

Un'esperienza di *Universal Design for Learning* in ambito geometrico nella scuola media

An experience of *Universal Design for Learning* in geometry at the lower secondary school

Stefano Bellini

Scuola media di Castione – Svizzera

✉ stefano.bellini@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo descrive un percorso didattico svolto in una quarta media del Cantone Ticino, progettato e realizzato in modo da soddisfare le crescenti esigenze di inclusività della scuola odierna. Nel perseguire questo obiettivo si è scelto di applicare il modello dell'*Universal Design for Learning* (UDL); in particolare ci si è concentrati sul primo principio del modello, che si focalizza sul fornire molteplici forme di rappresentazione dei materiali e dei contenuti della lezione. Il percorso si è concentrato sui seguenti tre argomenti geometrici: cono, similitudine nello spazio e sfera. Il presente lavoro descrive la parte di itinerario relativa al cono, includendo i riferimenti per poter consultare l'intero percorso.

Parole chiave: *Universal Design for Learning*; geometria dello spazio; scuola media; inclusività.

Abstract / The article describes an educational path implemented in a ninth grade class in the Canton of Ticino, designed to meet the growing needs for inclusiveness of today's school system. To achieve this goal, the *Universal Design for Learning* (UDL) model was chosen. Specifically, the focus was on the first principle of the model, which aims to provide multiple forms of representation for materials and lesson content. The path covered the following three geometric topics: cone, similarity in space, and sphere. This paper presents the part of the path related to the cone, along with references to consult the entire work.

Keywords: *Universal Design for Learning*; space geometry; lower secondary school; inclusiveness.

1 Introduzione

La scuola ticinese ha intrapreso un percorso volto ad aumentare il livello di inclusività degli allievi,¹ prevedendo forme di scolarizzazione obbligatoria meno selettive rispetto ad altri cantoni e rinforzando le misure di sostegno per gli allievi all'interno del sistema educativo ordinario.

Questo ha portato ad avere all'interno della scuola dell'obbligo un numero sempre maggiore di studenti con bisogni educativi particolari. Per facilitare l'integrazione di questi allievi sono state implementate molteplici misure, creando nuove figure e fornendo nuovi servizi pedagogici ed educativi. Un sistema scolastico basato sull'integrazione potrebbe però limitarsi semplicemente all'inserimento di questi studenti nella scuola, fornendo sì gli aiuti sopracitati, ma senza che il sistema scolastico modifichi la sua struttura. Per rispondere a questa sfida negli ultimi anni si sta affermando l'idea di scuola inclusiva, la quale, al contrario della scuola basata sull'integrazione, si fonda su un adattamento che permette di accogliere tutte le diversità degli allievi, ognuno dei quali ha i propri bisogni educativi e formativi. La scuola inclusiva cerca quindi di adattarsi a priori alla diversità degli studenti, come le capacità, gli interessi personali, in modo da permettere a tutti di sviluppare al massimo il proprio potenziale (Ostinelli, 2014).

Per cercare di rispondere alle esigenze di una scuola inclusiva, che vede tutti i docenti coinvolti, nell'ambito del lavoro qui presentato è stato ideato, progettato e sperimentato un percorso didattico in ambito geometrico, che tenesse conto dei bisogni degli allievi di quarta media corso base.² Per farlo si è scelto di applicare il modello dell'*Universal Design for Learning* (UDL), in particolare il primo principio che si focalizza sul fornire molteplici forme di rappresentazione dei materiali e dei contenuti della lezione. L'esperienza didattica qui presentata è parte di un più ampio lavoro di tesi Master, a cui si rimanda in caso di interesse dei lettori,³ e il cui obiettivo principale era di indagare il cambiamento nella visione della geometria da parte degli allievi dopo un percorso didattico progettato in base ai principi dell'UDL.

Dopo aver presentato le lenti teoriche dell'UDL (par. 2), verranno dapprima chiarite le scelte strutturali del percorso (par. 3), poi descritte alcune delle attività realizzate (par. 4), prima di trarre le conclusioni dell'esperienza (par. 5).

2 Quadro teorico

2.1 *Universal Design for Learning* e i tre principi fondanti

L'UDL fonda le sue origini sull'*Universal Design* (UD), un movimento nato negli anni Ottanta per la tutela dei diritti umani nell'architettura, richiedendo la costruzione di ambienti fruibili e accessibili alla maggior parte delle persone (Mace et al., 1991, citato in Savia, 2016, p. 28). Ad esempio, gli scivoli nel marciapiede sono costruzioni universali che consentono a persone su sedie a rotelle di muoversi in autonomia, ma sono utili anche alle persone che ad esempio spingono un passeggino, una sedia a rotelle o che girano in bicicletta.

1. Per semplicità verrà utilizzato sempre il termine "allievo" sia nel caso si tratti di una ragazza sia che si tratti di un ragazzo.

2. Negli ultimi due anni di scuola media ticinese gli allievi sono suddivisi in due corsi in base al livello di competenze in matematica e in tedesco: il corso attitudinale e il corso base.

3. Lavoro di Diploma di Stefano Bellini (2024), intitolato "*Universal Design for Learning* in ambito geometrico nella scuola media", svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrici: Laura Rusconi e Silvia Sbaragli. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: <https://tesi.supsi.ch/5238/>.

Negli anni Novanta, il *Center for Applied Space Technology* (CAST) estese il concetto di *Universal Design* all'apprendimento, trasferendolo e applicandolo al mondo della scuola (Hitchcock et al., 2002, citato in Agliati, 2023). L'UDL suggerisce di ideare percorsi flessibili e personalizzabili che possano essere efficaci per tutti gli studenti. I principi dell'UDL permettono di passare da una differenziazione individualizzata a una differenziazione a priori (Guidi et al., 2022): infatti, l'UDL si focalizza sulla progettazione di ambienti di apprendimento accessibili fin da subito a tutti gli allievi, e mira a fornire flessibilità nella presentazione del contenuto, nelle modalità di apprendimento e nelle valutazioni per raggiungere gli obiettivi di apprendimento. L'approccio dell'UDL punta a eliminare le barriere all'apprendimento progettando materiali e strategie che possono essere utilizzati da una vasta gamma di studenti, senza la necessità di adattamenti aggiuntivi (Meyer et al., 2022; Savia, 2016).

I principi fondanti dell'UDL sono basati sulla ricerca educativa, sulla psicologia dello sviluppo, sulle scienze cognitive e sulle neuroscienze cognitive, con lo scopo, oltre a permettere agli allievi un facile accesso fisico al materiale scolastico, di diminuire le barriere nell'apprendimento, per esempio quelle intellettive, sociali, emotive, culturali e linguistiche (Savia, 2016).

In particolare, nelle neuroscienze cognitive si distinguono tre aree del cervello:⁴

- l'area posteriore della corteccia, dedicata alla capacità di riconoscimento (Figura 1);
- l'area frontale della corteccia, dedicata alle capacità motorie ed esecutive (Figura 2);
- l'area mediana del sistema nervoso, dedicata alle capacità affettive (Figura 3).



Figura 1. Area posteriore della corteccia.



Figura 2. Area frontale della corteccia.

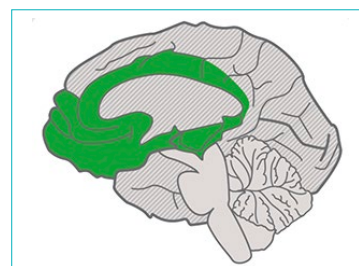


Figura 3. Area mediana del sistema nervoso.

I principi dell'UDL si riferiscono a tre aspetti fondamentali di un ambiente d'insegnamento e apprendimento: i mezzi con cui l'informazione è presentata agli allievi, i mezzi con cui gli alunni devono esprimere ciò che sanno e i mezzi con cui gli allievi vengono coinvolti nell'apprendimento. Considerando tutti questi aspetti, sono stati formulati i seguenti tre principi su cui si basa l'UDL (Zambianchi & Ferrarese, 2021).

- Principio I: *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione*. Si tratta di utilizzare varie e diversificate modalità di presentazione dei contenuti, ad esempio sfruttando materiali in formato digitale, video, artefatti concreti ecc.
- Principio II: *Fornire molteplici mezzi di azione e di espressione*. Si tratta di proporre agli studenti diversi modi per esprimersi e comunicare, ad esempio per iscritto, oralmente, tramite video ecc.
- Principio III: *Fornire molteplici mezzi di coinvolgimento*. Si tratta di proporre forme diverse di coinvolgimento relazionale, così da stimolare l'interesse, la motivazione, la persistenza, l'autoregolazione ecc.

4. Immagini tratte da: <https://www.cast.org/impact/universal-design-for-learning-udl>.

I tre principi forniscono la struttura fondante della metodologia UDL e da essi si articolano nove linee guida, che a loro volta si suddividono in punti di verifica. Questa suddivisione è riassunta nella seguente tabella (Figura 4): nella prima riga si trovano i tre principi (il principio I nella colonna centrale, il principio II nella colonna a destra, il principio III nella colonna a sinistra) ognuno di un colore diverso; sotto a ogni principio vengono declinate le tre linee guida, sempre dello stesso colore; sotto ogni linea guida vengono esplicitati i punti di verifica.

