coppie è stato richiesto di confrontare più figure contemporaneamente, individuandone le proprietà comuni e gestendo una maggiore complessità.

4.9 Costruzione dei quadrilateri – La geometria del faraone

Descrizione dell'attività. La lezione si è costruita sulla lettura della storia *La geometria del faraone* di Cerasoli (2013).

La storia narra di un bambino dell'antico Egitto di nome Ames che, grazie al mestiere del padre (tenditore di corde impegnato nella costruzione di una piramide), entra in contatto con i primi concetti geometrici. Durante l'assenza del padre, Ames e i suoi fratelli trovano tra i suoi attrezzi una corda a 12 nodi. Scoprono come tracciare un angolo retto e costruire un quadrato, riuscendo così ad aiutare un vicino a ripristinare i confini del suo orto dopo una piena del Nilo. Grazie all'aiuto fornito al vicino, i ragazzi ricevono una barca per raggiungere il padre a Tebe, dove assistono al tracciamento del vertice della piramide. Colpito dalla storia di Ames e i suoi fratelli, il faraone premia i bambini con uno scarabeo d'oro. L'insegnante ha letto la storia agli allievi (riuniti in cerchio) rendendola interattiva attraverso delle domande stimolo e l'utilizzo di materiale. Nella storia emergono le analogie e le differenze tra un rombo e un quadrato, l'insegnante ha colto l'occasione per ricostruire la situazione esposta nel racconto in modo pratico con un modello dinamico (Figura 9) e per avviare il tema della classificazione dei quadrilateri.

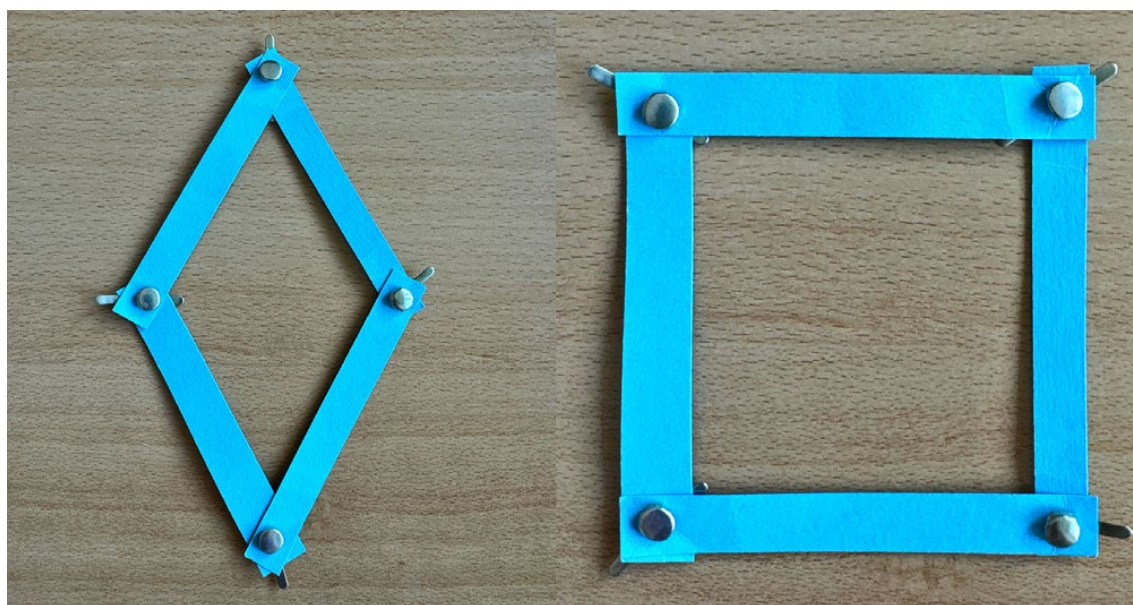


Figura 9. Modello dinamico utilizzato durante la lettura della storia per rappresentare il rombo e il quadrato.

Muovendo il modello, gli allievi possono osservare come cambia il quadrilatero e determinare quali proprietà rimangono invariate e quali invece variano, supportati dalle domande stimolo dell'insegnante («Quali quadrilateri puoi ottenere con questo modello?», «Cosa devi fare e cos'hanno dovuto fare Ames e i suoi fratelli per ottenere un quadrato con le corde che avevano?», «Nella storia, la maestra spiega ai suoi alunni che il quadrato è un rombo un po' speciale, sapresti spiegare perché?»).

Al termine del racconto, gli alunni hanno svolto un'attività (individuale o a coppie) di costruzione e riflessione sui modelli dinamici dei quadrilateri con l'utilizzo di strisce di cartoncino e fermacampioni. Gli allievi avevano a disposizione tutto il materiale necessario (fermacampioni, strisce di diversa lunghezza e colore) e una scheda da seguire ([Allegato 6](#)). L'obiettivo era di costruire, uno per volta, tutti i quadrilateri conosciuti dagli allievi scegliendo opportunamente quattro strisce tra quelle a disposizione.

Riflettendo a priori sull'attività, ci si aspettava che la lettura della storia e la manipolazione dei modelli dinamici dei quadrilateri fossero stimolanti per gli allievi. Per alcuni, avrebbe potuto essere ancora complesso comprendere il discorso relativo alla classificazione dei quadrilateri, sollevato dalla maestra della storia e poi ripreso dall'insegnante di classe. Tuttavia, sarebbe stato utile per la docente cogliere le reazioni e le riflessioni degli alunni per poi sviluppare delle attività incentrate sulla classificazione dei quadrilateri più efficaci e adeguate al contesto classe.

