DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
2026 (19), 157–178. https://doi.org/10.33683/ddm.26.19.6
OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Scoprire le radici quadrate: un viaggio tra forme e numeri

Discovering square roots: a journey through shapes and numbers

Paola Morando e Maria Luisa Spreafico
Dipartimento di Scienze Agrarie e Ambientali, Università degli Studi di Milano – Italia

paola.morando@unimi.it, maria.spreafico@unimi.it

Sunto / L'introduzione della radice quadrata può rappresentare una sfida complessa nello studio della matematica, generando difficoltà sia cognitive che emotive e mettendo in discussione intuizioni consolidate. Talvolta l'argomento viene proposto in modo meccanico, senza fornire rappresentazioni concrete e senza lasciare spazio a domande, dubbi o curiosità. Questo contributo descrive un percorso laboratoriale, svolto in classi seconde della scuola secondaria di primo grado italiana, ispirato alla teoria dell'apprendimento significativo di Ausubel, che favorisce l'integrazione tra nuovi concetti e conoscenze pregresse in un ambiente motivante e collaborativo. Attraverso la piegatura di modelli origami e giochi didattici, gli studenti possono costruire una comprensione solida delle radici quadrate e delle loro proprietà. Il laboratorio, sperimentato anche in presenza di una studentessa cieca, stimola l'apprendimento attivo, la costruzione condivisa del sapere e la riflessione metacognitiva.

Parole chiave: radice quadrata; origami; giochi didattici; apprendimento significativo; disabilità visive.

Abstract / Introducing square roots might be a complex challenge in learning mathematics, bringing both cognitive and emotional difficulties and challenging established beliefs. Sometimes, the topic is taught mechanically, without providing models or leaving room for questions, doubts, or curiosity.
This contribution describes a hands-on workshop carried out in seventh grade classes of Italian lower secondary school, inspired by Ausubel's theory of meaningful learning, which promotes the integration of new concepts with prior knowledge in a motivating and collaborative environment. Through the folding of origami models and didactical games, students can build a solid understanding of square roots and their properties. The workshop, which was also tested with a blind student, fosters active learning, shared knowledge construction, and metacognitive reflection.

Keywords: square root; origami; didactical game; meaningful learning; visual impairments.

1 Introduzione

Nella scuola secondaria di primo grado italiana,[1] il concetto di radice quadrata viene generalmente introdotto nel secondo anno, in linea con gli obiettivi specifici di apprendimento delle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (Ministero dell'Istruzione e del Merito [MIM], 2025).

Secondo quanto riferito da alcuni insegnanti,[2] molti studenti percepiscono questo argomento come particolarmente difficile e poco chiaro; gli insegnanti riferiscono inoltre che non di rado subentrano timori alimentati dai racconti allarmanti dei compagni più grandi.

Queste narrazioni riflettono, in realtà, le difficoltà autentiche che molti studenti incontrano, sia sul piano cognitivo che su quello emotivo. Dal punto di vista cognitivo, infatti, la radice quadrata è un concetto che richiede un livello di pensiero astratto non ancora pienamente sviluppato in molti studenti di questa fascia d'età. A 12-13 anni, la capacità di ragionare in modo astratto sugli oggetti matematici, come numeri irrazionali o operazioni inverse, è ancora in fase di maturazione (Susac et al., 2014), e questo rende l'accesso al significato profondo del concetto particolarmente impegnativo. Sul piano emotivo, invece, l'argomento può generare ansia o disinteresse, soprattutto quando viene proposto in modo meccanico, senza connessioni con l'esperienza e senza valorizzare la curiosità e il senso di scoperta degli studenti (Kanefke & Schukajlow, 2024).

La radice quadrata viene solitamente introdotta come operazione inversa dell'elevamento al quadrato. In questo approccio, l'attenzione si concentra principalmente sull'aspetto procedurale del concetto, cioè sul calcolo del valore della radice. Di conseguenza, l'insegnamento tende a privilegiare tecniche operative – come l'uso delle tavole, degli algoritmi di estrazione o della calcolatrice – piuttosto che guidare gli studenti alla comprensione del significato concettuale della radice e del contesto matematico in cui essa si colloca.

In aggiunta, un'impostazione centrata principalmente sul calcolo approssimato della radice quadrata, rischia di ridurre l'argomento a una mera questione operativa. In questo modo, si perde l'occasione di mostrare come l'introduzione della radice consenta di ampliare l'insieme dei numeri noti agli studenti, portandoli a confrontarsi con un nuovo insieme di numeri: gli irrazionali. Questi numeri presentano proprietà del tutto nuove rispetto ai razionali, come la scrittura decimale infinita e non periodica, e la loro esplorazione potrebbe rappresentare un'importante occasione per ampliare la visione degli studenti sul sistema numerico, facilitando anche l'introduzione successiva di altri irrazionali significativi, come il numero π.

Inoltre, al di fuori dei casi più semplici – come quello dei quadrati perfetti – risulta spesso difficile proporre rappresentazioni concrete o modelli visivi della radice quadrata, e questo fatto ostacola il passaggio da una comprensione intuitiva a una più astratta e consapevole del concetto.

Il percorso didattico proposto in queste pagine nasce dall'esigenza di introdurre, in modo graduale e significativo, i "nuovi" numeri che emergono dall'uso delle radici, distinguendoli da quelli già noti agli studenti – numeri naturali e razionali. L'obiettivo è guidare la scoperta di alcune delle loro proprietà fondamentali, offrendo strumenti per stimarne e approssimarne i valori e riducendo, al tempo stesso, timori e difficoltà iniziali attraverso attività che favoriscono la costruzione del significato, anche mediante la creazione e la manipolazione di modelli concreti, capaci di rendere il concetto più accessibile e meno astratto.

Il percorso presentato in questo contributo è stato organizzato in diverse fasi, durante le quali gli studenti sono stati guidati nella costruzione concreta, mediante l'uso della carta, di rappresentazioni di alcune radici quadrate di numeri naturali, e sono stati coinvolti in attività di approssimazione attraverso un gioco didattico progettato per stimolare il ragionamento e la partecipazione attiva.

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.
2. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

Partendo dalla manipolazione di quadrati di carta, dei quali i valori delle aree sono quadrati perfetti, sono stati poi realizzati modelli origami che hanno reso tangibili alcune radici di numeri interi. Questi modelli sono stati collocati su una linea dei numeri opportunamente costruita permettendo agli studenti di confrontare le radici tra loro e con altri numeri noti attraverso la relazione d'ordine, e di sviluppare strategie per stimarne il valore in modo intuitivo e significativo.
La fase conclusiva del percorso ha previsto un gioco didattico che ha offerto agli studenti l'opportunità di confrontarsi con la stima di radici quadrate e con la risoluzione di semplici espressioni che le coinvolgono, all'interno di un contesto ludico e motivante, favorendo il consolidamento delle competenze in un clima disteso e collaborativo. Questo gioco si è rivelato anche uno strumento utile per valutare i risultati della prima fase del laboratorio proposto, in quanto ha permesso di verificare le competenze acquisite dagli studenti.
Il laboratorio è stato sperimentato in numerose classi e presentato in corsi di formazione in Italia e in Portogallo (presso l'Università di Aveiro) e ha ricevuto ottimi riscontri sia da parte degli studenti che da parte degli insegnanti. Il laboratorio è stato anche proposto in una classe nella quale era presente una studentessa cieca. Questa sperimentazione è stata resa possibile dalla collaborazione con l'Istituto dei Ciechi di Milano, sotto la guida della tiflologa Dott.ssa Tiziana Angilletta.
Oltre a descrivere in dettaglio il laboratorio, perchè questo possa essere riproposto dai docenti interessati, questo lavoro è arricchito da commenti di carattere didattico e da osservazioni raccolte in aula durante le diverse fasi di sperimentazione, con l'obiettivo di presentare una riflessione critica sulle attività proposte e sul loro impatto sul processo di apprendimento.

2 Breve inquadramento teorico

L'impostazione del percorso proposto si fonda su un insieme coerente di riferimenti teorici provenienti dalla didattica della matematica e dalle scienze dell'educazione, che attribuiscono un ruolo centrale all'azione, alla manipolazione e alla pluralità delle modalità di accesso ai concetti matematici. In particolare, il lavoro si colloca nel quadro della teoria dell'apprendimento significativo di Ausubel (1963, 1968), secondo la quale l'apprendimento risulta efficace quando i nuovi contenuti possono essere messi in relazione con le conoscenze già presenti nelle strutture cognitive dello studente. In questa prospettiva, risulta centrale la progettazione di esperienze che favoriscano connessioni concettuali, immagini mentali e processi di rielaborazione personale, tenendo conto anche della dimensione emotiva e relazionale dell'apprendimento (Capuano et al., 2018).
Un primo riferimento riguarda il ruolo delle rappresentazioni multiple nella costruzione del significato matematico. Studi classici, come quelli di Behr et al. (1980), hanno mostrato come la comprensione dei concetti numerici e operativi si sviluppi attraverso il coordinamento di diverse rappresentazioni. In una prospettiva ausubeliana, tale coordinamento favorisce l'integrazione dei nuovi concetti nelle strutture cognitive preesistenti, sostenendo una comprensione profonda e non meramente procedurale. In particolare, per concetti astratti come quello di radice quadrata, l'ancoraggio a rappresentazioni geometriche e spaziali può costituire un supporto essenziale per superare una visione puramente procedurale. Nello specifico, il percorso si colloca in sintonia con i principi del *Universal Design for Learning* (UDL, Meyer et al., 2013), che promuove la progettazione di ambienti di apprendimento accessibili e inclusivi fin dalla fase iniziale. L'UDL sottolinea proprio l'importanza di offrire molteplici modalità di rappresentazione dei contenuti, di azione ed espressione e di coinvolgimento, al fine di valorizzare la variabilità degli studenti. Questo approccio favorisce l'accesso a concetti matematici attraverso canali diversi e complementari, senza vincolarlo a un'unica modalità espressiva o cognitiva.

