DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2025 (17), 89 - 113

Articolo di riferimento (DOI: 10.33683/ddm.25.17.4)
Un'esperienza di *Universal Design for Learning* in ambito geometrico nella scuola media

Autore
Stefano Bellini

Argomenti affrontati

Il primo principio dell'UDL è stato implementato per alcuni argomenti dell'ambito della geometria, in particolare nello studio del cono, della similitudine nello spazio e della sfera.

Cono.

Il cono è una figura geometrica solida generata dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto. Dopo aver visto la definizione di cono, viene studiato lo sviluppo del cono che è formato da un settore circolare e da un cerchio e si determina una formula per l'area della superficie totale partendo dal fatto che in un settore circolare il rapporto tra l'area del settore e l'area del cerchio dal quale è estratto è uguale al rapporto tra la lunghezza dell'arco e della circonferenza del cerchio.

Infine, si determina una formula per il volume del cono con due attività differenti. Nella prima attività, con l'aiuto di GeoGebra, gli allievi deducono che la formula per determinare il volume del cono è la stessa di quella per determinare il volume della piramide. Gli allievi hanno la possibilità di aumentare il numero di lati del poligono di base della piramide regolare così da ottenere un solido che assomiglia sempre più a un cono. Nella seconda attività gli allievi hanno a disposizione un cono e un cilindro in plastica, aventi lo stesso raggio di base e la stessa altezza. Utilizzando dell'acqua gli allievi scoprono che per riempire il cilindro servono tre coni d'acqua e da questa informazione ottengono la formula. Questa figura solida è stata studiata dagli antichi matematici greci, ma non ci sono prove certe di chi abbia determinato la relazione tra il volume del cono e il volume del cilindro: il volume di un cono è equivalente a un terzo del volume di un cilindro avente base ed altezza congruenti rispettivamente alla base e all'altezza del cono.

Similitudine nello spazio.

I prerequisiti degli allievi per affrontare la similitudine nello spazio sono: l'idea che due figure sono simili se hanno la stessa forma; la definizione di poligoni simili dove due poligoni sono simili se hanno gli angoli corrispondenti congruenti e i lati corrispondenti proporzionali; la definizione di triangoli simili dove in questo caso vale che, se gli angoli corrispondenti sono congruenti, allora i lati corrispondenti sono proporzionali, e viceversa. Affinché due triangoli risultino simili è dunque sufficiente che venga soddisfatta una sola delle due condizioni. Per quanto riguarda la similitudine nello spazio la difficoltà principale è quella di determinare i triangoli simili in situazioni tridimensionali, per questo motivo è importante fornire molteplici strumenti, sia concreti sia digitali, che permettano la visualizzazione delle situazioni geometriche.

Sfera.

La sfera è una figura geometrica solida generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro. Archimede, vissuto a Siracusa, in Sicilia, dal 287 a.C. al 212 a.C. (Boyer, 2019), è stato un grande matematico e fisico, forse uno dei più grandi dell'antichità. Egli scrisse diversi trattati e quello che lui privilegiava era quello "Sulla sfera e sul cilindro". Archimede dimostrò che il volume della sfera equivale ai 2/3 del volume del cilindro circoscritto alla sfera; questo fu uno dei suoi risultati più rilevanti. Questo trattato era talmente importante per Archimede che egli volle scolpita sulla sua tomba una sfera inscritta in un cilindro circolare retto la cui altezza è uguale al diametro della sfera. Da qui si è preso lo spunto di far ripercorrere agli allievi le intuizioni di Archimede utilizzando degli artefatti, in particolare la sfera e il cilindro. Archimede dimostrò anche che il volume della sfera è il doppio del volume del cono avente come diametro di base e come altezza il diametro della sfera. La formula che permette di calcolare il volume della sfera la si può dimostrare con il principio di Cavalieri che afferma che, se due solidi possono essere disposti in modo tale che, quando vengono tagliati da piani paralleli a una base comune, ogni piano taglia entrambi i solidi producendo sezioni con la stessa area, allora i due solidi hanno lo stesso volume. Si può dimostrare la formula anche con il metodo sperimentale. Una volta determinata la formula per il volume della sfera gli allievi possono risolvere alcune situazioni riconducibili a situazioni reali.

Riferimenti bibliografici

Boyer, C. B. (2019). *Storia della matematica*. Mondadori.

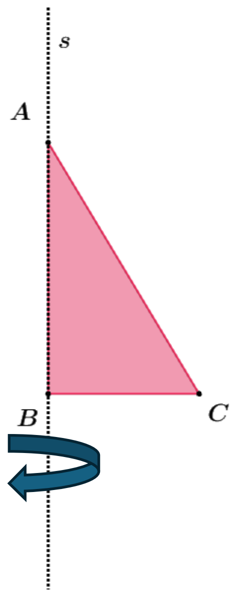
ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Rotazione attorno a un asse

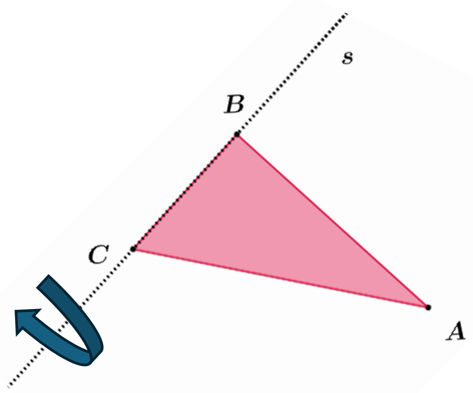
Immagina di far ruotare di 360° un triangolo rettangolo attorno a un asse di rotazione (retta *s*) che coincide, nelle tre situazioni proposte, con la retta passante da uno dei lati.

Esegui uno schizzo delle figure che ottieni.

a) Rotazione attorno al cateto AB:

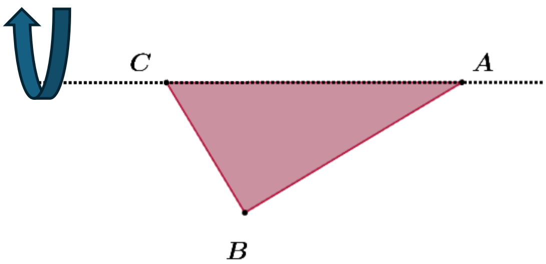


b) Rotazione attorno al cateto BC:



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

c) Rotazione attorno all'ipotenusa AC:



Strumento 1: 

Per aiutarti a visualizzare e a disegnare le tre situazioni, utilizza il bastoncino, il triangolo in cartone e il trapano.