La storia fornisce ulteriori spunti didattici che possono essere approfonditi, come, ad esempio, l'esperienza di costruire un angolo retto utilizzando tre corde come raccontato nella storia. Inoltre, si può riflettere sulla presenza di angoli retti, e di figure come rettangoli e quadrati nella realtà dei giorni nostri e del tempo degli egizi. Infine, la storia è un ottimo stimolo per trattare le diagonali dei quadrilateri. È possibile, infatti, con l'aiuto di elastici studiarle utilizzando i modelli dinamici dei quadrilateri già realizzati.

Per concludere la lezione si è svolta una condivisione in plenaria del lavoro svolto, lasciando che gli allievi potessero descrivere il processo e i risultati ottenuti, oltre che condividere le scoperte fatte.

In questo caso non vengono analizzate le produzioni degli allievi, poiché tutti hanno portato a termine la scheda di lavoro realizzando correttamente i modelli dinamici dei quadrilateri e, inoltre, la lezione si è svolta prevalentemente in forma orale.

4.10 Classificazione dei quadrilateri

La lezione proposta per la classificazione dei quadrilateri si è basata su un'attività presentata nel documento "I quadrilateri e le loro classificazioni" del progetto MaMa (Sbaragli et al., 2023a) e, anche in questo caso, si suddivide in due momenti distinti.

4.10.1 Introduzione al diagramma di Euler-Venn

Descrizione dell'attività. Prima di proporre agli allievi la visualizzazione della classificazione delle figure con i diagrammi di Euler-Venn, si è ritenuto opportuno far vivere agli allievi un'esperienza di classificazione utilizzando un esempio più vicino alla realtà e alle conoscenze enciclopediche degli allievi. L'insegnante ha mostrato agli alunni un diagramma di Euler-Venn vuoto (alla lavagna o su un cartellone) e delle parole/immagini da classificare. Gli allievi hanno discusso in piccoli gruppi e definito in quale insieme collocare le diverse parole. Le parole proposte erano inerenti al tema degli animali: animali, vertebrati, invertebrati, anfibi, rettili, uccelli, mammiferi, pesci, poriferi, celenterati, vermi, artropodi e molluschi. L'argomento è stato scelto perché durante l'anno scolastico si stavano trattando gli invertebrati.

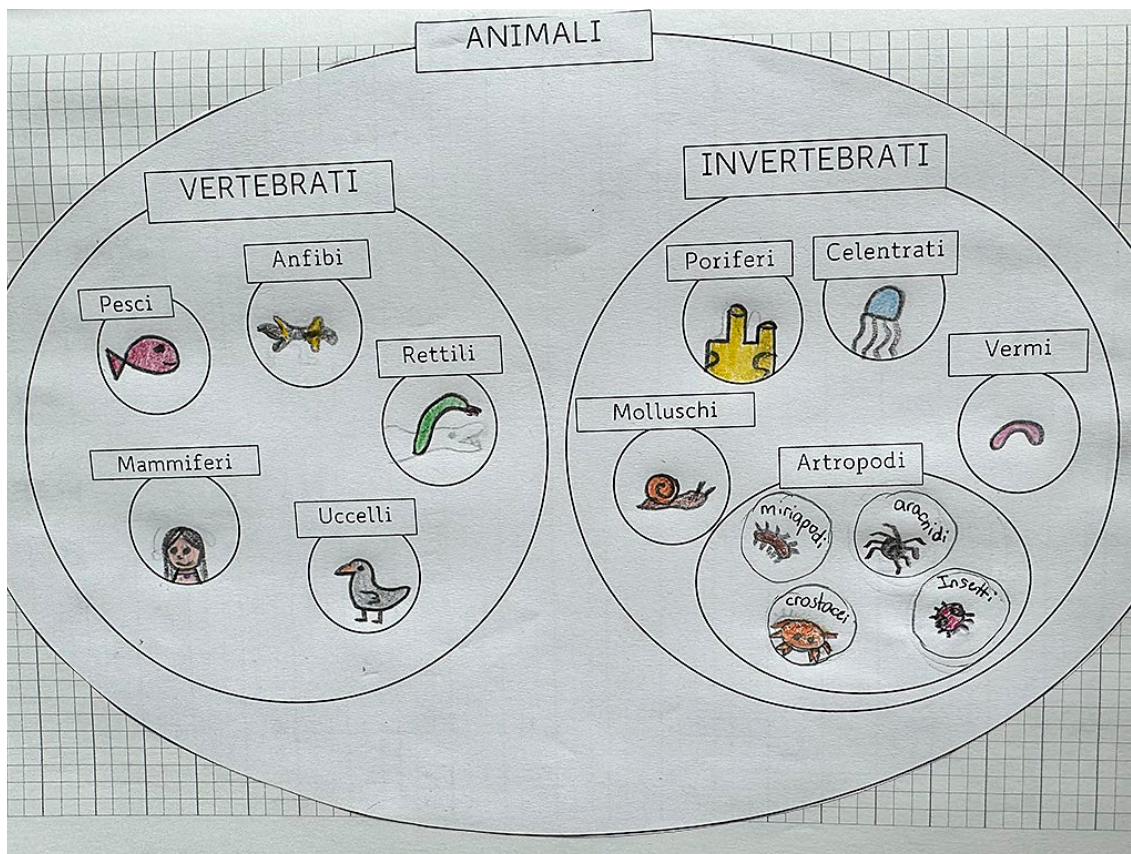
Dopo aver svolto l'esercizio a gruppi, si è svolta una condivisione collettiva in cui è stato chiesto agli allievi di presentare i propri diagrammi e di giustificare le proprie scelte.