In questa prospettiva si colloca anche l'uso di artefatti manipolabili, intesi non come semplici supporti materiali, ma come mediatori cognitivi capaci di sostenere l'emergere di significati matematici. Come evidenziato dalla letteratura sulla mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009), la manipolazione di artefatti consente agli studenti di esplorare proprietà e relazioni, favorendo il passaggio dall'esperienza concreta alla formalizzazione concettuale. Gli origami, in particolare, presentano un notevole potenziale didattico: essi permettono di integrare azione, percezione visiva e ragionamento spaziale, offrendo un contesto in cui grandezze geometriche, relazioni metriche e strutture numeriche possono essere esplorate in modo intuitivo ma rigoroso.
Il ricorso agli origami si inserisce inoltre nel quadro della didattica laboratoriale, intesa come ambiente di apprendimento in cui gli studenti sono attivamente coinvolti nella costruzione della conoscenza attraverso l'esplorazione, la formulazione di ipotesi, il confronto e la discussione. In tale contesto, il sapere matematico non viene trasmesso in forma conclusa, ma emerge progressivamente dall'interazione tra studenti, materiali e problemi proposti, in linea con una visione costruttivista dell'apprendimento.

> «La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività».
>
> (Anichini et al., 2004, p. 26)

Da questa breve citazione, si evince l'importanza dell'apprendimento collaborativo nel laboratorio di matematica. Numerosi studi mostrano come il lavoro in piccoli gruppi favorisca la verbalizzazione dei ragionamenti, il confronto di strategie e la negoziazione di significati (si veda, ad esempio, Bartolini Bussi et al., 1995), aspetti particolarmente importanti per l'apprendimento della matematica. Se il lavoro nel gruppo viene strutturato dal docente in un certo modo, ciascun partecipante può contribuire alla costruzione di significati matematici mettendo in gioco competenze, conoscenze ed esperienze diverse, creando una situazione di interdipendenza positiva in cui l'apprendimento individuale è sostenuto dal contributo degli altri.
La dimensione sociale dell'apprendimento contribuisce non solo allo sviluppo cognitivo, ma anche alla costruzione di un clima emotivo più sicuro, che può ridurre l'ansia matematica e sostenere la partecipazione attiva degli studenti (Zan, 2007). In quest'ottica, una metodologia didattica efficace è rappresentata dal gioco, inteso come contesto strutturato che favorisca l'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze. La letteratura sul *game-based learning* evidenzia come il gioco possa favorire il coinvolgimento e la motivazione degli studenti, sostenendo al contempo l'attivazione di processi cognitivi rilevanti per l'apprendimento disciplinare (Plass et al., 2015). In ambito matematico, contesti ludici opportunamente progettati possono offrire occasioni per formulare ipotesi, confrontare strategie e sviluppare forme di controllo e riflessione sul proprio operato. Il gioco può inoltre contribuire a creare un clima emotivo meno esposto rispetto alle situazioni valutative tradizionali, facilitando la partecipazione attiva e l'interazione tra pari. In questo senso, esso si configura come uno spazio che favorisce la rielaborazione e il consolidamento delle conoscenze, integrandosi in modo coerente con approcci che valorizzano l'apprendimento attivo e collaborativo (Naik, 2014).
Nel loro insieme, questi riferimenti delineano un quadro teorico che giustifica l'adozione di un approccio centrato sull'esperienza, sulla manipolazione e sulla pluralità delle rappresentazioni, ponendo le basi concettuali su cui si innesta il percorso didattico descritto nelle sezioni successive.

3 Contesto, obiettivi e metodi

3.1 Contesto della sperimentazione

Il percorso descritto in questo lavoro è stato sperimentato direttamente dalle autrici sia in undici classi seconde della scuola secondaria di primo grado, situate nelle provincie di Asti, Milano, Alessandria, sia nell'ambito di numerosi corsi di formazione rivolti a insegnanti. Tali corsi, organizzati anche nell'ambito di progetti Piano Lauree Scientifiche e di percorsi abilitanti all'insegnamento di matematica e scienze nella scuola secondaria di primo grado, si sono svolti in varie sedi italiane e presso l'Università di Aveiro, in Portogallo. I docenti partecipanti hanno successivamente implementato il laboratorio nelle proprie classi, restituendo feedback e osservazioni significative che hanno contribuito al perfezionamento della proposta.
In questo articolo ci concentreremo sulle sperimentazioni condotte nelle classi seconde della scuola secondaria di primo grado.

3.2 Obiettivi e metodi

Come anticipato, l'introduzione del concetto di radice quadrata nella scuola secondaria di primo grado presenta diverse criticità, dovute soprattutto alla distanza che spesso si crea tra il significato intuitivo del concetto e la sua immediata formalizzazione simbolica. La radice viene spesso presentata agli studenti come un'operazione puramente procedurale, senza che essi possano ancorare il pensiero astratto a una rappresentazione tangibile o a un'idea geometrica legata ad aree e lunghezze. Ciò può generare difficoltà ricorrenti, come la tendenza a considerare l'estrazione della radice come un semplice "procedimento da memorizzare", la scarsa capacità di collocare i valori di radici di quadrati non perfetti sulla linea dei numeri, posizionandoli ad esempio tra due numeri interi consecutivi, e la difficoltà di collegare rappresentazioni differenti dello stesso numero razionale.
Il percorso proposto in questo contributo nasce dall'esigenza di affrontare tali difficoltà attraverso un ambiente didattico che favorisca processi di costruzione del significato. Dal punto di vista disciplinare, esso si colloca pienamente nel quadro delle *Indicazioni nazionali* (MIM, 2025), che individuano come obiettivi: (i) «Riconoscere e utilizzare la radice come operatore inverso dell'elevamento a potenza. Fornire stime di radici utilizzando solo la moltiplicazione», e (ii) «Comprendere che non esiste alcuna frazione o numero decimale finito o periodico il cui quadrato sia uguale a 2 (o ad altri numeri interi non quadrati), riconoscendo così l'esistenza e la natura dei numeri irrazionali» (p. 71).
Il percorso è stato progettato per accompagnare progressivamente gli studenti verso tali obiettivi, favorendo una comprensione concettualmente fondata del significato di radice quadrata e delle sue implicazioni sul piano numerico e geometrico. In particolare, si è inteso offrire agli studenti occasioni per esplorare il concetto attraverso rappresentazioni geometriche e confronti tra grandezze, sostenendo lo sviluppo di strategie di stima e di controllo del risultato anche in assenza di procedure algoritmiche formalizzate.
Accanto agli obiettivi disciplinari, il percorso ne abbraccia anche di trasversali, sempre in linea con le *Indicazioni nazionali*, con l'intento di sviluppare negli studenti il pensiero critico, la flessibilità strategica e la capacità di lavorare in gruppo.
In Tabella 1 sono riportati nel dettaglio tutti gli obiettivi del percorso proposto.

Obiettivi disciplinari	
D1	Introdurre il concetto di radice quadrata di un numero naturale attraverso un approccio geometrico.
D2	Favorire la riflessione sulla non unicità della rappresentazione dei numeri.
D3	Introdurre il concetto di numero irrazionale.
D4	Sviluppare capacità di confronto e ordinamento tra radici quadrate di numeri naturali.
D5	Promuovere strategie di stima del valore approssimato delle radici.
Obiettivi trasversali	
T1	Stimolare l'elaborazione di strategie personali nella risoluzione di situazioni problematiche.
T2	Favorire il lavoro di gruppo e la collaborazione tra pari.

Tabella 1. Obiettivi disciplinari e trasversali del percorso.

Il percorso, articolato in due momenti distinti ma tra loro connessi, si apre con un laboratorio che prende spunto dall'idea illustrata nel *II Libro* degli *Elementi* di Euclide, che consiste nella rappresentazione di numeri reali attraverso grandezze geometriche (ad esempio mediante segmenti e aree). Il concetto di radice quadrata di un numero naturale viene quindi introdotto in varie fasi attraverso l'impiego di modelli tangibili per giungere, in modo graduale e motivato, alla corrispondente formalizzazione aritmetica.
Gli studenti, tramite la costruzione di artefatti cognitivi in carta, sono guidati a dare forma concreta a un'idea astratta come quella di numero reale.
Il lavoro in classe è stato organizzato in piccoli gruppi, favorendo dinamiche di apprendimento collaborativo e proponendo attività di tipo manipolativo, che si sono dimostrate efficaci e inclusive. Questo approccio ha permesso di valorizzare le diverse modalità di apprendimento degli studenti, offrendo a ciascuno l'opportunità di partecipare attivamente e di costruire significati attraverso l'uso di materiali e l'interazione con i pari.
La fase conclusiva del percorso, di carattere ludico, consente agli studenti di mettere alla prova e raffinare le intuizioni sviluppate nella manipolazione, favorendo il passaggio da ragionamenti locali a forme di controllo più generalizzate. In tal modo, il percorso si configura come un'occasione per sostenere simultaneamente lo sviluppo concettuale e quello strategico-relazionale, offrendo un ambiente di apprendimento coerente con gli obiettivi curricolari e capace di valorizzare la diversità delle risorse cognitive degli studenti.
La combinazione tra manipolazione, discussione collettiva e gioco favorisce infatti il confronto di idee, la negoziazione di strategie e la verbalizzazione dei ragionamenti: elementi indispensabili per consolidare pratiche argomentative e collaborative.
Come descritto nella prossima sezione, il ruolo del docente nel percorso proposto, oltre a essere centrale nella progettazione dell'ambiente di lavoro e dei problemi da esplorare, si rivela cruciale nel

mediare l'interazione tra studenti e artefatti, fornendo un supporto che non anticipa le soluzioni ma orienta la ricerca. La sua presenza è importante anche sul piano osservativo e cognitivo, perché consente di riconoscere e valorizzare le strategie spontanee messe in atto dagli allievi, trasformandole in occasioni per costruire significato.
Infine, la capacità del docente di orchestrare la discussione collettiva, selezionando e mettendo in dialogo i diversi contributi proposti, permette di far emergere e consolidare i concetti matematici chiave. La sua azione risulta pertanto decisiva nel trasformare l'esplorazione inizialmente spontanea in un apprendimento matematico strutturato, consapevole e profondamente significativo.