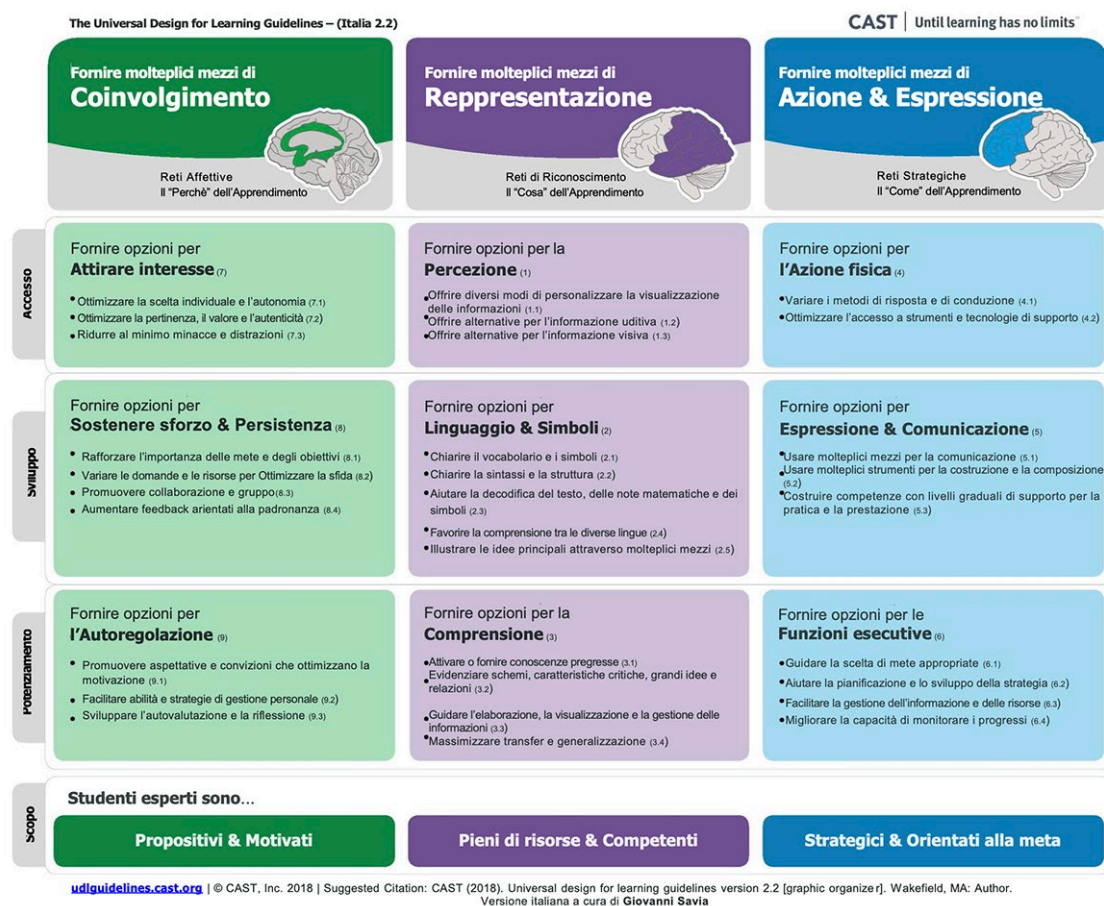


Figura 4. Modello strutturale dell'*Universal Design for Learning*.⁵

Il percorso didattico proposto in questo contributo è principalmente basato sul primo principio *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione*, ma è importante notare che durante la progettazione e realizzazione si toccano inevitabilmente tutti e tre i principi dell'UDL. Infatti, le linee guida sono fortemente interdipendenti tra loro, basti pensare ad esempio che modificando le modalità di rappresentazione si andrà a lavorare inevitabilmente anche sulla motivazione e sull'interesse.

2.1.1 Principio I dell'UDL: Fornire molteplici mezzi di rappresentazione

Questo principio si basa sul considerare che gli allievi capiscono e percepiscono le informazioni presentate a lezione in modi differenti. Per esempio, gli studenti con disabilità sensoriali, disabilità di apprendimento (dislessia, disortografia, discalculia, disgrafia), differenze culturali ecc. potrebbero aver bisogno di approcci differenti per affrontare i contenuti delle lezioni. Oppure altri studenti potrebbero

5. Immagine tratta da: <https://udlguidelines.cast.org/binaries/content/assets/udlguidelines/udlg-v2-2/udlg-graphicorganizer-v2-2-italian-nonumbers.pdf>.

comprendere più velocemente ed efficacemente le informazioni attraverso materiali didattici uditivi o visivi piuttosto che materiali in forma scritta. Questi approcci differenti possono però essere proposti anche agli altri allievi, e questo ci riporta al concetto chiave dell'UDL: «quello che è necessario per qualcuno, finisce per diventare utile per tutti» (Cottini, 2019, p. 128). È inoltre importante fornire rappresentazioni multiple per facilitare l'apprendimento e il trasferimento dell'apprendimento: in questo modo gli allievi hanno la possibilità di fare collegamenti tra i concetti. In altre parole, non esiste un solo modo di rappresentare le informazioni che sia efficace per tutti gli alunni: risulta dunque di fondamentale importanza presentare più opzioni di rappresentazione in modo da ridurre il più possibile le barriere dell'apprendimento (Savia, 2016).

Le linee guida (Savia, 2016) del principio *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione* sono tre e si suddividono ulteriormente in punti di verifica.

– *Linea guida 1: fornire differenti opzioni per la percezione.*

- *Verifica 1.1* – Offrire opzioni che permettano la personalizzazione nella presentazione dell'informazione.

Su carta le informazioni sono fisse e definitive, invece nei materiali digitali le informazioni sono più malleabili e possono essere personalizzate: per esempio, le informazioni contenute in un file PDF possono essere ingrandite, possono venire sottolineate e poi cancellate, si può usare lo strumento cattura immagine per tagliare determinate parti ecc.; oppure i video permettono di alzare o diminuire il volume, aumentare o diminuire la velocità, tornare indietro e riprendere un passaggio complicato ecc. Queste possibilità permettono di aumentare l'accessibilità delle informazioni a un maggior numero di allievi. È importante notare però che fornire materiali digitali non equivale necessariamente a fornire materiali accessibili.

- *Verifica 1.2* – Offrire alternative per le informazioni uditive.

Il suono permette di trasmettere informazioni efficacemente, oppure anche di porre enfasi su alcuni aspetti. Però le informazioni trasmesse con il suono non sono accessibili allo stesso modo a tutti gli allievi, come avviene per gli allievi con disabilità uditive o semplicemente per quegli allievi che necessitano di più tempo per elaborare informazioni orali. Dunque, strumenti quali grafici, disegni, supporti concreti ecc. possono essere delle valide alternative.

- *Verifica 1.3* – Offrire alternative per le informazioni visive.

Grafici, immagini, foto, video o testi sono strumenti molto utili per trasmettere le informazioni. Tuttavia, per gli allievi con disabilità visive o che non hanno familiarità con la grafica adoperata, queste rappresentazioni non sarebbero ugualmente accessibili. Dunque, strumenti quali testi scritti, descrizioni che accompagnano immagini e grafici, strumenti concreti ecc. sono delle valide alternative.

– *Linea guida 2: fornire molteplici opzioni per la lingua, le espressioni matematiche e i simboli.*

- *Verifica 2.1* – Chiarire il lessico e i simboli.

Parole, numeri, simboli e icone non sono ugualmente accessibili in quanto gli allievi vengono da contesti culturali diversi, parlano lingue diverse e posseggono conoscenze lessicali diverse. Per assicurarsi che tutti gli studenti abbiano accesso al lessico di base, alle etichette, alle icone e ai simboli bisognerebbe collegarli o abbinarli a rappresentazioni alternative del loro senso; ad esempio, con un glossario o con delle mappe.

- *Verifica 2.2* – Chiarire la sintassi e la struttura.

La combinazione di parole o numeri può generare nuovi significati, che, per essere compresi, necessitano la comprensione di determinate regole e strutture, come ad esempio le proprietà di un'equazione. Se la sintassi di una struttura o la struttura di una rappresentazione grafica non sono di facile comprensione per studenti, la comprensione non è garantita. Per permettere a tutti gli allievi di avere accesso alle informazioni bisogna offrire rappresentazioni differenti che precisino le relazioni sintattiche e strutturali; ad esempio, creando dei nessi con le strutture già apprese, oppure sottolineando le relazioni strutturali.