A priori l'insegnante aveva stilato una lista delle considerazioni che era importante emergessero durante la condivisione a grande gruppo:

- Ogni linea curva chiusa rappresenta un insieme (uso anche del termine "gruppo" per chiarire il concetto) di elementi;
- Ogni insieme può contenere altri insiemi (ad esempio, l'insieme degli animali comprende l'insieme dei vertebrati e l'insieme degli invertebrati);
- Gli elementi di un insieme contenuto in un altro insieme possiedono tutte le caratteristiche dell'insieme più grande e inoltre alcune caratteristiche più specifiche (ad esempio, i mammiferi sono degli animali vertebrati che si distinguono per l'allattamento della prole; si può quindi affermare che i mammiferi sono un caso particolare di vertebrati);

Al termine dell'attività collettiva, è stato chiesto agli allievi di completare individualmente una scheda ([Allegato 7](#)) contenente il diagramma precedentemente elaborato insieme. Ogni alunno doveva rap-

presentare graficamente o verbalmente un elemento per ciascun insieme e aggiungere nuovi sottoinsiemi relativi agli artropodi, tema affrontato in quel periodo del percorso didattico. Per concludere l'attività, gli allievi dovevano inoltre formulare cinque affermazioni relative al diagramma e altre cinque corredate da una giustificazione.



Classificazione degli animali con il diagramma di Euler-Venn

I poriferi sono invertebrati.

I miriapodi sono artropodi e invertebrati.

I pesci sono animali.

I molluschi non sono vertebrati.

I mammiferi sono animali.

I rettili sono vertebrati perché hanno la colonna vertebrale.

Gli insetti sono artropodi perché hanno le zampe.

I vermi sono invertebrati perché non hanno la colonna vertebrale.

I crostacei sono artropodi perché hanno le zampe.

I mammiferi sono animali che allattano i loro piccoli.

Figura 10. Esempio di classificazione degli animali con il diagramma di Euler-Venn e frasi associate.

Analisi delle produzioni degli allievi. La Figura 10 riporta un esempio di esercizio svolto. L'intera attività si è svolta come previsto, senza particolari difficoltà. Gli allievi sono riusciti a ricostruire correttamente il diagramma degli animali e a motivare le proprie scelte. Ad esempio, hanno osservato che l'insieme più esterno doveva essere quello degli animali, poiché tutte le altre categorie rappresentavano tipi specifici di animali e, quindi, dovevano essere contenute al suo interno.

Maggiore attenzione è stata dedicata alla costruzione delle frasi con giustificazione. L'insegnante ha invitato gli alunni a riflettere sulla diversa struttura delle affermazioni, distinguendo tra frasi come: «I crostacei sono artropodi perché hanno le zampe» e «I mammiferi sono animali che allattano i loro piccoli» (Figura 10).

È stato interessante analizzare le differenze tra queste due formulazioni, dal punto di vista sia linguistico sia concettuale. La prima frase impiega un «perché» (congiunzione causale) che funge da spiegazione e giustifica l'inclusione dell'insieme dei crostacei in quello degli artropodi. La seconda, invece, utilizza un «che» (pronome relativo) per evidenziare una caratteristica distintiva dell'insieme dei mammiferi, mettendolo in relazione con altri insiemi all'interno della classificazione.

Dal punto di vista didattico, questa attività iniziale di classificazione di elementi non inerenti alla geometria aveva lo scopo di far capire agli allievi il significato dei diagrammi di Euler-Venn e il funzionamento della loro rappresentazione. Gli alunni hanno costruito in questo modo un modello di paragone per la classificazione dei quadrilateri.

L'approfondimento sulla lingua ha permesso di approfondire il significato concettuale del diagramma di Euler-Venn e di ragionare in maniera più approfondita sulla costruzione e sulla comprensione del linguaggio.

4.10.2 Diagramma di Euler-Venn con i quadrilateri

Descrizione dell'attività. Dopo aver compreso il funzionamento del diagramma di Euler-Venn, l'insegnante ha guidato gli alunni alla classificazione dei quadrilateri attraverso delle domande stimolo e utilizzando una rappresentazione degli insiemi già disegnata alla lavagna. La discussione è stata supportata dalle figure ritagliate e dai cartelloni appesi in aula realizzati in precedenza.

Successivamente, gli allievi divisi in gruppetti eterogenei hanno costruito un cartellone riassuntivo e scritto delle affermazioni con giustificazione sulla base degli esempi della lezione precedente.

Le domande stimolo sono state le seguenti:

- «C'è un quadrilatero che potete collocare con sicurezza in un insieme?»
- «Quale caratteristica possiedono i quadrilateri contenuti in questo insieme?»
- «Quale quadrilatero possiede le stesse caratteristiche dei quadrilateri di questo insieme ma con una particolarità in più?»

Analisi delle produzioni degli allievi. Gli alunni sono riusciti a completare il diagramma di Euler-Venn disegnato alla lavagna senza troppe difficoltà e grazie alle domande stimolo dell'insegnante. Il primo quadrilatero che si sono sentiti sicuri di collocare era il quadrato giustificando la scelta dicendo che era la figura con più proprietà di tutti gli altri.

La Figura 11 mostra i due cartelloni che sono stati realizzati dai gruppi di allievi.