Strumento 2: GeoGebra

Per aiutarti ulteriormente a immaginare le tre situazioni e a disegnarle puoi aiutarti con i file GeoGebra che trovi ai seguenti link:

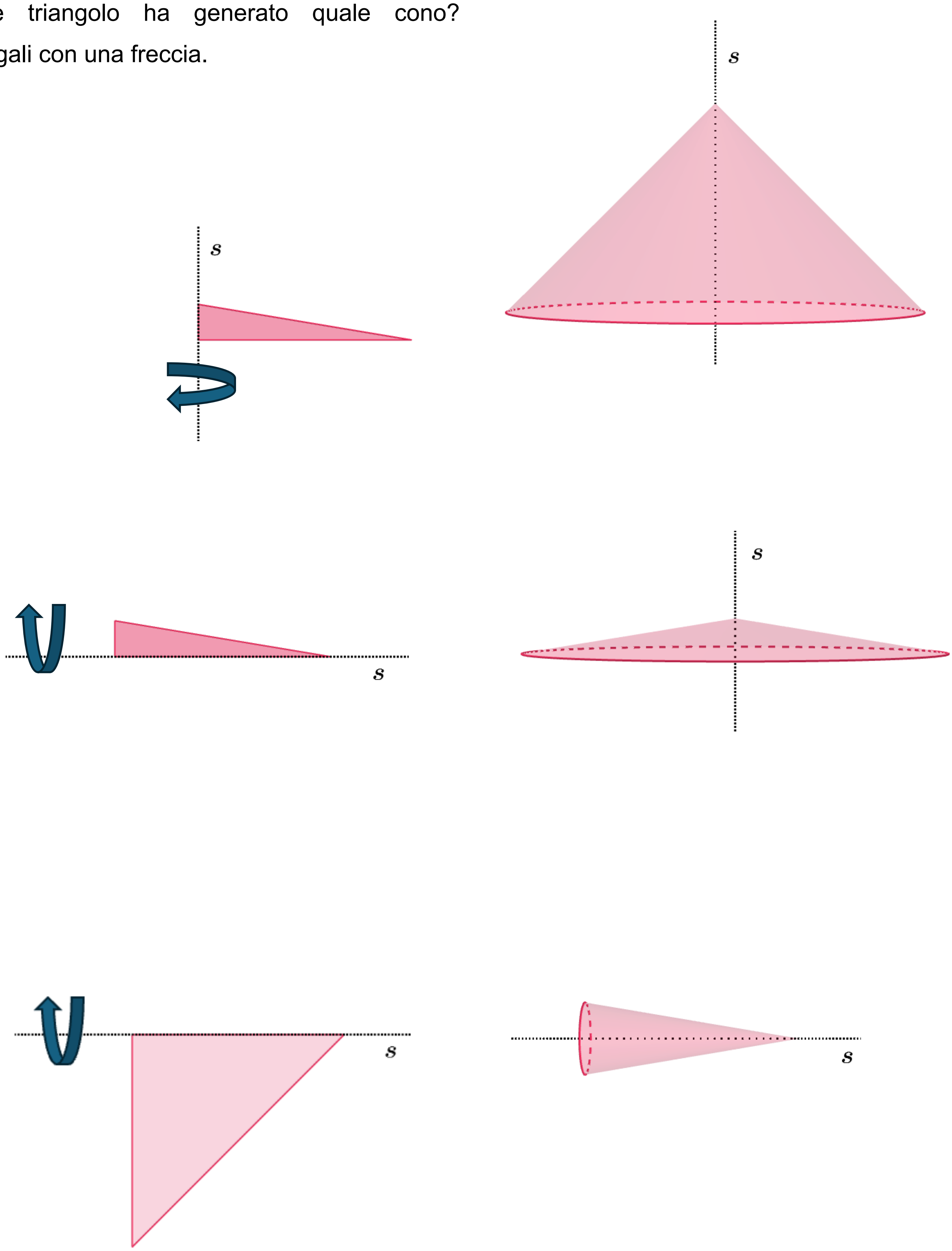
- https://www.geogebra.org/m/xyfbfmbg
- https://www.geogebra.org/m/v9ex4ujt
- https://www.geogebra.org/m/ftbfpzse

Aumenta gradualmente lo slider α e poi muovi l'immagine con l'aiuto del mouse per vedere meglio la forma della figura che si ottiene.

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

L'abbinamento corretto

Quale triangolo ha generato quale cono? Collegali con una freccia.



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Strumento 1: 

Per aiutarti a visualizzare e a disegnare le tre situazioni, utilizza il bastoncino, il triangolo in cartone e il trapano.

Strumento 2: GeoGebra

Per aiutarti ulteriormente a immaginare le tre situazioni e a disegnarle puoi aiutarti con i file GeoGebra che trovi ai seguenti link:

- https://www.geogebra.org/m/qx6pfxyc
- https://www.geogebra.org/m/x88hwdqb
- https://www.geogebra.org/m/w3tty8yz

Aumenta gradualmente lo slider α e poi muovi l'immagine con l'aiuto del mouse per vedere meglio la forma della figura che si ottiene.

