

Conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica: riflessioni sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità

Mathematics teacher's specialised knowledge:
reflections on the teaching and learning of proportionality

Daniele De Giorgi*, Francesca Martignone* e Cristina Sabena°

*Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica, Università del Piemonte Orientale – Italia

°Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino – Italia

✉ daniele.degorgi@uniupo.it, francesca.martignone@uniupo.it, cristina.sabena@unito.it

Sunto / Questo articolo presenta i primi risultati di una ricerca che ha coinvolto un gruppo di insegnanti in una comunità di indagine e riflessione sul tema del ragionamento proporzionale a partire dal contesto delle ombre del sole. Con l'obiettivo di capire come la condivisione di idee e pratiche didattiche possa aiutare a rendere visibili, a discutere e, in alcuni casi, a trasformare le conoscenze professionali degli insegnanti, si è coniugato il quadro della trasposizione meta-didattica con il modello del *mathematics teacher's specialised knowledge*. Attraverso l'analisi delle trascrizioni delle discussioni nella comunità di indagine sono stati identificati nei discorsi degli insegnanti diversi aspetti delle loro conoscenze specialistiche sulla proporzionalità diretta. Inoltre, è emerso come queste conoscenze siano strettamente intrecciate con le loro convinzioni sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità diretta.

Parole chiave: conoscenze specialistiche degli insegnanti; ragionamento proporzionale; praxeologie meta-didattiche; conoscenza pedagogica del contenuto; comunità di indagine.

Abstract / This paper presents the initial results of a research project involving a group of teachers in a community of inquiry and reflection on proportional reasoning, starting from the context of the sun shadows. With the aim of understanding how the sharing of ideas and teaching practices can help to make teachers' professional knowledge visible, open to discussion and, possibly, subject to transformation, the framework of meta-didactical transposition was combined with the model of mathematics teacher's specialised knowledge. Through the analysis of transcripts of discussions in the community of inquiry, different aspects of teachers' specialised knowledge on direct proportionality were identified in their discourse. Moreover, the findings show how this knowledge is closely intertwined with their beliefs about the teaching and learning of direct proportionality.

Keywords: teachers' specialised knowledge; proportional reasoning; meta-didactical praxeologies; pedagogical content knowledge; community of inquiry.

1 Introduzione

Per cogliere le sfide poste dall'insegnamento e per affrontare contesti sempre diversi, gli insegnanti¹ devono conoscere non solo i contenuti della materia che insegnano, ma padroneggiare conoscenze specialistiche anche in altri ambiti, tra cui le metodologie didattiche, le tecnologie per una didattica innovativa, le possibili difficoltà degli studenti, i documenti istituzionali ecc. Questa complessità ha portato l'attenzione dei ricercatori in didattica della matematica ad approfondire il tema della conoscenza necessaria per e nell'insegnamento della matematica, in particolare negli ultimi due decenni (Rowland, 2020; Rowland & Ruthven, 2011; Sullivan & Wood, 2008). Ancora prima, già gli studi fondanti di Shulman (1986) hanno portato in evidenza l'importanza che gli insegnanti possiedano una profonda comprensione del contenuto matematico *amalgamata* con le conoscenze relative ai processi di insegnamento-apprendimento dei concetti matematici. Questa conoscenza è stata denominata *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e definita come segue:

«[...] la conoscenza pedagogica, che va oltre la conoscenza della disciplina in sé e include la dimensione della conoscenza disciplinare per l'insegnamento. Parlo ancora di conoscenza dei contenuti, ma di una forma particolare di conoscenza che racchiude quegli aspetti del contenuto più rilevanti per la sua insegnabilità».

(Shulman, 1986, p. 9, traduzione degli autori)

A partire dagli studi di Shulman, sono stati sviluppati diversi modelli per descrivere le *conoscenze degli insegnanti di matematica*: tra questi, hanno avuto molto successo a livello internazionale il modello *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball et al., 2008), il *Knowledge Quartet* (Rowland, 2013) e, più recentemente, il modello *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018). In quest'ultimo modello sono considerate specialistiche degli insegnanti sia la conoscenza dei contenuti matematici, sia la conoscenza pedagogica dei contenuti, e si sottolinea anche che la conoscenza degli insegnanti è permeata dalle loro convinzioni (sulla matematica e sul suo insegnamento e apprendimento). La pratica in classe dell'insegnante è infatti profondamente influenzata dalle convinzioni (Thompson, 1992) sulla matematica, su come si impara e come dovrebbe essere insegnata. Le conoscenze e le convinzioni degli insegnanti di matematica sono oggetto di discussione in molti convegni internazionali (ad esempio nei gruppi di lavoro del *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* – CERME, Martignone et al., 2025), in particolare sta crescendo l'interesse sulla relazione tra convinzioni e conoscenze matematiche (Martignone et al., 2023).

Nella ricerca qui presentata si fa riferimento al modello MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) per descrivere alcuni aspetti delle convinzioni e delle conoscenze specialistiche degli insegnanti sull'insegnamento-apprendimento del concetto di proporzionalità diretta che emergono durante discussioni collettive all'interno di comunità di indagine (Jaworski, 2006) formate da docenti del primo ciclo di istruzione² e ricercatori in didattica della matematica che lavorano insieme e condividono teorie e pratiche.

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

2. Il primo ciclo d'istruzione in Italia dura otto anni e corrisponde ai cinque anni di scuola elementare e ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

2 Quadro di riferimento

2.1 Le conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica

Il modello *mathematics teacher's specialised knowledge* è stato introdotto da Carrillo-Yañez e colleghi (2018) al fine di offrire una lente completa per individuare e descrivere le conoscenze specialistiche che gli insegnanti di matematica utilizzano e sviluppano nella loro pratica professionale. Una premessa iniziale del modello MTSK è l'estensione dell'idea di specializzazione della conoscenza, sia al dominio della conoscenza matematica, sia a quello della conoscenza pedagogica dei contenuti. Ciò che rende specializzata la conoscenza matematica degli insegnanti non è tanto ciò che sanno sulla matematica di diverso rispetto ad altri professionisti, ma il fatto che tale conoscenza sia legata all'insegnamento:

«Il nostro punto di partenza è l'assunzione che, per poter svolgere il proprio ruolo professionale – che comprende la progettazione delle lezioni, la collaborazione con i colleghi, l'attività didattica in classe e la riflessione successiva – l'insegnante necessita di conoscenze specifiche. Colleghiamo tale specificità all'insegnamento della matematica».