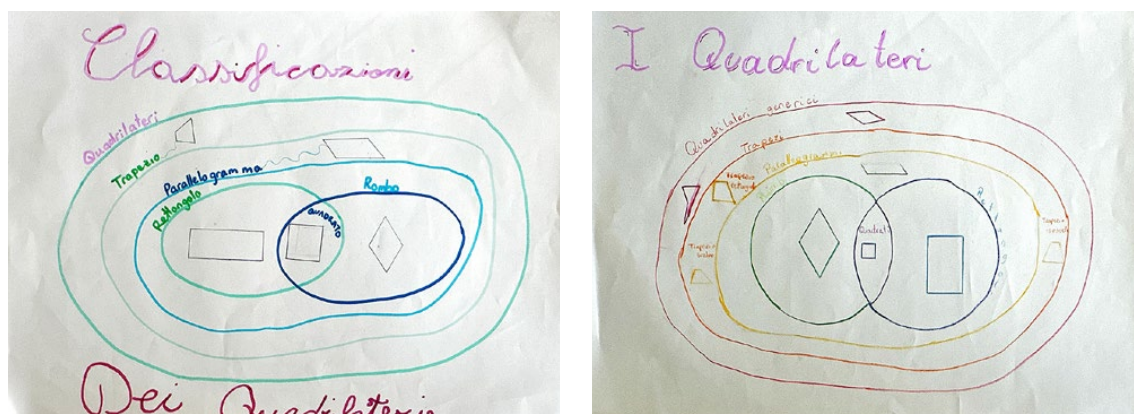


Figura 11. Cartelloni con la classificazione dei quadrilateri secondo il diagramma di Euler-Venn realizzati dagli allievi.

Si riportano di seguito alcune delle affermazioni scritte individualmente dagli allievi:

1. «I quadrati sono trapezi perché hanno almeno un lato parallelo».
2. «I quadrati sono rettangoli che hanno 4 lati congruenti».
3. «Il parallelogramma è un quadrilatero con due coppie di lati paralleli».
4. «I quadrati sono rombi con 4 lati della stessa lunghezza».
5. «I trapezi sono quadrilateri con una coppia di lati paralleli».
6. «Il rombo è un quadrilatero perché ha 4 lati».
7. «I rombi sono parallelogrammi con 4 lati congruenti».
8. «Il quadrato è un rettangolo perché ha 4 angoli retti».
9. «Il rombo è un parallelogramma con due coppie di angoli congruenti».

È possibile osservare che alcune di queste frasi, oltre a essere corrette, costituiscono vere e proprie definizioni (ad esempio le frasi 2, 3, 5, 7). Altre, come le frasi 4, 6 e 8, pur essendo corrette dal punto di vista sia linguistico sia concettuale, non rappresentano definizioni ma affermazioni di tipo giustificativo. La frase 1 risulta invece linguisticamente scorretta, in quanto fa riferimento a «un lato parallelo» anziché a «una coppia di lati paralleli», concetto fondamentale nella classificazione dei trapezi.

Infine, la frase 9 è solo parzialmente corretta: l'uso della preposizione «con» suggerisce che la presenza di due coppie di angoli congruenti sia un'aggiunta, mentre si tratta in realtà di una caratteristica già propria del parallelogramma, e quindi non distintiva del rombo rispetto ad esso.

Attraverso questa lezione gli allievi sono stati portati a scoprire le relazioni esistenti tra i quadrilateri e le loro proprietà attraverso un compito libero che può essere affrontato in modi diversi, esattamente come prevede la quarta fase dell'apprendimento di van Hiele. Spontaneamente gli alunni hanno iniziato ad organizzare le informazioni in termini di definizioni con una terminologia tecnica, avvicinandosi al livello delle deduzioni informali del pensiero geometrico. In questa attività gli alunni si sono allontanati dal concetto di descrizione, la quale prevede una sovrabbondanza di termini e di informazioni, e si sono avvicinati sempre più a una frase precisa, chiara ed essenziale come dovrebbe essere una definizione (Sbaragli, 2020).

4.11 Dalla descrizione alla definizione

4.11.1 Detective dei quadrilateri con le carte È e le carte HA

Descrizione dell'attività. Il passaggio dalla descrizione alla definizione è avvenuto attraverso la ripresa e l'ampliamento del gioco "Detective dei quadrilateri".

Inizialmente, si è riflettuto con gli allievi sul fatto che le carte proprietà create in precedenza indicassero *cos'ha* una determinata figura ("carte HA") e si è chiesto loro di creare delle carte che indicassero invece *cos'è* una determinata figura ("carte È"). Il compito prende spunto dal gioco MaMa "Definisci i quadrilateri" (Sbaragli et al., 2023b).

L'insegnante ha proposto alla classe di giocare a una nuova versione del "Detective dei quadrilateri" utilizzando le carte È e le carte HA (un esempio nella Figura 12) create dagli allievi. L'insegnante aveva individuato delle ulteriori carte HA da mettere in gioco nel caso fosse stato necessario o interessante arricchire l'attività.



Figura 12. Esempio di carte È e carte HA tratte dal materiale MaMa (Sbaragli et al., 2023b).

In questa versione del gioco i detective non fanno più alcuna domanda, ma è il ladro stesso a fornire le indicazioni attraverso l'impiego delle carte. Dopo ogni indicazione fornita, i detective devono scartare le figure incoerenti. La determinazione del vincitore avviene secondo le regole originali del gioco. Dopo che gli allievi hanno preso un po' di dimestichezza con la nuova versione del gioco si sono introdotte delle condizioni, come ad esempio:

- si può utilizzare una sola carta È;
- si possono utilizzare un massimo di 4 carte;
- si possono utilizzare un massimo di 3 carte;
- bisogna utilizzare esattamente/almeno 5/6/... carte.