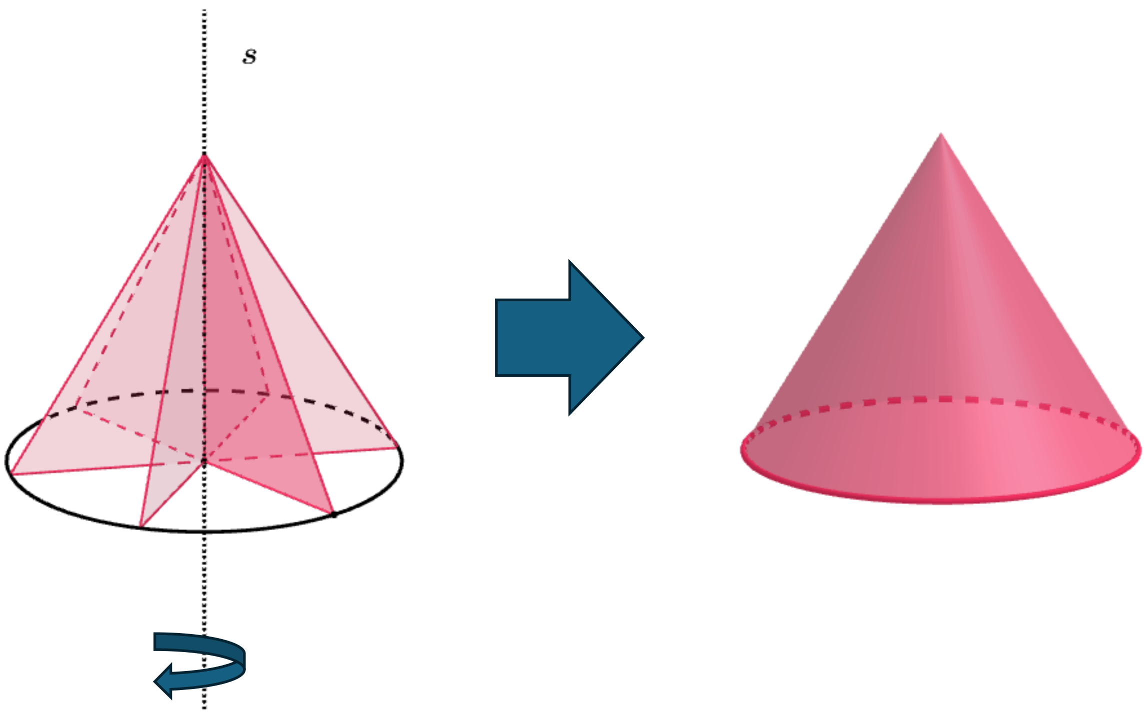
ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Cosa abbiamo visto nella scorsa lezione?

https://moodle.edu.ti.ch/smecastione/mod/resource/view.php?id=26020

Cono circolare retto

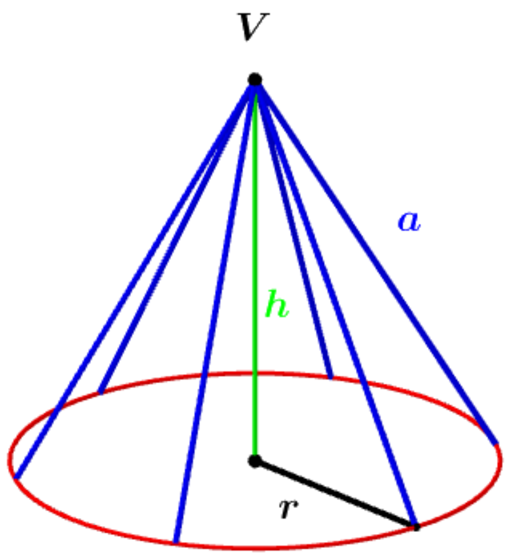
Un **cono circolare retto** è una figura geometrica solida generata dalla rotazione completa (360°) di un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto, come abbiamo visto durante la lezione 1.



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Notazione:

- V è detto vertice del cono.
- Ogni segmento che genera la superficie laterale è detto apotema $\boldsymbol{a}$.
- La distanza del vertice V dalla base è l'altezza $\boldsymbol{h}$ del cono.
- r è il raggio della circonferenza.

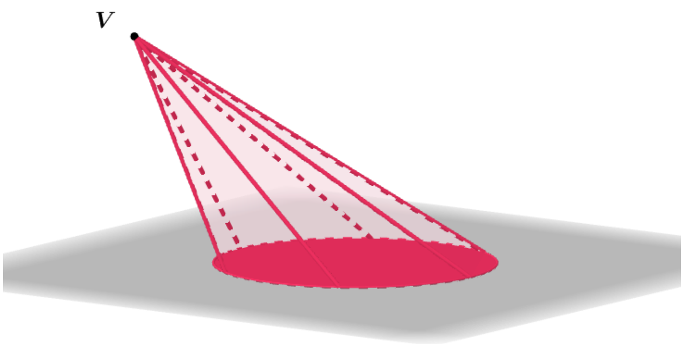


ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

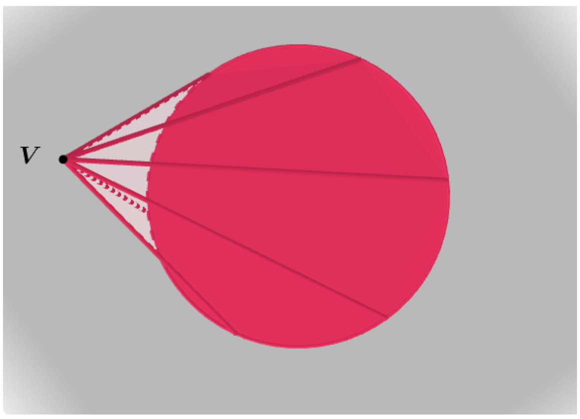
Cono circolare obliquo

Nel caso in cui il vertice V e il centro della base non sono allineati su una retta perpendicolare al piano della base si parla di cono obliquo.

Vista 1:

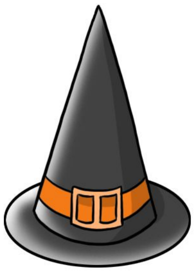


Vista 2:



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Costruiamo un cappello



Attività

Costruisci utilizzando un cartoncino un cappello di forma conica da poter utilizzare al prossimo corteo di carnevale.

Strumento 1: 

Sulla scrivania trovi alcuni coni che puoi prendere come modello.