- *Verifica 2.3* – Facilitare la decodificazione di testi, notazione matematiche e simboli.
Lo sviluppo della capacità di decodificare testi, numeri o simboli per alcuni allievi necessita di tempo ed esercizio. Per assicurarsi che tutti gli allievi riescano ad avere accesso alla conoscenza è importante dare opzioni che riducano le barriere legate alla decodifica delle informazioni; ad esempio, permettendo di tenere una lista di termini chiave che consenta il chiarimento dei simboli e delle notazioni principali.
- *Verifica 2.4* – Promuovere la comprensione tra differenti lingue.
I materiali scolastici sono di solito scritti in un'unica lingua, però alcuni allievi nella classe parlano altre lingue. Per assicurare a tutti gli allievi l'accessibilità alle informazioni è importante fornire alternative, in particolare per i concetti chiave; ad esempio, fornendo i concetti chiave nella lingua madre oppure fornendo immagini per spiegare il lessico.
- *Verifica 2.5* – Illustrare attraverso molteplici mezzi.
In classe è di uso frequente fornire testi; tuttavia, il testo è un mezzo poco malleabile per presentare le informazioni. Per permettere a tutti gli allievi di avere accesso alle informazioni è importante fornire alternative: ad esempio, grafici interattivi, immagini, modelli, video, simulazioni ecc.
- *Linea guida 3*: fornire opzioni per la comprensione.
 - *Verifica 3.1* – Attivare o fornire la conoscenza di base.
Le nuove conoscenze sono più facilmente accessibili e assimilabili dagli studenti se sono espresse in modo che riattivino le conoscenze pregresse necessarie. Si possono dunque creare delle barriere negli allievi che non possiedono le conoscenze pregresse o negli allievi che le possiedono ma che non ne vedono il collegamento con la nuova conoscenza. Per questo motivo è importante ridurre queste barriere fornendo opzioni che attivino le conoscenze pregresse, oppure opzioni che permettano di collegare i concetti; ad esempio, utilizzando mappe concettuali.
 - *Verifica 3.2* – Evidenziare schemi, caratteristiche essenziali, idee principali e relazioni.
Distinguere le informazioni importanti da quelle che non lo sono non è sempre facile, soprattutto per gli allievi per cui tali informazioni sono in corso di apprendimento. Per rendere le informazioni più accessibili è importante aiutare gli allievi a individuare e a prestare attenzione alle informazioni chiave; ad esempio, evidenziando e mettendo enfasi sui concetti chiave, oppure prendendosi dei momenti a lezione per far individuare agli allievi gli elementi fondamentali.
 - *Verifica 3.3* – Guidare l'elaborazione dell'informazione, la visualizzazione e la manipolazione.
Non tutti gli studenti sono in grado di selezionare e manipolare le informazioni in modo da essere sintetizzate, ordinate, contestualizzate e fissate nella mente. Fornendo materiali ben strutturati si possono diminuire queste barriere; ad esempio, in classe si possono fornire suggerimenti nei processi sequenziali, si possono consigliare metodi organizzativi come tabelle e algoritmi per le operazioni matematiche, si possono frazionare le informazioni in parti più esigue.
 - *Verifica 3.4* – Massimizzare il transfer e la generalizzazione.
Trasferire e generalizzare le conoscenze non è sempre facile per gli allievi. Per questo motivo è fondamentale aiutare gli allievi a generalizzare, a memorizzare e a trasferire le nozioni che già posseggono in altri contesti. Per fare questo ci si serve delle rappresentazioni multiple, così che le nozioni non vengano soltanto apprese ma siano anche riattivabili in altri contesti. Gli aiuti consistono per esempio nel fornire liste di controllo, nel dare la possibilità di riguardare le informazioni più rilevanti, nel consigliare l'utilizzo di strategie mnemoniche, nel fornire strutture che colleghino le nuove conoscenze con quelle precedenti.

2.1.2 Il primo principio dell'UDL in didattica della matematica

Molteplici ricerche in didattica della matematica hanno mostrato l'importante ruolo degli aspetti semiotici nella comprensione degli oggetti e dei saperi matematici. Un ricercatore che ha fornito

importanti contributi è stato sicuramente lo psicologo Raymond Duval, il quale definisce la semi-otica come «la comprensione, o la produzione, di una rappresentazione semiotica» (Duval, 1993, p. 39, traduzione dell'autore), dove con rappresentazioni semiotiche si intendono ad esempio le figure, i grafici, i simboli matematici, una parola ecc. Duval definisce inoltre la noetica come «la comprensione concettuale di un oggetto» (Duval, 1993, pp. 39–40, traduzione dell'autore). È importante notare che non è possibile avere un'esperienza diretta degli oggetti matematici, ad esempio il *cono*, in quanto gli enti matematici non sono oggetti fisici concreti, ma si può solo venire a contatto con delle loro rappresentazioni semiotiche, rappresentando i concetti matematici attraverso un registro semiotico. Di registri semiotici, poi, ce ne sono diversi: registro orale, gestuale, algebrico, grafico, linguistico, geometrico, tutti basati anche sull'uso di artefatti. Il fatto di non poter avere un'esperienza con l'oggetto matematico potrebbe portare gli studenti a confondere gli enti matematici con le loro rappresentazioni. Questo rappresenta un aspetto fondamentale; infatti, come afferma Duval «la distinzione tra un oggetto e le sue rappresentazioni è un punto strategico per la comprensione della matematica» (Duval, 1993, p. 37, traduzione dell'autore). D'altro canto, Duval afferma anche che «la noetica e la semiotica sono inseparabili» (Duval, 1993, p. 40, traduzione dell'autore), infatti, un individuo concettualizza gli oggetti matematici facendo proprie le loro diverse rappresentazioni semiotiche. Dunque, è fondamentale rappresentare i concetti matematici con molteplici e differenti forme semiotiche, sia per comprendere meglio gli enti matematici sia per evitare di confondere gli oggetti matematici con una loro rappresentazione.

Consideriamo ad esempio alcune rappresentazioni semiotiche dell'oggetto matematico *cono*.

- La prima rappresentazione potrebbe essere la sua definizione a parole: un cono circolare retto è una figura geometrica solida generata dalla rotazione completa (360°) di un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto.
- Un'altra sua rappresentazione potrebbe essere un disegno (Figura 5).



Figura 5. Immagine tratta dal percorso didattico.

- Un'altra sua rappresentazione potrebbe essere l'utilizzo di un cono stradale fisico.
- Un'altra sua rappresentazione potrebbe essere prodotta con il software GeoGebra che permette di ruotare la figura.

Ciascuna di queste rappresentazioni ha caratteristiche e peculiarità proprie, che possono essere messe in relazione attraverso opportune attività semiotiche.

A questo proposito, Duval indica tre attività semiotiche legate alla matematica:

- la formazione di una rappresentazione identificabile, ad esempio, usando un disegno della figura geometrica, un'immagine della figura geometrica, un modello concreto della figura geometrica, scrivendo una definizione ecc.
- Il trattamento di una rappresentazione di un oggetto matematico, cioè, la trasformazione di una rappresentazione all'interno dello stesso registro semiotico. Nel caso del cono, un esempio di trattamento potrebbe essere quello di passare da un cono pieno in legno a un cono vuoto di plastica.
- La conversione di una rappresentazione di un oggetto matematico, cioè, la trasformazione di una rappresentazione da un registro semiotico a un altro. Un esempio di conversione potrebbe essere il passaggio da una figura a una definizione di cono.

Per la comprensione e la concettualizzazione degli oggetti matematici è dunque necessario utilizzare e coordinare tra loro molteplici attività semiotiche, differenti e complementari. In particolare, va favorita la conversione che permette agli allievi di concettualizzare l'oggetto matematico in questione. Da quanto appena esposto, risulta chiaro il collegamento tra il primo principio dell'UDL e l'approccio semiotico alla didattica della matematica: l'uso e la manipolazione di diverse rappresentazioni semiotiche degli oggetti della matematica è quanto mai affine alle linee guida e ai punti di verifica del principio *Fornire molteplici mezzi di rappresentazione* dell'UDL.

3 Struttura del percorso didattico

L'esperienza didattica è stata condotta in una classe quarta corso base della scuola media di Castione, composta da 11 allievi, di cui 10 femmine e 1 maschio. Quattro allievi erano iscritti al corso di differenziazione curricolare⁶ che si è tenuto nel primo semestre, ma nel corso del mese di ottobre due di loro hanno deciso di abbandonarlo e di seguire regolarmente tutte le ore di matematica. I due allievi che hanno deciso di proseguire con il corso di differenziazione curricolare si sono assentati da due ore di lezione di matematica settimanali. Il gruppo era molto eterogeneo sotto molteplici aspetti: di attitudine verso lo studio, di competenza, culturale ecc.

Il percorso didattico è costituito da diciassette lezioni: sette sul tema del cono, quattro sul tema della similitudine nello spazio e sei sul tema della sfera. Di seguito viene riportata una tabella schematica delle varie fasi e degli argomenti del percorso realizzato (Tabella 1). Per un approfondimento dei tre argomenti trattati, in riferimento al Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2022), si veda l'[Allegato 1](#).

⁶ La differenziazione curricolare è rivolta a quegli allievi che hanno molte difficoltà e hanno accumulato diversi insuccessi scolastici. Con essa vi è in una parziale sostituzione di una o più materie.

Settimana 1 (Cono)	
1 ora	2 ore
Attività 1: introduzione al cono come solido di rotazione.	Attività 2: "formalizzazione" del cono come solido di rotazione. Attività 3: scoperta dello sviluppo del cono (Parte I).
Settimana 2 (Cono)	
1 ora	2 ore
Attività 3: scoperta dello sviluppo del cono (Parte II).	Attività 4: "formalizzazione" dello sviluppo del cono.
Settimana 3 (Cono)	
1 ora	2 ore
Attività 5: area della superficie totale del cono.	Attività 5: problemi ed esercizi sull'area della superficie totale del cono. Attività 6: scoperta del volume del cono.
Settimana 4 (Cono)	
1 ora	2 ore
Attività 7: problemi ed esercizi sul volume del cono (Parte I).	Attività 7: problemi ed esercizi sul volume del cono (Parte II).
Settimana 5 (Similitudine nello spazio)	
1 ora	2 ore
Attività 8: introduzione alla similitudine nello spazio. Attività 9: tronco di piramide.	Attività 10: problemi ed esercizi sulla similitudine nella piramide.
Settimana 6 (Similitudine nello spazio)	
1 ora	2 ore
Attività 11: tronco di cono. Attività 12: problemi ed esercizi sulla similitudine nel cono.	Attività 12: problemi ed esercizi sulla similitudine nel cono.
Settimana 7 (Sfera)	
1 ora	2 ore
Attività 13: introduzione alla sfera.	Attività 14: volume della sfera.
Settimana 8 (Sfera)	
1 ora	2 ore
Ripresa dell'argomento.	Attività 15: problemi ed esercizi sul volume della sfera (Parte I).
Settimana 9 (Sfera)	
1 ora	2 ore
Attività 15: problemi ed esercizi sul volume della sfera (Parte II).	Attività 15: problemi ed esercizi sul volume della sfera (Parte III).
Settimana 10 (Bonus)	
1 ora	2 ore
Tempo lasciato a disposizione per domande, esercizi, riassunti ecc. (Parte I).	Tempo lasciato a disposizione per domande, esercizi, riassunti ecc. (Parte II).

