

Insegnare matematica come narrazione

Teaching Mathematics as Storytelling

Rina Zazkis e Peter Liljedahl

Faculty of Education, Simon Fraser University – Canada

✉ zazkis@sfu.ca, liljedahl@sfu.ca

Sunto / In questo articolo viene presentata una selezione di tre capitoli del libro *Teaching Mathematics as Storytelling*, di Rina Zazkis e Peter Liljedahl (2009), nei quali si mette in evidenza che l'avvicinamento a concetti ardui della matematica con la mediazione delle storie consente un coinvolgimento attivo degli studenti nella costruzione di significati matematici e ne favorisce la comprensione profonda. Gli autori forniscono anche interessanti e molteplici esempi di come rimodulare storie già note, facendo sì che semplici problemi testuali presenti sui libri scolastici, diventino accattivanti spunti di narrazione e attività d'aula. Questo abstract, l'introduzione ai tre capitoli e la loro traduzione sono a cura di Angela Donatiello.

Ringraziamenti. Ringraziamo l'editore Brill per averci concesso di tradurre i capitoli 3, 7 e 8 del libro originale (<https://brill.com/display/title/37619>). Ringraziamo anche gli autori Rina Zazkis e Peter Liljedahl per il loro interessante lavoro e per averci sostenuto in questo progetto di traduzione di parte del loro libro.

Parole chiave: *storytelling*; matematica; insegnamento; *problem-solving*; coinvolgimento.

Abstract / In this paper we present a selection of three chapter from the book *Teaching Mathematics as Storytelling*, by Rina Zazkis and Peter Liljedahl (2009), in which they highlight that approaching difficult mathematical concepts with the mediation of stories allows for the active involvement of students in the construction of mathematical meanings and fosters deep understanding. The authors also provide interesting and multiple examples of how to rework familiar stories, turning simple textual problems found in school books into captivating storytelling prompts and classroom activities. This abstract, the introduction to the three chapters and their translation are edited by Angela Donatiello.

Acknowledgement. We would like to thank Brill Publisher for granting us to translate the chapters 3, 7 and 8 of the original book (<https://brill.com/display/title/37619>). We also thank the authors Rina Zazkis and Peter Liljedahl for their interesting work and for supporting us with this project of translating part of their book.

Keywords: *storytelling*; mathematics; teaching; *problem-solving*; engagement.

1 Introduzione

Il narrare storie rappresenta da sempre un atto di comunicazione umana che racchiude significati atavici legati alla sfera psichica ed emotiva. Esistono diverse forme di narrazione, da quella più teatralizzata a quella più orientata al coinvolgimento diretto dell'ascoltatore. Nei tre capitoli del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* di Rina Zazkis e Peter Liljedahl, che vengono proposti qui di seguito in traduzione, viene presentata un'idea di *storytelling* interattivo nei contesti educativi e, in particolare, durante le lezioni di matematica. Al fine di coinvolgere gli insegnanti nella sfida creativa che consente loro di promuovere l'avvicinamento a concetti ardui della matematica con la mediazione delle storie, gli autori presentano numerosi esempi di storie, espresse inizialmente in forma molto semplice e che vengono poi trasformate ed arricchite talvolta con l'introduzione di elementi narrativi coinvolgenti, altre volte con opportune variazioni della storia, per meglio esplicitare e rendere trasparente la problematica matematica sottostante.

In questa selezione di capitoli, si trovano suggerimenti su come introdurre le storie nelle ordinarie lezioni di matematica, veicolando tramite esse concetti come il senso del numero e la capacità di contare, la divisione per ripartizione e per contenenza, la divisione per zero, la divisione che ha come divisore una frazione e la manipolazione di interi negativi. Tali concetti, ritenuti complessi dagli studenti, creano spesso difficoltà ai docenti durante le tradizionali spiegazioni in classe, a causa di un ricorso eccessivo alle cosiddette "regole" o ad un uso acritico dei libri di testo, che propongono molti esercizi ripetitivi e pochissime attività di reale *problem-solving*. La proposta degli autori è quella di cambiare totalmente prospettiva, attivando il coinvolgimento degli studenti nell'ascolto e nella narrazione di storie in cui venga proposto un problema matematico aperto, fortemente coinvolgente e motivante che chiami in causa problematiche matematiche di difficoltà crescente, ma sempre inserite in un filone narrativo coerente.

2 Storytelling¹

«L'arte di raccontare una storia – quando il narratore ha trovato la storia che desidera – è stata descritta da molti, e io spero di non offendere nessuno dicendo che gli scrittori di tali libri falliscono per questa ragione – essi tentano l'impossibile».

(Burrell, 1926/1971, p. 3)

Il modo di raccontare una storia assomiglia a quello di raccontare una barzelletta. Se vengono narrate in modo inefficace, infatti, si potrebbe perdere l'intenzione iniziale. Il testo che dovrebbe farci sorridere potrebbe anche farci alzare le spalle e chiederci come sia possibile che qualcuno abbia pensato che esso fosse divertente. Raccontare una storia è un'arte, un atto di improvvisazione.

Si ritiene che lo *storytelling* sia una delle più antiche forme di arte umana e anche la «prima forma conscia di comunicazione letteraria» (Shedlock, 1924, p. xiii). Burrell (1926/1971) si riferì allo *storytelling* come al «modo in cui la Natura insegna» (p. 2). Esso è «più vecchio della storia e non è confinato ad una civiltà, ad un continente o ad una razza» (Baker & Greene, 1987, p. 1). L'idea di universalità e di atemporalità dello *storytelling* è stata descritta da Burrell (1926/1971) come «un evento così consueto che nessuna latitudine e nessun secolo può esserne stato privo» (p. 5). Lo *storytelling* si è sviluppato

1. Questo capitolo è la traduzione del capitolo 3 del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009).

nelle prime civiltà in quanto soddisfaceva il bisogno degli uomini di comunicare con altri uomini, la necessità di intrattenere e di divertirsi e l'esigenza di spiegare il mondo fisico. Inoltre, il suo sviluppo è anche dovuto al fatto che lo *storytelling* soddisfaceva sia il bisogno estetico di espressione artistica sia il desiderio di tenere memoria di eventi e azioni degli antenati (Pellowski, 1977).

Baker e Greene (1987) riprendono l'idea di Lewis Carroll, che chiama le storie "doni d'amore", ed estendono questa metafora all'atto del narrare una storia, a cui essi si riferiscono come ad un "donare". Avendo intervistato centinaia di narratori, improvvisati e professionisti, invece, Haven (2000) propone la seguente definizione:

«*STORYTELLING*: L'arte di usare il linguaggio, la voce e/o i movimenti fisici e i gesti per rivelare gli elementi e le immagini di una storia ad un pubblico specifico, dal vivo».

(Haven, 2000, p. 215)

Haven ha inoltre notato che «lo *storytelling* è sia la più elementare modalità di comunicazione umana, sia una potente forma d'arte performativa» (p. 216). Fortunatamente, molti insegnanti sono padroni di quest'arte. Essi conoscono come interessare gli studenti ad una storia e come modificare la storia per soddisfare il pubblico. Tuttavia, davvero pochi portano questo talento in una lezione di matematica.²

2.1 Lo *storytelling* visto dalla parte dei narratori

Esistono narratori professionisti, che traggono dallo *storytelling* il loro sostentamento. Sebbene non ci siano dipartimenti di *storytelling* nei college e nelle università e neppure professori di *storytelling*, ci sono individui per i quali lo *storytelling* rappresenta la propria occupazione. Narrano storie sul palco, in parchi e librerie, nei caffè letterari e nelle sale da concerto, a raduni professionali e nei musei, nelle chiese e in luoghi di culto, in biblioteche e ospedali, a feste di compleanno e fiere di paese, nei festival e ad ogni evento speciale in cui le persone possano incontrarsi. Dedicati a loro e non solo, esistono eventi annuali di *storytelling* organizzati in biblioteche pubbliche e un'Associazione Nazionale per la Preservazione e la Perpetuazione dello *Storytelling* (NAPPS – *National Association for the Preservation and Perpetuation of Storytelling*).³

Alcuni narratori sono attori professionisti, altri invece sono amatori. Ci sono, tuttavia, differenze importanti fra la recitazione e lo *storytelling*, tra cui la principale è la relazione con il pubblico. Per un narratore il pubblico è vivo e non nascosto in una sala buia e, a differenza dell'attore sul palco che segue un copione studiata, il narratore di storie cambia il suo copione in base al riscontro che riceve dal pubblico. Sono state scritte molte guide da e per i narratori professionisti (ad esempio Baker & Greene, 1987; Bauer, 1993; Burrell, 1926/1971; Shedlock, 1924) che includono informazioni rispetto a cosa dire, a come dirlo e a quali elementi prestare attenzione nella scelta di una buona storia per ogni specifica occasione. Queste guide offrono numerose risorse per delle buone storie, per attirare un pubblico di diverse fasce d'età anche per scopi differenti. Spiegano inoltre quali artefatti (burattini, decorazioni, allestimenti, maschere, pannelli, oggetti di artigianato, immagini ecc.) possono essere usati per accompagnare una storia, quando alzare la voce e quando rallentarla, quando fare una pausa, quali gesti fare o non fare e anche come respirare, come sistemare la scena e cosa indossare. Esse mettono in guardia i narratori dalle più comuni insidie, in cui un narratore può cadere, come l'uso di vocaboli sconosciuti al pubblico o, per contro, di una narrazione eccessivamente didascalica che abbasserebbe

2. Nota della traduttrice. Da qui in avanti è stato tradotto «*mathematics classroom*» con «*lezione di matematica*», in quanto nei contesti italiani non esistono propriamente delle classi di matematica, eccetto che in alcune scuole che attuano il modello DADA – Didattiche per Ambienti Di Apprendimento (www.scuole dada.it). Negli altri casi è comunque più diffusa l'idea di classe fissa e di ora di lezione variabile.

3. Nota della traduttrice. La *National Association for the Preservation and Perpetuation of Storytelling* (NAPPS), un'organizzazione non profit fondata nel 1975, ha cambiato nome nel 1994 in *National Storytelling Association* (NSA). Nel 1998, l'NSA si è divisa in due organizzazioni separate: la *National Storytelling Network* (NSN) (<https://storynet.org/>) e l'*International Storytelling Center* (ISC) (<https://www.storytellingcenter.net/>).

lo standard (Shedlock, 1924). Forniscono anche supporti professionali su come iniziare, come scegliere il luogo, o come migliorare la performance narrativa mediante indovinelli, canzoni, giochi o trucchi magici. I professionisti offrono, inoltre, consigli utili su cosa fare quando ci si annoia con una determinata storia o quando si è nervosi davanti al pubblico e anche suggerimenti su come gestire la disciplina e le interruzioni durante la narrazione.

Anche se per coloro che si dedicano solo occasionalmente alla narrazione è utile imparare i trucchi del mestiere dai narratori professionisti, in questo capitolo ci rivolgiamo ad un contesto ben specifico – lo *storytelling* in una lezione di matematica. In ogni caso, prima di passare al caso speciale della matematica, esaminiamo lo *storytelling* in classe, o in qualsivoglia contesto educativo in generale.

2.2 Lo *storytelling* nel contesto educativo

Per i narratori professionisti, la gioiosa esperienza di un pubblico nell'ascoltare buone storie, narrate bene, può essere una buona e sufficiente ragione per continuare a raccontare storie. Tra i molti benefici psicologici ed educativi dello *storytelling*, «la gioia drammatica che portiamo ai bimbi e a noi stessi» fu considerata da Baker e Greene (1987) come «la miglior ragione tra tutte» (p. 25).

Tuttavia, gli insegnanti non sono interessati solo alla storia in sé, al suo fascino drammatico e al divertimento per gli ascoltatori. Sono principalmente interessati a raccontare storie come mezzo per raggiungere un altro fine: accrescere l'interesse e far riflettere gli ascoltatori. In termini più generali, Baker e Green (1987) suggeriscono che lo *storytelling* abbia un effetto positivo sullo sviluppo sociale e cognitivo dei bambini evidenziando la rilevanza delle storie per gli educatori, i quali temono che l'enfasi della scuola sulle competenze cognitive possa andare a scapito dello sviluppo affettivo dei bambini. Gli autori esemplificano come lo *storytelling* «offra ai bambini l'opportunità di comprendere le motivazioni e gli schemi del comportamento umano» (p. 22) e li aiuti a superare i problemi psicologici. Haven (2000) ha sintetizzato i 10 benefici dello *storytelling* come strumento educativo:

1. Lo *storytelling* è un elemento potente ed efficace nello sforzo di migliorare e sviluppare tutte le quattro abilità linguistiche di base (ascoltare, leggere, parlare e scrivere).
2. Le informazioni (sia i concetti che i fatti) vengono ricordate meglio e più a lungo quando sono presentate in una forma narrativa.
3. Lo *storytelling* è un potente ed efficace strumento di insegnamento interdisciplinare e trans-curricolare.
4. Lo *storytelling* motiva favorevolmente gli studenti ad apprendere. Le storie che vengono raccontate focalizzano l'attenzione e delineano l'apprendimento degli studenti incentivandoli a approfondire gli argomenti di cui esse trattano.
5. Lo *storytelling* costruisce in modo efficace la fiducia in sé stessi e l'autostima degli studenti.
6. Lo *storytelling* coinvolge e sviluppa in modo efficace le competenze di immaginazione e la creatività, meglio di qualsiasi altra singola attività di classe.
7. Lo *storytelling* coinvolge e diverte.
8. Lo *storytelling* crea empatia e senso di coesione.
9. Lo *storytelling* migliora le competenze analitiche e di *problem-solving*.
10. Lo *storytelling* crea legami preziosi con la comunità e il contesto culturale.