(Carrillo-Yañez et al., 2018, p. 239, traduzione degli autori)

Un aspetto fondamentale del modello MTSK è che si sottolinea che le azioni professionali di un insegnante non sono solo una funzione della sua conoscenza matematica o della sua conoscenza pedagogica, ma sono anche fortemente influenzate dalle convinzioni sulla natura della matematica, su come essa venga appresa e su come debba essere insegnata – in altri termini questioni di natura precipuamente didattica.

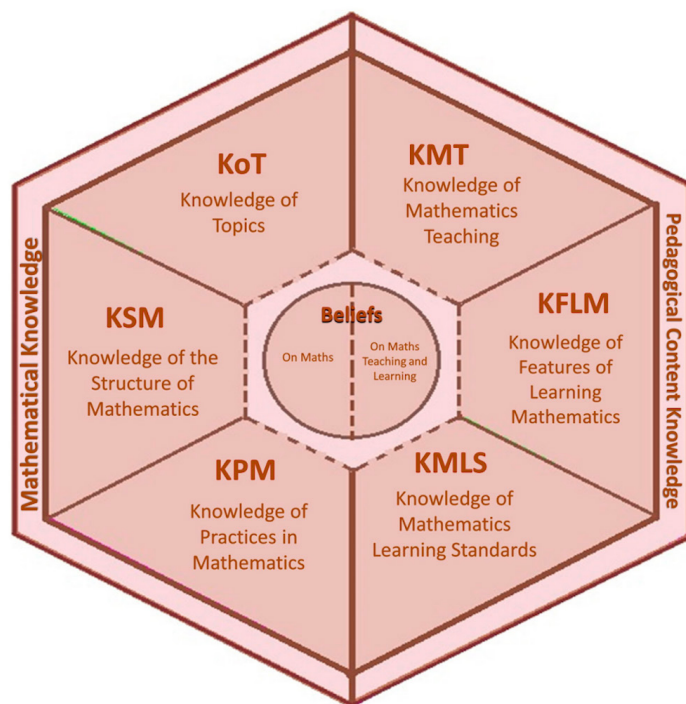


Figura 1. Il modello MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018, p. 241).

Il modello MTSK (Figura 1) si articola in due domini principali: la conoscenza matematica (*Mathematical Knowledge* – MK) e la conoscenza pedagogica del contenuto (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK). Il dominio MK è suddiviso in: conoscenza degli argomenti (*Knowledge of Topics* – KoT), ossia la conoscenza specifica dei concetti matematici, incluse definizioni, proprietà, procedure, rappresentazioni e applicazioni; conoscenza della struttura della matematica (*Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM), ossia la capacità di collegare argomenti matematici tra diversi domini e di comprendere la coerenza sottostante alla disciplina; conoscenza delle pratiche matematiche (*Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM), ossia la conoscenza dei processi matematici fondamentali, come dimostrare, giustificare, definire, fare inferenze e fornire esempi e controesempi.

Il dominio PCK è suddiviso in: conoscenza dell'insegnamento della matematica (*Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT), ossia la conoscenza delle teorie dell'insegnamento, delle strategie didattiche e dell'uso efficace di risorse, materiali e tecnologie per insegnare i concetti matematici; conoscenza delle caratteristiche dell'apprendimento della matematica (*Knowledge of the Features of Learning Mathematics* – KFLM), ossia la conoscenza delle teorie dell'apprendimento e dei modi in cui gli studenti interagiscono con i contenuti matematici, comprese le loro difficoltà e i loro errori comuni; conoscenza degli standard di apprendimento della matematica (*Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS), ossia la conoscenza dei programmi curriculari, degli obiettivi di apprendimento e dei risultati attesi nei diversi segmenti scolastici. Questo modello fornisce pertanto un quadro articolato per analizzare la conoscenza complessa e multifaccettata che supporta lo sviluppo dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica.

2.2 La trasposizione meta-didattica

Una comprensione più profonda di come la conoscenza specializzata degli insegnanti e le loro credenze sottostanti emergano e possano modificarsi in contesti collaborativi è cruciale per la progettazione di programmi di sviluppo professionale. È importante che gli insegnanti partecipino a processi riflessivi che facciano emergere e trasformino le loro conoscenze specialistiche, nell'interazione con altri colleghi e con ricercatori esperti in educazione matematica. I processi di collaborazione in cui sia gli insegnanti sia i ricercatori apprendono dalla propria pratica e dalle riflessioni condivise costituiscono un aspetto fondamentale di quelle che Jaworski ha definito "comunità di indagine" (Jaworski, 2006). Mettendosi in discussione e condividendo nuovi punti di vista, i partecipanti a tali comunità hanno l'opportunità di acquisire nuove conoscenze e discutere con gli altri partecipanti (insegnanti o ricercatori) sia in relazione a questioni teoriche provenienti dalla ricerca scientifica, sia a partire da pratiche didattiche e di sviluppare in tal modo un pensiero critico sulla propria opera professionale. Per analizzare i processi che si possono attivare in queste comunità di indagine che condividono teorie e pratiche, il riferimento è al modello della trasposizione meta-didattica (Aldon et al., 2013; Arzarello et al., 2014). Il modello è radicato principalmente nella teoria antropologica della didattica (*Anthropological Theory of the Didactic* – ATD) che concettualizza la conoscenza e la pratica attraverso la nozione di praxeologia (Chevallard, 1999; Chevallard & Bosch, 2020). Una praxeologia si sviluppa all'interno di contesti istituzionali ed è strutturata su due livelli principali (García et al., 2006): il livello della *prassi* o del "saper fare", che include il compito (*tâche* in francese, *task* in inglese), o una famiglia di compiti, e le tecniche utilizzate per affrontarlo; e il livello del *logos* o della conoscenza, che include i discorsi sviluppati per giustificare le tecniche e le teorie che li sostengono.