Tabella 1. Schematizzazione del percorso didattico.

3.1 Impostazione del percorso didattico secondo l'UDL

Per quanto riguarda la *linea guida 1* dell'UDL, *fornire differenti opzioni per la percezione* (Savia, 2016), si è deciso di caricare su Moodle tutto il materiale didattico; in questo modo, ogni allievo ha sempre avuto a disposizione i file PDF, i file GeoGebra, i link ai video ecc. Infatti, mettere a disposizione i file PDF permette di personalizzare la presentazione dell'informazione, come esplicitato nel *punto di verifica 1.1* (Savia, 2016, par. 2.1.1), per esempio ingrandendo oppure evidenziando quanto scritto nel PDF. Mettere a disposizione i file GeoGebra permette sia di personalizzare la presentazione dell'informazione, come esplicitato nel *punto di verifica 1.1*, per esempio ingrandendo o ruotando una figura, sia di integrare la lingua parlata (canale uditivo), con le immagini (canale visivo), come esplicitato nel *punto di verifica 1.2*. Mettere a disposizione, per esempio, i link ai video permette di

integrare la lingua parlata (canale uditivo), con le immagini (canale visivo), come esplicitato nel *punto di verifica 1.2* e nel *punto di verifica 1.3*.

È importante notare che gli allievi hanno sempre avuto a disposizione il computer fisso dell'aula, oltre che libero accesso a Moodle. In sede sono presenti anche dei PC portatili, di cui non è però sempre stato possibile garantire l'effettiva disponibilità. Inoltre, agli allievi sono sempre stati lasciati a disposizione tutti gli artefatti visti fino a quel momento, riposti in una scatola lasciata su un banco.

Nella **Tabella 2** si fornisce una visione d'insieme sulle tre linee guida implementate nel percorso didattico.

	Fornire differenti opzioni per la percezione	Fornire molteplici opzioni per la lingua, le espressioni matematiche e i simboli	Fornire opzioni per la comprensione
Attività 1	Linea guida 1	Verifica 2.5	Verifica 3.2
Attività 2	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.2	Verifica 3.1
Attività 3	Linea guida 1	Verifica 2.2 Verifica 2.5	Verifica 3.1
Attività 4	Linea guida 1	Verifica 2.1	Verifica 3.1 Verifica 3.2
Attività 5	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.3	Verifica 3.3 Verifica 3.4
Attività 6	Linea guida 1	Verifica 2.2 Verifica 2.5	Verifica 3.1 Verifica 3.2 Verifica 3.4
Attività 7	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.2 Verifica 2.5	Verifica 3.1 Verifica 3.2 Verifica 3.3 Verifica 3.4
Attività 8	Linea guida 1		Verifica 3.1
Attività 9	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.5	Verifica 3.2
Attività 10	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.2 Verifica 2.5	Verifica 3.1 Verifica 3.2 Verifica 3.3 Verifica 3.4
Attività 11	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.5	Verifica 3.2
Attività 12	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.2 Verifica 2.5	Verifica 3.1 Verifica 3.2 Verifica 3.3 Verifica 3.4
Attività 13	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.5	Verifica 3.2 Verifica 3.4
Attività 14	Linea guida 1	Verifica 2.2	Verifica 3.1 Verifica 3.2 Verifica 3.4
Attività 15	Linea guida 1	Verifica 2.1 Verifica 2.2 Verifica 2.5	Verifica 3.1 Verifica 3.2 Verifica 3.3 Verifica 3.4

Tabella 2. Tabella che mostra quali punti di verifica sono stati usati nelle rispettive lezioni.

In questo contributo analizzeremo le attività relative al primo dei tre argomenti, ovvero il cono. Le schede di queste attività proposte a lezione sono riportate negli [Allegati 2-8](#).

4 Descrizione del percorso didattico sul cono

Nel presente paragrafo vengono descritte le prime sette attività del percorso didattico, quelle riferite all'argomento del cono. La scelta si basa principalmente su un criterio di economia: la descrizione completa del percorso (disponibile nel lavoro di tesi già citato) sarebbe stata eccessivamente lunga; allo stesso tempo, la descrizione delle sette attività relative al cono è già sufficiente per rendersi conto in modo esaustivo di come sia possibile implementare i principi e le linee guida dell'UDL all'interno di attività di matematica.

Ciascuna delle attività viene presentata attraverso un titolo che ne sintetizza l'argomento, e una serie di elementi descrittivi: le *finalità* focalizzano l'attenzione sugli apprendimenti che si vogliono incentivare; gli *aspetti su cui far leva* chiariscono le scelte di artefatti, strumenti e metodologie adottate per ciascuna attività; *UDL* presenta le scelte operate in termini del primo principio dell'UDL, con riferimento alle *linee guida* e ai *punti di verifica* (Savia, 2016) esplicitati nel par. 2.1.1; infine, il *resoconto di quanto svolto in classe* illustra ciò che è stato proposto in classe in riferimento al primo principio dell'UDL e le produzioni degli allievi.

4.1 Attività 1 – Introduzione al cono come solido di rotazione

4.1.1 Elementi descrittivi dell'attività

Finalità. Visualizzare situazioni geometriche nello spazio.

Aspetti su cui far leva. In questa lezione si vuole sviluppare e rafforzare negli allievi la capacità di visualizzare situazioni geometriche, con l'aiuto di artefatti concreti, immagini e GeoGebra.

UDL. In riferimento alla *linea guida 1* dell'UDL nella lezione vengono offerti degli artefatti quale alternativa alle informazioni uditive e visive: bastoncini, triangoli in cartoncino, un trapano elettrico, file GeoGebra. Questi supporti, infatti, facilitano la visualizzazione della situazione tridimensionale da parte degli allievi.

Per quanto riguarda la *linea guida 2*, in questa lezione agli allievi si chiede di lavorare sul concetto chiave della lezione utilizzando artefatti concreti e GeoGebra, come esplicitato nel *punto di verifica 2.5*.

La *linea guida 3* entra in gioco nella fase conclusiva dell'attività: negli ultimi minuti della lezione, infatti, si chiede agli allievi di scrivere su un foglio quali siano i concetti importanti della lezione. In questo modo, gli allievi sono spinti a riflettere sulla lezione appena svolta, diversamente da quanto accadrebbe in una conclusione condotta esclusivamente dal docente senza lo stimolo alla partecipazione. Scrivere e poi mettere in comune quanto imparato permette inoltre di porre ulteriormente l'accento sull'idea centrale della lezione, come esplicitato nel *punto di verifica 3.2*. L'idea è di lasciare agli allievi, alla fine di ogni lezione una traccia dell'attività svolta, per esempio chiedendo loro di scrivere che cosa hanno imparato di nuovo, quali termini nuovi hanno incontrato, quale nuova formula hanno scoperto. Questo permette di rendere espliciti i concetti chiave e allo stesso tempo di tenere una traccia delle lezioni, con l'ulteriore vantaggio di lasciare agli allievi una bozza dalla quale partire per poi preparare il riassunto per la verifica.

4.1.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione viene introdotto il cono come solido di rotazione. La lezione inizia chiedendo agli allievi di immaginare quale figura solida viene generata dalla rotazione di un triangolo rettangolo

attorno a un suo cateto, e di provare a farne uno schizzo sulla scheda ([Allegato 2](#)). A questa domanda, molti allievi rispondono che si genera una piramide. A questo punto il docente permette a tutti gli allievi di utilizzare gli artefatti concreti e digitali proposti ([Figure 6 e 7](#)), che supportano e rafforzano la visualizzazione nello spazio. La possibilità di poter lavorare con diversi artefatti porta tutti gli allievi a dedurre che non si genera una piramide, bensì un cono.

Durante la lezione gli allievi risultano molto incuriositi dai molteplici artefatti utilizzati. In particolare, vi è un certo apprezzamento da parte degli allievi riguardo la possibilità di poter usare il trapano e il file GeoGebra: il primo permette di avere un'esperienza diretta con la rotazione del triangolo che genera il cono e il secondo permette di tenere una traccia del triangolo che ruota in modo da visualizzare il cono.



Figura 6. Artefatto concreto utilizzato per facilitare la visualizzazione del solido di rotazione.

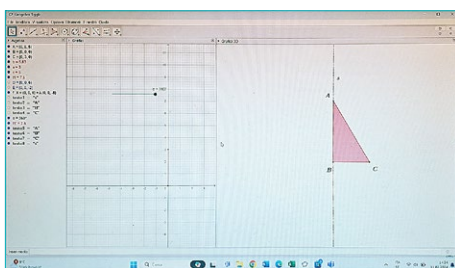


Figura 7. File GeoGebra utilizzato per facilitare la visualizzazione del solido di rotazione.