Non sorprende che il primo beneficio menzionato faccia la parte del leone in letteratura. Esaminando i libri identificati da una catalogazione tematica sullo *storytelling* all'interno di una biblioteca, abbiamo notato che circa i tre quarti di questi libri si occupano delle varie forme di espressione linguistica. Sembra esserci una naturale connessione tra la narrazione di storie e lo sviluppo dell'alfabetizzazione, l'estensione del vocabolario, l'introduzione di strutture del linguaggio e il miglioramento delle competenze linguistiche, sia orali che scritte. La forma narrativa è considerata il fondamento di come noi comprendiamo e concettualizziamo il linguaggio (Haven, 2000).

Il decimo beneficio, l'ultimo menzionato, è diventato estremamente popolare negli ultimi anni, perlo-

meno in Canada, grazie a una rafforzata enfasi educativa sul multiculturalismo e sulle Prime Nazioni.⁴ Lo *storytelling* serve come mezzo per avvicinare i bambini alle diverse tradizioni e civiltà e per mantenere vivo il patrimonio culturale dei vari popoli.

La maggior parte degli scrittori è concorde sul fatto che lo *storytelling* possa supportare il curriculum scolastico; tuttavia, troviamo raramente menzionata la matematica tra i loro esempi specifici. Riteniamo però che ciò sia un peccato, cerchiamo così di colmare questa lacuna.

2.3 Lo *storytelling* in una lezione di matematica

Le storie non sono diffuse nelle lezioni di matematica: la maggior parte delle lezioni consiste in brevi spiegazioni da parte dell'insegnante, seguite da una serie di esempi che gli studenti poi imitano nel proprio lavoro. Anche quando vengono coinvolti il pensiero matematico avanzato o il *problem-solving*, sono raramente accompagnati da una storia. Sebbene molti scrittori parlino dello *storytelling* come di uno "strumento trans-curricolare", i loro esempi "intersecano" le forme di espressione linguistica con discipline come la storia o le scienze, ma non coinvolgono la matematica in modo adeguato.

Qual è, dunque, il beneficio di introdurre lo *storytelling* in una lezione di matematica? In aggiunta a tutti i benefici menzionati nel precedente paragrafo, specialmente come supporto alla memoria (2), alla motivazione (4), al coinvolgimento (7) e all'evoluzione delle competenze analitiche (9), le storie matematiche mirano a scopi aggiuntivi. Esse possono introdurre o spiegare concetti complessi in modo da renderli indimenticabili, coinvolgendo così gli studenti nelle attività di matematica; possono introdurre un elemento umano in una materia che è spesso percepita come arida e tecnica; possono apportare alla lezione di matematica una novità inaspettata e un cambiamento nella routine; possono rinnovare e sostenere l'atmosfera creativa ed offrire intrattenimento. Sebbene l'intrattenimento sia raramente menzionato come un obiettivo in un contesto educativo, il suo valore a sostegno di un ambiente di apprendimento produttivo non dovrebbe essere trascurato.

«Il segreto dello *story-telling* non può essere messo su carta» (Burrell, 1926/1971, p. 51), sta nel percepire il pubblico e coinvolgerlo, variando il copione dove necessario. Per questo motivo, qui di seguito ci cimentiamo in un tentativo arduo. È un tentativo di spiegare su carta ciò che noi crediamo essere il *narrare* una storia. Contiamo sull'immaginazione del lettore per dare "colore" e "sapore" al testo ed introdurre cambi di ritmo, pause, enfasi su parole specifiche o frasi, o momenti di silenzio.

2.4 Il contadino e il corvo: il racconto di una storia

Si consideri la seguente storia (Egan, 1986), spesso utilizzata per esemplificare il senso del numero e lo sviluppo dell'abilità umana del contare. Prima presentiamo una storia popolare e poi illustriamo in che modo possa essere narrata per raggiungere il suo pieno potenziale.

«[Questa è] la storia del corvo che mangiava il grano del contadino. Il contadino aveva deciso di sparare al corvo che aveva fatto il nido nel suo fienile, ma quando il contadino giungeva al fienile, il corvo volava via e appena lasciava il fienile, il corvo tornava indietro. Pensando di ingannare il corvo, un giorno il contadino portò un amico con sé nel fienile. Quando il suo amico andò via, il contadino rimase all'interno del fienile, ma il corvo non si lasciò ingannare e rimase sul suo albero finché anche il contadino non uscì. Il giorno successivo il contadino portò due amici con sé al fienile e rimase indietro quando i due amici uscirono, ma il corvo ancora una volta attese che anche lui andasse via prima di tornare al suo nido. Il giorno dopo, il contadino portò con sé tre amici, con lo stesso risultato. Successivamente ne portò quattro, poi cinque. Quando i cinque amici andarono via, il contadino rimase indietro, quel giorno il corvo volò verso il suo nido e il contadino gli sparò».

(Egan, 1986, p. 79)

Si consideri la seguente variazione della storia del corvo. La trama rimane la stessa, ciò che cambia è

4. Nota della traduttrice. Le Prime Nazioni, i Métis e gli Inuit sono i tre gruppi di popolazioni indigene del Canada.

il modo in cui la storia è presentata al pubblico. Lasciatecelo *raccontare*.

«C'era una volta, in una terra molto lontana da qui, un contadino. Lavorava duramente nei suoi campi per provvedere alla sua famiglia. Dopo il raccolto, depositava il suo grano in un piccolo fienile che aveva costruito accanto al suo campo. Qual era il suo nome? Diamogli un nome. [Rivolgendosi ad uno degli studenti] Come vorresti chiamare questo contadino?»
«Travis».

«Travis? Hai mai incontrato un contadino di nome Travis?»

«Jake».

«Quale nome vuoi dargli? OK, Jake. Così questa è la storia del contadino Jake e di un corvo. Perché un corvo? Vi dirò il perché. C'era un brutto corvo che aveva fatto il suo nido nel fienile, ma la cosa peggiore era che questo corvo mangiava il grano di Jake. Così Jake decise di sparare al corvo. Cosa vorresti fare se qualcuno stesse mangiando il grano che hai coltivato per sfamare la tua famiglia? Oh – Capisco. A voi non piace sparare. OK. Sono d'accordo con voi. Modifico la storia. Il contadino decise di sbarazzarsi del corvo in modo pacifico, catturandolo, ma ogni volta che il contadino si avvicinava a lui, il corvo volava via. Come posso catturare il corvo? – pensò Jake».

Qui ci fermiamo e lasciamo che gli studenti diano suggerimenti. In alcuni casi la risposta dell'insegnante potrebbe essere: «Infatti, Jake provò la strategia che suggerisci, ma non funzionò. Aveva bisogno di qualcosa di diverso». E poi continuiamo con la narrazione.

«Jake pensa, pensa e ripensa... e all'improvviso, ebbe un'idea».

La parola sopra in corsivo suggerisce un'enfasi nel tono del narratore.

«Decise di portare un amico con sé al fienile. Qual era il nome del suo amico?»

«George».

«Così un giorno il contadino Jake e il suo amico George andarono al fienile insieme. Dopo un po' George andò via e il contadino Jake rimase indietro ad aspettare il corvo, ma [pausa], il corvo non tornò. Il corvo non si era lasciato ingannare; non tornò fintanto che il contadino non lasciò il fienile. Jake era amareggiato e stanco. Aveva atteso per molte ore nel fienile e il corvo, che aveva capito il piano di Jake, non era tornato. Così Jake ancora pensa, pensa e ripensa e all'improvviso...»

Qui si fa una pausa, lasciando che gli studenti continuino. Se nel giro di pochi secondi non dovesse nascere una risposta spontanea, si potrebbe porre una domanda del tipo «Cosa accadde?».

«Jake ebbe un'altra idea?»

«Esattamente. E sapete qual era quest'idea? No? Decise di portare due amici con sé al fienile. Così Jake e George invitarono – chi?»

«Joe?»

«Invitarono Joe ad andare con loro. La mattina successiva il contadino Jake e i suoi amici George e Joe andarono insieme al fienile. [Ad uno studente] – Potresti continuare tu a raccontare la storia?»

«George e Joe andarono via, Jake rimase e il corvo non tornò».

«Per favore, raccontaci la storia, non sintetizzare i fatti».

«Jake, George e Joe andarono insieme al fienile. Era una piacevole mattinata per godersi una rilassante passeggiata. Dopo un po' George e Joe andarono via e il contadino Jake rimase ad aspettare il ritorno del corvo, ma [pausa] il corvo non tornò. Il corvo non

si era lasciato ingannare; rimase lontano dal fienile finché il contadino non andò via. Jake era amareggiato ed era anche molto stanco di aver atteso per ore nel fienile che il corvo tornasse. Pensa, pensa e ripensa e...»
«Grande. Grazie. Chi vuole continuare la storia?»

A questo punto gli studenti possono raccontare una parte di storia a rotazione, incoraggiati ad aggiungere dettagli.

[...]

«Così il giorno successivo il contadino Jake e i suoi amici George e Joe, le loro mogli, Emily e Francheska, e Mary, la sorella di Emily, andarono al fienile. George e Joe, le loro mogli, Emily e Francheska, e Mary, la sorella di Emily, andarono via, mentre Jake rimase ad aspettare il corvo. Ma [pausa]».

«Qui devo interrompervi e dirvi esattamente cosa accadde quel giorno. Se qualcuno di voi pensa che la nostra storia stia diventando ripetitiva e noiosa, prestì attenzione adesso. Come sappiamo, il contadino Jake era lì e aspettava il corvo. Aspettava, aspettava e aspettava, fino a che... il corvo tornò. Finalmente Jake fu in grado di sbarazzarsi del corvo, in modo pacifico naturalmente. [Ad uno studente] Mi sembri sorpreso, ma è così che la nostra storia finisce. Cosa accadde al contadino? Visse per sempre felice e contento ed inviò cartoline di ringraziamento ai suoi amici George e Joe, alle loro mogli, Emily e Francheska, e a Mary, la sorella di Emily. O può essere che abbia dato una grande festa e li abbia invitati. Ditemi voi. Il corvo non lo disturbò più. E anche se lo avesse fatto, Jake avrebbe saputo come liberarsene. In modo pacifico, naturalmente. E vissero tutti felici e contenti. Questa è la nostra storia di oggi. A proposito, di cosa parla questa storia?»

2.5 Dopo la narrazione della storia

Una possibile domanda da porre agli studenti per incentivare la discussione dopo aver raccontato la storia potrebbe essere «Il corvo sapeva contare fino a 4, ma non fino a 5 o 6? E cosa significa saper contare? Qual è la natura del contare?».

Numerose specie animali, infatti, condividono con gli esseri umani il senso del numero, ma solo gli esseri umani hanno sviluppato l'abilità del contare, cioè del mettere in corrispondenza biunivoca le parole-numero con gli oggetti che si stanno contando, associando l'ultimo numero della sequenza alla totalità degli oggetti dell'insieme. Questa storia può aiutare i bambini, e non solo, a distinguere tra il senso del numero, che è innato, e il contare che – sebbene sia accessibile già ad una tenera età – è un prodotto dell'ingegno e delle conquiste dell'essere umano. Gli uomini primitivi non contavano, ma, per numeri piccoli, avevano l'abilità di distinguere le quantità di diversi gruppi di oggetti. Si trova riscontro di questo aspetto nello sviluppo del linguaggio. Ad esempio, in ebraico – la più antica lingua ancora viva – la parola “molti” (*harbe*) ha la stessa radice del termine “quattro” (*arba*). Tale somiglianza di parole fa intendere che un tempo queste quantità fossero espresse in modo simile.

La lezione può continuare con il tentare di trovare il limite da parte di una persona della percezione della quantità, cioè, quale numero di oggetti può essere riconosciuto senza un effettivo conteggio. L'insegnante può mostrare diverse quantità di oggetti per una frazione di secondo. Naturalmente non ci sarà il tempo di contarle, ma la maggior parte dei bambini riconoscerà facilmente il numero quando la quantità di oggetti è 4 o 5. Il riconoscimento di un insieme di oggetti più grande di 5 dipenderà, molto probabilmente, dalla loro sistemazione in uno schema ordinato. Ad esempio, la seguente Figura 1⁵ presenta 9 e 10 oggetti. La facilità con cui il numero di oggetti viene riconosciuto, senza contare, dipende dallo schema con cui gli oggetti vengono presentati.

5. Nota della traduttrice. Le immagini presenti nel testo sono tratte dal testo originale. La notazione in grassetto delle figure e la loro didascalia seguono le linee redazionali della rivista e sono inserite dalla traduttrice.

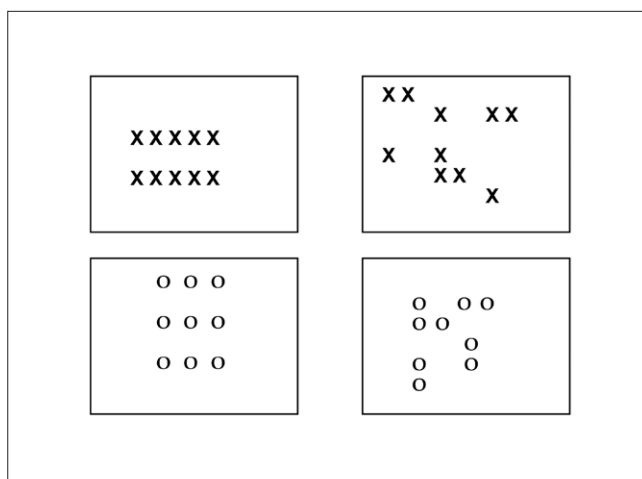


Figura 1. Possibili schemi in cui vengono sistemati 9 e 10 oggetti (nella prima colonna gli schemi ordinati).