Nei processi di sviluppo professionale degli insegnanti, oltre alle praxeologie matematiche e a quelle didattiche messe a fuoco dall'ATD, si trovano le praxeologie meta-didattiche, ossia compiti, tecniche e discorsi giustificativi che emergono e si evolvono come riflessione sulle attività didattiche. Questo tipo di praxeologie condivise durante le attività di collaborazione tra insegnanti e ricercatori rappresentano una sintesi di componenti provenienti sia dalle praxeologie dei ricercatori, sia da quelle degli insegnanti, innescando un processo dinamico di trasformazione della conoscenza. Il modello della trasposizione meta-didattica mira a cogliere la complessità di queste dinamiche e individuare le

componenti che le innescano (o le inibiscono). La ricerca qui presentata si concentra sulla parte del logos di tali praxeologie meta-didattiche utilizzando il modello MTSK sopra presentato per analizzare le conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica sviluppate in comunità di indagine così concepite. Prima di entrare nel dettaglio dello studio specifico presentato in questo contributo, il prossimo paragrafo ha lo scopo di approfondire brevemente il contenuto matematico attorno cui sono state centrate le attività didattiche discusse con gli insegnanti.

2.3 Il ragionamento proporzionale

Il ragionamento proporzionale è considerato un concetto chiave nell'insegnamento-apprendimento della matematica elementare e fondamento per gli studi di matematica nella scuola secondaria (Lesh et al., 1988). Il ragionamento proporzionale si basa sulla comprensione di come delle quantità variano insieme (covariazione) e sullo stabilire confronti multipli tra diverse quantità. Nel caso della proporzionalità diretta tra coppie di variabili, queste co-variano in modo tale che il loro rapporto rimanga costante.

«Il ragionamento proporzionale – termine che indica il ragionamento in un sistema di due variabili tra le quali esiste una relazione funzionale lineare – porta a conclusioni su una situazione o un fenomeno che possono essere caratterizzati da un rapporto costante».

(Karplus et al., 1983, p. 219, traduzione degli autori)

Il confronto tra le quantità può avvenire utilizzando rapporti e operazioni di moltiplicazione e divisione, ma come sottolineano Proulx et al. (2024) il ragionamento proporzionale non si può ridurre al calcolo proporzionale.

«Al di là dei numeri e dei calcoli, il ragionamento proporzionale può essere concettualizzato in termini di relazioni tra rapporti (quantificati o meno), una compatibilità che può essere mantenuta, imposta e ripetuta, rendendo possibile confrontare, adattare, preservare, trasformare tali rapporti, e così via. Tutto questo va ben oltre l'aritmetizzazione di queste relazioni attraverso procedure o operazioni. In altre parole, oltre al calcolo c'è il ragionamento».

(Proulx et al., 2024, p. 6, traduzione degli autori)

Il ragionamento proporzionale non si può quindi ridurre a una serie di procedure quantitative. Freudenthal (1983) inoltre osserva che gli studenti riconoscono intuitivamente la proporzionalità anche senza numeri, come quando giudicano un'immagine riprodotta inadeguata perché le proporzioni tra le sue parti non sono corrette. Oltre il dominio strettamente quantitativo, il concetto di proporzionalità viene colto spesso in termini qualitativi di armonia ed equilibrio (si pensi per esempio alle prime attività alla scuola dell'infanzia in cui si analizzano immagini dove si mantengono le proporzioni di tutte o solo parte delle componenti di una figura). Questa visione qualitativa è supportata dall'idea di covariazione, in cui "tutto varia insieme". Una perdita di coerenza nelle relazioni tra le parti di un oggetto, come in un disegno non proporzionato, porta a una disarmonia. In questo senso, il ragionamento proporzionale va oltre il puro calcolo e si concentra sulle relazioni tra le quantità e la loro variazione reciproca.

Nelle discussioni sviluppatesi durante gli incontri della comunità di indagine oggetto di analisi in questo studio, l'insegnamento-apprendimento delle relazioni di proporzionalità è stato trattato e analizzato a fondo. Come sottolineato dalla letteratura (Lesh et al., 1988; Proulx et al., 2024; Tournaire & Pulos, 1985) e come emerso dalle riflessioni degli insegnanti, il concetto di proporzionalità e il suo insegnamento sono complessi. Ci possono essere diversi approcci e tipologie di problemi sulla

proporzionalità (de la Torre et al., 2015). Il ragionamento proporzionale va oltre la semplice risoluzione di problemi "a valore mancante", tradizionalmente affrontati attraverso procedure mnemoniche, per abbracciare un processo di pensiero più ampio e complesso. Questo tipo di ragionamento si estende a concetti matematici cruciali come equivalenza, variabili e trasformazioni, evidenziando l'importanza di superare un approccio procedurale a favore di una comprensione concettuale che riconosca l'invarianza come elemento chiave (Sowder et al., 1998). La preparazione e lo sviluppo professionale degli insegnanti sul concetto di proporzionalità sono per questo cruciali. È fondamentale che gli insegnanti riflettano sulla profondità, ampiezza e durata del processo di acquisizione del ragionamento proporzionale da parte degli studenti. Questo include il riconoscimento che tale ragionamento si collega con molti aspetti della matematica legati alle funzioni, alla misurazione e ai rapporti.

Nonostante una tale importanza, la ricerca sull'effettivo ragionamento proporzionale degli insegnanti in servizio ha ricevuto relativamente poca attenzione, anche se ci sono studi recenti che se ne stanno occupando (ad esempio, Copur-Gencturk & Ezaki, 2025). Lo studio presentato in questo articolo si inserisce in questa prospettiva. Dall'analisi di discussioni in una comunità di indagine formata da insegnanti in servizio e da ricercatori in didattica della matematica si possono identificare diversi aspetti delle conoscenze specialistiche dei contenuti. Tali discussioni abbracciano sia il piano matematico (argomenti, connessioni, definizioni, procedure, schemi ecc.), sia quello didattico (obiettivi di apprendimento, metodologie, curriculum ecc.), mostrando la forte interconnessione tra le conoscenze matematiche e le conoscenze pedagogiche relative all'insegnamento-apprendimento della proporzionalità (De Giorgi et al., 2025).

3 Lo studio

Il presente studio si propone di mostrare alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica sui processi di insegnamento-apprendimento riguardanti la proporzionalità diretta che emergono quando si condividono tra insegnanti e ricercatori praxeologie meta-didattiche durante le discussioni in una comunità di indagine.