Alcuni allievi riscontrano difficoltà nel disegnare i coni, come si può vedere nella [Figura 8](#). In particolare, la difficoltà sembra risiedere nel disegnare su un supporto bidimensionale una visione prospettica del cono.

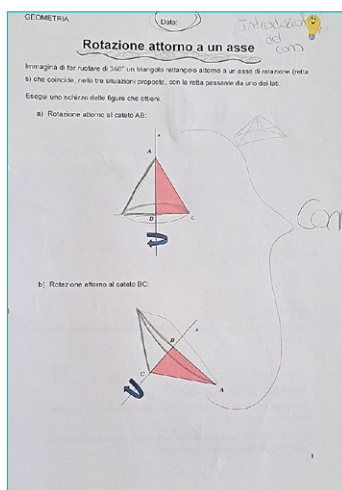


Figura 8. Coni disegnati da un allievo.

Non vi sono problemi, invece, nell'abbinare la coppia triangolo-asse di rotazione con il cono corrispondente, come nella seguente richiesta (Figura 9).

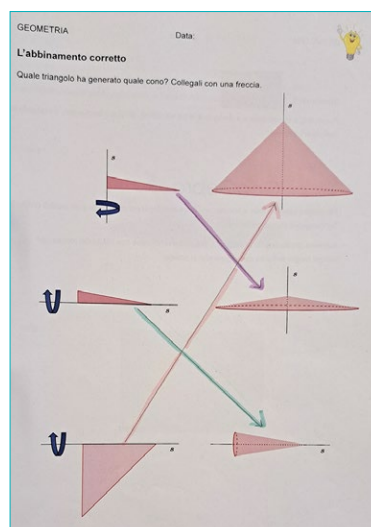


Figura 9. Esercizio svolto da un allievo.

4.2 Attività 2 – “Formalizzazione” del cono come solido di rotazione

4.2.1 Elementi descrittivi dell'attività

Finalità. Conoscere la notazione di base degli elementi caratteristici del cono.

Aspetti su cui far leva. Si mette a disposizione un breve video quale strumento per riprendere l'attività 1 (link disponibile insieme alle schede di questa attività nell'[Allegato 3](#)). In questa lezione, si vuole quindi far leva sulla ripresa di un argomento. Si opta per questo strumento per riprendere le conoscenze precedenti, al fine di accrescere la familiarità degli allievi con l'uso di video in ambito didattico.

UDL. In riferimento al *punto di verifica 2.2*, diventa importante per la classe quando si va a riprendere una nozione precedentemente appresa. La lezione inizia quindi informando gli allievi che si riprende l'attività 1, tramite un breve video, così da rientrare velocemente nell'argomento. Inoltre, agli allievi viene esplicitato che, dopo il video, si daranno dei nomi alle parti fondamentali del cono, e che questi nomi serviranno per affrontare le prossime lezioni.

Con il video iniziale, in riferimento alle linee guida dell'UDL, si riesce a offrire alternative per l'informazione uditiva e visiva. In particolare, optare per il video permette di riattivare le conoscenze pregresse in pochi secondi, consentendo agli allievi di riattivare ciò che hanno concluso al termine della lezione precedente, come esplicitato nel *punto di verifica 3.1*.

L'obiettivo della lezione è di presentare i termini matematici necessari per le successive cinque lezioni; in riferimento al *punto di verifica 2.1* si intende dunque “chiarire il lessico e i simboli” con brevi pagine di teoria. A fine lezione, per aiutare gli allievi a riassumere i contenuti, si chiede loro di scrivere su un foglio di carta quali sono i nuovi termini incontrati a lezione.

Per quanto riguarda il *punto di verifica 1.3*, agli allievi sono stati forniti dei coni in legno e in plastica di varie dimensioni da poter toccare e guardare.

4.2.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione viene introdotta la notazione di base relativa al cono. Il fatto di avere a disposizione gli artefatti concreti aiuta gli allievi a visualizzare e a riconoscere in modo corretto i vari elementi del

cono. Come si può vedere nella **Figura 10**, gli allievi ritengono utile riportare per iscritto alcuni termini relativi al cono nel proprio riassunto, che può essere utilizzato durante le lezioni.

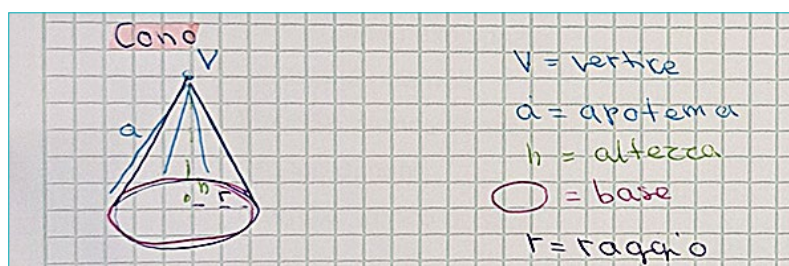


Figura 10. Contenuti dell'attività 2 che un allievo ritiene importanti al termine della lezione.⁷

4.3 Attività 3 – Scoperta dello sviluppo del cono

4.3.1 Elementi descrittivi dell'attività

Finalità. Scoprire che la superficie laterale del cono non è altro che un settore circolare "curvato"; scoprire che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza di base, altrimenti lo sviluppo non si chiude.

Aspetti su cui far leva. In questa lezione si propone un'attività concreta, anche per fornire agli studenti esempi di come un argomento di geometria legato alla vita di tutti i giorni possa permettere di comprendere meglio il problema. Inoltre, anche in questo caso gli allievi lavorano molto sulla visualizzazione.

UDL. Con riferimento alla *linea guida 1* dell'UDL, si vogliono anzitutto fornire differenti opzioni per la percezione. A tal fine, in particolare, vengono offerti degli artefatti come alternativa alle informazioni uditive e visive, ovvero alcuni coni di plastica, di legno e di cartone. In riferimento al *punto di verifica 2.2*, considerando che la lezione è impostata in modo che gli allievi lavorino autonomamente, viene esplicitato loro come procedere, dove trovare il materiale didattico e il tempo a disposizione per svolgere l'attività. Inoltre, per illustrare e rimarcare l'idea principale che la superficie laterale di un cono è un settore circolare, il docente si aiuta anche con le mani, cercando con i gesti di mettere enfasi su questo fatto. In questo caso, ci si riferisce anzitutto al *punto di verifica 2.5* e al *punto di verifica 3.1*, infatti, oltre a usare le mani come ulteriore mezzo per illustrare le idee principali, vengono anche utilizzati gesti per riattivare le conoscenze di questa lezione.

4.3.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione, gli allievi costruiscono un cappellino a forma di cono seguendo le istruzioni riportate nell'[Allegato 4](#). Vengono forniti alcuni artefatti (**Figure 11 e 12**), che supportano la visualizzazione e la costruzione. Come primo sostegno, si lasciano dei coni sulla cattedra che gli allievi possono usare per costruire il cappellino. Come secondo sostegno, si lasciano dei cappellini di cartone sulla cattedra che gli allievi possono tagliare e aprire. Dopo aver costruito il cappellino, si chiede agli allievi quali caratteristiche servono per passare dal cappellino a un cono.

La motivazione e la curiosità degli allievi risulta elevata, forse anche perché a molti di loro vengono in mente dei bei ricordi delle elementari. Non richiedendo nessun calcolo, inoltre, l'attività risulta accattivante anche per gli allievi con più difficoltà.

7. Si noti come l'allievo avrebbe dovuto colorare il cerchio e non solo la circonferenza.



Figura 11. Artefatti utilizzati per costruire i propri cappellini.



Figura 12. Cappellini da compleanno utilizzati per costruire i propri cappellini.

Per costruire un cappellino gli allievi adottano molteplici strategie:

- arrotolare un foglio e tagliare la base;
- ritagliare un triangolo e chiuderlo;
- utilizzare i coni forniti per farli rotolare su un foglio per poi ritagliare il settore circolare;
- aprire il cappellino e ricalcare il settore circolare.

A nessun allievo viene in mente di utilizzare il compasso per disegnare un settore circolare; per costruire la base del cono, tutti gli allievi ricalcano semplicemente la base dei coni forniti come materiali. Procedendo in questo modo, è facile concludere che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza. Nella Figura 13 si può vedere quanto prodotto dagli allievi.



Figura 13. Cappellini costruiti dagli allievi.

4.4 Attività 4 – “Formalizzazione” dello sviluppo del cono

4.4.1 Elementi descrittivi dell'attività

Finalità. Sapere che lo sviluppo di un cono è composto da un settore circolare e da un cerchio; sapere che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza di base.

Aspetti su cui far leva. In questa lezione si vuol far leva sulla ripresa di un argomento e sul presentare lo sviluppo del cono con l'aiuto di immagini, sempre spiegando a una velocità che permetta a tutti di seguire. Nella lezione viene anche integrata una fase di esercitazione, per rafforzare la visualizzazione di situazioni geometriche e verificare la comprensione dei concetti trattati nella prima fase.