Mentre gli studenti più giovani (classi I–II elementare) possono imparare ad apprezzare le meraviglie del contare, per gli studenti più grandi (classi IV–V elementare) l'attività può svilupparsi come raccolta dati sulla percezione della quantità, rappresentandoli su un diagramma a barre.

In accordo con Egan (1986) la storia del corvo presenta il senso del numero e il contare come “opposti binari astratti” – uno strumento cognitivo posseduto dai giovani studenti che contribuisce al loro coinvolgimento con il contenuto. Tuttavia, l'esistenza di “opposti binari astratti” o di qualche conflitto in una storia potrebbe non essere sufficiente a creare coinvolgimento. È il narratore che permette (o facilita) che ciò accada. Sebbene le sfumature nella narrazione, come alzare la voce, cambiare ritmo o fare pause, siano difficili da esemplificare per iscritto abbiamo cercato di farlo; ma tali sfumature possono essere apprese solo con l'esperienza.

Abbiamo anche esemplificato numerose idee per il coinvolgimento degli studenti nella narrazione della storia. Tale coinvolgimento spazia dal fornire semplici risposte, come lo scegliere un nome per un luogo o un personaggio e raccontare nuovamente parti ripetitive della storia, all'aggiungere variazioni e sfumature. Ciò che potrebbe essere visto come una temporanea deviazione dal percorso stabilito può, in realtà, aiutare a mantenere gli studenti concentrati, interessati e coinvolti.

A volte gli insegnanti che sperimentano le nostre storie nelle nostre classi ci chiedono consigli sul come raccontarle o ci chiedono di identificare quelle caratteristiche che “funzionano”. Crediamo però che i consigli da parte degli esperti possano essere utili solo fino ad un certo punto, perché il modo migliore per imparare lo *storytelling* è semplicemente raccontare storie. Tuttavia, ci permetteremo di dare qualche piccolo consiglio.

Raccontate ogni storia a parole vostre: lo sforzo di memorizzare distoglie l'attenzione dall'esperienza. Se lo *storytelling* diviene parte integrante del vostro stile di insegnamento, trovate una modalità per proporre un “tempo delle storie”: può essere un gesto o una postura che sceglierete per iniziare le vostre storie e che gli studenti impareranno a riconoscere. L'espressione «C'era una volta», riconosciuta come un'introduzione peculiare delle fiabe popolari, può servire da buon incipit per ogni storia, e può essere anche utilizzata con umorismo nel caso in cui un racconto non assomigli affatto ad una fiaba popolare. Modificate la storia in modo appropriato – percepite il pubblico e coinvolgetelo. Siate flessibili ad accogliere i suggerimenti degli studenti. Se la storia presenta uno schema ripetitivo, potreste invitare uno degli studenti a raccontarne una parte. Cercate di garantire una transizione graduale tra la storia e la discussione o l'attività successiva. Raccolgiate storie diverse, adattandole ai vostri scopi, in modo che sembrino proprio vostre. E, naturalmente, non dimenticate la matematica; dopo tutto, mentre le storie hanno molti scopi differenti, sociali e psicologici, il nostro scopo principale è quello di migliorare l'apprendimento della matematica.

Arthur Burrell (1926/1971), la cui citazione ha dato il via a questo capitolo, fece la seguente osservazione circa le linee guida sullo *storytelling* nel suo *Guide to story telling*: «Quando abbiamo trascritto le nostre poche regole [...] tutto ciò che ha un valore autentico è stato omesso» (p. 3). Invitiamo, pertanto, il lettore a trovare il “valore autentico” (nascosto) tra le righe.

3 Storie che spiegano⁶

La matematica è spesso percepita da chi apprende come una collezione di fatti e abilità; fatti e abilità che sono talvolta visti come controintuitivi. Quando ciò accade, una reazione comune è cercare di rifugiarsi in una memorizzazione di regole senza senso. Gli insegnanti esperti possono facilmente individuare queste zone, in cui l’incontro con la matematica è maggiormente disorientante e le regole sono più diffuse. Anziché recitare regole, tuttavia, suggeriamo di spiegare tali regole mediante le storie. Ciò ci introduce a nuovi tipi di storie – storie che spiegano. La divisione per zero, la divisione per una frazione e la manipolazione di interi negativi sono solo alcuni esempi dei concetti che gli studenti trovano difficili da comprendere e gli insegnanti trovano ancor più ardui da spiegare. Cercheremo di spiegare questi concetti mediante una storia. Identificheremo poi un tema ricorrente nelle nostre storie, il tema della variazione numerica e ci occuperemo di ulteriori situazioni in cui la variazione delle storie possa favorire l’apprendimento.

3.1 Storie che spiegano un concetto

3.1.1 Divisione per una frazione e il sarto confuso

Dal punto di vista algoritmico, la divisione per una frazione non è una questione problematica – *non si tratta di ragionare, perché basta invertire e moltiplicare*. Concettualmente, invece, la divisione per una frazione è molto problematica, questo fa sì che gli allievi per risolverla memorizzino la regola rafforzando la percezione che la matematica non sia altro che un insieme di regole. La meccanica della regola è meglio spiegata come una “scorciatoia” per un processo che coinvolge rappresentazioni diverse, rapporto tra frazioni e la moltiplicazione del numeratore e del denominatore per l’inverso del denominatore. Ad esempio, si consideri la seguente Figura 2.⁷

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}}{\frac{5}{6} \times \frac{6}{5}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5}$$

Figura 2. Esempio di applicazione della procedura utilizzata per semplificare un rapporto tra frazioni.

Persino quando le tecniche della “scorciatoia” risultano chiare, la divisione per una frazione resta ancora un mistero. Da un lato, essa si scontra con la percezione comune, consolidata dall’esposizione a divisioni di numeri interi, per cui “la divisione diminuisce sempre”. Numerose ricerche hanno descritto

6. Questo capitolo è la traduzione del capitolo 7 del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009), dal titolo originale *Stories that explain*.

7. Nota della traduttrice. Si è scelto di non riscrivere le espressioni algebriche, bensì di riportarle come immagini riprese dal testo originale, al fine di non tradire la rappresentazione data dagli autori. Tutte le immagini raffiguranti calcoli ed espressioni sono riprese direttamente dal testo originale.

la forza di tale convinzione e il conflitto cognitivo che viene attivato dall'esposizione al fatto che in alcuni casi la divisione non rende il dividendo più piccolo. Dall'altra parte, molte persone hanno difficoltà ad immaginare una situazione in cui sia richiesta la divisione per una frazione. Ball (1990) chiese ad insegnanti di scuola elementare di creare un problema che potesse essere modellizzato e risolto dal seguente calcolo (Figura 3).

$$2\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$$

Figura 3. Esempio di calcolo proposto da Ball.

Solo pochissimi partecipanti al suo studio ebbero successo nel creare un problema appropriato e, per la nostra esperienza, il compito risulta essere problematico anche per persone con una significativa formazione matematica. La maggioranza delle persone, quando gli si chiede di scrivere un problema che può essere modellizzato con la divisione per una frazione, scrive storie che coinvolgono la moltiplicazione per una frazione.

Per capire come mai un compito apparentemente semplice porti a soluzioni errate, dobbiamo distogliere la nostra attenzione dalla narrazione e considerare due diverse situazioni che riguardano la divisione. Prima ancora di ciò, invitiamo il lettore a scrivere un problema-storia che possa essere risolto con la seguente divisione: $40 : 8$. Scrivete qualcosa di semplice, la prima cosa che vi viene in mente. Torneremo su questo compito a breve.

Ora introduciamo due tipi di divisioni: per contenenza⁸ e per ripartizione.⁹ Immaginiamo 5 ceste con 4 mele ciascuna. Quante mele ci saranno in ogni cesta? Il totale di 20 mele viene trovato mediante una moltiplicazione, 4×5 . Tuttavia, se il totale è noto, possono essere creati due diversi problemi che possono essere modellizzati con una divisione:

1. 20 mele vengono sistemate in 5 ceste. Quante mele ci saranno in ogni cesta, (assumendo che tutte le ceste abbiano lo stesso numero di mele)?
2. 20 mele vengono sistemate in ceste, in modo che ci siano 4 mele in ogni cesta. Quante ceste sono necessarie?

Il Problema 1 è un esempio di divisione *per ripartizione*. La quantità totale (le 20 mele) è suddivisa in parti uguali (le ceste). Il numero delle parti è noto (5) e la domanda richiede la quantità (di mele) in *ogni* parte. Questo tipo di modello è anche definito come *sharing model of division* (letteralmente modello di divisione per condivisione).

Il Problema 2 è un esempio di divisione *per contenenza*. Anche in questo caso, la quantità totale (le 20 mele) è suddivisa in parti (le ceste). Tuttavia, il numero di parti è sconosciuto. Ciò che è nota è la quantità (di mele) in *ogni* parte. Questo tipo di modello è anche definito come *measurement model of division* (modello di divisione "per misurazione") – in alcuni contesti può anche essere definito come *scooping model* (modello "del misurino").¹⁰

Siamo ora pronti a confrontarci con divisioni che hanno come divisore una frazione. Il problema sta nel fatto che, per molte persone, il modello per ripartizione risulta essere quello più intuitivo. Quando si considerano delle divisioni, le situazioni che vengono in mente alla maggior parte delle persone

8. Nota della traduttrice. Il modello di divisione *per contenenza* nei Paesi anglofoni viene chiamato *quotitive model of division*.

9. Nota della traduttrice. Il modello di divisione *per ripartizione* nei Paesi anglofoni viene chiamato *partitive model of division*.

10. Nota della traduttrice. Le denominazioni utilizzate sono quelle diffuse nei Paesi anglofoni.

sono situazioni per ripartizione. Prima abbiamo invitato il lettore a scrivere un problema sulla divisione, il primo che gli venisse in mente, modellizzabile con l'operazione $40 : 8$. Nella nostra esperienza, la maggior parte delle persone pensa ad un modello per ripartizione. I problemi più comuni che vengono formulati sono, cioè, quelli in cui 40 persone sono sedute intorno ad 8 tavoli o 40 caramelle sono condivise tra 8 amici. Da qui sorgono le difficoltà nel trattare una divisione che ha come divisore una frazione – essa può essere modellizzata solo mediante un modello per contenenza. Pertanto, per introdurla, iniziamo con un noto problema di divisione con numeri interi per poi, gradualmente, variare la situazione. Raccontiamo una storia:

Un sarto che possedeva 40 iarde¹¹ di tessuto ricevette un ordine per costumi di carnevale in maschera. Il sarto stabilì che, per ogni costume, erano necessarie 5 iarde. Quanti costumi avrebbe potuto realizzare?

L'ovvia risposta (8) si ottiene dividendo la quantità totale (40) per la quantità necessaria per ogni costume (5). Questo è un esempio di divisione per contenenza. Ora possiamo variare la storia.

Il sarto si era poi reso conto che doveva realizzare dei costumi più piccoli e che per ogni costume erano dunque necessarie solo 4 iarde. Con la stessa stoffa, quanti costumi avrebbe potuto realizzare?

Mentre tirava fuori le sue forbici per iniziare a tagliare il tessuto, ricevette una telefonata – l'ordine era cambiato. Invece di costumi, doveva realizzare abiti ed ogni abito richiedeva 2 iarde di tessuto.

Poi l'ordine cambiò nuovamente, non era più per vestiti, ma per gonne e ogni gonna richiedeva una iarda di tessuto...

Iniziando con la nota situazione dei numeri interi, abbiamo stabilito che il numero di capi (costumi, abiti, gonne ecc.) che si possono ricavare dalla stoffa si trova dividendo la quantità totale di tessuto per la quantità necessaria per ogni oggetto. La sequenza di divisioni che modellizzano i problemi può essere annotata come in Figura 4.

$$\begin{array}{l} 40 \div 5 = 8 \\ 40 \div 4 = 10 \\ 40 \div 2 = 20 \\ 40 \div 1 = 40 \end{array}$$

Figura 4. Sequenza di divisioni che modellizzano i problemi proposti.

Ora siamo pronti a passare alle frazioni.

Se l'ordine non fosse per gonne, ma per grembiuli e se per ogni grembiule fosse necessaria $1/2$ di iarda di tessuto, quanti grembiuli potrebbero essere realizzati?

¹¹ Nota della traduttrice. Unità di misura di lunghezza, utilizzata in Paesi di cultura anglosassone. 1 iarda corrisponde a circa 91 centimetri.

Questa situazione non è diversa da quelle precedenti e la divisione per una frazione, $40 : 1/2$ è stata agevolmente introdotta usando una storia. A questo punto si possono formulare nuovi quesiti variando la quantità di tessuto necessaria per ogni capo. Suggeriamo di affidare questo compito agli studenti, lasciando che siano loro a scegliere che cosa far realizzare al sarto – delle cravatte, delle sciarpe, dei fazzoletti – e quale frazione di iarda si richiede per ognuno di questi capi. Per ogni ordine suggerito si modellerà e risolverà il problema con la divisione corrispondente: $40 : 1/2$, $40 : 1/3$, $40 : 2/3$, $40 : 2/4$ ecc. Crediamo che sia importante lasciare il tempo agli studenti di scoprire da soli le risposte a questi quesiti, prima di introdurre la tecnica dell’“inverti e moltiplica”. Mentre la divisione per unità frazionarie presenta un ovvio collegamento con la moltiplicazione, le altre frazioni dovrebbero essere introdotte nella storia gradualmente, magari non nello stesso giorno. Oltre a un’introduzione significativa ad un concetto problematico come la divisione con divisore una frazione, la storia ha raggiunto un altro importante obiettivo: ha aiutato a confrontarsi con l’aspettativa che “la divisione diminuisca sempre”, immergendo gli studenti in una situazione in cui il risultato della divisione è chiaramente più grande del dividendo.