I dati e materiali analizzati sono stati prodotti all'interno di una comunità di indagine formata da 16 docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado³ della regione Piemonte e due ricercatori in didattica della matematica dell'Università del Piemonte Orientale (i primi due autori di questo articolo).⁴ Questa comunità di indagine si incontra circa una volta al mese (in presenza o a distanza secondo le esigenze), ma, quando è stato necessario un confronto durante le sperimentazioni, gli incontri sono stati svolti anche con intervalli più brevi. In linea con il modello della trasposizione meta-didattica, insegnanti e ricercatori collaborano e condividono riflessioni sui contenuti da insegnare e sulle relative attività didattiche. Il progetto da cui sono stati ricavati i dati analizzati in questo contributo è iniziato nel settembre 2024 con lo studio e progettazione di attività didattiche ed è durato tutto l'anno scolastico con sperimentazioni nelle classi e analisi dei risultati. Le attività sono state progettate in verticale e concordate tra tutti gli insegnanti in modo da svolgere le stesse attività nelle diverse classi coinvolte. In questo articolo si mostrano alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica che sono emerse durante l'incontro di fine anno scolastico (giugno 2025) della comunità di indagine nel quale sono stati analizzati alcuni dei protocolli raccolti nelle sperimentazioni svolte durante l'anno scolastico appena terminato. Nell'incontro, la discussione ha preso avvio dall'esigenza di alcuni

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

4. In questo articolo si riporteranno solo le discussioni che hanno coinvolto gli insegnanti della scuola secondaria di primo grado sul tema della proporzionalità diretta.

insegnanti di riflettere su aspetti emersi dal confronto tra le analisi a priori delle attività progettate e la loro effettiva realizzazione in aula. Durante l'incontro il gruppo ha analizzato questi materiali condividendo interpretazioni e riflessioni didattiche sui processi di insegnamento-apprendimento della matematica, in particolare della proporzionalità diretta. Tale analisi a posteriori dà avvio a una praxeologia meta-didattica perché consiste in un compito di riflessione su pratiche didattiche. MK e PCK degli insegnanti fanno parte del logos su cui basano i loro discorsi sulle analisi a posteriori dei materiali. Verranno mostrati i primi risultati di uno studio qualitativo che ha lo scopo di rispondere alla seguente domanda di ricerca: quali aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti di matematica della scuola secondaria di primo grado relative al concetto di proporzionalità diretta possono emergere grazie alla condivisione di praxeologie meta-didattiche?

Le discussioni che si sono svolte all'interno della comunità di indagine sono state videoregistrate e i dialoghi sono stati trascritti. Per l'analisi dei dati è stata utilizzata l'analisi qualitativa del contenuto (Mayring, 2015), applicando un approccio di codifica deduttiva. Questo metodo ha permesso di assegnare sistematicamente categorie predefinite provenienti dal modello MTSK (Figura 1) a specifici passaggi delle trascrizioni delle discussioni, consentendo un'analisi mirata del materiale raccolto. L'analisi del contenuto è stata inizialmente condotta dagli autori in modo indipendente, seguita da una discussione di gruppo fino al raggiungimento di un consenso finale.

Dato che lo studio si basa sull'analisi di discussioni in una specifica comunità di indagine (un campione di convenienza), i risultati ottenuti non sono generalizzabili a una popolazione più ampia. I partecipanti rappresentano un gruppo con caratteristiche peculiari in parte descritte precedentemente, non rappresentative di contesti diversi. Questa limitazione però non compromette l'obiettivo dello studio che è mostrare, attraverso un'analisi qualitativa di estratti di discussioni, come alcuni aspetti della conoscenza specialistica degli insegnanti legati ai processi di insegnamento-apprendimento della proporzionalità diretta nella scuola secondaria di primo grado possono emergere durante la condivisione di praxeologie meta-didattiche. Nei paragrafi successivi saranno mostrati alcuni estratti di discussioni svolte all'interno della comunità in cui si sono analizzati materiali provenienti dalla scuola secondaria di primo grado.

4 Analisi degli estratti dalle discussioni

In questo paragrafo si riportano alcuni estratti di discorsi sviluppati durante l'analisi a posteriori dei protocolli raccolti dagli insegnanti nelle loro classi al termine delle sperimentazioni svolte durante l'anno scolastico 2024/2025 sul fenomeno delle ombre del sole. Gli studenti hanno raccolto dati sulla lunghezza delle ombre di gnomoni diversi alla stessa ora e in orari diversi. Si è poi chiesto agli studenti di analizzare i dati raccolti nelle attività didattiche in tabelle cartacee o in fogli di calcolo.

La discussione del gruppo di insegnanti e ricercatori nell'analizzare alcuni protocolli degli studenti si è focalizzata inizialmente sugli errori di misura e sulle difficoltà degli studenti nell'identificare il rapporto costante tra lunghezza degli gnomoni e delle loro ombre nello stesso momento e nello stesso luogo. Nella discussione collettiva i diversi interventi degli insegnanti vanno a costituire un unico flusso che si sviluppa dalle dinamiche collaborative della comunità di indagine sinergicamente impegnata nell'analisi delle pratiche didattiche condivise. L'insegnante B. ad esempio innesca un flusso di discussione condividendo la sua scelta di impostare lei stessa l'operazione di rapporto sul foglio Excel dove gli studenti hanno riportato le misure di gnomoni e ombre (Figure 2a e 2b).

a	Lunghezza gnomone (cm)		
	11	12,5	15
Ora	Lunghezza ombra (cm)		
10:10	19,5	20,5	24
11:10	13,7	14,5	19
12:10	10,6	12,5	14,5
13:10	9	10,5	14
14:10	8,7	10,5	14
15:10	9,8	12,5	15,8

Figura 2a. Tabella con le misure delle lunghezze degli gnomoni e delle loro ombre.

b	Lunghezza gnomone (cm)		
	11	12,5	15
Ora	Rapporto ombra : gnomone		
10:10	1,77	1,64	1,6
11:10	1,25	1,16	1,27
12:10	0,96	1	0,97
13:10	0,82	0,84	0,93
14:10	0,79	0,84	0,93
15:10	0,89	1	1,05

Figura 2b. Tabella con i rapporti tra ombra e gnomone proposta da B.