UDL. In questa lezione, in riferimento al *punto di verifica 2.1*, si vogliono anzitutto chiarire il lessico e i simboli, e ciò con una breve pagina di teoria (prima scheda dell'[Allegato 5](#)). Per aiutare gli allievi a memorizzare il lessico si utilizzano dei colori. Per esempio, si scrive "superficie laterale" con il colore blu, e si colora di blu la superficie laterale. In riferimento al *punto di verifica 3.1*, si riattivano le conoscenze pregresse riprendendo, sempre nella suddetta pagina di teoria, il fatto che lo sviluppo del cono è composto da un settore circolare e da un cerchio e ricordando agli allievi che si era giunti alla conclusione che la lunghezza dell'arco del settore circolare è uguale alla lunghezza della circonferenza di base. Questa breve pagina di teoria viene inoltre utilizzata per evidenziare schemi, caratteristiche essenziali, idee principali e relazioni, come esplicitato nel *punto di verifica 3.2*. Poiché nella lezione precedente gli allievi hanno lavorato sui concetti di questa lezione inconsapevolmente, per fare un po' di chiarezza e portare un po' di ordine, si decide in questa lezione di racchiudere le informazioni ricavate nell'attività 3 in una pagina di teoria. Conclusa la fase teorica, si passa alla fase di esercitazione, nella quale – con riferimento ai principi dell'UDL – si cerca di fornire differenti opzioni per la percezione. A tale scopo, si dà la possibilità agli allievi di costruire un artefatto, come alternativa alle informazioni uditive e visive.

4.4.2 Resoconto di quanto svolto in classe

Nella lezione si affronta lo sviluppo del cono e si eseguono alcuni esercizi. Dopo aver lavorato bene durante l'attività dei cappellini ([Allegato 4](#)), la scheda di teoria (prima scheda dell'[Allegato 5](#)) viene compresa con facilità; infatti, gli allievi hanno già scoperto le caratteristiche principali dello sviluppo del cono, si tratta di istituzionalizzarle.

Nella Figura 14 si può vedere come alcuni allievi utilizzano i colori in modo non coerente, ad esempio sottolineando *superficie di base* con il colore verde e poi utilizzando sempre il colore verde per indicare la circonferenza e l'arco.

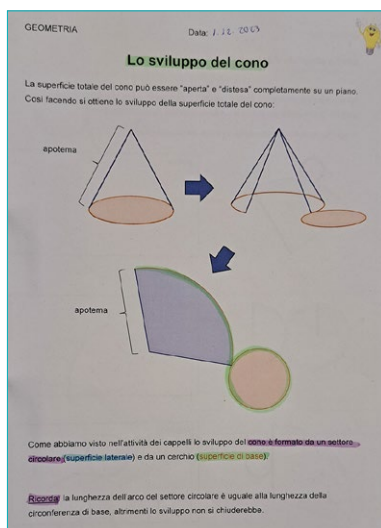


Figura 14. Sottolineature dei contenuti ritenuti importanti per un allievo.

Per quanto riguarda l'attività "Chi ha sbagliato il cappello?" (seconda e terza scheda dell'[Allegato 5](#)), si fornisce una copia delle figure disegnate su scheda (strumento nella quarta pagina dell'[Allegato 5](#)) in

modo che l'allievo possa ritagliarle e controllare se siano effettivamente gli sviluppi di un cono. alcuni allievi preferiscono argomentare la risposta utilizzando i colori, come possiamo vedere nella Figura 15.

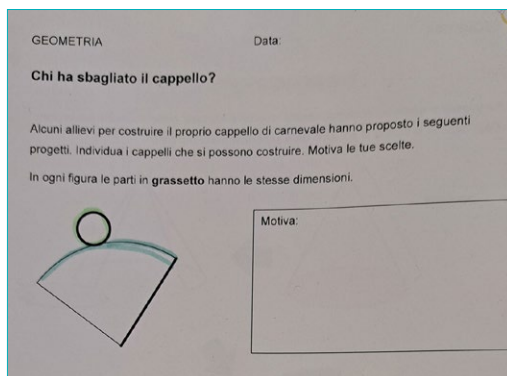


Figura 15. Soluzione proposta da un allievo utilizzando i colori.

Altri allievi scelgono invece di provare ad argomentare a parole la loro risposta, come si può vedere nella Figura 16. In questo caso si riscontra una certa difficoltà nell'utilizzo corretto del linguaggio, anche se il concetto espresso è giusto.

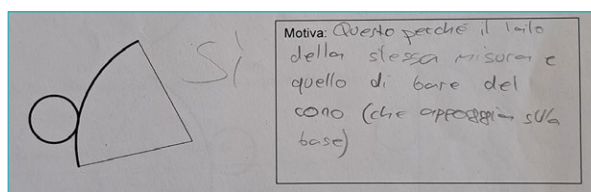


Figura 16. Soluzione proposta da un allievo utilizzando un'argomentazione a parole.

Infine, l'esercizio "L'abbinamento corretto" che richiede di abbinare lo sviluppo al cono corrispondente (quinta scheda dell'[Allegato 5](#)) non presenta difficoltà per gli allievi; se ne può vedere un esempio di soluzione nella Figura 17. Anche in questo caso, gli allievi hanno a disposizione degli strumenti: una copia delle figure disegnate su scheda (sesta scheda dell'[Allegato 5](#)) per poterle eventualmente ritagliare e provare a chiudere; un apposito file GeoGebra.

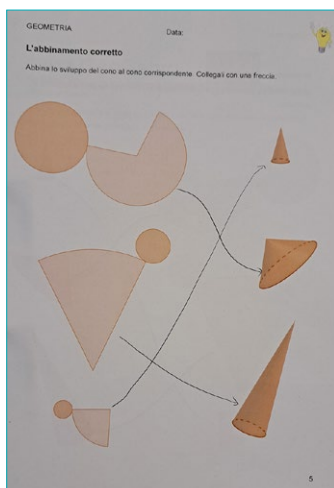


Figura 17. Soluzione di un allievo.

4.5 Attività 5 – Area della superficie totale del cono

4.5.1 Elementi descrittivi dell'attività

Finalità. Determinare una formula per l'area della superficie totale del cono e saperla applicare.

Aspetti su cui far leva. La lezione è divisa in una fase teorica e una di esercitazione. Nella fase di esercitazione, si vogliono aiutare gli allievi a trovare delle possibili strategie da attuare quando risolvono esercizi di geometria. Come prima strategia, si chiede agli allievi di colorare di diversi colori alcuni elementi del cono, come l'apotema e il raggio del cerchio di base. L'idea è che, distinguendo con diversi colori i vari elementi del cono, gli allievi abbiano un'idea più chiara della situazione geometrica. Poi, nel secondo esercizio, agli allievi vengono proposte delle domande progressive atte a farli riflettere passo dopo passo nella risoluzione del problema. Durante l'attività gli allievi possono consultare i loro riassunti e formulari e avere accesso a tutte le risorse finora viste in classe.

UDL. In riferimento al *punto di verifica 3.3*, le informazioni oggetto della presente lezione vengono introdotte in maniera progressiva e, per risolvere gli esercizi, si forniscono suggerimenti espliciti. In particolare, agli allievi si chiede di calcolare alcune misure che sarà successivamente necessario utilizzare per individuare la formula dell'area della superficie totale del cono. Si è optato per una scheda strutturata in questo modo ([Allegato 6](#)), perché determinare una formula non è generalmente un compito facile per gli allievi. Una scheda guidata può rivelarsi una modalità efficace in questo caso. In riferimento al *punto di verifica 2.1*, i simboli che compongono la succitata formula dell'area della superficie totale del cono vengono chiariti con l'ausilio di abbreviazioni – per esempio, l'area di base è stata abbreviata in A_{base} – e si utilizzano dei colori per facilitare la comprensione di alcuni termini matematici. Il *punto di verifica 3.4* viene implementato nella conclusione della scheda guidata fornendo agli allievi i mezzi per generalizzare l'area totale di un cono. In altre parole, nella lezione si determina la formula per calcolare l'area totale di un qualsiasi cono, formula utilizzabile quindi anche in altre situazioni. Da ultimo, in riferimento al *punto di verifica 2.3*, agli allievi si consente di tenere il proprio riassunto e formulario, per assicurarsi che «tutti gli studenti abbiano uguale accesso alla conoscenza» (Savia, 2016, p. 75).

4.5.2 Resoconto di quanto svolto in classe

Per raggiungere l'obiettivo didattico, nella lezione sono anche stati svolti alcuni esercizi (terza pagina dell'[Allegato 6](#)). La scelta di proporre una scheda guidata risulta efficace; infatti, in questo modo gli allievi sono riusciti a completarla in autonomia (si veda un esempio di compilazione in [Figura 18](#)).

GEOMETRIA Data: _____

Area della superficie totale

Vogliamo trovare una formula per l'area totale (A_{tot}) del cono. Completa i seguenti punti.