3.1.2 Divisione per zero e il re dei diamanti

La divisione per zero è nota per essere un’altra questione problematica per chi apprende, siano essi giovani o anziani. Fu anche la causa della grande minaccia Y2K,¹² ma essendo sopravvissuti alcuni anni nel nuovo millennio tendiamo a dimenticarcelo.

La divisione di un numero *per zero* è spesso confusa con la divisione *di zero* per un altro numero, creando l’errata convinzione che la divisione per zero dia come risultato zero. Matematicamente parlando, la divisione per zero è indefinita. Spesso quest’idea è interpretata dagli studenti in modo inappropriato, alcuni affermando che la divisione per zero sia un errore, altri che dia come risultato infinito, per altri che sia impossibile o altri ancora che “non sia consentita”. Ognuna di queste interpretazioni erranee è a suo modo problematica. L’idea che sia un “errore” nasce dall’esperienza, dal tentare di calcolare la divisione per zero mediante una calcolatrice: la maggior parte delle calcolatrici infatti restituisce qualche messaggio di errore. Alcune calcolatrici forniranno addirittura come risultato “infinito”, dovuto a un uso improprio dell’idea di limite da parte di un programmatore.¹³ Il riferimento al fatto che sia “impossibile” genera l’impressione che la divisione per zero possa diventare possibile in futuro. Dopo tutto, sottrarre 5 da 2 era “impossibile” prima di introdurre i numeri negativi e la divisione di 5 per 2 era “impossibile” prima di introdurre le frazioni. Ciò nonostante, il riferimento più problematico è l’idea che la divisione per zero “non sia consentita”. Chi non lo permette? A quanto ammonta la sanzione da pagare? Ci sono molte cose “non consentite” che sono anche possibili, come parcheggiare in una zona con divieto di parcheggio o fumare in una zona non fumatori. “Non consentito” è un’espressione particolarmente problematica con gli allievi, dal momento che le insegnanti non consentono una innumerevole quantità di cose, come parlare ad un amico, masticare una *chewing gum*, correre nell’atrio, consegnare i compiti assegnati in ritardo ecc. La divisione per zero è una di queste regole inventate dalle insegnanti e supportate dall’amministrazione scolastica? È ancora possibile fare qualcosa di non consentito se non si viene scoperti?

Una storia può chiarire una questione come questa, così difficile da risolvere.

Dopo la morte di un re vengono prese in considerazione le sue ultime volontà testamentarie. Il testamento stabilisce che i suoi 12 diamanti siano divisi equamente tra la sua progenie vivente. Supponiamo che ci siano 6 figli (una variante alternativa altrettanto valida alla situazione del re deceduto e dei suoi eredi potrebbe essere rappresentata da una situazione in cui una nonna ha a disposizione 12 biscotti e 6 nipoti che vanno a farle visita).

¹² Nota della traduttrice. Nota anche come *Millennium Bug*.

¹³ Nota degli autori (Zazkis & Liljedahl, 2009, p. 54). Il risultato della divisione per zero non è infinito. Tuttavia, il limite di una successione a/x , per reali a positivi e con x tendente a zero da destra, è infinito.

Non è necessario convincersi più di tanto per capire che ogni erede riceverà 2 diamanti e che il 2 si ottiene dalla divisione $12 : 6$. Ma prima di variare la storia, concentriamoci su questi 2 diamanti. La risposta «2 diamanti» a quale domanda corrisponde? La domanda che si sta cercando è: «Quanti diamanti riceverà ogni erede?». Stabilito questo, possiamo variare la nostra storia.

Supponiamo che ci siano solo 4 figli. Perché 4 e non 6? La risposta sta alla creatività e all'immaginazione del narratore. Potrebbe essere accaduto che 2 dei figli siano morti travolti da una valanga. Oppure, forse, il fratello più grande, il primogenito, era estremamente insoddisfatto all'idea di una divisione equa dell'eredità poiché credeva che, in qualità di primogenito, avrebbe dovuto ottenere una parte importante del tesoro di suo padre, se non addirittura tutto il patrimonio. Così trovò il modo di versare del veleno nelle bevande dei fratelli e riuscì ad ucciderne due. Qualunque sia la strada scelta, i fatti raccontati riducono il numero di eredi da 6 a 4. Quanti diamanti riceverà ora ogni figlio? Ancora una volta, la risposta 3 verrà dal dividere il numero di diamanti (12) per il numero di figli (4). Si può poi continuare la storia. Con l'intento di coinvolgere gli ascoltatori nella storia, chiediamo agli studenti di suggerire cosa accade ad un altro figlio. Un incidente d'auto? Un infarto? Un rapimento alieno? Era così triste per la morte del re che morì di dolore? Spesso i suggerimenti degli studenti sono connessi con gli eventi di attualità, come uragani, attacchi terroristici o accoltellamenti. Non è necessario mettersi d'accordo su questa serie di sfortunati eventi, ma è essenziale e facilmente raggiungibile essere d'accordo sul fatto che, essendoci 3 figli in vita, ognuno di loro riceverà 4 diamanti in eredità. Ribadiamo che l'operazione $12 : 3$ viene effettuata per rispondere alla domanda «Quanti diamanti riceverà ciascun erede?». In modo simile, se ci fossero solo 2 eredi, ognuno di loro riceverebbe 6 diamanti e se il re avesse un solo figlio in vita, tale figlio riceverebbe tutti i 12 diamanti in eredità, poiché $12 : 1 = 12$.

Finora non è stato descritto nulla di insolito dal punto di vista matematico, ma ora la scena è pronta. È il momento della tragica conclusione della nostra storia. L'ultimo figlio rimasto del re è morto in un incidente aereo mentre si recava al funerale del padre. Ora, non ci sono più eredi, ovvero ci sono zero eredi. A questo punto il testamento non è chiaro, così come la matematica. Ci sono ancora 12 diamanti, ma non possiamo più rispondere alla domanda «Quanti diamanti riceverà ogni erede?». Come non possiamo rispondere alla domanda «Quanti biscotti riceverà ogni nipote?» se nessun nipote si recherà a far visita alla nonna. I diamanti andranno alla corona, la nonna mangerà i biscotti da sola o li condividerà con un vicino di casa; e la nostra domanda resterà senza risposta e la divisione per zero *indefinita*. Siamo convinti che richiamare alla memoria questa storia, o un'altra simile, chiarisca l'insidiosa questione della divisione per zero e possa anche ridurre la confusione tra la divisione per zero e la divisione tra zero e un altro numero. Naturalmente, una storia non è l'unico modo per spiegare questo concetto. Qui di seguito presentiamo una spiegazione aggiuntiva, costruita sulla percezione di schemi e relazioni. Qual è la spiegazione migliore? Non solo la bellezza è negli occhi di chi guarda, ma lo sono anche l'utilità e il potere esplicativo percepito. Raccomandiamo pertanto la strategia dell'artiglieria russa: sparare molte volte, sparare in molti posti e sperare che alla fine, da qualche parte e in qualche momento, si riesca a colpire un bersaglio.

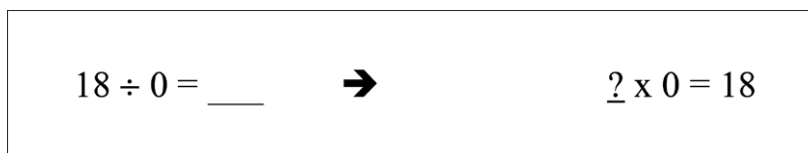
Come al solito, iniziamo con qualcosa di familiare per poi procedere gradualmente verso l'obiettivo. Iniziamo dunque con il mettere in evidenza una relazione familiare tra la moltiplicazione e la divisione (Figura 5).

Riempiamo gli spazi vuoti.

$12 \div 3 = \underline{\quad}$	$\rightarrow$	$\underline{4} \times 3 = 12$
$10 \div 5 = \underline{\quad}$	$\rightarrow$	$\underline{2} \times 5 = 10$
$24 \div 8 = \underline{\quad}$	$\rightarrow$	$\underline{3} \times 8 = 24$

Figura 5. Esempi di *cloze* (completamento) sulla relazione tra la divisione e la moltiplicazione.

Come prima cosa, cerchiamo un numero che moltiplicato per 3 dia come risultato 12, ossia ci chiediamo quale numero moltiplicato per 3 è uguale a 12? La risposta è 4 cioè il risultato di $12 : 3$. Questo risultato deriva dalla comprensione della relazione tra moltiplicazione e divisione. Con gli studenti, è opportuno affrontare una serie di esempi analoghi prima di tentare di riempire il vuoto per l'uguaglianza in Figura 6.



$$18 \div 0 = \underline{\quad} \quad \rightarrow \quad \underline{\quad} \times 0 = 18$$

Figura 6. Esempio di richiesta di completamento in una potenziale divisione per zero.

Seguendo lo schema degli esempi precedenti, chiederemo: quale numero moltiplicato per 0 dà 18? Questo numero sarebbe il quoziente della divisione di 18 per zero, ma tale numero non esiste. Non c'è nessuna possibilità di definire la divisione per zero in modo che si mantenga la coerenza con l'operazione inversa, la moltiplicazione. Ancora una volta la lasciamo, pertanto, *indefinita*.

Nello spirito dell'artiglieria russa a cui ci si riferiva prima, che potrebbe fare una storia a sé stante, presentiamo ancora un'altra spiegazione, quella che connette la divisione con la sottrazione ripetuta. È pratica comune introdurre la moltiplicazione come addizione ripetuta, tuttavia, la divisione è usualmente introdotta e pensata come l'operazione inversa della moltiplicazione. In alternativa però, possiamo pensare alla divisione come ad una sottrazione ripetuta. Consideriamo ad esempio $28 : 7 = 4$. In termini di divisione per ripartizione (discussa in precedenza), possiamo pensare a 28 elementi disposti in 7 insiemi uguali, oppure, in termini di divisione per contenenza, possiamo pensare di formare insiemi di 7 elementi e chiederci quanti insiemi ci saranno in tutto. Un possibile approccio per la modellizzazione di tale situazione è quello di sottrarre ripetutamente insiemi di 7 elementi dai 28 elementi iniziali, ovvero di "misurare" 28 elementi con l'unità di misura costituita da un gruppo di 7 elementi. Per calcolare $28 : 7$, chiederemo quindi «Quanti gruppi di sette elementi possono essere tolti dai 28 elementi iniziali, finché non ci sia più nulla da rimuovere?». Numericamente ciò corrisponde a svolgere le operazioni $28 - 7 - 7 - 7 - 7 = 0$. Si possono togliere dunque quattro gruppi di sette elementi.

Replicando con altri esempi numerici, trattiamo $15 : 3$. Possiamo interpretare questa divisione come «Quanti gruppi di 3 elementi possono essere sottratti da 15 elementi fino ad arrivare a zero?». Abbiamo bisogno di 5 gruppi di tre elementi, ossia $15 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 = 0$.

Facciamo molta attenzione alla terminologia. Una tendenza comune è quella di chiedere «Quante volte puoi sottrarre il 3 da 15?». Una risposta burlona potrebbe essere: «Puoi sottrarlo tutte le volte che desideri, se lo fai correttamente ottieni 12 ogni volta».

A parte gli scherzi, a cui nel libro è dedicato un capitolo apposito,¹⁴ portiamo il discorso verso il caso della divisione per zero. Al fine di trovare una risposta a $15 : 0$, chiediamo «Quanti zeri è necessario sottrarre da 15 (o da qualsiasi altro numero) per arrivare a zero?».

$$15 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 \dots ???$$

Anche a questa domanda «Quanti...?» non esiste risposta, il che lascia la divisione per zero come *indefinita*.

14. Nota della traduttrice. Il capitolo a cui fanno riferimento gli autori è il Capitolo 9, *Stories that tell a joke* (Zazkis & Liljedahl, 2009).

3.1.3 Moltiplicazione di numeri negativi e cambiamento di temperatura

La moltiplicazione di numeri negativi è un altro mistero che i docenti spesso trovano difficile da spiegare. Per questo motivo, la frase «Un numero negativo per un numero negativo è uguale ad un numero positivo» è talvolta introdotta come una “regola da seguire”. Ovviamente, applicare questa regola non è un principio così sbagliato da seguire. Spesso la sua applicazione conduce a soluzioni corrette e a tutti gli elogi che ne derivano. La nostra missione, tuttavia, come già chiarito, non è quella di recitare regole, bensì di spiegarne la logica sottesa. Mentre l’addizione di numeri interi è ben modellizzata utilizzando una linea dei numeri, la modellizzazione della moltiplicazione risulta essere una sfida più ardua.

Una spiegazione comune per la moltiplicazione di interi si basa su sequenze. Si consideri, ad esempio, la sequenza di moltiplicazioni per 3 (Figura 7).

$$\begin{array}{l} 4 \times 3 = 12 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 2 \times 3 = 6 \\ 1 \times 3 = 3 \\ 0 \times 3 = 0 \\ -1 \times 3 = \underline{\quad} \\ -2 \times 3 = \underline{\quad} \end{array}$$

Figura 7. Sequenza di moltiplicazioni per il numero 3 con attività di *cloze*.

Ancor prima di essere esposti ad operazioni con numeri negativi, crediamo che gli studenti possano individuare ricorrenze e invarianti dall’esplorazione della tabella di moltiplicazione, osservando nella sequenza che la colonna di sinistra decresce di 1, la colonna di mezzo è costante mentre la colonna di destra diminuisce di 3. Seguendo la sequenza osservata, i successivi risultati nella colonna di destra saranno -3 e -6 . Ciò potrebbe essere sufficiente per stabilire la regola generale che «un numero negativo per un numero positivo è uguale a un numero negativo». Dopo di che, una simile strategia si potrebbe applicare per «un numero negativo moltiplicato per un numero negativo» (Figura 8).

$$\begin{array}{l} 4 \times (-3) = -12 \\ 3 \times (-3) = -9 \\ 2 \times (-3) = -6 \\ 1 \times (-3) = -3 \\ 0 \times (-3) = 0 \\ -1 \times (-3) = \underline{\quad} \\ -2 \times (-3) = \underline{\quad} \end{array}$$

Figura 8. Sequenza di moltiplicazioni per il numero -3 con attività di *cloze*.