4 Descrizione del percorso didattico

In questa sezione vengono presentate le diverse fasi del laboratorio, ciascuna accompagnata da una descrizione operativa, dalle note di campo commentate e dall'indicazione degli obiettivi disciplinari e trasversali a cui fa riferimento. Nel laboratorio gli studenti interagiscono con artefatti in carta che permettono di esplorare relazioni geometriche e numeriche, rendendo visibili proprietà che saranno successivamente formalizzate. Si è scelto di sintetizzare in una unica narrazione quanto osservato nelle undici esperienze fatte.
I prerequisiti richiesti sono minimi: è sufficiente che gli studenti conoscano il concetto di area del quadrato e le modalità del suo calcolo, il principio di equiscomponibilità delle figure piane e i numeri decimali, sia limitati sia periodici.
La durata totale è di circa due ore per lo svolgimento del laboratorio e ulteriori due ore per il gioco didattico e la successiva discussione collettiva. Nella **Tabella 2** sono riassunte le caratteristiche organizzative della sperimentazione: sono riportate le cinque fasi del percorso, con le indicazioni sui tempi, le attività, gli obiettivi, i materiali e l'organizzazione della classe. Nei tempi si è tenuto conto anche di alcuni minuti di pausa tra una fase e l'altra.

Fasi	Tempi	Attività	Obiettivi	Materiali	Organizzazione
1	20 min	Le unità di misura		1 foglio carta origami (15 cm × 15 cm) × *N* 1 striscia di carta (21 cm × 5 cm) × *N* nastro adesivo	Gruppi da 4 studenti
2	25 min	Quadrati perfetti	D1; D2; D4	Scheda di **Figura 2** × *N*	Gruppi da 4 studenti
3	45 min	$\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$	D1; D2; D3; D4; D5; T1; T2	2 fogli carta origami (15 cm × 15 cm) × *N* 1 calcolatrice (non scientifica) per gruppo	Gruppi da 4 studenti
4	20 min	$\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$	D1; D4; D5; T1	2 fogli carta origami (15 cm × 15 cm) × *N*	Gruppi da 4 studenti
5	100 min	Gioco: radici in scatola	D4; D5; T1; T2	5 scatole di cartone contrassegnate con un intervallo numerico: [0,3), [3,6), [6,9), [9,12), [12,15] 80 *carte radice* con espressioni numeriche contenenti radici quadrate di numeri naturali 4 cappelli (uno per squadra) 5 fogli con le soluzioni (radici/intervallo) 5 schede per i punteggi	4 squadre da 6 studenti

Tabella 2. Quadro riassuntivo delle fasi del percorso (*N* indica il numero degli alunni).

4.1 Fase 1: le unità di misura

La lezione sulle radici era molto attesa: gli studenti avevano già notato il simbolo della radice quadrata sulle calcolatrici e ne avevano sentito parlare dai compagni più grandi come di un argomento "difficile". C'era quindi un misto di curiosità e timore sull'argomento.
I banchi sono stati disposti in modo che gli studenti potessero lavorare in gruppi da quattro (o da cinque quando la numerosità lo richiedeva) e sono stati distribuiti i materiali.
Ad ogni studente è stato chiesto di dividere il foglio origami in dotazione in sedici quadretti congruenti. Questa divisione è standard ed è usata spesso in altri laboratori di matematica che utilizzano l'origami. Gli alunni sono stati guidati nella realizzazione fornendo le seguenti istruzioni: portare un lato del quadrato sul lato opposto, piegare e riaprire; portare ora entrambi i lati paralleli a coincidere con la piega appena fatta, piegare e riaprire. Ripetere poi il processo usando gli altri due lati paralleli.
Successivamente, si sono stabilite le unità di misura: 1 *u* corrisponde al lato di ogni quadretto e 1 u^2 corrisponde all'area di ogni quadretto. Il foglio quadrettato è stato chiamato *misurometro*.[3]
Ogni studente ha attacco la striscia di carta sul banco usando il nastro adesivo, appoggiando sopra ad essa il *misurometro* e riportando le unità da 1 a 4 (**Figura 1**). Si è costruito uno strumento, chiamato dai ragazzi *righello*, che permette di confrontare tra loro diversi numeri.

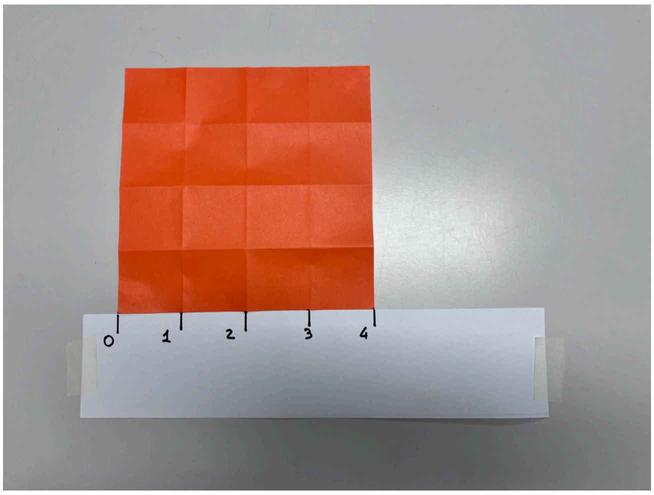


Figura 1. *Misurometro* e *righello*.

4.2 Fase 2: quadrati perfetti

Dopo aver distribuito ad ogni studente la scheda in **Figura 2**, per raccogliere i dati, si è richiamata con l'aiuto degli studenti la formula per il calcolo dell'area del quadrato: $A = l^2$. A partire da questa relazione, è stata definita la radice quadrata di A come la lunghezza del lato del quadrato di area A, sottolineando che si tratta di un numero che, elevato al quadrato, restituisce A. In questa occasione è stato anche introdotto il simbolo della radice quadrata.
Successivamente gli studenti sono stati invitati a identificare sul *misurometro* quadrati con i lati di varie dimensioni, costruiti raggruppando quadratini di area unitaria. La classe ha individuato quadrati di area 1, 4, 9 e 16. Per ciascuno di essi, gli studenti hanno annotato sulla scheda sia l'area sia la lunghezza del lato, espressa attraverso il simbolo appena introdotto ($l = \sqrt{A}$).

3. Per semplicità espositiva, durante la lezione in classe si sono richiamate oralmente le unità di misura, concentrando l'attenzione sul valore numerico di aree e segmenti. Anche nella presente descrizione scritta si è scelto di omettere le unità, al fine di rendere il discorso più fluido, facendo affidamento sul contesto per distinguere se una determinata quantità si riferisce a una misura lineare o di superficie.

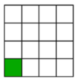
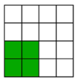
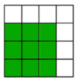
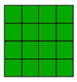
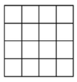
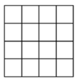
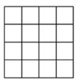
Figura	Area A	Lunghezza lato $l = \sqrt{A}$
		
		
		
		
		
		
		

Figura 2. Scheda per raccogliere i dati.

Dopo aver osservato la corrispondenza tra il valore della radice quadrata di *A* e la lunghezza *l* del lato ottenuta con il *misurometro*, è stato chiesto agli studenti di aggiornare il *righello* costruito in precedenza, riportando la nuova scrittura (mediante radice) per alcuni numeri naturali già segnati (Figura 3).

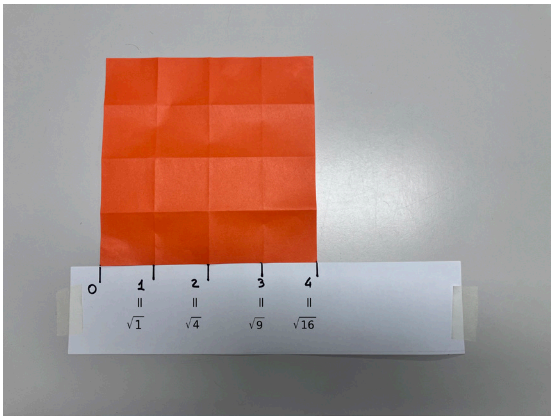


Figura 3. *Righello* con radici di quadrati perfetti.

L'aggiornamento del *righello* con le scritture in forma di radice, pur essendo un'azione apparentemente semplice, ha attivato processi concettuali significativi. Gli studenti hanno infatti riflettuto sulla possibilità che un numero possa avere rappresentazioni diverse – ad esempio 2 o $\sqrt{4}$ (o una frazione equivalente) – mostrando di rinegoziare il significato dell'uguaglianza come relazione bidirezionale tra

espressioni che condividono lo stesso valore. Tale consapevolezza è rilevante, poiché la ricerca didattica (Behr et al., 1980) documenta come molti fraintendimenti derivino proprio da un'interpretazione unidirezionale dell'uguaglianza come "calcolo da eseguire".
Il *righello* si è così configurato come un efficace mediatore visivo: collocare $\sqrt{4}$ nello stesso punto di 2 ha reso tangibile il legame tra area del quadrato, lunghezza del lato e radice quadrata, sostenendo gli obiettivi disciplinari D1 e D2 e facilitando la comprensione della relazione d'ordine fra alcune radici (obiettivo D4). Questa fase iniziale si è rivelata molto più ricca di quanto previsto, contribuendo a consolidare basi concettuali indispensabili per le attività successive.