Area di base:
L'area di base (A_{base}) del cono è l'area del cerchio di base.
 $A_{base} = r^2 \cdot \pi$

Area laterale:
La lunghezza dell'arco (l_{arco}) è uguale alla lunghezza della circonferenza di base del cono.
 $l_{arco} = 2 \cdot r \cdot \pi$ $\pi \approx 3,14$

L'area del cerchio grande ($A_{cerchio\ grande}$) dal quale viene estratto il settore circolare è:
 $A_{cerchio\ grande} = R^2 \cdot \pi$

La circonferenza del cerchio grande ($C_{cerchio\ grande}$) dal quale viene estratto il settore circolare è:
 $C_{cerchio\ grande} = 2 \cdot R \cdot \pi$

Ricorda: in un settore circolare il rapporto fra l'area del settore (A_{setto}) e l'area del cerchio grande ($A_{cerchio\ grande}$) dal quale è estratto è uguale al rapporto tra lunghezza dell'arco (l_{arco}) e della circonferenza del cerchio grande ($C_{cerchio\ grande}$):

$$\frac{A_{setto}}{A_{cerchio\ grande}} = \frac{l_{arco}}{C_{cerchio\ grande}}$$

$$A_{tot} = \frac{l_{arco}}{C_{cerchio\ grande}} \cdot A_{cerchio\ grande}$$

Figura 18. Scheda completata da un allievo.

Per determinare la formula dell'area totale del cono (Figura 19), alcuni studenti richiedono l'aiuto del docente, in particolare nella semplificazione della formula.

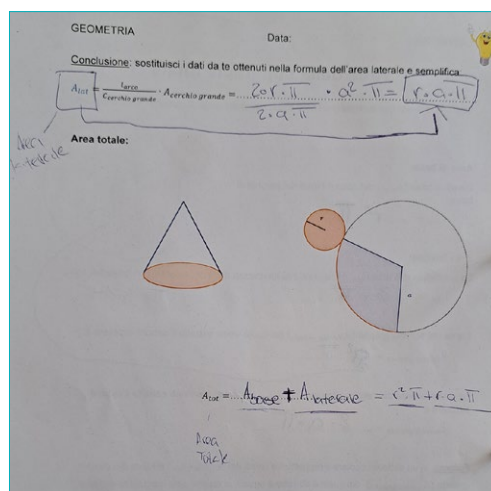


Figura 19. Scheda completata da un allievo.

Nella Figura 20 si può vedere come un allievo risolve gli esercizi.

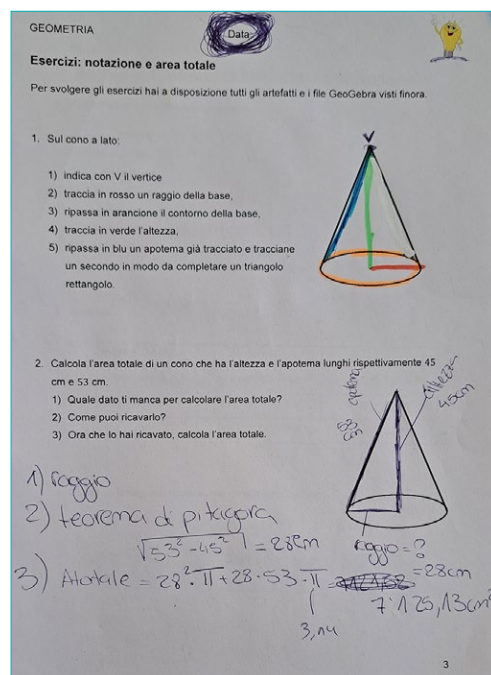


Figura 20. Soluzioni proposte da un allievo.

Infine, ricordando che si vuol lasciar produrre agli allievi, alla fine di ogni lezione, una traccia della lezione (come avvenuto al termine della seconda lezione, par. 4.2.2), nella Figura 21 si può vedere che cosa uno studente aggiunge al proprio riassunto.

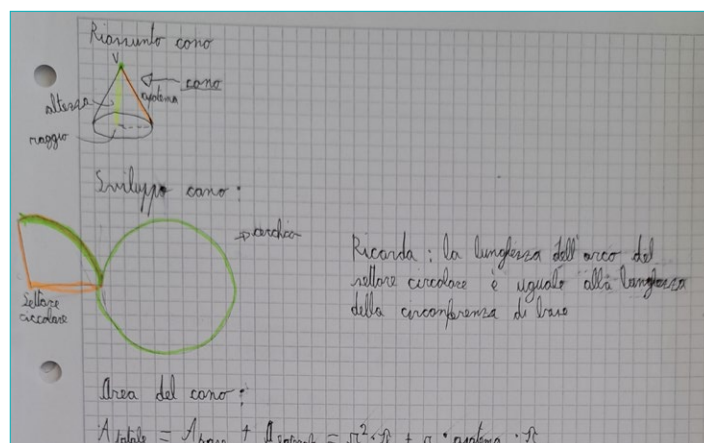


Figura 21. Continuazione del riassunto di un allievo.

4.6 Attività 6 – Volume del cono

4.6.1 Elementi descrittivi dell'attività

Finalità. Scoprire in due modi diversi la formula del volume del cono.

Aspetti su cui far leva. In questa lezione si fa leva sull'utilità di diversi strumenti nell'ambito della geometria. Oltre a proporre un'attività con gli artefatti concreti quali cilindro, cono in plastica e imbuto, si propone anche un'attività con GeoGebra.

UDL. In riferimento al *punto di verifica 3.1*, nella presente attività si vuole attivare o fornire la conoscenza di base, recuperando e utilizzando delle conoscenze pregresse, precisamente la conoscenza della formula del volume della piramide e del volume del cilindro, per scoprire la formula del volume del cono. Si vogliono altresì fornire differenti opzioni per la percezione. A tale scopo vengono proposti degli artefatti, cioè i solidi in plastica e l'imbuto, come alternativa alle informazioni uditive e visive. L'auspicio è che, in questo modo, tutti gli allievi possano riuscire a risalire alla formula del volume del cono. In questa lezione, in riferimento al *punto di verifica 2.2*, viene data molta importanza alle indicazioni iniziali del docente: volendo far lavorare gli allievi in autonomia, per la buona riuscita della lezione, è importante che tutti capiscano il compito da svolgere. Per questo motivo, si divide la classe in tre gruppi da tre allievi ciascuno, e un gruppo da due allievi. Il docente predispone inoltre quattro postazioni per due tipi di attività, una al computer (attività 1 dell'[Allegato 7](#)) e una con gli artefatti concreti (attività 2 dell'[Allegato 7](#)). L'idea è di far risalire gli allievi alla formula del volume del cono attraverso due diversi mezzi, digitali e artefatti concreti, implementando così l'obiettivo del *punto di verifica 2.5*. Così, due gruppi iniziano con l'attività che prevede l'uso di un computer per gruppo e di un file GeoGebra, mentre gli altri due gruppi iniziano con l'attività con il cono e il cilindro in plastica, per poi darsi il cambio dopo 15 minuti. Determinare la formula del volume del cono permette di generalizzare il risultato; quindi, attraverso la scheda finale di riassunto (ultima pagina dell'[Allegato 7](#)), si porta l'allievo a generalizzare e determinare una formula per calcolare il volume di un cono qualsiasi, realizzando il *punto di verifica 3.4*. L'allievo potrà poi applicare la formula a qualsiasi situazione futura. Nella traccia della lezione, aggiunta in calce al riassunto degli allievi, invece, si vogliono evidenziare schemi, caratteristiche essenziali, idee principali e relazioni, facendo quindi riferimento al *punto di verifica 3.2*. Lo scopo è di sottolineare l'importanza di preparare riassunti contenenti le informazioni più importanti. Inoltre, questo tipo di riassunti aiuta l'allievo a preparare i propri riassunti per le verifiche, non dovendo memorizzare troppe informazioni.

4.6.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione, gli allievi scoprono come calcolare il volume del cono. L'utilizzo sia di GeoGebra sia di artefatti concreti risulta molto motivante per gli allievi. Gli allievi lavorano a gruppi di tre e a coppie e non si riscontrano particolari problemi nell'attività con il file GeoGebra (Figure 22 e 23).

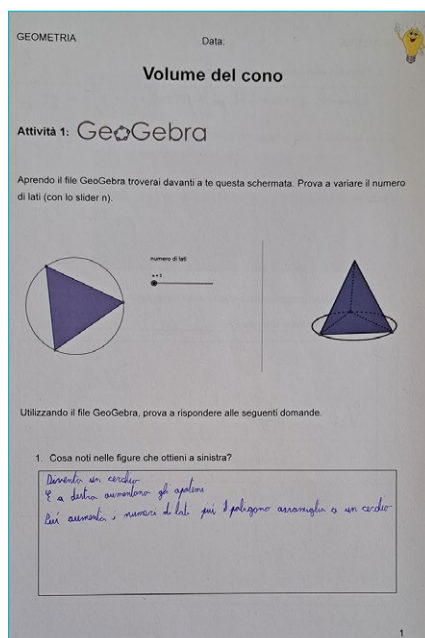


Figura 22. Risposte fornite da un allievo nell'attività 1 sul volume del cono.

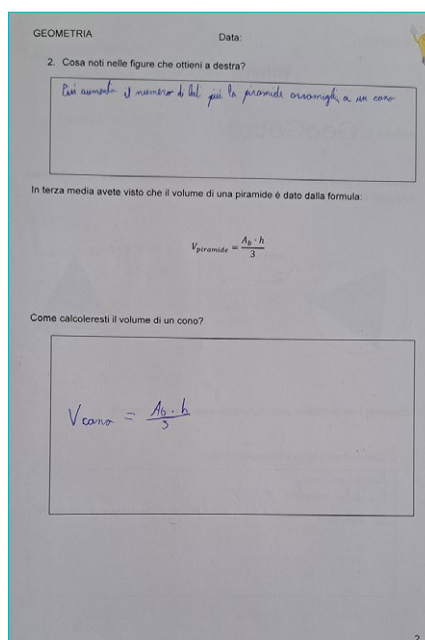


Figura 23. Risposte fornite da un allievo nell'attività 1 sul volume del cono.