Analisi delle produzioni degli allievi. Le diverse partite al gioco hanno suscitato delle riflessioni interessanti sia da parte degli allievi durante il gioco stesso sia da parte dell'insegnante a posteriori. Lo svolgimento delle partite è qui riportato attraverso delle tabelle in cui sono indicate le carte scelte dal ladro per fornire le informazioni ai detective, le azioni dei detective ed eventuali commenti registrati durante il gioco.

Nella prima partita, riportata in Tabella 1, i detective sono riusciti a individuare il quadrilatero grazie alle corrette indicazioni del ladro, malgrado fosse stata utilizzata una carta che non forniva alcuna indicazione ulteriore e utile allo scopo del gioco.

Carta scelta dal ladro	Azioni dei detective	Eventuali commenti
«Ha due coppie di lati paralleli».	Scartano il quadrilatero generico, il deltoide e tutti i trapezi.	
«È un trapezio».	Non scartano quadrilateri.	D.: «È inutile questa carta, non puoi scartare niente». Insegnante: «Per quale motivo?» D.: «Sono tutti dei trapezi».
«Non ha angoli retti».	Scartano il rettangolo e il quadrato.	
«Ha due coppie di lati congruenti non adiacenti».	Scartano il rombo e individuano il parallelogramma.	

Tabella 1. Partita 1 – Quadrilatero scelto dal ladro: parallelogramma.

Nella seconda partita, riportata in Tabella 2, l'insegnante ha posto la condizione di utilizzare esattamente 5 carte.

Carta scelta dal ladro	Azioni dei detective	Eventuali commenti
«Ha una coppia di lati paralleli».	Scartano il quadrato, il rettangolo, il rombo, il parallelogramma, il deltoide e il quadrilatero generico.	
«Ha 4 vertici».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha 4 lati».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha 4 angoli».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha due coppie di lati congruenti».	Scartano il trapezio scaleno e il trapezio rettangolo individuando il trapezio isoscele.	

Tabella 2. Partita 2 – Quadrilatero scelto dal ladro: trapezio isoscele.

L'allievo ladro è riuscito a far individuare il trapezio isoscele utilizzando esattamente 6 carte. Al termine della partita l'insegnante ha chiesto all'allievo ladro di spiegare la strategia utilizzata e ai compagni di commentarla. L'allievo ha spiegato di aver scelto una prima carta in grado di scartare molti quadrilateri per poi dare tante carte inutili e, infine, fornire quella determinante. I compagni hanno ritenuto che fosse una strategia vincente perché «ha funzionato bene».

In questa versione del gioco gli alunni hanno fatto esperienza con la ridondanza delle informazioni tipica delle descrizioni e hanno la possibilità di mettere in relazione le proprietà, com'è tipico nel livello delle deduzioni informali nello sviluppo del pensiero geometrico. Hanno potuto infatti notare che la presenza o l'assenza di una proprietà considera o esclude un'altra proprietà (ad esempio la proprietà «ha almeno una coppia di lati paralleli» tiene in considerazione tutte le figure con «ha una coppia di lati paralleli» e «ha più di una coppia di lati paralleli»).

Nella terza partita, riportata in **Tabella 3**, l'insegnante ha posto la condizione di utilizzare esattamente 3 carte.

Carta scelta dal ladro	Azioni dei detective	Eventuali commenti
«Ha quattro lati congruenti».	Scartano tutti quadrilateri tranne il quadrato e il rombo.	
«Ha 4 angoli».	Non scartano quadrilateri.	
«Ha 4 angoli retti».	Scartano il rombo e individuano il quadrato.	

Tabella 3. Partita 3 – Quadrilatero scelto dal ladro: quadrato.

Anche in questo caso, l'allievo "ladro" è riuscito a rispettare la consegna, facendo individuare il quadrato mediante l'utilizzo esatto di tre carte proprietà. Al termine della partita, l'insegnante ha colto l'occasione per approfondire ulteriormente l'argomento proponendo alcune domande stimolo. In primo luogo ha chiesto alla classe se fosse possibile individuare il quadrato utilizzando solo due carte, e in tal caso, quale delle tre utilizzate potesse essere considerata superflua. Tutti gli allievi hanno concordato sul fatto che la carta eliminabile fosse quella con la proprietà «ha 4 angoli», considerata non determinante ai fini dell'individuazione univoca della figura.

Successivamente, l'insegnante ha proposto una nuova sfida: individuare il quadrato utilizzando esattamente due carte, più precisamente una carta È e una carta HA. Dopo una breve riflessione individuale, due allieve hanno proposto soluzioni diverse ma entrambe corrette:

- «È un rombo» e «Ha 4 angoli retti»;
- «È un rettangolo» e «Ha 4 lati congruenti».

Attraverso questa attività, le allieve sono riuscite a formulare due definizioni corrette di quadrato, mostrando un buon livello di comprensione concettuale e una progressione nel pensiero geometrico.

4.11.2 La definizione

All'inizio della lezione, l'insegnante ha esplicitato chiaramente l'obiettivo didattico: formulare progressivamente le definizioni dei diversi quadrilateri. Per favorire una comprensione consapevole del processo, ha chiesto agli alunni di riflettere su cosa significhi "definizione" e di esprimere le proprie idee in merito. Eccone alcune:

- Y.: «Una definizione è quando dici cos'è una cosa».
- C.: «Secondo me è una spiegazione precisa, ti dice di cosa si tratta esattamente».
- A.: «È come una descrizione, ma più corta e più precisa».