B.: «Perché nel vedere questi dati i ragazzi... non sono dati intuitivi per loro, ed era stato già sollevato all'inizio questo problema della lunghezza dello gnomone, perché se fossero stati il doppio o il triplo... i dati probabilmente venivano fuori più semplici. Quindi trovandosi davanti a questa tabella si sono un po' persi, quindi io ho dovuto guidarli molto. Quindi cosa ho fatto? Ho fatto il rapporto tra ombra e gnomone per il corto, per il medio e per il lungo [...]. Allora, noi abbiamo fatto le proporzioni. L'abbiamo fatto su questo foglio di Excel, quindi ovviamente guidati, però insomma le proporzioni le hanno capite, e facendo il rapporto, forse qui non si può dire però ai decimi, il rapporto tra ombra e gnomone è abbastanza costante».

L'intervento di B. descrive le praxeologie didattiche che ha adottato in classe per far capire che il rapporto rimane circa costante. Partendo da questo intervento il gruppo ha dunque discusso su come si era affrontata nelle classi l'individuazione della relazione di proporzionalità tra le lunghezze degli gnomoni e delle loro ombre. La praxeologia meta-didattica condivisa è generata dal compito di analisi di protocolli di studenti che hanno affrontato problemi di proporzionalità diretta legati alle ombre del sole. Sono state analizzate strategie additive e moltiplicative, si è riflettuto sui diversi possibili approcci, su errori e difficoltà. Durante queste riflessioni, alcuni degli insegnanti di scuola secondaria di

primo grado hanno dichiarato che nelle loro classi hanno trattato il concetto di proporzionalità diretta principalmente attraverso l'impostazione e il calcolo di proporzioni tra lunghezze delle ombre e degli gnomoni, presentate come uguaglianze del tipo $a : b = c : d$.

L'analisi dei materiali provenienti dalle classi conferma questa tendenza: in numerosi protocolli gli studenti hanno impostato proporzioni nella forma classica $a : b = c : d$, applicando procedure apprese per la loro risoluzione (ad esempio l'uguaglianza tra il prodotto dei medi e quello degli estremi).

Queste evidenze, insieme agli interventi delle insegnanti, suggeriscono l'esistenza di una pratica didattica ricorrente e condivisa all'interno del gruppo, fondata sull'impostazione della proporzione e sullo sviluppo di procedure operative come via privilegiata per affrontare il ragionamento proporzionale. A titolo esemplificativo, si riporta un protocollo (Figura 3), incluso tra i materiali ritenuti significativi e meritevoli di discussione da un'altra insegnante di secondaria di primo grado del gruppo (S.), che mostra come gli studenti hanno impostato diverse proporzioni per rispondere ai quesiti proposti.

Nella nostra attività abbiamo analizzato la seguente tabella.

Lunghezza gnomone	11 cm	12,5 cm	15 cm
ORA	LUNGHEZZA OMBRA (cm)	LUNGHEZZA OMBRA (cm)	LUNGHEZZA OMBRA (cm)
10:10	19,5	20,5	24
11:10	13,7	14,5	19
12:10	10,6	12,5	14,5
13:10	9	10,5	14
14:10	8,7	10,5	14
15:10	9,8	12,5	15,8

a. Da ciò che abbiamo imparato sul sole e sulle ombre, potremmo sapere quanto è lunga l'ombra che avrebbe fatto uno gnomone, più lungo di quelli che abbiamo usato noi, alla stessa ora, nello stesso posto e lo stesso giorno?

b. Quanto misura l'ombra di uno gnomone lungo il doppio di quello più corto, alle 13:10, nello stesso posto e lo stesso giorno?

c. Quanto sarà lunga l'ombra di uno gnomone lungo 27,5 cm rilevata alle 13:10, nello stesso posto e lo stesso giorno?

Motiva le tue risposte.

a. Si, si potrebbe sapere la lunghezza dell'ombra usando una proporzione.

b. $11:9 = 22:x$ $x = \frac{9 \times 22}{11} = 18$

c. $11:9 = 27,5:x$ $x = \frac{9 \times 27,5}{11} = 22,5$

c. $12,5:10,5 = 27,5:x$ $x = \frac{10,5 \times 27,5}{12,5} = 23,1$

c. $15:14 = 27,5:x$ $x = \frac{14 \times 27,5}{15} = 25,7$

Si può sapere perché se si posiziona uno gnomone più lungo nello stesso punto si ha un punto di riferimento uguale.

Figura 3. Protocollo di un gruppo di studenti di una classe di scuola secondaria di primo grado, discusso durante l'incontro di fine anno della comunità di indagine.

Nella Figura 3 si nota come per svolgere i calcoli gli studenti abbiano applicato procedure standard di uguaglianza tra prodotti di specifici termini della proporzione secondo la loro posizione (si vedano gli archetti sotto i numeri). Si può notare inoltre che per rispondere al quesito c) gli studenti hanno impostato e risolto tre proporzioni che, a causa degli errori di misura nei dati raccolti, hanno restituito

valori diversi relativi alla possibile lunghezza dell'ombra dello gnomone da 27,5 cm; questo aspetto, tuttavia, non è stato discusso o argomentato dagli studenti, i quali hanno reputato di aver assolto il loro compito trovando dei valori tramite un calcolo corretto delle proporzioni.

Dall'analisi dei materiali condivisi sono quindi emersi in modo preponderante gli aspetti procedurali. Tra le diverse osservazioni condivise durante l'incontro, è stato evidenziato però come spesso gli studenti abbiano applicato, senza un controllo semantico delle procedure, le proporzioni tra lunghezze di ombre e gnomoni impostate con tale scrittura simbolica. In alcuni casi, infatti, gli studenti sembrano non aver colto il significato delle rappresentazioni e delle procedure che stavano svolgendo. Si mostra a titolo di esempio uno dei protocolli discussi (Figura 4). L'insegnante (T.) nella condivisione dei materiali lo ha proposto per l'analisi alla comunità in quanto l'errore rilevato era stato inatteso.