4.3 Fase 3: $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$

Dopo aver distribuito altri due fogli origami per ogni studente, si è spiegato alla classe come realizzare un semplice modello di origami modulare che è una rivisitazione della tradizionale tessera *menko*, o "cuscino giapponese". In **Figura 4** è riportato il diagramma di piegatura riadattato rispetto alla versione tradizionale. La presenza di una studentessa cieca nella fase iniziale della sperimentazione ha reso necessario rivedere le istruzioni di piegatura del modello tradizionale, al fine di permetterne la realizzazione anche in assenza di feedback visivi. In linea con i principi dell'*Universal Design for Learning* (Meyer et al., 2013), tale riformulazione – più chiara, esplicita e accessibile – si è successivamente rivelata vantaggiosa per l'intero gruppo classe, contribuendo a ridurre le barriere operative e a rendere il compito più gestibile per tutti gli studenti.

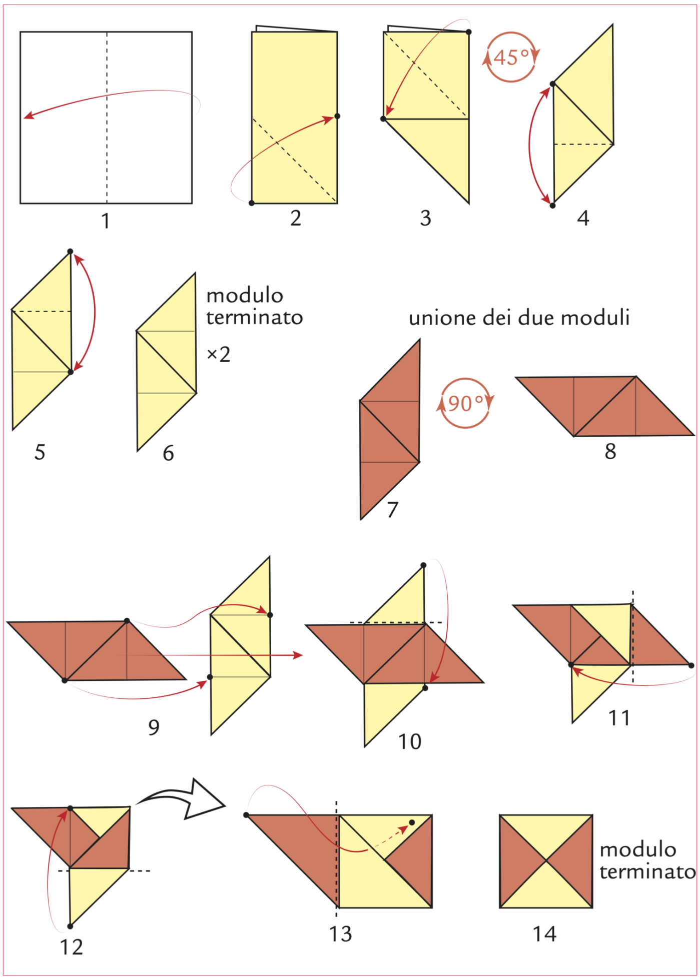


Figura 4. Diagramma di piegatura della tessera *menko*.[4]

4. https://blog.matematica.deascuola.it/articoli/attivita-matematica-origami-menko.

Ecco le istruzioni che abbiamo dato:

1. Portare un lato sul lato opposto.
2. Tenendo il rettangolo ottenuto poggiato sul lato corto (come mostrato nel passaggio 2 di Figura 4), portare il lato corto più basso su quello lungo alla sua destra.
3. Portare il lato corto in alto sul lato a sinistra; si ottiene un parallelogramma, diviso in due triangoli rettangoli, come mostra la Figura 4 nel passaggio 4.
4. Considerato il lato lungo del parallelogramma a sinistra, portare un suo vertice sull'altro e riaprire.
5. Ripetere sul lato lungo a destra.
6. Ripetere la costruzione con un altro foglio di carta (che è disegnato in arancione nel passaggio 7). Attenzione a eseguire le pieghe nella stessa direzione del passaggio 2.

7-8. Ruotare il secondo modulo di 90°, arrivando a posizionarlo come mostra l'immagine esemplificativa presente nel passaggio 8 della Figura 4.

9. Far scivolare il modulo arancione su quello giallo.
10. Considerare l'aletta gialla che si trova in alto appartenente al modulo che sta sotto e piegarla sul quadrato centrale.
11. Proseguire in senso orario, piegando al centro l'aletta arancione che si trova a destra.
12. Proseguire in senso orario, piegando al centro l'aletta gialla che si trova sotto.
13. Piegare ora l'ultima aletta arancione, intascandola sotto la prima aletta gialla piegata.
14. Ecco il *menko* completato.

Prima parte: $\sqrt{2}$.
Una volta completata la piegatura del modello, abbiamo chiesto agli studenti di determinare l'area e il perimetro del *menko*, avvalendosi del *misurometro* come strumento di supporto.
La determinazione dell'area e del perimetro del *menko* ha rappresentato un momento particolarmente ricco dal punto di vista cognitivo. Il problema non era immediatamente accessibile attraverso strategie standard, e questo ha favorito l'emergere di ragionamenti autonomi e di approcci non convenzionali (obiettivo T1). Il tentativo iniziale, da parte di molti studenti, di posizionare il *menko* parallelamente ai lati del *misurometro* (Figura 5, *menko* in alto) ha rivelato una tendenza diffusa a ricercare configurazioni canoniche e familiari, anche quando esse non permettono di risolvere il compito. Così facendo, si poteva solo concludere che l'area è inferiore a 4 e che il lato misura meno di 2.
L'impossibilità di determinare la misura del lato o l'area con tale posizionamento ha svolto una funzione didattica importante, in quanto ha portato gli studenti a interrogarsi sulla necessità di esplorare configurazioni diverse.
Particolarmente significativo è stato il contributo degli studenti che hanno ruotato il *menko* di 45° (Figura 5, *menko* in basso) o che hanno scomposto mentalmente il *menko* nei triangoli che lo compongono, riconoscendo che due di tali triangoli erano equiestesi a un quadrato di area 1. Queste strategie mostrano la capacità di riconoscere invarianti geometrici e di utilizzare la struttura della figura come guida per il ragionamento, indicando il passaggio da un approccio percettivo a uno maggiormente analitico. Il fatto che differenti strategie abbiano condotto alla stessa conclusione – area 2 e lato $\sqrt{2}$ (obiettivo D1) – suggerisce che gli studenti non stavano applicando un algoritmo noto, ma stavano costruendo attivamente relazioni tra forme, misure e concetti già incontrati nelle fasi precedenti.
Dopo aver riportato il risultato nella tabella, il successivo posizionamento del *menko* sul *righello* (Figura 6), con la collocazione di $\sqrt{2}$ sulla striscia graduata, ha permesso di consolidare questa comprensione attraverso una rappresentazione visiva e lineare del numero, mettendone in evidenza il valore approssimato e la sua posizione rispetto ai numeri razionali vicini, in questo caso 1,5 (obiettivo D4). Questa azione ha sostenuto la transizione verso una consapevolezza più articolata dell'ordine e della natura dei numeri irrazionali, mostrando come il lavoro manipolativo possa favorire il passaggio dal concreto all'astratto.

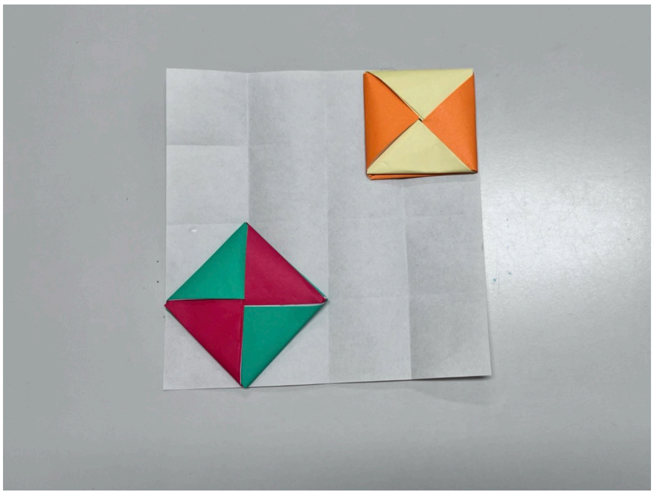


Figura 5. Tessere *menko* sul *misurometro*.

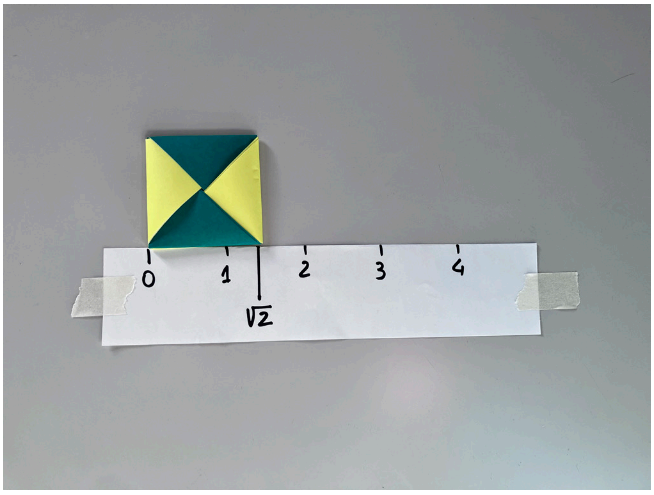


Figura 6. Posizionamento sul *righello* di $\sqrt{2}$.