Mentre i numeri nella colonna di sinistra decrescono di 1 e la colonna di mezzo è costante, i numeri nella colonna di destra aumentano di 3. Conservando la sequenza, i successivi inserimenti nella colonna di destra saranno 3 e 6 e così via, esemplificando e convincendo che – per quanto inusuale possa apparire all’inizio – il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo.

Queste sequenze potrebbero essere sufficienti per convincere della regola instillando e rinforzando la sensazione di regolarità e stabilità, ma sono poco efficaci per *spiegare* la situazione. Questo è il motivo per cui torniamo ad avere bisogno di una storia, una storia che spiega.

Come al solito, iniziamo con una situazione familiare.

Consideriamo una reazione chimica, in cui la temperatura risulti crescere di 2 gradi all’ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Quale sarà la sua temperatura tra 5 ore?

Tale situazione potrebbe essere modellizzata dalla moltiplicazione $2 \times 5 = 10$, dove la risposta «10 gradi» rappresenta la temperatura che viene raggiunta dopo 5 ore. In questo caso entrambi i fattori sono positivi: la temperatura è aumentata e il suo incremento orario è stato di 2 gradi (quindi un fattore positivo). La linea del tempo si sposta nel futuro e il momento “tra 5 ore” è rappresentato dal valore 5 (quindi un fattore positivo). Nel variare la storia, uno di questi fattori potrebbe diventare negativo [dandoci l’opportunità di esemplificare i casi esposti in precedenza]. Varieremo prima ognuno dei fattori separatamente e poi considereremo entrambe le variazioni contemporaneamente.

– Variante 1:

Si consideri una reazione chimica in cui la temperatura *diminuisca* di 2 gradi ogni ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Quale sarà la sua temperatura tra 5 ore?

Risulta naturale rappresentare il decremento orario di temperatura con (-2) . In tal caso la situazione è modellizzata da $(-2) \times 5 = (-10)$.

– Variante 2:

Si consideri una reazione chimica in cui la temperatura *aumenti* di 2 gradi ogni ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Qual era la sua temperatura 5 ore fa?

In questo caso ci muoviamo in direzione negativa sulla linea del tempo. Dal momento che il simbolo 5 rappresenta il momento che si verificherà “tra 5 ore”, ha senso indicare con il simbolo (-5) il momento relativo a “5 ore fa”. Pertanto la situazione può essere modellizzata dall’operazione $2 \times (-5) = (-10)$.

– Variante 3:

Si consideri una reazione chimica in cui la temperatura *diminuisca* di 2 gradi ogni ora. La temperatura attuale è di 0 gradi. Qual era la sua temperatura 5 ore fa?

Chiaramente 5 ore fa la temperatura della reazione chimica era di 10 gradi, poiché da tale valore si è giunti a zero con 5 diminuzioni di 2 gradi ciascuno. In coerenza con le rappresentazioni stabilite in precedenza, la situazione attuale è rappresentata da $(-2) \times (-5)$. Considerando insieme queste due affermazioni otteniamo l’operazione $(-2) \times (-5) = 10$. Il ragionamento per la modellizzazione della variante 3 è ovviamente coerente con la “regola” e, se sviluppato correttamente, permette di conquistare più che una semplice risposta corretta.

3.1.4 Variazione numerica

I tre esempi appena esplorati hanno numerose cose in comune. Innanzitutto, trattano temi che sono noti per essere problematici per gli studenti, poi, come previsto, tentano di spiegare la difficoltà con

una storia. C'è, però, una caratteristica simile all'interno delle stesse storie che sono state narrate: quello che qui noi chiamiamo storia non è una sequenza strutturata di eventi con un inizio, una parte centrale e una fine; si tratta, invece, della descrizione di una situazione in continua evoluzione, o in alternativa, di una storia che viene modificata. Si inizia con uno scenario semplice e non problematico per poi cambiare i valori numerici in gioco, iterando tale cambiamento diverse volte. Le variazioni numeriche graduali con numeri interi entro il 10 aiutano a stabilire un modello matematico generale, un'operazione o uno schema. Una volta riconosciuta la struttura generale, essa rimane invariata mentre si introducono i numeri "problematici" – frazioni, zero, numeri negativi. Tuttavia, poiché la variazione numerica risulta graduale, i numeri "problematici" si adattano naturalmente al modello creato potendo determinare così la relazione desiderata.

Cambiare le storie variandone i valori numerici può aiutare non solo con concetti critici, ma anche nel risolvere una molteplicità di problemi. Nel prossimo paragrafo mostreremo come la variazione numerica – cioè il cambiare i numeri nel compito, lasciando la struttura invariata – rappresenti una strategia utile nel percorso verso la soluzione.

3.2 Cambiare le storie per chiarire la confusione

Per esemplificare la variazione numerica come mezzo per raggiungere un modello generale, consideriamo due enigmi classici e due problemi piuttosto convenzionali, ma insidiosi.

3.2.1 Galline, uova e grano

Considerate il seguente noto indovinello:

Se una gallina e mezzo depone un uovo e mezzo in un giorno e mezzo, quanti giorni impiega una gallina a deporre un uovo?

Molti studenti rispondono o «un giorno» per inerzia oppure affermano che il problema è assurdo. Solo pochissimi studenti reprimono queste tendenze e cercano di ragionare sulle informazioni disponibili. Questo cosa ha a che fare con il problema dell'uovo e della gallina? Siamo convinti che alla fine di questa sezione il collegamento risulterà chiaro, tuttavia, vorremmo considerare prima un problema più "realistico".

Una libbra di grano costa 1,68 dollari. Quanto grano si può comprare con 0,50 dollari?

È vero, questa non è una storia. Si potrebbe anche dire che è un problema standard da libro di testo, tuttavia, possiamo facilmente trasformarlo in una storia. Potrebbero esserci un drago e un principe e il grano potrebbe essere un filtro d'amore. Oppure, ci potrebbe essere un povero ragazzo che ha bisogno di una tazza di questo grano "speciale" per curare la nonna da una terribile malattia. Così trova un contadino che coltiva questo grano ed è pronto a venderlo al nostro eroe per 1,68 dollari per libbra. Il ragazzo, il nostro eroe, ha però in tasca solo una moneta da 0,50 dollari. Come mostreremo nel prossimo capitolo, qualsiasi problema standard del libro di testo può essere presentato come una storia, ma ora passiamo alla matematica che il problema richiama.

Abbiamo presentato questo problema a diversi gruppi di persone, da studenti delle scuole medie a futuri insegnanti di scuola elementare, e un numero significativo di loro ha commesso degli errori nell'impostazione della divisione, cioè ha proposto di dividere 1,68 per 0,50 anziché 0,50 per 1,68. Qual è il modo migliore per aiutarli? Naturalmente, sottolineare il loro errore non è utile, al di là del problema in questione.

La struttura moltiplicativa generale che lo studente deve riconoscere per risolvere questo problema è la seguente: *Una libbra di grano costa X. Quanto grano si può comprare con Y?* Questo è un esempio di una forma più generale di divisione per contenenza, cioè una struttura di divisione che determina

quante volte X può essere contenuto in Y , o come Y può essere misurato da X . Come abbiamo visto sopra parlando della divisione con divisore una frazione, questa struttura risulta problematica. Una volta riconosciuta la struttura, la soluzione è data da $Y : X$. La domanda da porsi, tuttavia, è cosa possa guidare gli studenti a vedere la struttura generale in questo caso particolare (Mason & Pimm, 1984). Quello che abbiamo trovato utile nei paragrafi precedenti è variare i numeri.

Una libbra di grano costa 2 dollari. Quanto grano si può comprare con 6 dollari?

Una libbra di grano costa 2 dollari. Quanto grano si può comprare con 20 dollari?

I numeri di questi esempi sono facilmente manipolabili e danno come risultato un numero intero. Gli studenti hanno raramente problemi con questo tipo di domande quindi utilizzarle come punto di partenza risulta essere vantaggioso. Una volta stabilita la struttura generale è possibile passare a numeri “più problematici”, che coinvolgano frazioni.

Una libbra di grano costa 2 dollari. Quanto grano si può comprare con 0,50 dollari?

Per poi tornare gradualmente al problema iniziale. La nonna sopravviverà?
Questa strategia può essere vista come una modifica alle “griglie di variazione strutturate” (Mason, 2001, 2007) in quanto si tratta di una variazione numerica graduale allo scopo di far riconoscere la struttura matematica che sottende il problema. Per quale motivo, dunque, la struttura matematica viene riconosciuta più facilmente quando i numeri sono “compatibili”¹⁵ rispetto a quando non lo sono? L’origine dell’ostacolo, secondo noi, risiede nella gamma di cambiamenti ammissibili che viene percepita dagli studenti, ossia nei numeri del problema iniziale che sono “troppo lontani” per gli studenti dal loro spazio degli esempi relativo ai problemi che sono associati, implicitamente, con la divisione per contenenza. La variazione numerica aiuta a riconoscere le somiglianze tra i problemi proposti e ad estendere la struttura generale ad altri casi, un passo necessario per la loro soluzione. Ora torniamo alle famigerate galline e uova.

Se 6 galline depongono 6 uova in un giorno, quanto tempo impiega una gallina a deporre un uovo?

Questa formulazione può suggerire di mantenere “una gallina” come invariante e chiedere ulteriormente:

Se 6 galline depongono 6 uova in un giorno e mezzo, quanto tempo impiega una gallina a deporre un uovo?

Oppure:

Se 6 galline depongono 6 uova in 6 giorni, quanto tempo impiega una gallina a deporre un uovo?

Questa apparente analogia con il problema iniziale suggerisce un percorso verso la soluzione. Tuttavia, secondo la nostra esperienza, il problema può rappresentare una sfida per molti studenti.

¹⁵ Nota della traduttrice. Gli autori chiamano tali numeri «*compatible*», nel senso di familiari e facilmente manipolabili dagli studenti.

3.2.2 Le “grandi” percentuali

Spesso sorridiamo quando qualcuno afferma di mettere il 120% delle proprie energie in un progetto o di essere sicuro al 200% di qualcosa. Queste affermazioni testimoniano la tendenza ad enfatizzare eccessivamente uno sforzo o una certezza, piuttosto che fornire una misura accurata. Siccome consideriamo che un intero sia pari al 100%, cosa indica una percentuale superiore al 100%? Abbiamo scoperto che quando in un problema matematico compare una percentuale elevata spesso gli studenti vengono portati a non riconoscerne la struttura generale. Si consideri, ad esempio, il seguente problema:

Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 400%, qual è il nuovo prezzo?

In una classe di futuri insegnanti di scuola elementare, circa la metà degli studenti ha affermato che il nuovo prezzo è di 40 dollari, spiegando che il 400% significava “quadruplicare” il prezzo iniziale. Ancora una volta, abbiamo trovato utile la variazione numerica per riconoscere la strategia generale per la risoluzione del problema:

Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 20%, qual è il nuovo prezzo?

Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 35%, qual è il nuovo prezzo?

Il prezzo di una lattina di caffè era di 10 dollari. È aumentato del 100%, qual è il prezzo ora?

Anche in questo caso riteniamo che il problema principale stia nella percezione del range di cambiamento ammissibile. Mentre il 20%, il 35% o addirittura il 100% rientrano in ciò che ci si aspetta – sia nel contesto del mondo reale che nel contesto di una lezione di matematica – l’aumento del 400% sembra andare oltre ogni ragionevole cambiamento ammissibile. Questi numeri, o numeri simili, possono essere utilizzati progressivamente in una storia riguardante una scandalosa inflazione o prezzi gonfiati. Forse la storia potrebbe riguardare una gita di classe in un discutibile parco divertimenti i cui proprietari aumentano il prezzo dell’acqua in bottiglia man mano che la giornata diventa più calda e la gita è programmata proprio nel giorno più caldo dell’anno. O forse stiamo parlando di una super bevanda che aumenta la forza e la resistenza di chi la beve. Indipendentemente dalla storia, l’uso progressivo di questi numeri può aiutare gli studenti a creare un ponte tra la loro comprensione delle percentuali in situazioni standard e la comprensione di situazioni come quella appena descritta, con un aumento del 400%. Passiamo ora a un altro indovinello popolare e cerchiamo di spiegarlo con una variazione numerica.

3.2.3 Il dollaro mancante

L’indovinello del dollaro mancante o paradosso del dollaro mancante è un famoso rompicapo che appare in molte raccolte pubblicate di problemi matematici.

La storia inizia con tre uomini che si registrano in un hotel. Viene comunicato loro che il costo della camera è di 30 dollari, così ognuno contribuisce con 10 dollari e sale al piano superiore. Più tardi il direttore si rende conto di aver addebitato un costo eccessivo agli uomini e che il costo reale avrebbe dovuto essere di soli 25 dollari. Il direttore manda subito il fattorino al piano di sopra a restituire i 5 dollari di differenza

agli uomini. Il fattorino, tuttavia, decide di imbrogliare gli uomini: intasca 2 dollari per sé e restituisce solamente 1 dollaro a ciascuno degli uomini. Di conseguenza, ogni uomo ha pagato 9 dollari per stare nella stanza ($3 \times \$9 = \27) e il fattorino ha intascato 2 dollari ($\$27 + \$2 = \$29$). Inizialmente però gli uomini avevano pagato 30 dollari, quindi la domanda è: *dov'è il dollaro mancante?*

In un'altra versione di questa storia cambiano la scena e i giocatori, ma si mantengono i numeri costanti.