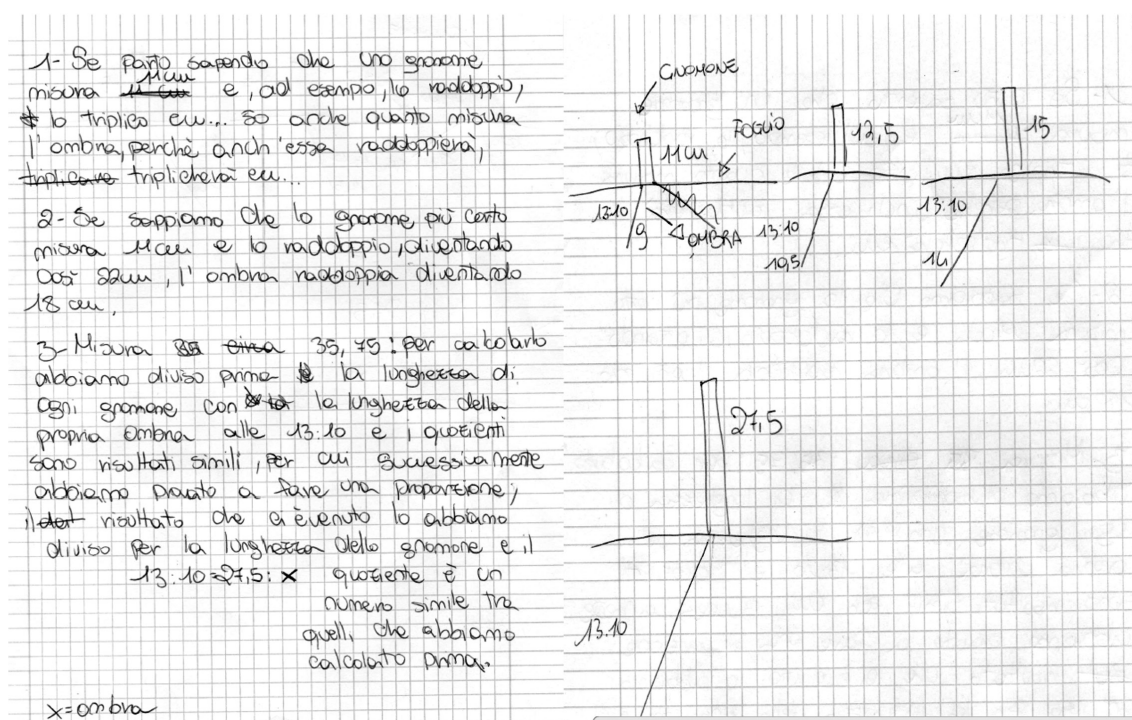


Figura 4. Protocollo di uno studente di scuola secondaria di primo grado, discusso durante l'incontro di fine anno della comunità di indagine.

Nell'impostare la proporzione tra la lunghezza di uno gnomone e quella della sua ombra, lo studente autore del protocollo in Figura 4 ha usato l'orario in cui sono state rilevate le ombre considerando la scrittura dell'orario 13:10 come un elemento della proporzione. Discutendo all'interno della comunità di indagine gli insegnanti notano però che lo studente, dalla sua descrizione del fenomeno delle ombre del sole, sembra che abbia colto che vi è una regolarità/proporzione tra le lunghezze degli gnomoni e quelle delle ombre misurate nello stesso posto nello stesso istante («Se parto sapendo che uno gnomone misura 11 cm e, ad esempio, lo raddoppio, lo triplico ecc... So anche quanto misura l'ombra, perché anch'essa raddoppierà, triplicherà ecc...»). Tuttavia, quando deve quantificare la relazione nel caso richiesto dalla consegna (lunghezza dell'ombra dello gnomone di 27,5 cm alle 13:10) prende i numeri che probabilmente identifica in una scrittura simile a quella delle proporzioni che è solito manipolare. Partendo dall'analisi di questo caso, gli insegnanti e i ricercatori hanno cominciato a discutere sull'importanza di dare significato alle procedure e soprattutto all'interpretazione di quelle scritture in cui vengono proposte le proporzioni come $a : b = c : d$ e alla perdita di significato delle operazioni svolte se si applicano procedure mnemoniche.

All'interno di questo flusso di discussione sviluppato all'interno della comunità di indagine si riporta il seguente intervento di una insegnante (P.) della scuola secondaria di primo grado che ha voluto condividere il suo punto di vista non concorde con quello proposto dai ricercatori, i quali avevano sottolineato il fatto che l'insegnamento della proporzionalità non deve ridursi a problemi "a valore mancante" e a procedure mnemoniche, ma il focus deve essere sulle relazioni. Questo è un esempio in cui si mostra come l'essere parte della comunità di indagine può portare gli insegnanti a condividere riflessioni sulle pratiche didattiche e a esplicitare la parte logos delle praxeologie meta-didattiche in gioco, attivate dal compito di analisi di materiali condivisi. Anche se l'insegnante ha condiviso delle praxeologie didattiche all'interno della comunità svolgendo nelle sue classi le stesse attività dei colleghi, nella discussione finale, durante lo sviluppo delle praxeologie meta-didattiche, mostra che a livello di logos le sue conoscenze specialistiche dei contenuti non sono allineate con quelle che si stavano condividendo all'interno della comunità (ossia che il ragionamento proporzionale non è solo una procedura o il calcolo di una proporzione attraverso moltiplicazioni e divisioni, ma è la capacità di comprendere come diverse quantità variano insieme e di riconoscere che il loro rapporto rimane costante).

P.: «Almeno per quanto mi riguarda, ma per tutti, la definizione di proporzione è l'uguaglianza di due rapporti. Quindi noi la diamo così, la spieghiamo così e iniziamo a fare tutto così. Poi, quando su una classe di 22, con questo concetto la capiscono in 3, allora inizio a dire ok, però meccanicamente quello sta a quello come quello sta a quell'altro. È proprio complesso ed è incredibile, perché secondo me le proporzioni per me sono delle cose che ... tanto che mi è rimasta fin dalle medie per tutta la vita... sono assolutamente intuitive. Non è però assolutamente intuitivo e tantissimi anche bravi comunque hanno avuto grandissime difficoltà anche quando le dai meccanicamente, cioè tu prendi le cose che sono tra loro simili, perché comunque il parallelo in geometria si fa quello, e le metti appunto... le cose corrispondenti le devi mettere in proporzione e loro questo più o meno lo riescono a capire, ma se glielo spieghi semplicemente come rapporto tra numeri che rimane costante nella mia esperienza, che per carità non è di milioni di anni, ma di un po' di anni è che la capiscono davvero tre o quattro persone. Quindi, se lo scopo è fargli capire veramente cosa è la proporzione capisco di sforzarmi su quello. Se lo scopo è far applicare le proporzioni ai lati pratici anche per chi magari non è particolarmente portato secondo me a livello didattico si dice quello sta a quello come quello sta a quell'altro».