A questo punto gli studenti sono stati invitati a stimare il valore numerico di $\sqrt{2}$. Prendendo avvio dalla loro osservazione spontanea secondo cui $\sqrt{2}$ dovesse essere "vicino" a 1,5 ma leggermente più piccolo, la classe è stata guidata a utilizzare la calcolatrice per verificarne progressivamente l'approssimazione. Il percorso di ricerca è iniziato con il tentativo di 1,4, il cui quadrato è risultato inferiore a 2. Da lì, gli studenti hanno intrapreso una vera e propria esplorazione numerica: attraverso successive approssimazioni – alcune proposte individualmente, altre discusse collettivamente – hanno aggiunto ulteriori cifre decimali, confrontando i risultati e annotando alla lavagna i valori ottenuti (Figura 7). Il coinvolgimento è cresciuto man mano che la sequenza delle cifre dopo la virgola si allungava senza mostrare alcuna regolarità. La scoperta che il processo non si "chiudesse" ha generato sorpresa e, in alcuni casi, un autentico disorientamento. Da un lato, gli studenti avevano di fronte un oggetto concreto, il lato del *menko*, che sembrava offrire una misura ben definita; dall'altro, si scontravano con l'impossibilità di descrivere quel valore mediante un numero decimale limitato o periodico. In una classe, questo contrasto ha persino portato alcuni studenti a proporre di affidare il compito alla compagna considerata "la più brava" in matematica, convinti che lei potesse ottenere l'esatto valore di $\sqrt{2}$. Tale episodio ha evidenziato quanto forte fosse l'aspettativa di trovare una risposta definitiva e quanto l'esperienza stesse mettendo in discussione le loro concezioni ingenue di "numero esatto". Questa dinamica ha offerto un'opportunità didattica preziosa: la scoperta, non solo dichiarata ma vissuta, del concetto di numero irrazionale come numero decimale illimitato e non periodico (obiettivi D3-D5). Il fenomeno osservato dagli studenti non è stato presentato come un fatto teorico, ma come la naturale conclusione delle loro stesse esplorazioni.

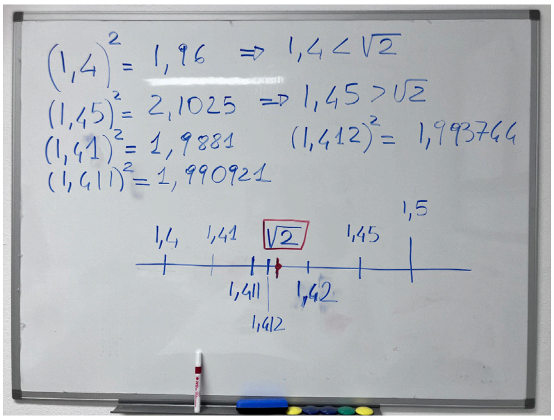


Figura 7. Lavoro svolto in classe sull'approssimazione del valore $\sqrt{2}$.

Seconda parte: $\sqrt{8}$.

A questo punto, poiché ogni gruppo disponeva di almeno quattro *menko*, abbiamo proposto agli studenti di determinare l'area e la misura del lato del quadrato ottenuto accostandoli lato a lato (Figura 8). Anche in questa fase, la classe ha affrontato il problema attraverso strategie diverse, tutte significative dal punto di vista formativo e indicative di un pensiero matematico attivo e partecipato.

Una prima soluzione è emersa da un gruppo che ha fatto riferimento diretto alle conoscenze consolidate: ricordando che ogni *menko* ha area 2, gli studenti hanno immediatamente dedotto che i quattro *menko* formano un quadrato di area 8, con lato pari a $\sqrt{8}$. Un secondo gruppo ha invece scelto un approccio più pratico e percettivo: ha collocato il quadrato costruito sul *misurometro* e osservato che esso ricopriva esattamente metà della sua superficie. Per giustificare in modo operativo tale osservazione, gli studenti hanno ripiegato i triangoli bianchi del *misurometro* sul quadrato dei *menko*, mostrando che quest'ultimo veniva completamente coperto. Anche in questo caso, il gruppo ha concluso che l'area complessiva era 8 e che quindi il lato misurava $\sqrt{8}$. Un terzo gruppo, partendo invece dal lato del singolo *menko*, $\sqrt{2}$, già determinato in precedenza, ha argomentato che il quadrato composto da quattro *menko* ha lato $2 \times \sqrt{2}$ e area 4 volte 2, cioè 8. La varietà delle soluzioni ha mostrato come diversi punti di partenza potessero condurre allo stesso risultato, offrendo agli studenti un'occasione autentica per confrontare modi diversi di ragionare e valorizzare la pluralità di approcci (obiettivi D1, T1 e T2).

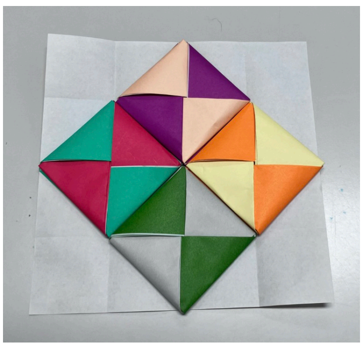


Figura 8. Il quadrato formato da 4 *menko*.

La discussione collettiva ha portato naturalmente a osservare l'uguaglianza $\sqrt{8} = 2 \times \sqrt{2}$ (obiettivo D2). Nelle classi in cui la procedura di "estrazione del fattore dalla radice" era già stata introdotta, ciò ha offerto una conferma geometrica e visiva della regola algebrica. Altrove, l'esistenza di due forme simboliche diverse contenenti la radice quadrata per indicare la stessa lunghezza ha destato curiosità, creando un'attesa spontanea verso la lezione successiva.
Nella parte conclusiva dell'attività, gli studenti hanno compilato la scheda di **Figura 2**, disegnando nella prima colonna il quadrato formato dai quattro *menko*. Poi, appoggiando due *menko* consecutivi sul *righello*, hanno individuato la posizione corrispondente al valore $\sqrt{8}$ (**Figura 9**). Questo li ha guidati a stimare il valore della radice collocandolo tra $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$, più vicino a 3 (obiettivo D4).

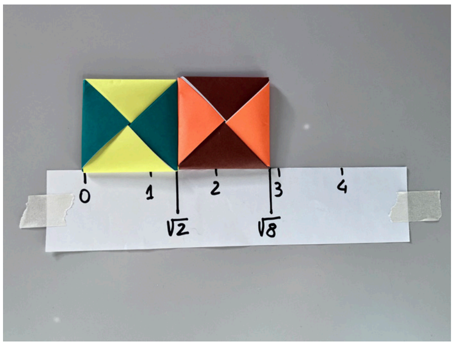


Figura 9. Posizionamento sul *righello* di $\sqrt{8}$.

4.4 Fase 4: $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$

Inizialmente gli studenti hanno lavorato sul *misurometro* già in loro possesso.

Prima parte: $\sqrt{5}$.
Abbiamo invitato la classe a prendere il *misurometro* e a individuare, evidenziandolo con un pennarello o semplicemente seguendone i bordi con le dita, il rettangolo situato in basso a sinistra, di dimensioni 2 unità in orizzontale e 1 in verticale, costituito da due quadrati adiacenti (**Figura 10a**). A partire da questa osservazione, gli studenti hanno rapidamente riconosciuto che la sua area è pari a 2. Successivamente, abbiamo guidato la classe a piegare – o tracciare – la diagonale che parte dal vertice in alto a sinistra del rettangolo (**Figura 10b**). Questa semplice azione ha permesso ai ragazzi di visualizzare come il rettangolo venga suddiviso in due triangoli rettangoli congruenti, ciascuno con area pari a 1. L'attività ha stimolato una comprensione diretta e percettiva della relazione tra figure equivalenti, sostenendo gli studenti nell'interpretazione geometrica delle aree. A partire dalla diagonale ottenuta, la classe è stata poi invitata a costruire un quadrato avente come lato proprio quella diagonale (**Figura 10c**). A questo punto, in linea con l'obiettivo D1, si è chiesto: «Qual è l'area del quadrato costruito? Quanto misura il suo lato?».

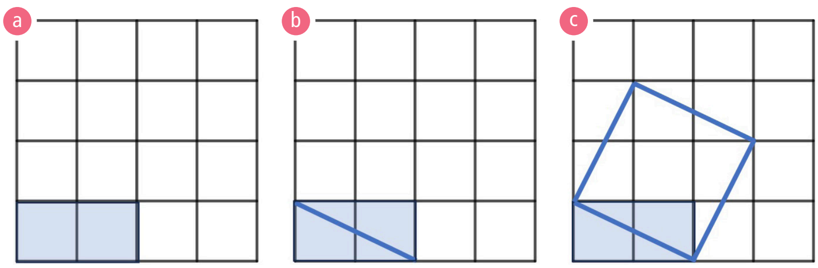


Figura 10a, b, c. La costruzione del quadrato di area 5.