Per supportare questa riflessione, l'insegnante ha raccolto e trascritto alla lavagna parole-chiave emerse dal confronto con gli allievi e ha chiesto loro di proporle ulteriori. Sono emerse le seguenti parole-chiave: «che cos'è», «precisa», «esatta», «corta», «non lascia dubbi», «completa».

Dopo la raccolta delle preconcose degli allievi e prima di avviare l'attività principale, l'insegnante ha introdotto la distinzione tra descrizione e definizione, evidenziando come una definizione debba essere precisa, essenziale e non ambigua. Una descrizione ha invece lo scopo di fornire il maggior

numero di informazioni possibili al fine di favorire la costruzione di un'immagine completa e chiara di ciò di cui si sta parlando.

Descrizione dell'attività. L'attività principale si è svolta a coppie o in piccoli gruppi eterogenei. Ogni coppia ha ricevuto tutte le carte È e le carte HA utilizzate in precedenza, con l'eventuale aggiunta delle carte mancanti a discrezione dell'insegnante.

L'attività prevedeva che ogni gruppo selezionasse il minor numero di carte possibile per definire ciascun quadrilatero in modo univoco. In un secondo momento, gli allievi sono stati invitati a trasformare le definizioni in descrizioni, ovvero a riformulare le frasi utilizzando il maggior numero di carte. Ciò allo scopo di favorire l'analisi degli elementi essenziali e di quelli ridondanti per permettere di comprendere maggiormente le caratteristiche di una definizione e di una descrizione.

Per rendere la lezione più coinvolgente, l'attività è stata proposta sotto forma di sfida ed è stato incoraggiato il confronto tra gruppi, in modo da favorire la condivisione delle strategie e dei risultati emersi.

Analisi delle produzioni degli allievi. In un primo momento, alcune coppie di allievi hanno utilizzato esclusivamente carte HA per definire un quadrilatero (ad esempio, «ha quattro angoli retti» e «ha tutti i lati congruenti» per identificare il quadrato). Per chiarire che ciò non costituiva una vera definizione, l'insegnante ha ripreso le parole-chiave emerse durante la discussione collettiva, tra cui il concetto di "cos'è".

Una compagna ha offerto un esempio efficace per spiegare meglio: «Se io dico: Tom ha il pelo nero e lungo e ha le orecchie a punta, tu capisci subito di cosa sto parlando? Devo specificare che Tom è un gatto!». A partire da questo esempio, l'insegnante ha invitato gli allievi a riformulare la frase in modo corretto e completo, che è diventata: «Tom è un gatto che ha il pelo nero e lungo e le orecchie a punta». Dalla discussione è emerso che una definizione efficace deve contenere almeno una carta È e una carta HA, per specificare chiaramente l'appartenenza a un insieme e le sue caratteristiche.

In seguito, gli allievi sono riusciti a formulare definizioni corrette, anche se talvolta dimenticavano proprietà essenziali (ad esempio, dicendo «Il rombo è un quadrilatero con due coppie di lati paralleli» si ottiene la definizione di parallelogramma; per definire il rombo sarebbe necessario aggiungere che «ha quattro lati congruenti»), oppure inserivano elementi ridondanti (come in «Il rettangolo è un parallelogramma con due coppie di lati congruenti e tutti gli angoli retti», dove l'informazione sui lati congruenti è ridondante, essendo già implicita nella definizione di parallelogramma).

Durante l'attività, molti allievi hanno trovato utile fare costante riferimento alla classificazione dei quadrilateri rappresentata nel diagramma di Euler-Venn costruito precedentemente. Un'allieva ha osservato e condiviso con la classe che le definizioni più sintetiche si ottengono scegliendo, come carta È, l'insieme più ampio e immediatamente più prossimo rispetto al quadrilatero da definire.

Per quanto riguarda le descrizioni, invece, è risultato più semplice per gli allievi utilizzare un numero elevato di carte. È emerso fin da subito che, quanto più un quadrilatero si collocava all'interno di numerosi insiemi nel diagramma di Euler-Venn, tanto maggiore era il numero di carte che gli si potevano attribuire. Alcuni allievi hanno osservato che i "quadrilateri più speciali" possedevano un maggior numero di carte, cioè più proprietà distintive. A parole proprie gli allievi sono riusciti a spiegare una caratteristica fondamentale dei quadrilateri dimostrando comprensione concettuale e dimostrando di riuscire a osservare delle relazioni logiche tra le figure e tra le proprietà, caratteristica del livello delle deduzioni informali del pensiero geometrico. L'attività mirava infatti alla fase di orientazione libera in cui gli allievi scoprono individualmente le relazioni attraverso un compito che può essere svolto in diversi modi. Si potrebbe dire che in piccola parte l'attività ha stimolato anche la fase d'integrazione, in quanto ha permesso lo sviluppo di una visione globale del campo di studio e degli strumenti a disposizione (cartelloni, carte e figure dei quadrilateri) (Batini et al., 2004).

5 Riflessioni globali sul percorso

Al termine di questo contributo è possibile fare delle considerazioni globali sul percorso didattico in relazione all'interdisciplinarietà tra lingua e geometria.