In questo estratto P. condivide delle riflessioni sulle pratiche didattiche che emergono grazie alle attività di analisi e collaborazione sviluppate all'interno della comunità di indagine. Usando il modello MTSK si possono individuare diversi aspetti delle conoscenze specialistiche che P. espone nella sua analisi delle pratiche. Nello specifico P. mostra una conoscenza degli argomenti (KoT) relativa al concetto di proporzionalità quando afferma che: «la definizione di proporzione è l'uguaglianza di due rapporti» e quando parla di «rapporto tra numeri che rimane costante». Poi citando l'ambito geometrico («il parallelo in geometria»), P. mostra anche una conoscenza della struttura della matematica (KSM), ovvero la capacità di collegare concetti tra diverse aree della matematica. Per P. le proporzioni sono un argomento che sente di conoscere e padroneggiare: «le proporzioni per me sono delle cose che... tanto che mi è rimasta fin dalle medie per tutta la vita... sono assolutamente intuitive». P. ribadisce questo concetto in un altro momento della discussione: «il fatto è che nella mia vita pratica, quando faccio le ricette, anche io faccio la proporzione, faccio il rapporto uova-farina e vedo se rimane uguale». La sua conoscenza degli argomenti (KoT) e le prassi matematiche appaiono fortemente radicate nella quotidianità, confermando come le conoscenze specialistiche siano intrise di credenze sulla matematica come sottolinea il quadro MTSK. Ciò che risulta particolarmente interessante è osservare come tali conoscenze interagiscano con la sua PCK, orientando la definizione di strategie didattiche coerenti con il suo modo di

concepire e affrontare il pensiero proporzionale. La PCK risulta essere la componente più evidente che emerge dal suo discorso: in particolare si tratta della conoscenza dell'insegnamento della matematica (KMT) che si manifesta quando l'insegnante riflette su diverse strategie didattiche e sulla loro efficacia rispetto agli obiettivi didattici, ossia quando afferma che si inizia con la definizione di proporzione come uguaglianza di rapporti per poi passare al metodo meccanico del «quello sta a quello come quello sta a quell'altro». P. ha chiari i suoi obiettivi didattici, che dipendono dalla sua conoscenza delle caratteristiche dell'apprendimento della matematica (KFLM), in quanto sostiene che gli studenti hanno difficoltà con le proporzioni definite come uguaglianza di rapporti («su una classe di 22, con questo concetto la capiscono in 3»). P. percepisce la differenza tra la sua comprensione del concetto («sono assolutamente intuitive») e quella degli studenti («tantissimi anche bravi comunque hanno avuto grandissime difficoltà») e sottolinea che anche un approccio meccanico, sebbene più accessibile, non è privo di difficoltà per molti di loro. Si osserva che l'insegnante non mette in dubbio la necessità di affrontare l'argomento, pur riconoscendone la difficoltà per gli studenti, poiché è consapevole che esso rientra tra gli obiettivi di apprendimento e i risultati attesi nel grado scolastico in cui insegna (KMLS). Tuttavia, dalla sua esperienza non sembra emergere come obiettivo didattico fondamentale l'individuazione della relazione invariante; al contrario, appare privilegiata l'acquisizione delle procedure pratiche da parte del maggior numero possibile di studenti. Nelle parole di P. si nota quindi che emergono diversi aspetti delle conoscenze dei contenuti che, come il modello MTSK permette di individuare, sono permeate dalle sue convinzioni sulla matematica e sul suo insegnamento, e di conseguenza influenzano le sue convinzioni sul modo più efficace di affrontare il ragionamento proporzionale («Se lo scopo è far applicare le proporzioni ai lati pratici anche per chi magari non è particolarmente portato secondo me a livello didattico si dice quello sta a quello come quello sta a quell'altro»). P. alla fine aggiunge tuttavia anche che «se lo scopo è fargli capire veramente cosa è la proporzione capisco di sforzarmi su quello». Con questa frase si può notare una possibile apertura al cambiamento delle prassi didattiche influenzata dal condividere riflessioni meta-didattiche all'interno della comunità che continuerà a sviluppare percorsi didattici anche negli anni successivi focalizzando le attività sugli aspetti relazionali legati al concetto di proporzionalità.

5 Discussione

L'analisi dei discorsi sviluppati nella comunità di indagine mostra che la condivisione di praxeologie meta-didattiche ha fatto emergere alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti. Nello specifico, l'analisi di un protocollo selezionato da una insegnante per la discussione collettiva ha agito da catalizzatore, spostando il focus della discussione dalla descrizione di praxeologie didattiche condivisa da un'insegnante, all'analisi di difficoltà degli studenti in singole consegne e di possibili strategie di risoluzione di problemi e a una più generale riflessione sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità. Durante le discussioni è infatti emerso come alcuni degli insegnanti di scuola secondaria di primo grado fossero fortemente ancorati all'idea di insegnare la proporzionalità diretta principalmente attraverso il calcolo delle proporzioni con la scrittura classica $a : b = c : d$.

I ricercatori, in linea con quanto studiato in letteratura (Lesh et al., 1988; Proulx et al., 2024; Tourniaire & Pulos, 1985), hanno condiviso riflessioni didattiche su possibili approcci che vanno oltre il mero calcolo per privilegiare gli aspetti relazionali del concetto di proporzionalità diretta (ossia quegli aspetti che mettono in luce le relazioni matematiche caratterizzanti il concetto, come il rapporto costante) e l'individuazione di regole/leggi e invarianti. In questo articolo sono state riportate, in ottica esemplificativa, le riflessioni sulle pratiche didattiche che l'insegnante P. ha condiviso. Il modello MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) ha permesso di mettere in luce i diversi aspetti che emergono dalle riflessioni di questa insegnante sui processi di insegnamento-apprendimento della proporzionalità. Dall'analisi