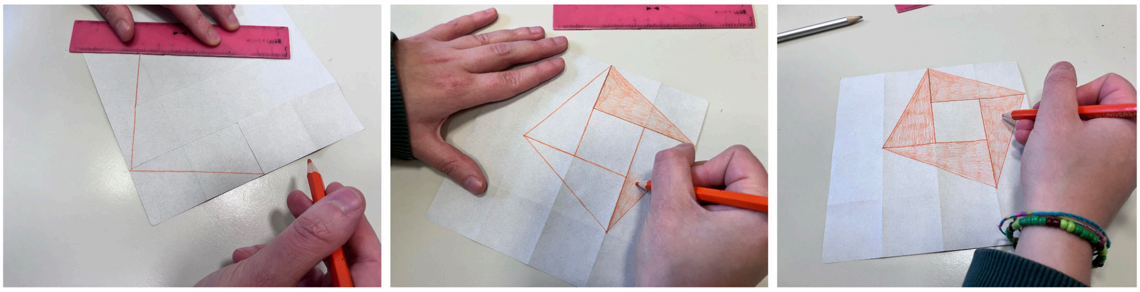


Figura 11. La realizzazione del quadrato di area 5 da parte di un'alunna, dove sono messi in evidenza i triangoli di area 1.

Partendo dalla considerazione che il quadrato ottenuto è costituito da un quadretto centrale del *misurometro* (area 1) e da quattro triangoli congruenti, ciascuno con area pari a 1 (**Figura 11**), alcuni studenti, anche dopo essersi consultati con il gruppo, hanno concluso che l'area totale del quadrato è 5 (obiettivi T1 e T2). Di conseguenza, la lunghezza del lato è $\sqrt{5}$ (obiettivo D1).
Anche questo risultato è stato dapprima annotato sulla scheda di lavoro e successivamente riportato sul *righello* (**Figura 12**).

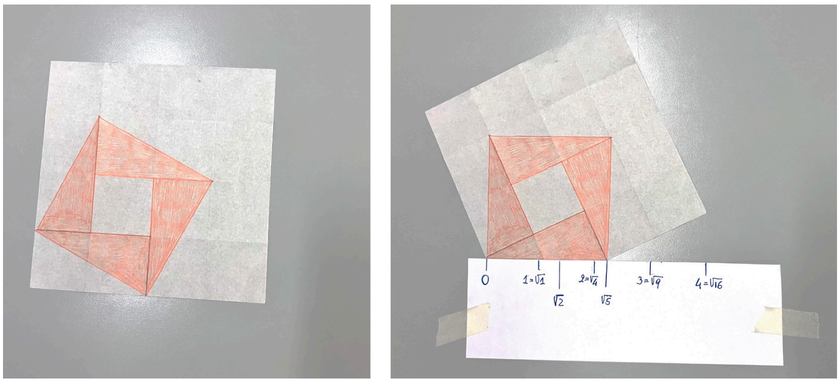


Figura 12. Rappresentazione di $\sqrt{5}$ e suo posizionamento sul *righello*.

Il laboratorio si è concluso con un'ultima osservazione collettiva sulla disposizione delle radici individuate lungo il *righello* (obiettivi D4 e D5), favorendo una riflessione complessiva sulla relazione d'ordine tra i valori rappresentati e sulla vicinanza di alcune radici ai numeri interi (ad esempio $\sqrt{8}$ è molto vicina a $3 = \sqrt{9}$).

Seconda parte: $\sqrt{10}$.
In molte classi abbiamo scelto di lasciare questa seconda parte come compito a casa anche con l'intento di mostrare agli studenti che l'approccio laboratoriale non è una modalità occasionale, riservata esclusivamente al lavoro in classe, ma può diventare un vero e proprio metodo di apprendimento e consolidamento della matematica. Inoltre, questa attività ha offerto agli studenti l'opportunità di riutilizzare, in un contesto diverso e in maniera autonoma, strategie e ragionamenti già sperimentati durante il laboratorio.
Di seguito si descrive cosa è accaduto nelle classi dove è stata portata a termine in aula anche quest'ultima costruzione. Gli obiettivi sono analoghi a quelli indicati per il lavoro svolto su $\sqrt{5}$.
Ogni studente ha realizzato un nuovo *misurometro* a partire da un foglio quadrato di lato 15 cm.
Guidati e seguendo una modalità analoga a quella già sperimentata, gli studenti hanno individuato sul foglio quadrettato un rettangolo formato da tre quadratini unitari e ne hanno tracciato una delle diagonali, come illustrato in **Figura 13**.

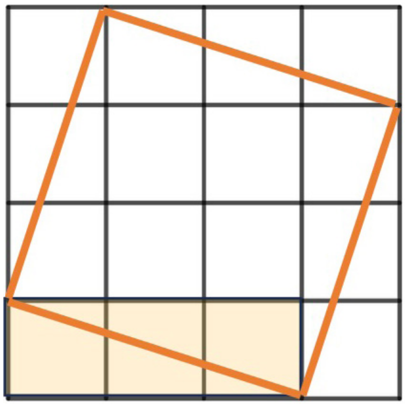


Figura 13. La costruzione del quadrato di area 10.

A questo punto hanno costruito un quadrato che ha per lato la diagonale appena disegnata. Questa richiesta ha attivato nei gruppi un interessante lavoro di anticipazione: molti studenti hanno iniziato a formulare ipotesi sull'area del nuovo quadrato, collegandola intuitivamente alle trasformazioni svolte in precedenza. Sono stati così calcolati l'area del quadrato e la lunghezza del lato: rispettivamente 10 e $\sqrt{10}$. Il nuovo valore è stato infine posizionato sul *righello* personale, completando la sequenza costruita nelle fasi precedenti del laboratorio (Figura 14).

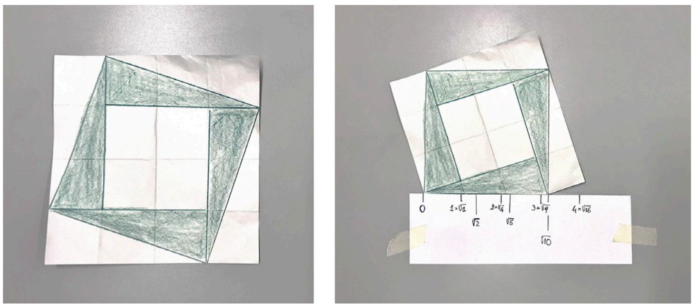


Figura 14. Rappresentazione di $\sqrt{10}$ e suo posizionamento sul *righello*.

4.5 Fase 5: il gioco "radici in scatola"

Poiché questa fase è stata proposta a circa una settimana di distanza dal laboratorio descritto nelle fasi precedenti, la lezione è iniziata con una breve attività introduttiva per riprendere e consolidare strategie di stima, richiamando i valori noti delle radici dei quadrati perfetti e le osservazioni già viste sull'ordinamento e sul posizionamento delle radici quadrate di numeri vicini a quadrati perfetti. Ad esempio, si è chiesto agli studenti se fosse possibile stimare senza la calcolatrice il valore di $\sqrt{97}$. Ricordando quanto fatto per $\sqrt{5}$ (poco più grande di 2) e $\sqrt{8}$ (poco più piccola di 3) gli studenti hanno rapidamente ricondotto 97 al suo quadrato perfetto più vicino (ovvero 100) e hanno quindi ipotizzato che $\sqrt{97}$ fosse un numero poco più piccolo di 10. Tale ipotesi è stata poi confermata utilizzando la calcolatrice. Questo episodio mette in evidenza come gli studenti abbiano interiorizzato l'idea di collocare la radice di un quadrato non perfetto tra le radici di due quadrati perfetti, attivando spontaneamente un ragionamento di tipo comparativo che mostra una crescente padronanza della relazione d'ordine tra radici. L'uso del quadrato perfetto "più vicino" emerge così come una strategia stabile e significativa, non più legata a un singolo esempio ma generalizzata a nuovi numeri.

Una volta consolidata questa modalità di ragionamento con qualche altro esempio, è stata proposta una sfida ulteriore, ovvero provare a stimare, in base alle considerazioni precedenti, il valore di $3 \times \sqrt{8}$. Avendo appena ricordato che $\sqrt{8}$ si colloca sul *righello* poco prima di 3, gli studenti hanno quindi risposto che, triplicando un numero leggermente inferiore a 3, si ottiene un numero inferiore a 9. In questo caso si osserva come gli studenti abbiano iniziato a combinare la stima di una radice con una semplice operazione, mostrando di saper trasferire il ragionamento su $\sqrt{8}$ a un'espressione più complessa. L'abilità di comporre mentalmente radici e moltiplicazioni indica un passaggio verso una gestione più flessibile delle grandezze, evidenziando una comprensione non meramente procedurale. Anche in questo caso l'ipotesi formulata dagli studenti è stata verificata allungando il *righello* fino a 10 e riportando lì sopra il valore di $3 \times \sqrt{8}$ utilizzando sei tessere del *menko* affiancate. La verifica tramite materiale concreto ha svolto un ruolo importante nel consolidare il ragionamento: la rappresentazione visiva ha reso tangibile l'approssimazione stimata, rafforzando l'idea che il calcolo con le radici possa essere controllato attraverso confronti di grandezza e non solo tramite strumenti formali.
Dopo questa prima fase di riepilogo, la classe era pronta per giocare. Innanzitutto sono state presentate le scatole con le rispettive etichette (**Figura 15a**), chiarendo, ad esempio, che nella scatola etichettata con "$3 \leq n < 6$" andavano collocati tutti i numeri compresi tra 3 e 6, includendo il 3 ed escludendo il 6; abbiamo inoltre precisato che la stessa convenzione valeva per tutte le altre scatole, ad eccezione di quella contrassegnata con "$12 \leq n \leq 15$" nella quale dovevano essere inseriti tutti i numeri da 12 a 15, estremi inclusi. Successivamente, abbiamo mostrato alcune *carte radice* (**Figura 15b**), spiegando che l'obiettivo del gioco consisteva nel posizionare correttamente ciascuna carta nella scatola corrispondente, e abbiamo fornito alcuni esempi richiamando le osservazioni discusse in precedenza.

a

b

$3-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{8}$
$\sqrt{10}-1$	$\sqrt{16}-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{81}}{4}$	$2\sqrt{2}$
$5-\sqrt{25}$	$\sqrt{8}-\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{11}}{11}$	$\sqrt{7} : \sqrt{4}$
$\sqrt{1}+\sqrt{1}$	$(\sqrt{2}+\sqrt{0})^2$	$\sqrt{0} : \sqrt{119}$	$7\sqrt{0}$

c

Figura 15. a) Le scatole delle radici, un foglio con esempi di radici e il foglio per controllare la correttezza delle radici in scatola; **b)** Esempio di *carte radice* relative alla scatola "$0 \leq n < 3$"; **c)** Una scatola con *carte radici*.