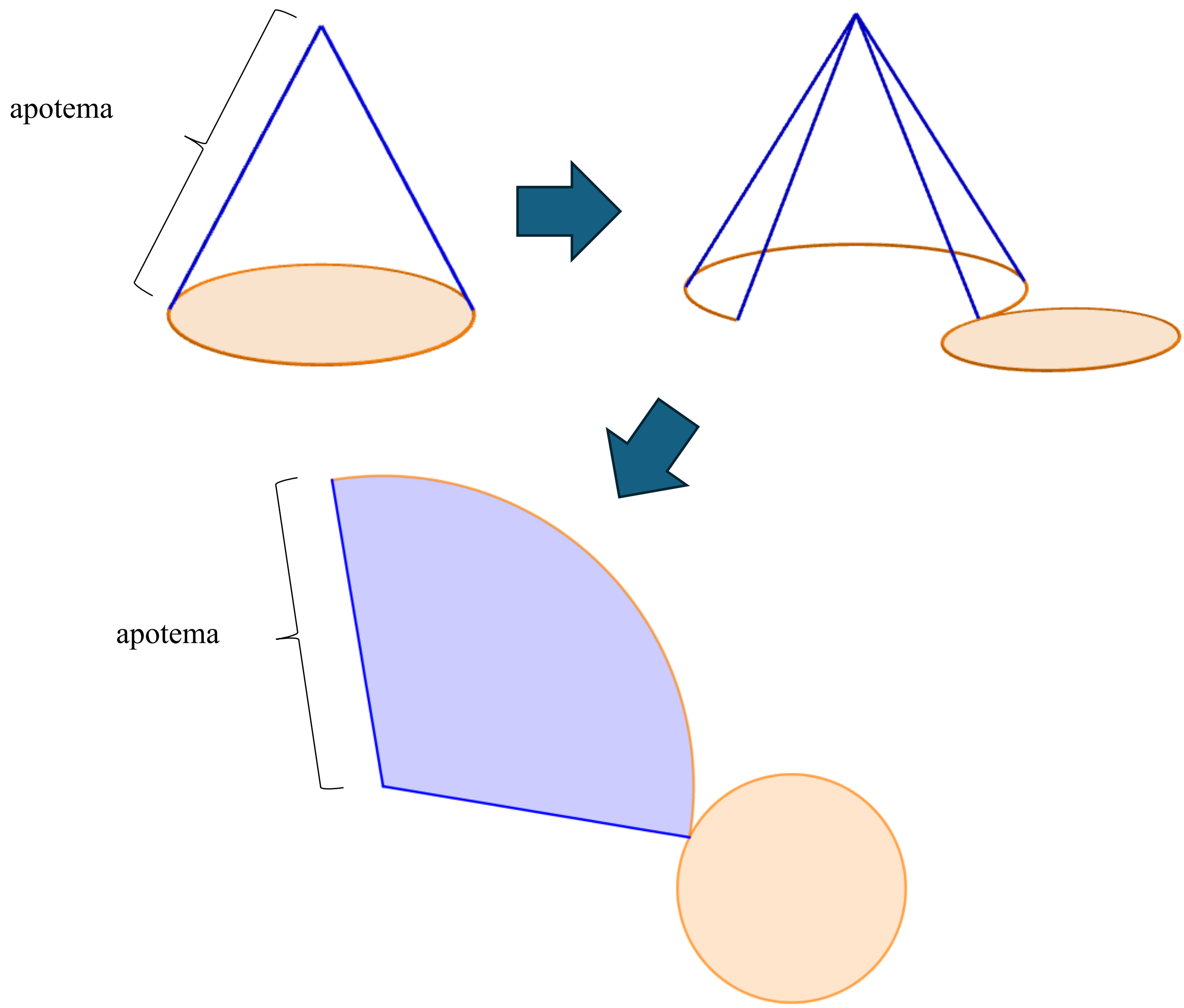
Strumento 2: 

Prova a usare il cappello di carta fornito dal docente.

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Lo sviluppo del cono

La superficie totale del cono può essere "aperta" e "distesa" completamente su un piano. Così facendo si ottiene lo sviluppo della superficie totale del cono:



Come abbiamo visto nell'attività dei cappelli lo sviluppo del cono è formato da un settore circolare (superficie laterale) e da un cerchio (superficie di base).

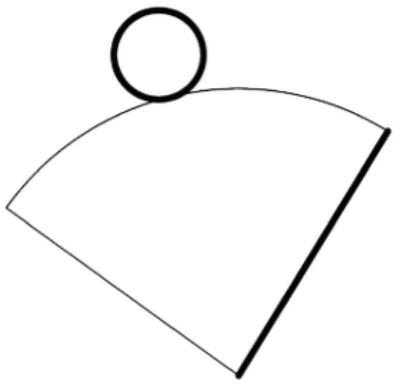
Ricorda: la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza di base, altrimenti lo sviluppo non si chiuderebbe.

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

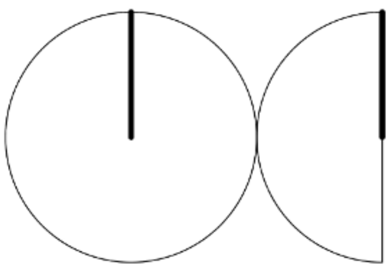
Chi ha sbagliato il cappello?

Alcuni allievi per costruire il proprio cappello di carnevale hanno proposto i seguenti progetti. Individua i cappelli che si possono costruire. Motiva le tue scelte.

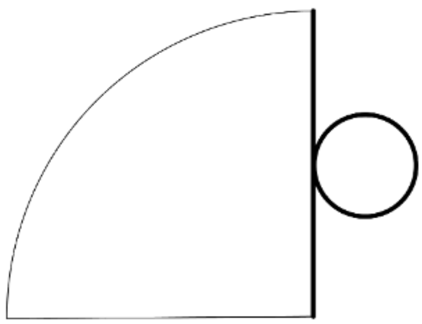
In ogni figura le parti in **grassetto** hanno le stesse dimensioni.



Motiva:

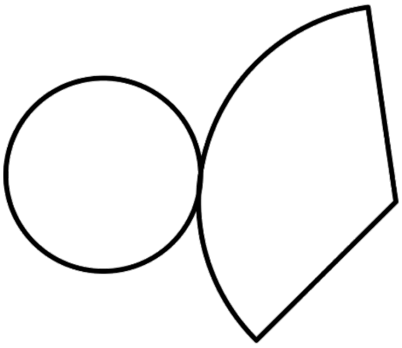


Motiva:

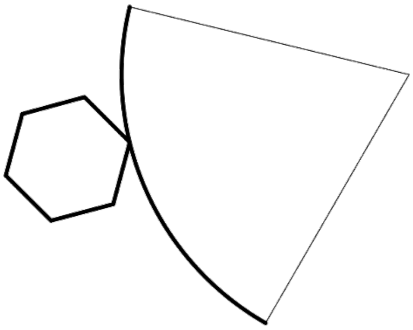


Motiva:

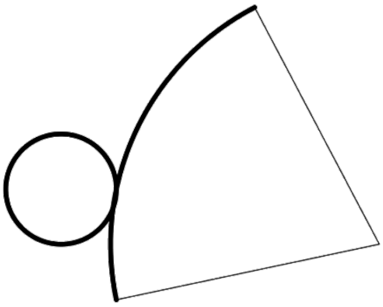
ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE



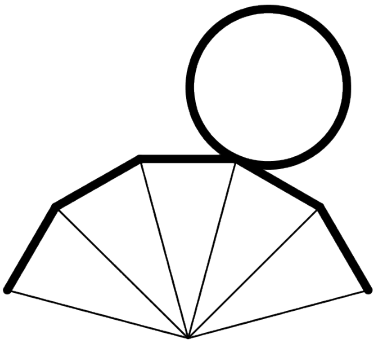
Motiva:



Motiva:



Motiva:

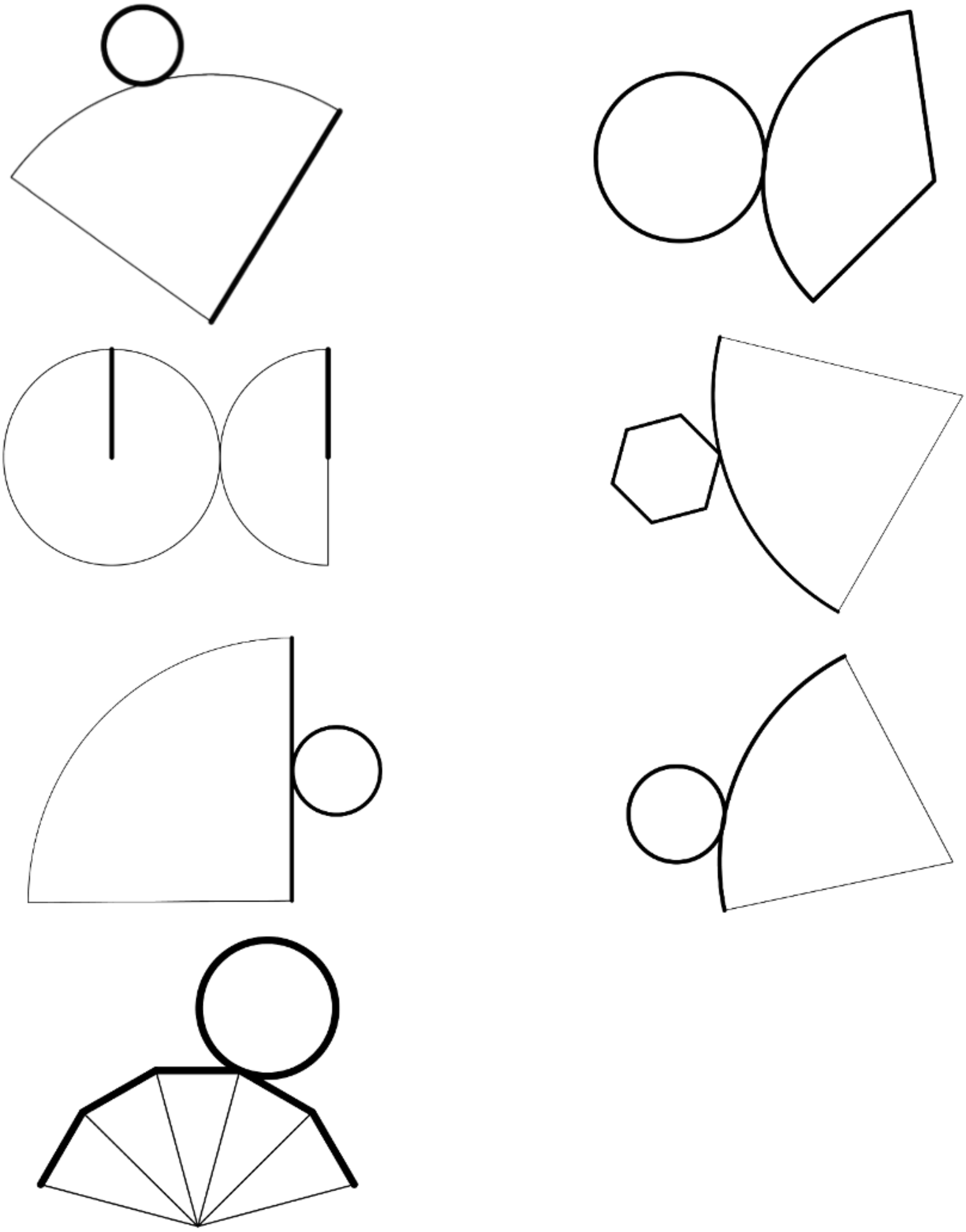


Motiva:

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Strumento: 