Tre signore vanno a mangiare in un ristorante. Ricevono un conto di 30 dollari. Ognuna mette sul tavolo 10 dollari, che il cameriere raccoglie e porta in cassa. Il cassiere informa il cameriere che il conto avrebbe dovuto essere di soli 25 dollari e gliene restituisce 5 in monete da 1 dollaro ciascuna. Mentre torna al tavolo, il cameriere si rende conto che non può dividere le monete equamente tra le signore e, poiché esse non conoscevano il totale del conto reale, decide di mettere 2 dollari in tasca e di restituire a ciascuna delle signore 1 dollaro. Ora, siccome ad ogni signora è stato restituito un dollaro, ognuna ha pagato 9 dollari. Tre volte 9 dollari corrisponde a 27 dollari. Il cameriere ha 2 dollari in tasca e 2 dollari più 27 dollari corrispondono a 29 dollari. Le signore hanno originariamente consegnato 30 dollari. *Dov'è il dollaro mancante?*

Sebbene l'ambientazione e i personaggi siano cambiati, non sono cambiati i numeri e i numeri sono problematici nella loro compatibilità. Vale a dire che il calcolo errato (con risultato 29 dollari) ci porta molto vicino al valore iniziale dato (30 dollari) ed è qui che si trova il problema e si percepisce il paradosso. Una serie di esperti in diversi siti web e forum hanno cercato di spiegare dove sta l'errore di calcolo. Anche noi vorremmo farlo, tuttavia, a differenza di altre spiegazioni, che si attengono alla storia, modificheremo la storia variando i dati numerici. Il paradosso nelle situazioni sopra citate si crea quando si aggiungono i 2 dollari intascati dal cameriere o dal fattorino ai 27 dollari pagati dalle signore o dagli uomini. L'aggiunta di questi due importi non dà informazioni su eventi sviluppatisi nella storia; se si sottraessero 2 dollari dai 27 dollari pagati dalle signore, invece, si capirebbe quanto il cassiere o l'addetto alla reception dell'hotel abbiano effettivamente ricevuto come pagamento. È chiaro che la spiegazione di cui sopra, o altre simili, non "funzionano". Le persone rimangono ancora perplesse rispetto alla differenza tra i 29 dollari citati nella storia e i 30 dollari iniziali per cui si desidera capire come siano stati suddivisi e quindi si continua a cercare il dollaro mancante. Questo è il motivo per cui questo rompicapo è sopravvissuto per così tante generazioni e, sospettiamo, continuerà ad intrigare le menti curiose per molte generazioni a venire. Per coloro che si sforzano di capire, tuttavia, offriamo una storia diversa che è in realtà la stessa storia, ma con numeri differenti.

Il costo effettivo della camera è di soli 20 dollari e il fattorino viene mandato a restituire 10 dollari agli uomini. Per semplicità di divisione, il fattorino intasca 1 dollaro e restituisce 3 dollari a ciascuno degli uomini. Gli uomini hanno pagato 7 dollari a testa, per un totale di 21 dollari, e il fattorino ha 1 dollaro.

Aggiungendo il dollaro intascato dal fattorino al pagamento effettivo si ottengono 22 dollari; sarebbe sensato suggerire che manchino 8 dollari dall'incasso iniziale di 30 dollari? E se ciò non convince abbastanza, cambiamo i numeri nella storia ancora una volta.

Gli uomini ricevono un coupon «Soggiorna da noi ad 1/3 del prezzo» e il fattorino viene mandato a restituire loro 20 dollari. A questo punto, conoscendo il desiderio del fattorino di poter effettuare una divisione equa e che dia come risultato un numero intero, si intasca 2 dollari e restituisce 18 dollari agli uomini, 6 dollari a testa.

In questa situazione gli uomini hanno pagato 4 dollari a testa, per un totale di 12 dollari e il fattorino ha in tasca 2 dollari. Aggiungendo i 2 dollari intascati al pagamento effettivo si ottengono 14 dollari. Avrebbe senso suggerire, a partire da un incasso iniziale di 30 dollari, che ne manchino 16?

Abbiamo notato che variare i numeri, siano essi grandi o piccoli, aiuta a dare senso alla situazione; la variazione numerica nella storia potrebbe essere infatti più convincente di qualsiasi tentativo di spiegare quella originale. L'assurdità del dollaro mancante nella versione originale viene a galla quando si evidenzia che la struttura generale costituita dall'aggiungere l'importo pagato a quello intascato e ricercare il "denaro mancante" non ha senso, di conseguenza nemmeno l'esempio specifico del "dollaro mancante" ha senso.

3.2.4 Mescere vino ed acqua, una variazione discreta

Un altro famoso problema matematico, spesso presentato come enigma, offre uno scenario con due bicchieri identici, uno riempito d'acqua e l'altro riempito con una stessa quantità di vino. Per nessuna ragione specifica, ma solo per creare il problema, un cucchiaino di vino viene versato nel bicchiere d'acqua e un cucchiaino preso dall'acqua mesciuta con il vino viene versato nel bicchiere di vino. La domanda, quindi, è: c'è più vino nell'acqua o più acqua nel vino? Naturalmente coloro che non amano guastare il vino con l'acqua o coloro che preferiscono star lontano dagli alcolici possono presentare il problema con liquidi diversi; Ad esempio, una variazione tipica considera due barattoli di vernice: rossa e blu. Suggeriamo al lettore che non ha familiarità con il problema di mettere da parte questo articolo e provare a risolverlo.

La soluzione – secondo cui la quantità di acqua nel vino è uguale alla quantità di vino nell'acqua – è una sorpresa per molti e la manipolazione algebrica che suggerisce chiaramente la risposta appare controintuitiva. Suggeriamo una variazione – non per dimostrare il risultato, crediamo che l'algebra assolva bene questo compito – ma per "attingere all'intuizione".

Supponiamo che, anziché avere un problema di bicchieri d'acqua e di vino o due barattoli di vernice, raccontassimo una storia riguardante due autobus, uno rosso e l'altro blu.

Sull'autobus rosso ci sono 10 ragazze e su quello blu ci sono 10 ragazzi, entrambi stanno andando ad un certo evento, scelto per una specifica ragione, che dipende dall'immaginazione del narratore. Entrambi gli autobus si fermano per una sosta e 3 ragazze vanno a far visita ai ragazzi nel loro autobus blu. Poco dopo, per un'improvvisa richiesta, gli autobus devono ripartire (lasciamo che sia l'immaginazione del narratore a creare sia la necessità della visita delle ragazze, sia la situazione di emergenza che richiede la partenza improvvisa degli autobus). Partendo in fretta e furia – e solo perché ogni autobus può trasportare al massimo 10 passeggeri – 3 giovani dell'autobus blu corrono a prendere posto sull'autobus rosso. Ci saranno più ragazzi sull'autobus rosso o più ragazze sull'autobus blu?

Sembra che la risposta dipenda, naturalmente, da chi sono i 3 giovani che sono corsi dall'autobus blu a quello rosso. Se tutte e 3 fossero ragazze, torneremmo alla situazione iniziale, nessuna ragazza sull'autobus blu e nessun ragazzo sull'autobus rosso. Se tutti e 3 fossero ragazzi, avremmo 3 ragazzi sull'autobus rosso e 3 ragazze sull'autobus blu. Se fossero 2 ragazze e 1 ragazzo a lasciare l'autobus blu, avremmo come risultato 1 ragazzo sull'autobus rosso e 1 ragazza sull'autobus blu. Analogamente, se fossero 2 ragazzi e 1 ragazza ad andare verso l'autobus rosso, avremmo 2 ragazzi sull'autobus rosso e 2 ragazze sull'autobus blu. Qualunque sia la combinazione, la risposta non cambia: il numero di ragazzi sull'autobus rosso è lo stesso del numero di ragazze sull'autobus blu. Gli scettici – così come gli studenti – sono invitati a verificare altre possibilità: Se il numero di ragazzi su ogni autobus fosse di 20 o 50 invece che di 10? E se il numero di "visitatori iniziali" fosse 2, o 5 o 10, anziché 3?

Mescere vino e acqua potrebbe sembrare diverso dal mescolare ragazzi e ragazze, tuttavia, speriamo

che l'analogo e semplice esempio numerico nel discreto di questa storia sia utile per dare un senso alla situazione originale nel continuo.

3.2.5 Cambiamo contesto – Cambio di un dollaro al supermercato

Negli esempi precedenti abbiamo discusso la variazione numerica, cioè la modifica dei dati numerici all'interno della storia. In questo paragrafo ci concentreremo sulla variazione del contesto. Proponiamo come esempio una storia vera. Molte storie le raccontiamo come se fossero accadute ad uno di noi, ma questa è realmente accaduta ad uno di noi, per questo motivo la storia è raccontata in prima persona.

«Un giorno entrai in un grande supermercato del centro per fare la spesa. Non sono solita fare la spesa lì, ma era sulla mia strada e mi servivano solo poche cose. Quando arrivai alla cassa, notai un cartello che diceva: "Cambio dollari statunitensi: 27%". Riflettei un attimo: cosa significava? Ero in vena di educare il mondo e di instillare la conoscenza dei numeri in tutti i cittadini e così cercai di spiegare alla cassiera che il cartello non aveva molto senso e che il modo corretto sarebbe stato quello di scrivere $1 \text{ USD} = 1,27 \text{ CAD}$.¹⁶ La cassiera mi guardò con uno sguardo del tipo "ma sei stupida, o cosa?". Sostenne che tutti, tranne me, avevano capito esattamente il significato del cartello, che lei aveva fatto parecchi cambi quel giorno e nei giorni precedenti e nessuno si era mai confuso o lamentato. Nessuno tranne me, ovviamente. Ma non mi arresi.

Andai a parlare con il direttore, un simpatico uomo di mezza età dall'accento francese. Spiegai, al meglio delle mie possibilità, che il cartello poteva essere interpretato in diversi modi e proposi un modo corretto di indicare il tasso di cambio. Il direttore mi chiese subito se fossi una matematica e sembrò capire il mio punto di vista. Mi ringraziò persino per averlo notato e per la mia preoccupazione, e mi promise di cambiare il cartello. Uscii dal supermercato di buon umore, sentendomi rispettata e credendo di aver reso il mondo un posto migliore, o almeno un posto più "competente nei numeri". Qualche giorno dopo tornai allo stesso supermercato. L'insegna era effettivamente cambiata. Ora c'era scritto: "Cambio dollari statunitensi: 28%"».

Questa storia è stata condivisa con alcuni dei nostri studenti, futuri insegnanti. Non sembravano impressionati. Dopo tutto, tutti sanno come convertire il denaro, sostenevano, soprattutto come convertire un dollaro statunitense in un dollaro canadese. Così, per chiarire la questione, abbiamo raccontato un'altra storia. Supponiamo, è stato detto agli studenti, che siate stati scelti per andare su Marte nell'ambito del vostro programma di formazione insegnanti. I programmi di scambio per studenti stanno diventando piuttosto popolari, così mentre altri gruppi potrebbero andare in Messico o in Inghilterra, la vostra destinazione è Marte. Per prepararvi al viaggio, volete cambiare i dollari canadesi in dollari marziani. Vi viene detto: «Cambio dollari marziani: 37%». Quale importo, in dollari marziani otterreste per 100 dollari canadesi?

Abbiamo accolto diverse risposte. Alcuni sostenevano che avrebbero ottenuto 37 dollari (considerando il 37% di 100 dollari), altri hanno suggerito che avrebbero ottenuto 137 dollari (aggiungendo il 37% all'importo consegnato) altri ancora 63 dollari (sottraendo il 37% all'importo consegnato). Cambiare il contesto, presentando un caso in cui le conoscenze pregresse non entrino in gioco a dare un senso alla situazione, ha contribuito a rendere l'idea e a sostenere l'obiezione che l'informazione del cartello alla cassa non fosse ben definita.

¹⁶ Nota della traduttrice. Con le sigle USD e CAD si intendono rispettivamente il dollaro statunitense e il dollaro canadese.

A differenza delle storie discusse in precedenza, la variante qui presentata è servita a creare confusione, piuttosto che a chiarirla. Tuttavia, la confusione ha reso chiaro che le informazioni sul cartello non erano state presentate correttamente e, si spera, abbia fatto aumentare la consapevolezza sulle possibili interpretazioni errate dell'affermazione e dunque sulla necessità di chiarezza delle informazioni.

3.3 Alcune riflessioni didattiche conclusive

Abbiamo presentato qui storie o situazioni problematiche che affrontano diverse idee matematiche note per essere difficili da spiegare per gli insegnanti e difficili da comprendere da parte degli studenti. La caratteristica comune a tutte queste storie, dal punto di vista della prospettiva della narrazione, è la nozione di ripetizione o di ripetizione con variazione. Non è al primo tentativo che Riccioli d'Oro trova la sedia più comoda o la zuppa perfetta. Non è al primo tentativo che il Principe trova una ragazza che possa indossare la scarpa persa da Cenerentola. Nella storia una ricerca, una ripetizione con variazioni, è ciò che porta al successo finale, lo stesso vale, a volte, quando si tratta di comprendere la matematica.