Sono state formate quattro squadre chiamate Luna, Stella, Cuore e Fiore, assegnando ad ognuna una postazione nella classe (ovvero un banco) e un cappello, che serviva a designare di volta in volta il *messaggero*, ovvero l'unico membro autorizzato a spostarsi dalla postazione della propria squadra. È stato inoltre chiesto ad ogni squadra di nominare uno *scrivano*, l'unico giocatore della squadra autorizzato a utilizzare carta e penna. Questa strutturazione dei ruoli si è rivelata non solo funzionale alla gestione del gioco, ma anche efficace nel distribuire responsabilità specifiche all'interno del gruppo, favorendo una dinamica cooperativa chiara e riducendo la possibilità di sovrapposizioni o dispersioni.
Mentre le squadre si organizzavano nella propria postazione, le cinque scatole sono state collocate in punti diversi dell'aula e il mazzo delle 80 *carte radice* (precedentemente mescolato) è stato suddiviso in 4 mazzetti contenenti 20 *carte radice* ciascuno, consegnandone uno ad ogni squadra.
Al via, le squadre hanno avuto 10 minuti di tempo per depositare il maggior numero possibile di *carte radice* nelle scatole corrette.
Per farlo, ogni squadra doveva scegliere una delle *carte radice* e stimare (senza utilizzare la calcolatrice) il risultato dell'espressione indicata sulla carta, approssimando, quando necessario, il valore di ogni ad-

dendo per poi sommarli e trovare così il valore approssimato della carta sulla base delle considerazioni fatte precedentemente, e individuare l'intervallo in cui collocarlo. A questo punto lo scrivano prendeva la *carta radice*, ci disegnava sopra il simbolo della squadra e la consegnava al messaggero di turno (riconoscibile dal cappello) che correva a inserirla nella scatola corrispondente all'intervallo scelto (Figura 15c), ritornava alla base e passava il cappello a un altro compagno, che diventava il nuovo messaggero. Poiché durante ciascun viaggio ogni messaggero poteva trasportare una sola *carta radice*, mentre era assente la squadra iniziava a stimare il valore di una nuova carta, così da non perdere tempo e rendere più efficiente la transizione tra un viaggio e l'altro. L'efficienza della squadra, dunque, non dipendeva soltanto dalla correttezza delle stime, ma anche dalla capacità di pianificare micro-strategie di sincronizzazione interna, elemento che ha reso il gioco un'occasione naturale per lavorare sulle competenze trasversali legate alla gestione del tempo e alla collaborazione (obiettivi T1 e T2).
Allo scadere dei 10 minuti tutti i giocatori sono stati richiamati alle proprie postazioni e si è passati alla fase di verifica e assegnazione dei punteggi. Il punteggio è stato calcolato nel modo seguente: +1 punto per ogni carta collocata nella scatola corretta, –1 punto per ogni carta collocata in una scatola sbagliata. Le carte non utilizzate non influenzavano in nessun modo il punteggio. Ha vinto la squadra che ha totalizzato il punteggio maggiore.
Per procedere all'assegnazione dei punteggi, si sono formati 5 gruppi di controllori, uno per ciascuna scatola. Ogni gruppo era composto da studenti appartenenti a squadre diverse, in modo da garantire imparzialità (almeno un rappresentante per squadra in ciascun gruppo). Ad ogni gruppo sono stati affidati una scatola da controllare e un foglio per la raccolta dei punteggi, sul quale indicare, per ogni squadra, il numero di *carte radice* corrette e sbagliate. La formazione di gruppi di controllori misti ha favorito un'interessante forma di "distanziamento cognitivo": studenti che avevano appena svolto il ruolo di giocatori si sono trovati a dover valutare criticamente le scelte altrui, rendendo espliciti criteri di correttezza e strategie di verifica.
A seconda della classe e del tempo a disposizione, abbiamo scelto se fornire o meno ai controllori il foglio delle soluzioni. Quando tale supporto non era disponibile, la fase di controllo si è trasformata in un'ulteriore occasione di confronto tra studenti appartenenti a squadre diverse, favorendo il ragionamento condiviso. In questo caso abbiamo formato gruppi omogenei per livello di competenze, assegnando ai gruppi con competenze meno avanzate scatole contenenti un numero ridotto di carte e autorizzando talvolta l'uso della calcolatrice come supporto alla verifica. Quando invece era necessario garantire una correzione più rapida e accurata, abbiamo organizzato gruppi di controllori eterogenei per livello e fornito a ciascun gruppo una scheda con le soluzioni relative alla scatola assegnata. In entrambe le modalità, i controllori hanno avuto la responsabilità di attribuire i punteggi alle squadre per la scatola di loro competenza. Questa fase ha messo in luce come la verifica non sia stata percepita dagli studenti come un controllo sanzionatorio, ma come un'attività cognitiva che richiedeva argomentazione, confronto e negoziazione di significati, contribuendo al consolidamento delle competenze argomentative (obiettivo T2).
Osservando le fasi di gioco e di verifica, si è potuto notare come gli studenti abbiano affrontato con naturalezza anche la stima del valore di espressioni che coinvolgevano semplici operazioni con le radici (ad esempio $\sqrt{39}+1$ oppure $\sqrt{7}:\sqrt{4}$), senza lasciarsi intimorire dalla presenza di calcoli non trattati precedentemente in modo esplicito con l'insegnante. Le stime e le operazioni sono state eseguite in modo intuitivo, a testimonianza di una buona padronanza dei ragionamenti sulle approssimazioni sviluppati durante l'attività laboratoriale precedente. Ciò suggerisce che il gioco abbia favorito non solo il recupero di conoscenze costruite nelle fasi precedenti, ma anche la loro mobilizzazione in un contesto dinamico, confermando il ruolo dell'attività ludica come spazio di attivazione e trasferimento di strategie.
Le carte contenti $\sqrt{0}$ hanno invece generalmente creato maggiori difficoltà e, nonostante la semplicità dei calcoli richiesti, sono state spesso tralasciate. Esempi come $\sqrt{0}:\sqrt{119}$ oppure $12-\sqrt{0}$ o anche $(\sqrt{2}+\sqrt{0})^2$ richiedevano operazioni immediate, ma non sono state riconosciute come tali dalla maggior parte degli studenti. Anche le carte che includevano $\sqrt{1}$, come $\sqrt{1}+\sqrt{1}$, oppure $7:\sqrt{1}$ non

sono state percepite come particolarmente agevoli e sono state spesso relegate in secondo piano a favore di carte che richiedevano calcoli più complessi. Questa difficoltà ricorrente mostra una certa resistenza nell'attribuire significato numerico immediato alle radici di 0 e di 1 e segnala un nodo concettuale ancora fragile, utile per orientare future azioni didattiche mirate a rafforzare la comprensione dei casi particolari.

Il limite di tempo (10 minuti) non permetteva di collocare tutte le 20 *carte radice*, rendendo necessario selezionare quelle per cui la stima risultava più immediata. Questo ha promosso un approccio flessibile e non sequenziale spingendo gli studenti a sviluppare criteri personali di efficienza (obiettivo T1). Tale consapevolezza strategica rappresenta una competenza trasversale importante e testimonia la capacità degli studenti di adattarsi in modo critico alle condizioni del gioco.

Inoltre, il rischio di perdere punti per ogni collocazione errata ha incentivato il confronto all'interno delle squadre: gli studenti hanno dovuto argomentare le proprie ipotesi, valutare quelle dei compagni e giungere a decisioni condivise, evitando approcci individuali o frammentati. In questo senso, il gioco ha favorito dinamiche autentiche di problem solving collettivo (T2), richiedendo decisioni rapide ma ragionate e una gestione coordinata delle risorse del gruppo.

5 Altre esperienze: il percorso ad occhi chiusi

In questa sezione vengono presentate alcune considerazioni sul percorso realizzato in una classe seconda, all'interno della quale era presente una studentessa cieca, che nel seguito verrà chiamata Chiara. La sperimentazione si è svolta nell'ambito di un progetto condotto in collaborazione con l'Istituto dei Ciechi di Milano (Angilletta & Spreafico, 2022).

L'attività ha mostrato un forte valore inclusivo: tutti gli studenti hanno potuto partecipare simultaneamente nello stesso ambiente, seguendo istruzioni comuni per le piegature e prendendo parte insieme al gioco delle "radici in scatola". Questa modalità operativa ha permesso a ciascuno di contribuire attivamente, valorizzando differenti modalità percettive e promuovendo un'esperienza realmente condivisa di apprendimento.

Poiché l'attività è stata progettata in modo inclusivo a priori seguendo i principi dell'UDL, abbiamo scelto di favorire molteplici mezzi di rappresentazione utilizzando, in aggiunta ai fogli di carta di due colori diversi per costruire il *menko*, anche due fogli di texture diverse; in aggiunta al *righello* proposto è stato utilizzato del materiale tattile per costruire il *righello* accessibile: strisce in braille con l'indicazione delle radici e piccoli quadratini in rilievo per posizionare i numeri interi. Tale progettazione ha consentito la piena partecipazione di tutte e tutti (**Figura 16a**).