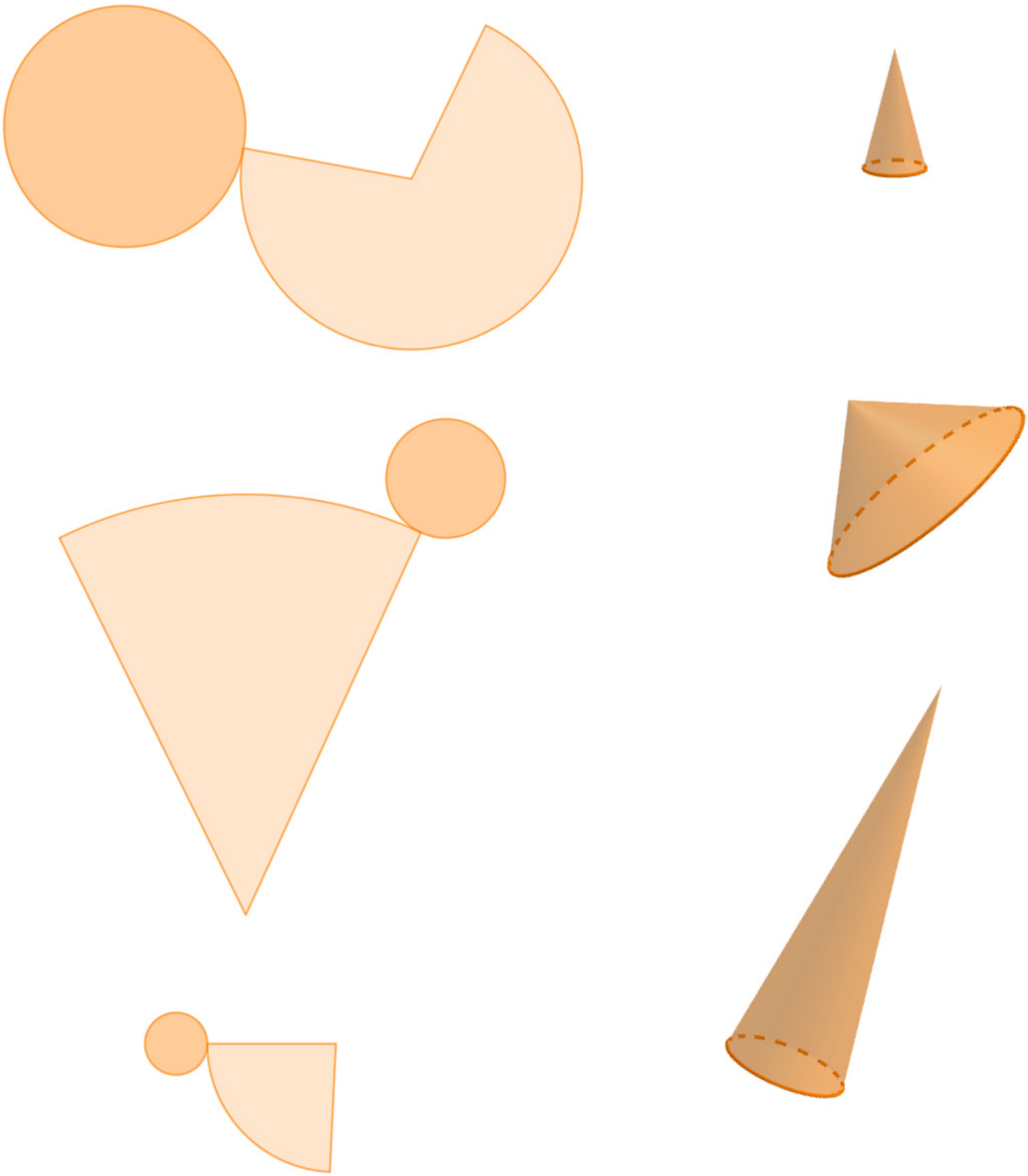
Se hai difficoltà a rispondere puoi aiutarti ritagliando lo sviluppo del cono e provando a costruire il cappellino.



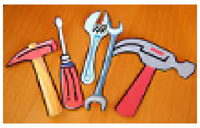
ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

L'abbinamento corretto

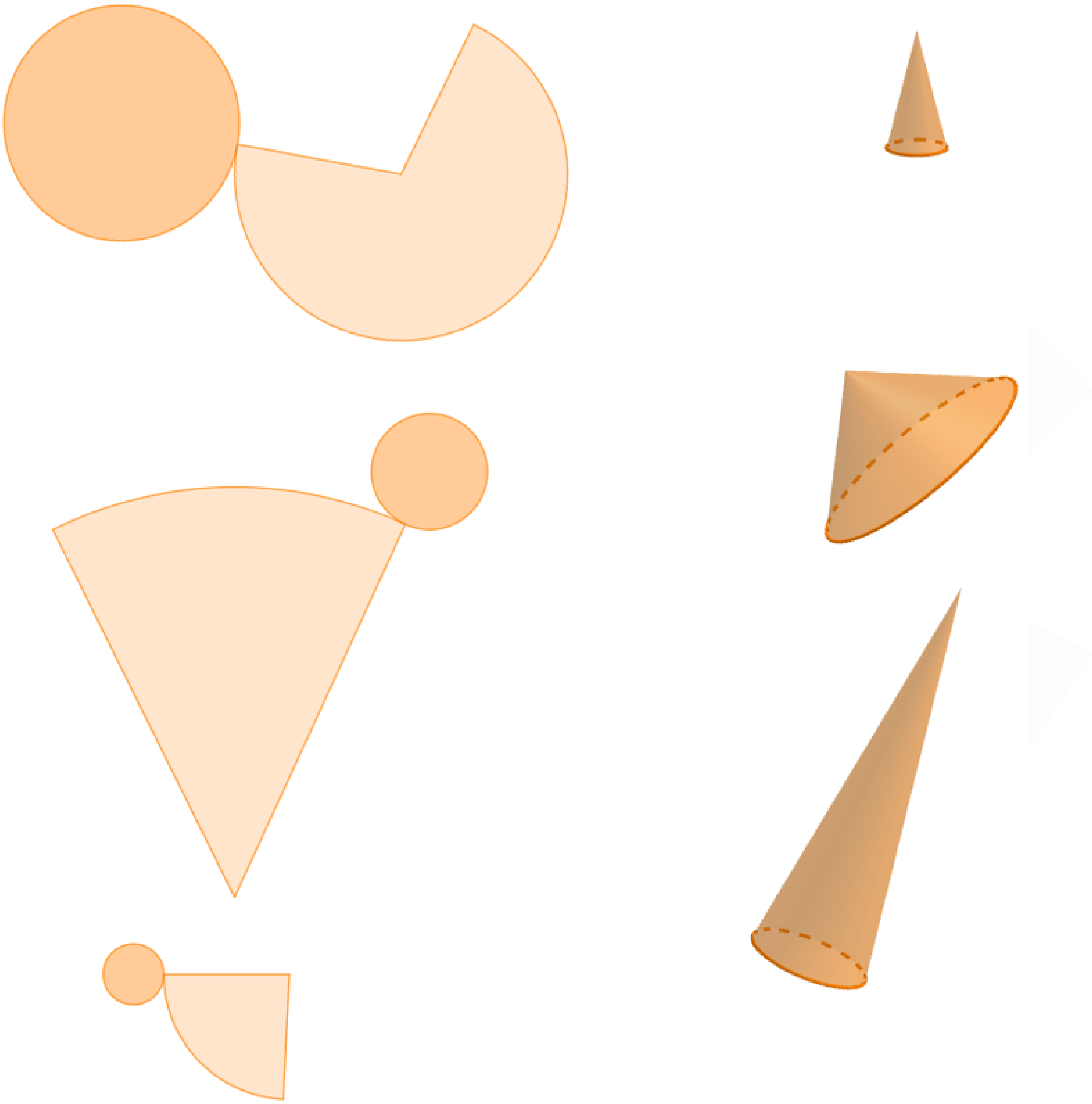
Abbina lo sviluppo del cono al cono corrispondente. Collegali con una freccia.