La caratteristica comune di questi racconti, dal punto di vista della matematica, è che si riferiscono ad una situazione molto semplice e familiare per poi esplorarne gradualmente le variazioni, fino a raggiungere una situazione altrimenti problematica. Piuttosto che strani fatti da memorizzare e strane regole da osservare, questa esposizione graduale a tali situazioni, variando alcuni elementi di una storia, presenta le regole e i fatti matematici come estensioni logiche o derivazioni di conoscenze pregresse. La variazione numerica è riconosciuta nell'insegnamento come una strategia efficace. Abbiamo mostrato come si possa iniziare con numeri piccoli o "compatibili" per poi, una volta stabilita la struttura, passare a numeri più grandi o inusuali per gli studenti. Abbiamo anche considerato i vantaggi della variazione numerica nella "direzione opposta", cioè partendo da una situazione confusa e variando poi i numeri per rivelare la struttura generale sottostante. Questo approccio è analogo all'euristica del "considerare un problema analogo ma più semplice" suggerita da Polya (1945/1988). Nello stesso modo in cui variazioni analoghe ma più semplici di un dato problema aiutano a raggiungere una soluzione, variazioni analoghe ma più semplici di uno scenario in una storia aiutano a comprendere concetti difficili o risultati controintuitivi. Abbiamo anche mostrato come cambiare il contesto di una storia – con un problema analogo, ma non necessariamente più semplice – possa aiutare a dirigere l'attenzione degli studenti verso la matematica.

4 Storie che pongono una domanda¹⁷

I libri di testo di matematica sono spesso composti da molti cosiddetti "esercizi" e "problemi". In questo contesto, quelli che vengono definiti esercizi sono stringhe di calcoli, usati per esercitarsi, praticare e rinforzare metodi o algoritmi appresi in precedenza. Ciò che viene chiamato problema non è in realtà molto diverso nello scopo, ma piuttosto nella forma. I problemi hanno un testo invece che solo simboli e la loro risoluzione solitamente coinvolge uno sforzo coordinato per decodificare le parole in un enunciato numerico, seguito dall'applicazione dell'algoritmo corretto per arrivare alla soluzione finale. Per esempio, mentre $3 + 5$ è visto come un esercizio, la sua codifica in problema corrisponderebbe ad un testo in cui ad esempio due personaggi, Jack e Jill, combinano alcune biglie. Nei libri di testo, tali problemi solitamente compaiono verso la fine di un capitolo o di una sezione e si basano sugli algoritmi appresi nelle pagine precedenti.

¹⁷ Questo capitolo è la traduzione del capitolo 8 del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* (Zazkis & Liljedahl, 2009), dal titolo originale *Stories that ask a question*.

Quelli che vengono spesso chiamati “problemi” nella matematica scolastica sono molto diversi dall’idea di “*problem-solving*” come introduzione all’attività matematica. La nozione standard di *problema matematico*, così come viene utilizzata nella letteratura in didattica della matematica, si riferisce ad un compito per il quale nessun algoritmo o approccio standard è immediatamente evidente per la sua risoluzione. Ciò che può essere definito problema dipende, pertanto, dalla conoscenza e dall’esperienza pregressa di chi apprende.

A differenza dei problemi matematici “reali”, i problemi scolastici sono spesso definiti problemi a parole o problemi-storia. In realtà, si tratta di scheletri di storie che sono state spogliate dei loro dettagli coinvolgenti. Discutiamo ora qui di come la storia possa essere reintrodotta all’interno di alcuni problemi a parole tradizionali.

4.1 Vestirsi

La seguente storia può essere utilizzata non solo per introdurre un’idea matematica, ma anche per estenderla. Presentiamo prima un problema a parole per poi mostrare come il problema possa essere trasformato in una storia, rendendo l’attività matematica più coinvolgente.

Problema (formulazione convenzionale):

Se l’insieme A ha 3 elementi e l’insieme B ha 4 elementi, quanti elementi ci sono nel prodotto cartesiano $A \times B$?

Con una terminologia un po’ meno “pomposa”, lo stesso problema può essere riscritto come segue:

L’insieme A ha 3 elementi e l’insieme B ha 4 elementi. Il tuo compito è creare un insieme C, i cui elementi sono tutte le possibili coppie ordinate, dove il primo elemento della coppia proviene dall’insieme A e il secondo elemento della coppia proviene dall’insieme B. Quante coppie ci sono in C?

Questo problema può essere presentato anche come una storia; una semplice variante di questa formulazione si trova in molti libri di testo per le scuole elementari.

Problema come una storia:

Kathy ha 3 gonne e 4 camicie. Quanti possibili *outfit* può creare (assumendo che ogni gonna possa essere abbinata con tutte le camicie e che un *outfit* sia formato da una gonna e una camicia)?

Ma *narrare* una storia richiede ulteriori elaborazioni. Nel par. 1 abbiamo illustrato diversi elementi per elaborare una narrazione efficace e coinvolgere gli studenti nella narrazione. Ciò che segue è un ulteriore esempio per poter coinvolgere gli studenti in un problema, narrando una storia e usando alcune sfumature umoristiche. Senza perdere in generalità, abbiamo scelto di presentare questo racconto di una storia con una voce femminile.

«Oggi sono arrivata a lezione con qualche minuto di ritardo. L’avete notato? No? Vorrei condividere con voi il motivo del mio ritardo. La sveglia ha suonato alla solita ora, ho fatto colazione alla solita ora e ho iniziato a vestirmi alla solita ora, ma quando ho aperto l’armadio mi sono trovata di fronte a un dilemma. C’erano 3 gonne e 4 camicette appese e non riuscivo a decidermi. C’era una gonna nera, una gonna blu e una gonna verde. E le 4 camicette erano una bianca, una rosa, una rossa e una gialla. Forse dovrei scegliere una gonna nera con una camicetta bianca? O forse una gonna verde con una camicetta rosa? Che cosa mi suggerireste? [Fate una pausa

nella narrazione] Vedete, non riuscite a decidere. Anch'io non riesco a decidere. Per questo ho fatto tardi a lezione. Sapete quanti *outfit* diversi ho dovuto prendere in considerazione?»

Qui, naturalmente, fate una pausa per dare agli studenti il tempo di riflettere sulla domanda così come l'opportunità di trovare una risposta. Per gli studenti molto giovani, l'attività può coinvolgere il colore effettivo dell'*outfit*, per quelli più grandi la strategia usuale è quella di introdurre alcuni simboli per codificare ed elencare le diverse possibilità. In base all'età e alla preparazione matematica degli studenti, la codifica simbolica può indicare i colori specifici, ad esempio usando SB, SN e SG per indicare rispettivamente le gonne nere, blu e verdi,¹⁸ oppure può indicare il numero del capo di abbigliamento, anziché il colore specifico, ad esempio usando S1, S2, S3 per distinguere le 3 gonne e B1, B2, B3 e B4 per distinguere le quattro camicette.¹⁹ Un elenco sistematico di tutti i casi riporterà le seguenti combinazioni (Figura 9).

S1-B1	S2-B1	S3-B1
S1-B2	S2-B2	S3-B2
S1-B3	S2-B3	S3-B3
S1-B4	S2-B4	S3-B4

Figura 9. Combinazioni possibili degli *outfit* con gonne e camicette.

Per molti tale elenco sistematico ed esaustivo potrebbe essere sufficiente. C'è, tuttavia, l'opportunità di estendere la storia allo scopo di introdurre un'importante idea matematica.

«Lasciatemi ora dire che la giacca è parte del mio *outfit* e che ho 2 giacche. Quanti *outfit* diversi dovrò ora considerare?

E naturalmente non entrerò in classe senza le scarpe. Supponiamo che io abbia 12 paia di scarpe e che ogni *outfit* sia formato da una gonna, una camicetta, una giacca e un paio di scarpe. Quanti *outfit* dovrei considerare in questo caso?»

Si noti la scelta dei numeri. La storia originale e la sua prima estensione possono essere semplicemente risolte creando degli elenchi, una strategia che talvolta viene chiamata “conteggio completo” – o uno “studio sistematico di tutti i casi possibili”. Non è difficile neanche estendere l'iniziale elenco di 12 *outfit* all'elenco di 24, includendo le giacche tra i capi d'abbigliamento presi in considerazione. Tuttavia, la scelta di un numero più ampio nella fase successiva invita alla generalizzazione. Continuando con l'evoluzione della storia, gli studenti sono invitati a considerare l'aggiunta di un cappello all'*outfit*, sapendo che ci sono 37 possibili cappelli. L'improbabilità di questo numero così grande suscita diversi sorrisi. Uno scherzo? Naturalmente! Uno scherzo però con uno scopo, in quanto l'evidente esagerazione di questo numero fa capire agli studenti che il docente si aspetta da loro che trovino un modo generale di affrontare questo tipo di problema. Invitiamo quindi gli studenti ad estendere ulteriormente la storia, aggiungendo più articoli all'*outfit* – calzini, sciarpe, guanti, gioielli,

18. Nota della traduttrice. Nel testo originale i termini «*black, navy, and green skirts*» (gonne nere, blu e verdi) danno origine alle sigle SB (*black skirt*), SN (*navy skirt*) e SG (*green skirt*).

19. Nota della traduttrice. Nel testo originale i termini «*skirts*» e «*blouses*» (gonne e camicette) danno origine alle sigle S e B.

occhiali ecc. Successivamente proponiamo un'altra variante, vincolando la storia:

«Supponiamo che abbia anche dei pantaloni, 5 paia. Ma non indosserei pantaloni e gonna insieme! Come cambierebbe il numero di *outfit*?»

Sulla base di questa esperienza, gli studenti concludono che una soluzione si può ottenere moltiplicando i numeri che indicano quanti capi di ogni tipologia sono a disposizione per comporre l'*outfit*. Usando il linguaggio matematico, la soluzione è data dal prodotto del numero di elementi in ogni insieme. Formalizzando ulteriormente, può essere dedotta una strategia generale: ogni qual volta sia necessario fare scelte successive, il numero totale di possibilità è il prodotto dei numeri che indicano il numero di scelte in ogni passo.

La narrazione dell'insegnante può continuare nel modo seguente:

«Questa proprietà è così importante in matematica che le è stato dato un nome. Essa è chiamata il principio fondamentale del calcolo combinatorio. Sì, *Il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio* [le lettere maiuscole e il carattere corsivo qui indicano il tono crescente della voce]. Ma se doveste dimenticare questo nome, potrete semplicemente chiamarlo "il dilemma mattutino della mia insegnante"».

Vorremmo richiamare l'attenzione del lettore, ancora una volta, sul concetto di *telling*. Nel nostro caso non è semplicemente una narrazione artistica, ma una narrazione interattiva. L'insegnante fornisce la struttura, ma gli studenti diventano partecipanti nella narrazione decidendo come estendere la storia scegliendo man mano ulteriori capi da aggiungere all'*outfit*. Si passa dunque da una situazione piuttosto semplice, che può essere esplorata da studenti molto giovani, ad un teorema generalizzato, di grande utilità in molti problemi matematici.

4.2 ... per una festa

Dopo aver considerato tutti i possibili *outfit* e avendo scelto auspicabilmente quello appropriato per una festa, consideriamo una storia di incontri alla suddetta festa, solitamente noto come "il problema delle strette di mano".

La notte scorsa siamo stati ad una festa molto piacevole! Il DJ ha suonato 107 diverse canzoni. Il bar aveva 7 scelte di cocktails. Per cena c'erano 4 differenti antipasti che includevano paté di fegato e insalata di coda d'aragosta.

Avremmo potuto continuare questa descrizione e chiedere il numero di possibili combinazioni durante la cena, costituite da un cocktail, un antipasto e una canzone. Il focus che abbiamo scelto questa volta è invece sull'accoglienza e la presentazione degli ospiti.

All'arrivo degli ospiti, ogni persona ha stretto la mano a tutti gli altri invitati...

Quante strette di mano ci sono state? – questa è la domanda usuale. La risposta, naturalmente, dipenderà dal numero di persone che sono giunte alla festa. In una classe tradizionale orientata all'obiettivo, questa domanda può essere preceduta soltanto dalla frase: «C'erano (qualsiasi numero si desidera) persone e ognuno ha stretto la mano con tutti gli altri». Nel nostro caso, tuttavia, la domanda sarà preceduta da una storia che riguarda la festa.

Cosa si guadagna a trasformare questo problema piuttosto standard in una storia? Per alcuni studenti potrebbe essere uno strumento per catturarne l'attenzione, una storia per ricordare e associare problemi che coinvolgono le combinazioni. Da un punto di vista didattico è un'opportunità per interpretare il problema in diversi modi, iniziando ad esempio presentando il padrone di casa e poi

continuando con gli ospiti che arrivano uno ad uno, registrando man mano i risultati delle diverse strette, oppure, alternativamente, considerando che gli ospiti siano tutti presenti e facendoli sistemare in cerchio per poi esplorare le possibilità più efficienti per contare le loro strette di mano.

Una tale narrazione conduce ad un altro importante elemento dello *storytelling* che è emerso nelle due storie presentate in questo capitolo: la personalizzazione. In entrambe – la storia della scelta degli *out-fit* e la storia della festa e delle strette di mano – l’insegnante narra un racconto che riguarda sé stessa/stesso, anziché Cappuccetto Rosso, Gauss o Quint. Di conseguenza, quando la storia inizia, gli studenti non hanno idea che quello che stanno per ascoltare sia una deliberata e pianificata parte della lezione.

4.3 Studenti come attori del problema: re Salomone e la regina di Saba

Abbiamo già menzionato i possibili modi per coinvolgere gli studenti in una storia, come narrare o continuare a narrare parti ripetitive, scegliere nomi per i personaggi o determinare le loro azioni successive. Abbiamo anche menzionato l’importanza di far sì che gli studenti si relazionino con il protagonista nella storia, dove il miglior personaggio con cui identificarsi è quello che assomiglia agli studenti stessi; si potrebbe spiegare così il successo di Harry Potter. Abbiamo anche solo accennato ad un possibile beneficio nel rendere il narratore un attore della storia, attraverso la narrazione di un racconto che riguardi sé stessa/stesso. Un’altra possibile strategia per aumentare il coinvolgimento degli studenti è rendere gli studenti stessi eroi o attori.