L'uso del gioco ha facilitato l'introduzione e il consolidamento dei concetti geometrici in modo dinamico e coinvolgente, favorendo al contempo il dialogo matematico e lo sviluppo di una comunicazione efficace. I momenti di confronto, sia tra pari sia con l'insegnante, hanno contribuito alla costruzione di un linguaggio condiviso e sempre più preciso, ponendo le basi linguistiche e concettuali necessarie per il proseguimento del percorso. Le diverse situazioni comunicative sono quindi state veramente delle occasioni di apprendimento in cui si è potuto ragionare sulla lingua e sui concetti geometrici.

La matematica, e in questo caso la geometria, è ricca di termini specialistici basati su dei concetti ben precisi. La padronanza di tali vocaboli favorisce la comprensione concettuale e lo sviluppo del pensiero geometrico descritto da van Hiele. Un esempio all'apparenza semplice, ma tutt'altro che scontato, riguarda l'espressione "lati paralleli": senza una comprensione chiara e corretta del concetto di parallelismo, non è possibile cogliere né applicare alcune delle proprietà fondamentali dei quadrilateri.

Si è potuto notare che nel complesso le competenze linguistiche e concettuali degli allievi sono evolute in maniera progressiva durante il percorso. Inizialmente, dal punto di vista linguistico, i più grandi ostacoli riscontrati all'interno del gruppo classe erano legati al lessico e alla semantica. In particolare, durante il dialogo della quarta attività (par. 4.4), è emersa la difficoltà nel realizzare oralmente atti linguistici chiari ed efficaci per la mancanza di un bagaglio lessicale preciso e adeguato («questi lati sono più dritti»). Gli allievi che hanno mostrato maggiori difficoltà sono coloro che presentano già delle lacune linguistiche dovute a svariati motivi (dislessia, disortografia, poca conoscenza della lingua ecc.). Più nello specifico gli errori linguistici che sono stati individuati hanno fatto pensare che, sicuramente, non vi era un controllo consapevole dell'utilizzo della lingua e che probabilmente vi erano delle lacune concettuali e degli ostacoli d'apprendimento di varia natura.

Durante il percorso didattico, gli allievi hanno arricchito e affinato il proprio lessico e le proprie conoscenze concettuali, dimostrando una crescente volontà di utilizzare termini nuovi e più precisi. Un esempio significativo è l'introduzione e la comprensione del termine "adiacente", che ha fornito la possibilità di individuare e formulare delle proprietà dei quadrilateri in grado di caratterizzarli in maniera più precisa, contribuendo a rendere le espressioni linguistiche più accurate e a veicolare con maggiore chiarezza i concetti geometrici. Non sono più comparse espressioni colloquiali o ambigue, come «il lato è storto». Tuttavia, anche nelle fasi finali del percorso, si sono ancora riscontrate formulazioni linguisticamente scorrette, pur contenendo termini e concetti corretti dal punto di vista geometrico (ad esempio, «ha un lato parallelo»).

Il passaggio dalla descrizione alla definizione è avvenuto in modo graduale e ha messo in luce la maggiore facilità degli allievi nel formulare descrizioni piuttosto che definizioni. Pur avendo dimostrato di aver compreso il significato di definizione in matematica, molti hanno incontrato difficoltà nel rendere le loro formulazioni essenziali ed evitare ridondanze, come si è potuto osservare anche nell'ultima lezione del percorso (par. 4.11.2).

Dal punto di vista della didattica della geometria, i materiali raccolti durante le attività hanno permesso all'insegnante di cogliere i segnali relativi al livello dello sviluppo del pensiero geometrico degli allievi. Al termine delle undici fasi del percorso didattico proposto, tutti gli allievi hanno potuto raccogliere diverse esperienze nell'acquisizione del livello descrittivo-analitico e alcuni di essi si possono sicuramente collocare già nel livello delle deduzioni informali (van Hiele, 1986).

È, inoltre, emerso il forte legame tra concetto e figura geometrica alla base del concetto figurale (Fischbein, 1993). Alcuni allievi hanno mostrato più volte il bisogno del supporto visivo e di un riassunto delle informazioni raccolte precedentemente per poter definire le proprietà dei quadrilateri. Ciò con-

fermava la loro fragilità concettuale e quindi la necessità di esplorare e di consolidare ulteriormente i nuovi apprendimenti attraverso, per esempio, nuove forme di rappresentazione.

D'altra parte, è emerso come la rappresentazione figurale possa risultare ambigua e non sempre offrire un'immagine completa del concetto geometrico, rischiando così di influenzare negativamente la costruzione di una definizione concettuale dell'oggetto stesso.

5.1 Possibili sviluppi ulteriori e di revisione

Riflettendo retrospettivamente sul percorso proposto, emergono possibili revisioni e sviluppi futuri.

In particolare, l'approccio pluridisciplinare ha posto un forte accento sulla riflessione relativa all'uso del linguaggio, con l'obiettivo di favorire una comprensione più profonda dei concetti matematici. Gran parte delle attività hanno previsto momenti di comunicazione, sia orale sia scritta, mirati a sviluppare l'efficacia espressiva e l'uso appropriato della terminologia.

Un possibile ampliamento potrebbe includere attività specifiche dell'area linguistica applicate a contenuti matematici. Ad esempio, la creazione di cruciverba, testi narrativi o fumetti basati sui quadrilateri potrebbe rappresentare un'opportunità per rafforzare il legame tra matematica e italiano. Esistono numerose strategie didattiche che, enfatizzando l'interdisciplinarietà, permettono di rendere ancora più evidente e vissuto il rapporto tra le due discipline.