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Strumento 1: 

Se hai difficoltà a rispondere puoi aiutarti ritagliando lo sviluppo del cono e provando a costruirlo.



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Strumento 2: GeoGebra

Per aiutarti ulteriormente a immaginare le tre situazioni puoi aiutarti con i file GeoGebra che trovi ai seguenti link:

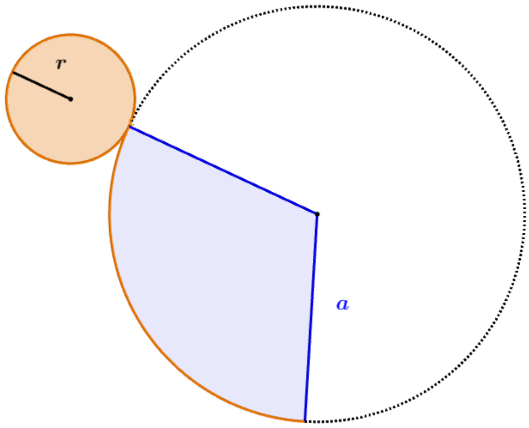
- https://www.geogebra.org/m/wdxsufrd
- https://www.geogebra.org/m/fe5cpjxw
- https://www.geogebra.org/m/hbesqymq
- https://www.geogebra.org/m/skat4gn8

Aumenta gradualmente lo slider *r* e *h* e poi muovi l'immagine con l'aiuto del mouse per vedere meglio la forma della figura che si ottiene.

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Area della superficie totale

Vogliamo trovare una formula per l'area totale (A_{tot}) del cono. Completa i seguenti punti.



Area di base:

L'area di base (A_{base}) del cono è l'area del cerchio di base:

A_{base} =……………………………

Area laterale:

La lunghezza dell'arco (l_{arco}) è uguale alla lunghezza della circonferenza di base del cono:

l_{arco} =……………………………

L'area del cerchio grande ($A_{cerchio\ grande}$) dal quale viene estratto il settore circolare è:

$A_{cerchio\ grande}$ =……………………………

La circonferenza del cerchio grande ($C_{cerchio\ grande}$) dal quale viene estratto il settore circolare è:

$C_{cerchio\ grande}$ =……………………………

Ricorda: in un settore circolare il rapporto fra l'area del settore (A_{lat}) e l'area del cerchio grande ($A_{cerchio\ grande}$) dal quale è estratto è uguale al rapporto tra lunghezza dell'arco (l_{arco}) e della circonferenza del cerchio grande ($C_{cerchio\ grande}$):

$$\frac{A_{lat}}{A_{cerchio\ grande}} = \frac{l_{arco}}{C_{cerchio\ grande}}$$

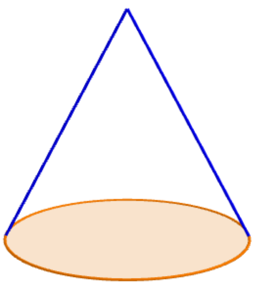
$$A_{lat} = \frac{l_{arco}}{C_{cerchio\ grande}} \cdot A_{cerchio\ grande}$$

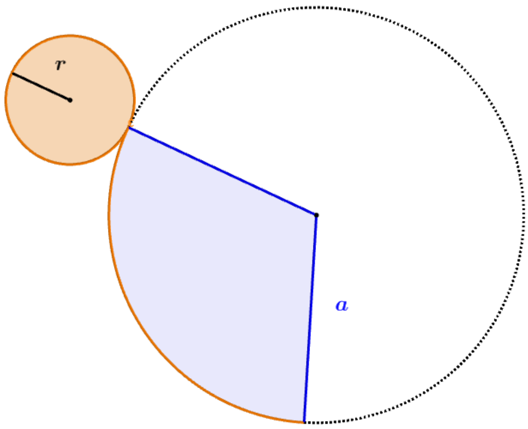
ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Conclusione: sostituisci i dati da te ottenuti nella formula dell'area laterale e semplifica:

$$A_{lat} = \frac{l_{arco}}{C_{cerchio\ grande}} \cdot A_{cerchio\ grande} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Area totale:





$$A_{tot} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

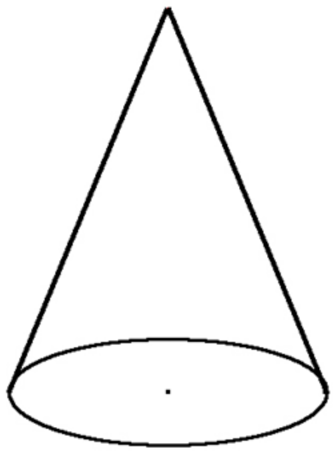
ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Esercizi: notazione e area totale

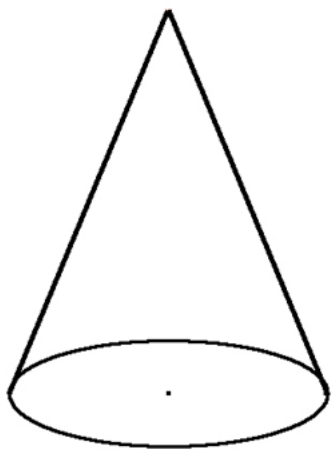
Per svolgere gli esercizi hai a disposizione tutti gli artefatti e i file GeoGebra visti finora.

1. Sul cono a lato:

    1) indica con V il vertice
    2) traccia in rosso un raggio della base,
    3) ripassa in arancione il contorno della base,
    4) traccia in verde l'altezza,
    5) ripassa in blu un apotema già tracciato e tracciane un secondo in modo da completare un triangolo rettangolo.



2. Calcola l'area totale di un cono che ha l'altezza e l'apotema lunghi rispettivamente 45 cm e 53 cm.
    1) Quale dato ti manca per calcolare l'area totale?
    2) Come puoi ricavarlo?
    3) Ora che lo hai ricavato, calcola l'area totale.