Nell'attività 2, quella con gli artefatti concreti, alcuni allievi riscontrano alcune difficoltà nel riuscire a stimare quanti coni servono per riempire il cilindro (Figura 24).

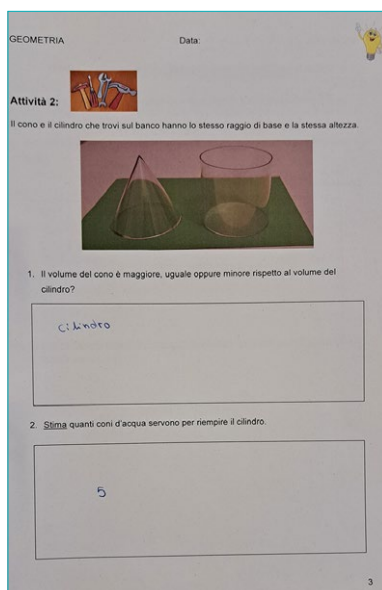


Figura 24. Risposte fornite da un allievo nell'attività 2 sul volume del cono.

Alla fine della lezione si decide con gli allievi di aggiungere al riassunto la formula per determinare il volume del cono (Figura 25).

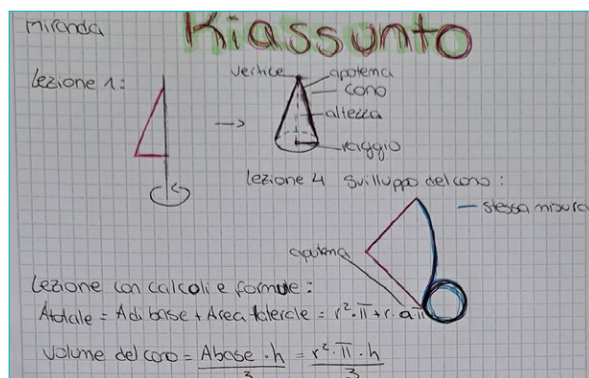


Figura 25. Riassunto con i contenuti trattati fino all'attività 6.

4.7 Attività 7 – Esercizi sul volume del cono

4.7.1 Elementi descrittivi dell'attività

Finalità. Consolidare le conoscenze sull'area e il volume del cono e saper applicarle nella risoluzione di esercizi.

Aspetti su cui far leva. Questa lezione è dedicata agli esercizi. Si vogliono in particolare allenare le strategie di risoluzione dei problemi, sviluppate precedentemente, e il corretto utilizzo del formulario. Gli allievi consultano i loro riassunti e formulari, e inoltre si dà loro accesso a tutte le risorse viste finora in classe.

UDL. In questa lezione, come detto prima, si lascia a disposizione degli allievi tutto il materiale didattico visto finora. Gli allievi hanno inoltre a disposizione anche i loro riassunti, in modo da potersi concentrare sui concetti chiave e non tanto sul ricordare delle formule e dei nomi. Conseguentemen-

te, l'aspettativa del docente è che in questa lezione entrino potenzialmente in gioco tutti i punti di verifica della *linea guida 1*. Infatti, questa è una fase di esercitazione individuale e ci si aspetta che ciascun allievo utilizzi potenzialmente strumenti differenti per risolvere gli esercizi: alcuni il video, altri le piramidi di plastica per visualizzare meglio la situazione, altri ancora alcune conoscenze pregresse.

4.7.2 Resoconto di quanto svolto in classe

In questa lezione si svolgono esercizi sul volume del cono ([Allegato 8](#)). Gli allievi utilizzano molto il proprio riassunto e gli artefatti, in particolare il cono in plastica trasparente, per visualizzare e capire le situazioni. È interessante notare che nella fase di esercizi ogni allievo privilegia un determinato strumento per ogni esercizio. Alcuni non avendo difficoltà mnemoniche non sentono la necessità di utilizzare il proprio riassunto, scegliendo più frequentemente gli artefatti concreti. Altri invece che hanno più difficoltà a livello di memoria usano più spesso il proprio riassunto. Nella Figura 26 e nella Figura 27 si trovano alcune soluzioni prodotte dagli allievi.

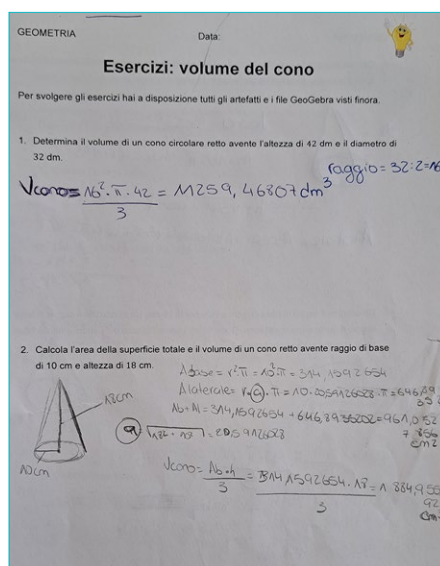


Figura 26. Soluzioni proposte da un allievo.

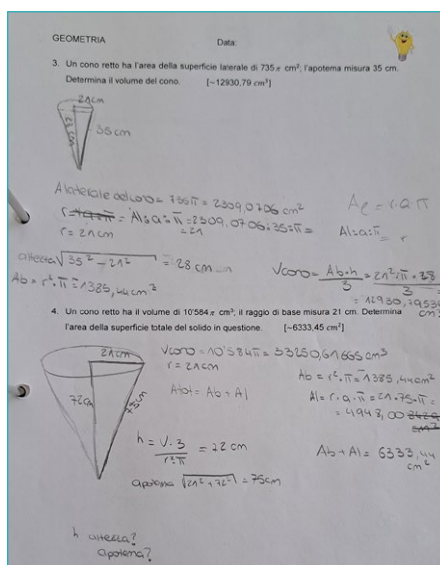


Figura 27. Soluzioni proposte da un allievo.

5 Conclusioni

L'esperienza didattica descritta in questo articolo rappresenta un esempio di percorso didattico in linea con i principi di inclusione dell'UDL. È questo un primo elemento da sottolineare: non era infatti scontato riuscire a coordinare e integrare in un percorso di matematica i principi e le linee guida di un modello nato sì in ambito educativo, ma non in seno a una disciplina specifica. Questa esperienza contribuisce inoltre a rendere conto dell'efficacia dell'approccio dell'UDL. Durante il percorso didattico, infatti, si è potuto osservare un miglioramento generale per tutti gli allievi per quanto riguarda le competenze disciplinari e la visione della geometria, messo in evidenza dai risultati ottenuti dai questionari iniziali e finali che è possibile reperire nel lavoro completo di tesi. Gli allievi, nonostante le difficoltà incontrate durante il percorso, hanno lavorato con impegno, serietà e motivazione raggiungendo buoni risultati. Dopo l'esperienza, un maggior numero di allievi rispetto all'inizio afferma di apprezzare la geometria, di sentirsi più competente nell'affrontare un esercizio di geometria e di percepirsi più sicuro nel riuscire a visualizzare situazioni geometriche. Soprattutto quest'ultimo aspetto della visualizzazione è stato fortemente supportato con diversi artefatti digitali e concreti, ai quali gli allievi hanno fatto ricorso con interesse e in modo sempre più autonomo ed efficace. Un altro risultato importante è che ciascun allievo è riuscito a riconoscere con maggior chiarezza cosa gli sia effettivamente utile per affrontare un esercizio o problema di geometria. Questi aspetti che delineano un bilancio positivo dell'esperienza sono dovuti anche all'aver fornito molteplici mezzi di rappresentazione, secondo il primo principio dell'UDL, sperimentando un approccio didattico che rispetta e dà spazio alle preferenze e alle vie di accesso al sapere che caratterizzano ciascun allievo, cercando al contempo di renderlo consapevole dei propri bisogni e delle proprie risorse.

Bibliografia

- Agliati, S. (2023). La scuola inclusiva, tra didattica e passione. *Atgabbes, Bollettino inverno 2023*, 17–21. https://www.atgabbes.ch/wp-content/uploads/2024/04/Bollettino_Atgabbes_Inverno2023.pdf
- Bellini, S. (2024). *Universal Design For Learning in ambito geometrico nella scuola media*. Tesi Master, Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. <https://tesi.supsi.ch/5238/>
- Cottini, L. (2019). *Universal Design for Learning. Verso il curricolo per l'inclusione*. Giunti Edu.
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2022). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (edizione perfezionata). DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37–65.
- Guidi, C., Pirico, M. L., & Rusconi, L. (2022). *Differenziazione e valutazione in matematica* [Lezione, Master in Didattica della Matematica]. DFA/ASP–SUPSI.
- Meyer, A., Rose, D. H., & Gordon, D. (2022). *Universal Design for Learning: Theory and Practice*. CAST Professional Publishing.

Ostinelli, M. (2014). Dall'integrazione scolastica alla scuola inclusiva. *Scuola ticinese. Verso l'inclusione*, 320(2), 5–10.

Savia, G. (2016). *Universal Design for Learning*. Erickson.

Zambianchi, E., & Ferrarese, G. (2021). The Universal Design for Learning model in support of Integrated Digital Teaching. *Formazione & insegnamento*, 19(2), 522–532. https://doi.org/10.7346/-fei-XIX-01-21_46