è emerso chiaramente come gli obiettivi didattici possono essere principalmente motivati dall'amalgama tra le convinzioni sulla matematica e sul suo insegnamento e i diversi domini della PCK dell'insegnante. Grazie all'impiego del modello MTSK è stato possibile mettere in luce, nel discorso di P., i diversi domini delle conoscenze che sono a fondamento delle sue riflessioni sulla pratiche didattiche: da un lato i sottodomini della MK, ossia la conoscenza del contenuto matematico e delle relazioni tra i diversi ambiti della matematica; dall'altro quelli della PCK, ovvero la conoscenza che usa per giustificare le proprie scelte didattiche nell'insegnamento della proporzionalità nel grado scolastico in cui opera. P. motiva infatti le sue scelte facendo riferimento alla conoscenza delle difficoltà degli studenti maturata con l'esperienza e rendendo espliciti i propri obiettivi didattici, orientati in particolare verso azioni di tipo operativo che privilegiano l'acquisizione delle procedure di calcolo rispetto alla messa in evidenza degli aspetti relazionali. Queste sue riflessioni sono fondate sulle sue conoscenze pedagogiche dei contenuti, ma anche sulle sue convinzioni relative alla matematica e al suo insegnamento. I primi risultati di questo studio, qui presentati e discussi, mostrano come la condivisione di praxeologie meta-didattiche relative al compito di analizzare a posteriori protocolli provenienti dalle classi non solo porti a esplicitare alcuni aspetti delle conoscenze specialistiche degli insegnanti (identificati tramite le lenti teoriche fornite dal modello MTSK), ma anche a mettere in discussione convinzioni, prassi didattiche e conoscenze specialistiche. Nello specifico, si è mostrato come la praxeologia meta-didattica sviluppata in una comunità di indagine relativa all'analisi a posteriori di materiali e protocolli provenienti dalle sperimentazioni nelle classi abbia creato uno spazio di riflessione sull'insegnamento-apprendimento della proporzionalità diretta aprendo la strada a una potenziale trasformazione delle conoscenze specialistiche degli insegnanti esplicitate nelle riflessioni sui processi di insegnamento-apprendimento e sulle pratiche didattiche.

6 Riflessioni conclusive e prospettive future

Secondo il modello della trasposizione meta-didattica (Aldon et al., 2013; Arzarello et al., 2014) le praxeologie condivise durante le attività della comunità di indagine rappresentano una sintesi di componenti provenienti sia dalle praxeologie dei ricercatori, sia da quelle degli insegnanti, innescando un processo dinamico di trasformazione della conoscenza. Questo studio ha evidenziato come dalla condivisione di praxeologie meta-didattiche e dall'interazione all'interno della comunità di indagine possano emergere anche dissonanze tra le conoscenze pedagogiche dei contenuti dei partecipanti. Far parte di una comunità che ha individuato un oggetto di riflessione e indagine e che progetta attività a lungo termine per portare avanti sperimentazioni didattiche, è un'occasione per tutti i partecipanti di verbalizzare e mettere in discussione le proprie convinzioni arrivando talvolta a modificare le proprie conoscenze. La condivisione di praxeologie meta-didattiche infatti può anche fungere da ponte, creando uno spazio di riflessione che non si limita a confermare e a condividere conoscenze specialistiche e pratiche didattiche esistenti, ma apre la strada a nuove prospettive di sviluppo professionale. Future ricerche potrebbero indagare se e come tali aperture si traducano in un effettivo cambiamento o in una maggior consapevolezza nelle praxeologie didattiche in aula, lasciando un segno tangibile nell'apprendimento professionale – fine ultimo di ogni percorso di formazione professionale.

Ringraziamenti

Ringraziamo tutti gli insegnanti della comunità di indagine. Il loro instancabile impegno e la loro continua collaborazione sono stati essenziali per i risultati raggiunti e continueranno a essere un motore cruciale per la crescita del gruppo, contribuendo anche al progresso della ricerca in didattica della matematica.

Bibliografia

- Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., Sabena, C., & Soury-Lavergne, S. (2013). The meta-didactical transposition: A model for analysing teachers education programs. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 97–124). PME.
- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programs. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development* (Vol. 2, pp. 347–372). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_15
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzalez, A., Ribeiro, M., & Munoz-Catalan, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266. <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034
- Copur-Gencturk, Y., & Ezaki, J. (2025). Middle school mathematics teachers' proportional reasoning and its relation to their content and pedagogical content knowledge. *Research in Mathematics Education*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/14794802.2025.2462930>
- De Giorgi, D., Martignone, F., & Sabena, C. (2025). Mobilizing mathematical knowledge and pedagogical content knowledge through interdisciplinary educational activities. In C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri & V. Randolph (Eds.), *Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 195–202). PME.
- de la Torre, J., Tjoe, H., Rhoads, K., & Lam, D. (2015). Conceptual and theoretical issues in proportional reasoning. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 6(1), 22–33.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 38(3), 226–246. <https://doi.org/10.1007/BF02652807>
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 187–211. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-1223-z>

- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219–233. <https://doi.org/10.1007/BF00410539>
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93–118). National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.
- Martignone, F., Montes, M., Ferretti, F., Hubeňáková, V., Karlsson, J., Kennedy, N., & Ribeiro, M. (2023). Introduction to TWG20: Knowledge, beliefs and identity. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3675–3678). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Martignone, F., Montes, M., Ribeiro, M., Ferretti, F., Hubeňáková, V., Stoyanova Kennedy, N., & Karlsson, J. (2025). Thematic working group on mathematics teacher knowledge, beliefs and identity, TWG20. *European Mathematical Society*, 135(249), 56–58. <https://doi.org/10.4171/mag/249>
- Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 365–380). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6>
- Proulx, J., Mégrourèche, C., & Novak, C. (2024). Beyond proportions: Conceptualizing proportional reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 44(1), 28–34.
- Rowland, T. (2013). The Knowledge Quartet: The genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education*, 1(3), 15–43. <https://doi.org/10.25749/sis.3705>
- Rowland, T. (2020). Frameworks for Conceptualizing Mathematics Teacher Knowledge. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_63
- Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. Springer.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 127–155. <https://doi.org/10.1023/A:1009980419975>
- Sullivan, P., & Wood, T. (Eds.) (2008). *Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching* (Vol. 1). Sense Publishers.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(1), 181–204. <https://doi.org/10.1007/PL00020739>