Il percorso didattico potrebbe proseguire oltre le undici unità proposte, approfondendo ulteriormente lo studio dei quadrilateri. In particolare, sarebbe utile introdurre concetti come le diagonali e le simmetrie, ampliando così la comprensione delle proprietà geometriche.

Una volta consolidata la classificazione tramite gli insiemi di Euler-Venn e compresa l'importanza di una definizione rigorosa, gli allievi potrebbero affrontare con maggiore facilità l'analisi delle relazioni tra ulteriori proprietà dei quadrilateri.

Un aspetto non esplorato in questo percorso didattico è il disegno dei quadrilateri, che, come sostengono Angulo Romero et al. (2024), rappresenta un elemento fondamentale per la costruzione di un apprendimento solido. È quindi importante in un futuro offrire agli alunni la possibilità di sperimentare diverse modalità di rappresentazione grafica, sia attraverso strumenti tradizionali come carta e matita, sia mediante strumenti digitali come, ad esempio, Zukei Puzzle o GeoGebra. Questo approccio favorisce lo sviluppo di un pensiero visuo-spaziale e rafforza il concetto figurale dei quadrilateri.

6 Conclusione

L'itinerario proposto vuole essere un esempio di approccio didattico interdisciplinare in cui risalta l'interconnessione tra geometria e linguaggio.

Il percorso ha stimolato una riflessione sull'uso del linguaggio e delle strategie comunicative nella costruzione dei concetti, ma ha anche confermato l'importanza di costruire i concetti geometrici in modo graduale ed esperienziale, favorendo così un apprendimento più efficace.

Uno degli aspetti più rilevanti emersi durante il percorso riguarda il ruolo del linguaggio nella comprensione concettuale. Le attività di descrizione e confronto tra pari hanno evidenziato come gli allievi tendano inizialmente a utilizzare un linguaggio quotidiano, caratterizzato da ridondanze o imprecisioni, per poi affinare progressivamente le loro espressioni grazie al supporto di discussioni guidate e giochi strutturati. Il lavoro sul linguaggio ha contribuito non solo a migliorare la capacità di espressione, ma anche a sviluppare una maggiore consapevolezza dell'importanza della comunicazione efficace nella matematica.

D'altra parte, il percorso ha anche messo in luce alcune criticità. Alcuni alunni hanno riscontrato difficoltà nel riconoscere proprietà specifiche dei quadrilateri in autonomia e senza alcun supporto,

soprattutto quando il riconoscimento richiedeva un ragionamento più astratto e deduttivo. Questo suggerisce la necessità di integrare ulteriori momenti di riflessione sulle relazioni tra i quadrilateri, magari attraverso altre attività di manipolazione concreta e l'impiego di strumenti digitali e non, come GeoGebra, geoplano ecc.

La prosecuzione di questo lavoro potrà consolidare ulteriormente le competenze acquisite e stimolare negli allievi un atteggiamento sempre più critico e consapevole nei confronti del sapere matematico.

Bibliografia

- Angulo Romero, A., Rengifo Silva, F. E., Santacruz Espinoza, A., Ttito Quispe, J., López Castillo, A. C., & Berrocal Huarcaya, F. D. (2024). *Hans Freudenthal: Perspectives in mathematics education and phenomenological analysis* (Second edition). Editorial Mar Caribe. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED661552.pdf>
- Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria*. Carocci.
- Batini, M., Cannizzaro, L., Cavallaro, B., De Santis, C., Lombardi, V., Menghini, M., & Percario, L. (2004). *Figure geometriche e definizioni. Un itinerario guidato per l'inizio della scuola secondaria*. Dipartimento di matematica, Università di Roma "La Sapienza".
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420–464). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2022). Il processo "Comunicare e argomentare" in matematica. *Progetto "Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare – 2022"*. Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI. <https://www.mateval.ch/wp-content/uploads/2022/08/Il-processo-Comunicare-e-argomentare-in-matematica-.pdf>
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Divisione della scuola, DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>
- Dodman, M. (2007). Competenze linguistico-comunicative nella costruzione del sapere matematico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Allievi, insegnanti, sapere: La sfida della didattica della matematica* (pp. 11–18). Pitagora Editrice.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22(3–4), 455–479. <https://doi.org/10.1080/02643290442000310>
- Mariotti, M. A. (1992). Immagini e concetti in geometria. The figural and the conceptual components of geometrical concepts. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 15(9), 863–885.

- Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni inevitabili e misconcezioni evitabili. *La matematica e la sua didattica*, 1, 57–71.
- Sbaragli, S. (2006). L'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali. In S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno* (pp. 257–260). Carocci Editore.
- Sbaragli, S. (2020). La complessità nel definire in matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica disciplina scientifica per una scuola efficace* (pp. 19–22). Pitagora Editrice.
- Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023a). I quadrilateri e le loro classificazioni. *MaMa: matematica per la scuola elementare – Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1231
- Sbaragli, S., Barbero, M., Crivelli, L., Di Domenico, A., Franchini, E., Magnone, S., Mina, C., Panero, M., & Poretti, C. (2023b). Definisci i quadrilateri. *MaMa: matematica per la scuola elementare – Geometria*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1232
- Sbaragli, S., & Canducci, M. (2023). L'importanza di un percorso esplicito dalla descrizione alla definizione in matematica. *Archimede*, 3, 137–142.
- Sbaragli, S., & Demartini, S. (Eds.) (2021). *Italmatica: Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica*. Edizioni Dedalo.
- Sbaragli, S., & Mammarella, I. C. (2011). Insegnare e apprendere la geometria. *Difficoltà in matematica*, 8, 65–82.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic press.