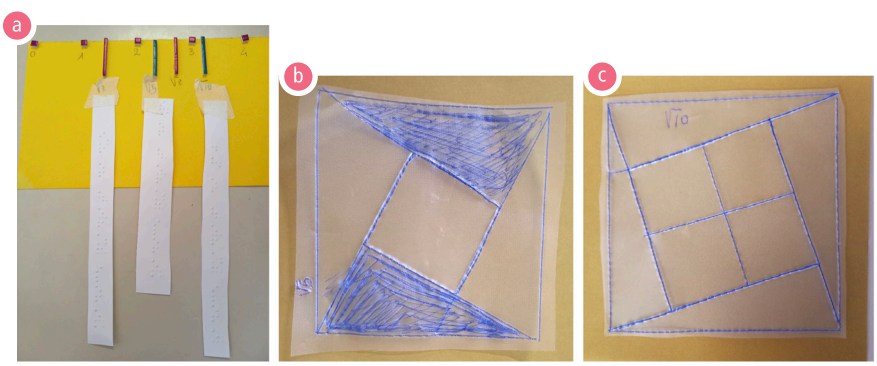


Figura 16. **a)** Il righello con unità e radici evidenziate con la scritta braille; **b)** e **c)** Il foglio gommato prodotto dai compagni di Chiara per "visualizzare" i quadrati di area 5 e 10 e i loro rispettivi lati di lunghezza $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$.[5]

5. I fogli in **Figura 16b** e in **Figura 16c** sono da immaginare ciascuno in proporzione al *misurometro*.

Durante la costruzione dei segmenti di lunghezza $\sqrt{5}$ (e successivamente $\sqrt{10}$) Chiara è stata aiutata dai compagni che hanno riprodotto per lei la configurazione geometrica sul foglio di gomma (Figura 16b e Figura 16c). In questa occasione i compagni hanno mostrato attenzione e sensibilità verso le modalità con cui Chiara viveva l'attività, riconoscendo l'importanza di utilizzare uno strumento più adatto alle sue preferenze e ai suoi modi di apprendere. Hanno partecipato attivamente discutendo e collaborando con lei per definire insieme i passaggi necessari alla realizzazione del modello tattile. Una volta compreso il procedimento, anche Chiara ha potuto completare autonomamente la piegatura del segmento $\sqrt{5}$ sul proprio foglio.
Anche nel gioco, pur non potendo correre a posizionare le radici nelle scatole, Chiara ha offerto un contributo significativo al calcolo delle stime. Ha utilizzato in modo efficace le strategie che padroneggia, richiamando con rapidità i valori approssimati delle radici e supportando così il lavoro di gruppo.

6 Considerazioni conclusive

Il percorso descritto in questo articolo è il risultato di numerose sperimentazioni condotte in undici classi seconde della scuola secondaria di primo grado e in corsi di formazione per insegnanti, sia in Italia che all'estero.
Nelle varie sperimentazioni abbiamo osservato un alto livello di efficacia delle attività proposte, sia in termini di apprendimento che di partecipazione. Tutti gli studenti coinvolti hanno preso parte alle attività in modo attivo e motivato, compresi coloro che solitamente mostrano scarso interesse o partecipazione durante le lezioni di matematica. Il contesto laboratoriale e ludico ha creato un ambiente didattico altamente accessibile, nel quale gli studenti hanno potuto impegnarsi in forme di ragionamento matematico anche complesse senza essere frenati dalla dimensione formale del contenuto, lasciando spazio alla sperimentazione e alla negoziazione di strategie.
La parte manipolativa del percorso, oltre a favorire la costruzione concreta di alcune radici quadrate, ha offerto spunti di riflessione sulla stima del valore di radici di numeri naturali attraverso il riferimento ai quadrati perfetti, l'uso della relazione d'ordine e l'esplorazione di diverse rappresentazioni dello stesso numero.
In diverse classi è emerso come le competenze acquisite in questa prima parte siano state poi consolidate nella fase di gioco, durante la quale i ragazzi hanno dimostrato una buona padronanza nella stima del valore sia delle radici di numeri naturali sia di espressioni algebriche contenenti tali radici.
Questi risultati suggeriscono come l'alternanza tra manipolazione concreta, discussione e gioco possa promuovere un passaggio naturale dall'esperienza operativa alla generalizzazione, sostenendo processi di astrazione che non appaiono imposti dall'esterno, ma emergono come esigenza interna agli studenti stessi. Inoltre, l'efficacia mostrata anche nella stima di radici contenute in espressioni algebriche sembrerebbe indicare una forma di trasferibilità cognitiva che va oltre la singola attività, segnalando che gli studenti hanno costruito significati sufficientemente robusti da essere utilizzati in contesti nuovi.
Nelle diverse sperimentazioni è stato possibile confrontare le prestazioni tra classi che avevano livelli differenti di familiarità con il concetto di radice quadrata. Nelle classi in cui l'argomento non era ancora stato introdotto formalmente, gli studenti hanno mostrato una notevole efficacia nell'elaborare stime corrette, soprattutto durante il gioco, facendo ricorso a strategie intuitive di confronto numerico che sembravano attivarsi con naturalezza in un contesto privo di vincoli formali. Al contrario, nelle classi in cui il concetto di radice era già stato affrontato attraverso un percorso più tradizionale, la qualità delle risposte è risultata complessivamente meno elevata.

Il percorso proposto sembra dunque favorire la valorizzazione delle intuizioni numeriche come base per la costruzione di significati più astratti, confermando che l'apprendimento matematico richiede ambienti che legittimino forme di ragionamento non ancora formalizzate.
Molti docenti che hanno sperimentato il percorso durante il corso di formazione lo hanno successivamente riproposto nelle proprie classi, condividendo poi con le autrici gli esiti dell'esperienza. È emerso in modo particolarmente significativo il valore del loro ruolo: una presenza attiva ma equilibrata, che non sostituisce l'iniziativa degli alunni, bensì la orienta. Gli insegnanti hanno potuto osservare con attenzione le dinamiche dei gruppi, riconoscere e valorizzare i diversi contributi, e accompagnare gli studenti nella costruzione di significati a partire dalle loro esplorazioni e intuizioni.
Inoltre, ci sono riscontri molto positivi anche dai docenti che hanno sperimentato il percorso in presenza di alunni con BES o DSA, sia per quanto riguarda la partecipazione alle attività di piegatura sia per quanto riguarda il gioco. Questo aspetto, coerente con il criterio di attenzione all'inclusività, oltre a confermare la buona accessibilità delle attività, suggerisce che esse possano funzionare come mediatori didattici capaci di rendere comprensibili concetti astratti attraverso strumenti corporei e visivi. L'approccio risulta così in linea con i principi dell'*Universal Design for Learning*: offrendo molteplici mezzi di coinvolgimento, rappresentazione, azione ed espressione, può ridurre la dipendenza dalla simbolizzazione precoce e permettere agli studenti di accedere al nucleo concettuale del contenuto matematico attraverso percorsi diversificati.

Ringraziamenti
Si ringraziano tutti i docenti che ci hanno aperto le porte delle loro classi per le sperimentazioni e che, avendo seguito i nostri corsi, hanno riproposto le attività alle loro classi. In particolare, ringraziamo la tiflologa Tiziana Angilletta e le professoresse Morena Franco e Cristina Pronzato per i preziosi suggerimenti e per loro disponibilità durante la partecipazione al progetto con l'Istituto dei Ciechi di Milano. Ringraziamo inoltre i gruppi GNSAGA e GNFM dell'Indam per il supporto.

Bibliografia

Angilletta, T., & Spreafico, M. L. S. (2022). Ad occhi chiusi: l'origami per mostrare la matematica ad alunni non vedenti. In B. D'Amore (Ed.), *Didattica della matematica come attività di ricerca in aula* (pp. 73–74). Pitagora Editrice.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario.* Matteoni Stampatore.

Ausubel, D. P. (1963). *The Psychology of Meaningful Verbal Learning.* Grune & Stratton.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View.* Holt, Rinehart & Winston.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica.* Centro documentazione educativa del Comune di Modena.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: Artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *32*, 269–294.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13–15.

Capuano, A., Storace, F., & Ventriglia, L. (2018). *Apprendimento significativo. Utilizzo didattico delle mappe concettuali.* Lattes Editori.

Kanefke, J., & Schukajlow, S. (2024). I find this task interesting, so do you? Preservice teachers' judgments of students' enjoyment, boredom, and situational interest regarding tasks with and without a connection to reality. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *27*, 499–520. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09581-8

Meyer, A., Rose, D. H., & Gordon, R. (2013). *Universal Design for Learning. Theory and Practice.* CAST.

Ministero dell'Istruzione e del Merito. (2025). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.* MIM. https://www.mim.gov.it/documents/20182/10554370/curricolo_web.pdf/f91c31a0-5ed4-65f3-bfea-fb49adaba55f?version=1.0&t=1773224873548

Naik, N. (2014). Non-digital game-based learning in the teaching of mathematics in higher education. In C. Busch (Ed.), *Proceedings of the 8th European Conference on Games-based Learning* (Vol. 2, pp. 431–436). DECHEMA.

Plass, J. L., Homer, B. D., & Kinzer, C. K. (2015). Foundations of game-based learning. *Educational Psychologist*, *50*(4), 258–283. https://doi.org/10.1080/00461520.2015.1122533

Susac, A., Bubić, A., Vrbanc, D., & Planičić, M. (2014). Development of abstract mathematical reasoning: The case of algebra. *Frontiers in Human Neuroscience*, *8*, 630. https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00679

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: Osservare, interpretare, intervenire.* Springer Science & Business Media.