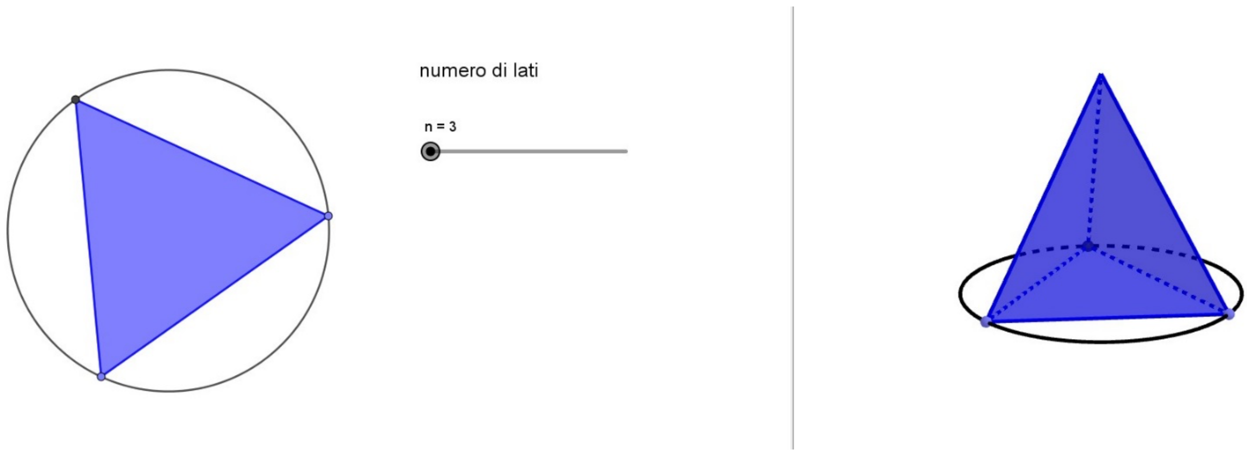


ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Volume del cono

Attività 1: GeoGebra

Aprendo il file GeoGebra al link https://www.geogebra.org/m/aynfbgsv troverai davanti a te questa schermata. Prova a variare il numero di lati (con lo slider n).



Utilizzando il file GeoGebra, prova a rispondere alle seguenti domande.

1. Cosa noti nelle figure che ottieni a sinistra?

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

2. Cosa noti nelle figure che ottieni a destra?

In terza media avete visto che il volume di una piramide è dato dalla formula:

$$V_{piramide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Come calcoleresti il volume di un cono?

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Attività 2: 

Il cono e il cilindro che trovi sul banco hanno lo stesso raggio di base e la stessa altezza.

1. Il volume del cono è maggiore, uguale oppure minore rispetto al volume del cilindro?

2. <u>Stima</u> quanti coni d'acqua servono per riempire il cilindro.

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

3. Verifica la tua ipotesi utilizzando il cono e il cilindro (aiutati con l'imbuto!).

Come calcoleresti il volume di un cono?

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Volume del cono: riassunto

Attività 1: GeoGebra

Abbiamo visto con l'attività su GeoGebra che per calcolare il volume del cono possiamo sfruttare, per analogia, la formula utilizzata per calcolare il volume della piramide.

Quindi

$$V_{cono} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

Attività 2:

Abbiamo visto con l'attività con l'acqua che il volume del cono è uguale alla terza parte del volume del cilindro avente lo stesso raggio e la stessa altezza.

Quindi

$$V_{cono} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Esercizi: volume del cono

Per svolgere gli esercizi hai a disposizione tutti gli artefatti e i file GeoGebra visti finora.

1. Determina il volume di un cono circolare retto avente l'altezza di 42 dm e il diametro di 32 dm.

2. Calcola l'area della superficie totale e il volume di un cono retto avente raggio di base di 10 cm e altezza di 18 cm.

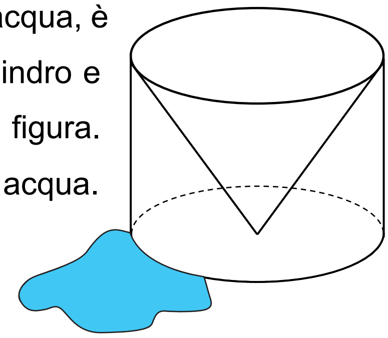
ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

3. Calcola l'area della superficie totale e il volume di un cono retto avente raggio di base e apotema lunghi rispettivamente 16 cm e 34 cm.

4. Un cono ha il raggio di base di 4 cm e l'altezza di 18 cm. Un cilindro ha il raggio di base doppio rispetto a quello del cono. Quale dovrà essere l'altezza del cilindro affinché i due solidi abbiano lo stesso volume?

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

5. In un contenitore cilindrico, alto 10 cm e riempito fino al bordo di acqua, è stato inserito un cono avente la base congruente a quella del cilindro e la stessa altezza, così come appare dalla figura. Inserendo il cono sono fuoriusciti 74 cm^3 di acqua. Determina l'area totale del cono.



1) Calcola l'area di base.

2) Determina la lunghezza del raggio di base.

3) Calcola l'apotema.

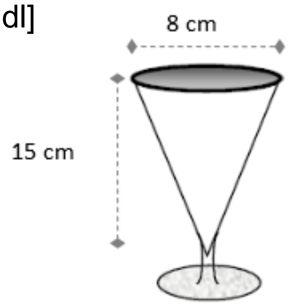
4) Calcola l'area laterale.

5) Calcola l'area totale.

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

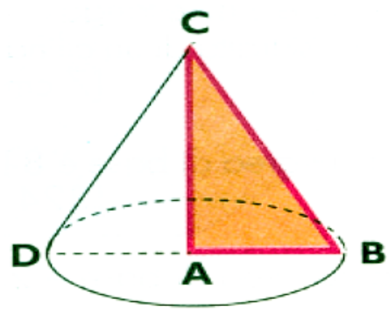
Esercizi supplementari

1. Calcola la capacità in dl del bicchiere conico rappresentato. [~2,51 dl]



2. L'area di base di un cono è circa 45,36 cm^2 e la sua altezza è 5,6 cm. Trova la sua area totale.

   1) Calcola la lunghezza del raggio. [~3,80 cm]



   2) Calcola la lunghezza dell'apotema. [~6,80 cm]

   3) Calcola l'area laterale. [~81,18 cm^2]

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

3. Un cono retto ha l'area della superficie laterale di 735π cm^2; l'apotema misura 35 cm. Determina il volume del cono. [~12930,79 cm^3]

4. Un cono retto ha il volume di 10'584π cm^3; il raggio di base misura 21 cm. Determina l'area della superficie totale del solido in questione. [~6333,45 cm^2]