Richiamiamo l’esempio del pastore Amzula che non sapeva contare.²⁰ Come avrebbe potuto essere sicuro che tutte le pecore che uscivano dal recinto la mattina sarebbero ritornate la sera? Giriamo questa domanda agli studenti, ma in aggiunta alla domanda stessa, introduciamo un gioco di ruoli. Piuttosto che dire «come potrebbe il pastore essere sicuro del numero di pecore?» diremmo «fingi di essere il pastore, cosa faresti?». Successivamente gli studenti presenterebbero le loro idee riferendosi a ciò che *essi vorrebbero fare* piuttosto che a ciò che *potrebbe essere fatto* in generale. Nella nostra esperienza, questa piccola modifica nella formulazione della domanda rende gli studenti non solo più coinvolti nel compito, ma anche più responsabili nel riportare i propri suggerimenti. Esso dà a loro la responsabilità del problema e anche la responsabilità della soluzione, facendo sì che facciano *proprio* il problema da risolvere. Piuttosto che risolvere il problema di Amzula, del principe o di Edipo, è il loro problema che devono affrontare e risolvere. Presentiamo qui il primo di tre esempi di questo tipo in cui vengono coinvolti gli studenti.

Re Salomone è noto per essere il più saggio tra gli uomini. Una storia biblica molto conosciuta narra di come risolse un’aspra disputa tra due meretrici, ognuna delle quali reclamava di essere la madre di un neonato. Re Salomone suggerì di tagliare il bambino a metà: una donna fu d’accordo mentre l’altra offrì di darle il bambino pur di salvargli la vita. Un’offerta così generosa poteva provenire solo dalla sua vera madre alla quale fu infatti affidato il bambino.

Una storia molto meno nota riguarda re Salomone e la regina di Saba, che Salomone voleva disperatamente sposare, nonostante avesse avuto un notevole successo con molte altre donne.

Alla proposta di matrimonio di Salomone, la regina di Saba chiese ai servi di portare due coppe identiche, una riempita con 10 talenti d’argento e l’altra con 10 talenti d’oro. Suggerì che Salomone fosse bendato e che poi scegliesse solo una coppa e un talento da quella coppa. «Se sceglierai il talento d’oro, ti sposerò» – disse la regina di Saba a Salomone.

Il re considerò per un attimo le sue possibilità e poi chiese se gli fosse permesso di riorganizzare i talenti nelle due coppe prima di fare la sua scelta da bendato. La regina di Saba fu sorpresa dalla richiesta. Con 10 talenti d’oro in una coppa e 10 talenti

20. Nota della traduttrice. Gli autori raccontano la storia di Amzula nel Capitolo 1, *A story* (Zazkis & Liljedahl, 2009).

d'argento nell'altra, sapeva che la possibilità di estrarre il talento d'oro era di $1/2$. Supponiamo, pensò, che i talenti vengano mischiati e che ogni ciotola contenga 5 talenti d'oro e 5 d'argento; non riusciva a capire come questo avrebbe potuto cambiare la situazione. Avrebbe dovuto accogliere la richiesta di re Salomone?

Qui ci fermiamo per rivolgerci agli studenti: «Supponiamo che tu sia la regina di Saba. Accoglieresti la richiesta di Salomone? Perché sì o perché no?», «Supponiamo che tu sia re Salomone. Perché vorresti riorganizzare i talenti? Potrebbe esserci qualche differenza?».

La richiesta di Salomone appare inusuale, perché generalmente l'ipotesi iniziale che le persone fanno valutando il problema è che riorganizzando i talenti si otterrebbe comunque una quantità uguale in ogni coppa. Questo, infatti, non cambierebbe le probabilità di scegliere il talento d'oro. Il colpo di scena, tuttavia, sta nel fatto che quando i numeri di talenti nelle coppe sono diversi, le probabilità cambiano in modo significativo. Lo scenario migliore – che è infatti quello che potrebbe aver proposto il re – consiste nel lasciare un unico e solo talento d'oro in una coppa e mettere i rimanenti 9 talenti d'oro e 10 talenti d'argento nell'altra. Il calcolo esatto – e l'esplorazione di diverse riorganizzazioni dei talenti – può servire come introduzione alla probabilità condizionata nei gradi scolari più alti. Tuttavia, anche per gli studenti di scuola elementare è facile constatare che, con questa proposta di riorganizzazione, se Salomone scegliesse la coppa con l'unico talento d'oro, allora avrebbe la certezza al 100% di scegliere quello d'oro, mentre se la sua scelta iniziale fosse sulla coppa mista, la probabilità di estrarre il talento d'oro sarebbe di $9/19$, che è un po' più del 47% e molto prossima a $1/2$. Pertanto, la probabilità totale è molto vicina a $3/4$. In tal modo, dalla riorganizzazione dei talenti, la probabilità di sposare la regina di Saba è stata significativamente migliorata. Inoltre, il mettersi "nei panni" del re e della regina, permette agli studenti di trovare diverse modalità per incrementare (o far decrescere) le possibilità di matrimonio.

Grazie all'aiuto del talento d'oro – la storia narra, infine, che Salomone sposò la regina di Saba e che essi ebbero un figlio che divenne il primo re di Etiopia.

4.4 Studenti come attori del problema: il testamento del beduino

Questa famosa storia viene raccontata in diverse varianti. Tenteremo con una di queste.

C'era una volta un vecchio beduino che aveva tre figli...

Potrebbe essere il momento per un intervento interdisciplinare: Chi erano i beduini? (delle tribù nomadi arabe). Dove vivevano? (in Medio Oriente e Nord Africa). Come viaggiavano? (con i cammelli). Una volta stabilita la modalità usuale di trasporto, la storia potrebbe continuare.

Non c'è bisogno di dire che i cammelli sono molto importanti per i beduini. Servono non solo per gli spostamenti e il trasferimento di merci da un luogo all'altro, ma le loro pelli sono perfette come cappotti e tappeti per le tende. Inoltre, il fatto che il cammello sia in grado di immagazzinare cibo e liquidi sufficienti per diverse settimane, lo rende un animale ideale per gli spostamenti nel deserto. La nostra storia, però, non riguarda solo i cammelli, ma anche un beduino molto anziano e i suoi tre figli. Come spesso accade alle persone molto anziane, il vecchio beduino morì e, come spesso accade non solo tra i beduini, il vecchio beduino lasciò il suo tesoro ai figli, con istruzioni esplicite su come il tesoro dovesse essere diviso. Qual era il suo tesoro principale? I cammelli, naturalmente. Così il vecchio beduino volle che il figlio maggiore ricevesse $1/2$ dei cammelli, il figlio intermedio $1/3$ dei cammelli e il figlio minore $1/9$ dei cammelli. 17 cammelli erano stati lasciati in eredità ai figli.

I figli avevano dunque un problema molto difficile da risolvere. Non potevano tagliare

i cammelli. Non potevano vendere i cammelli e dividere il denaro – questo sarebbe stato impensabile nella loro tribù e considerato irrispettoso dei desideri del padre. Pensa, pensa e ripensa... non riuscirono a trovare una soluzione. Decisero quindi di rivolgersi all'anziano saggio della tribù e di chiedere consiglio. Lo cercarono dappertutto e alla fine lo trovarono che riposava sotto un albero con il suo cammello. Il problema non ha soluzione, dissero i figli, per cui chiediamo consiglio su come procedere.

Questo è il momento per rivolgere la storia verso gli studenti. Proponiamo agli studenti: «Immaginate di essere il vecchio saggio della tribù. Cosa suggerireste ai figli?». Gli studenti sviluppano delle loro proposte per poi presentarle alla classe. È possibile accettarle tutte o lasciare che gli studenti scelgano la migliore. Potrebbe accadere che alcuni studenti sviluppino la stessa soluzione suggerita dal vecchio saggio.

Non c'è bisogno di litigare, suggerì. Prendete il mio cammello e aggiungetelo alla vostra mandria. Questa proposta fu ritenuta eccessivamente generosa e i figli inizialmente non compresero l'inaspettata gentilezza. Ma il saggio anziano continuò: il fratello più grande dovrebbe prendere 9 cammelli, che è $\frac{1}{2}$ di 18, il figlio intermedio 6 cammelli, cioè $\frac{1}{3}$ di 18, e il più giovane 2 cammelli, che è $\frac{1}{9}$ di 18. E in questo modo riavrò il mio caro cammello e lo lascerò riposare sotto l'albero, perché è molto stanco dopo il nostro ultimo viaggio.

Il problema è risolto, ma la storia non finisce qui. Chiederemo agli studenti di considerare se il modo di dividere i cammelli suggerito dal vecchio saggio e accettato dai figli sia in effetti concorde con il testamento. Dopo tutto, 9 su 17 non è la metà e 6 su 17 non rappresenta un terzo. La conclusione auspicabile in questa discussione è che il testamento fosse "illegale", in quanto la somma delle parti non coincide con il totale. Per esempio, non si può fare testamento con $\frac{1}{2}$ del patrimonio a un figlio e $\frac{3}{4}$ all'altro, perché il totale risulta superiore all'intero patrimonio. In ogni caso, la soluzione proposta dal vecchio saggio, pur non essendo in accordo con il testamento, era la più vicina approssimazione, date le circostanze.

Una storia simile è descritta nel libro *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan (1972/2001). In quel caso, due viaggiatori stanno viaggiando sullo stesso cammello quando incontrano 3 fratelli che affrontano un dilemma simile a quello dei figli del vecchio beduino. Nel loro caso, però, ci sono 35 cammelli da dividere in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$. Uno dei viaggiatori suggerisce di risolvere il problema aggiungendo il loro proprio cammello alla quantità da dividere. L'altro viaggiatore è scioccato, pensando che così facendo non sarebbero più stati in grado di continuare il viaggio senza il cammello. Tuttavia, non appena i numeri si rivelano, il figlio più vecchio riceve 18 cammelli, che è $\frac{1}{2}$ di 36, il figlio intermedio riceve 12 cammelli, che è $\frac{1}{3}$ di 36 e il più giovane riceve 4 cammelli, che è $\frac{1}{9}$ di 36, per un totale di 34 cammelli. Sorprendentemente o no, i viaggiatori non solo ricevono indietro il loro proprio cammello, ma anche un altro cammello della mandria, come regalo per la loro saggia soluzione. Così possono continuare il loro viaggio insieme, cavalcando ognuno un cammello diverso.

Per sviluppare ulteriormente la comprensione delle idee matematiche in queste storie, si può chiedere agli studenti di scrivere le loro personali "storie di cammelli". Il compito è di variare i numeri, in modo tale che una storia simile con una soluzione simile possa avere senso. Una volta presentate diverse varianti, è possibile sviluppare una generalizzazione: quali dovrebbero essere le frazioni presenti nella storia per ottenere una "buona" storia di cammelli? Attivata l'immaginazione, gli studenti varieranno non solo i numeri, ma anche lo scenario. Dopo tutto l'attività matematica è con le frazioni, non con i cammelli.

4.5 Tre orsi in una storia differente

Chiunque avrà ascoltato la storia dei tre orsi dove c'erano papà-orso, mamma-orso e piccolo-orso. Questa, però, è una storia diversa, non c'è nessuna Riccioli d'Oro e nessuna zuppa, ma ci sono mele e fate. Ecco come inizia:

C'erano una volta tre orsi, ma voi questo lo sapete già. Dovrebbero esserci sempre tre orsi in una storia di tre orsi, ma questi non erano papà-orso, mamma-orso e piccolo-orso. Erano tre fratelli orsi, forse tre gemelli, forse tre fratelli, forse due sorelle ed un fratello. Decidete voi, potete anche dargli dei nomi, ma fino a quando non avrete scelto altri nomi, chiamiamoli Minnie, Mickey e Molly.

In una giornata di sole gli orsi andarono a fare una passeggiata nella foresta, dove giocarono, raccolsero bacche e si divertirono. I giochi erano così piacevoli che persero la cognizione del tempo e si sorpresero molto quando improvvisamente giunse la notte. Era così buio che non riuscirono a ritrovare la strada di casa, Vagarono finché non divennero molto stanchi ed affamati. Si sedettero allora sotto un albero per riposarsi un po' e... caddero in un sonno profondo. In quel momento, una fata gentile passò di lì. Vide i tre orsi e pensò che sembravano affamati; così, lasciò loro una cesta di mele e continuò a fare le sue buone azioni nella foresta. Nel bel mezzo della notte Minnie, la più grande tra gli orsi, si alzò, vide una cesta di gustose mele rosse e pensò: «Che delizia meravigliosa, queste mele sembrano così buone ed io sono così affamata che voglio mangiarle tutte!». Ma poi si ricordò che non era sola e che anche i suoi fratelli probabilmente erano affamati. Si ricordò anche che mamma-orso aveva insegnato ai suoi piccoli la condivisione, così Minnie mangiò solo un terzo delle mele e immediatamente si addormentò.

Trasorse un'altra ora e Mickey si svegliò. Vide una cesta di gustose mele rosse e pensò: «Che delizia meravigliosa, queste mele sembrano così buone ed io sono così affamato che voglio mangiarle tutte!». Ma poi si ricordò che non era solo e che anche i suoi fratelli probabilmente erano affamati. Si ricordò anche che mamma-orso aveva insegnato ai suoi piccoli la condivisione, così Mickey mangiò solo un terzo delle mele e immediatamente si addormentò.

Trasorse un'altra ora e...

Qui è opportuno lasciare che gli studenti continuino la storia. Lo schema è chiaro: ogni orso, a turno, mangia un terzo di ciò che c'è nella cesta. Dopo che anche Molly, avendo mangiato le sue mele, si addormenta con successo, possiamo continuare la storia.

Lentamente, la foresta si risvegliò in una mattina di sole. Gli uccelli cantavano e il loro amorevole canto svegliò i tre orsi addormentati. Gli orsi videro una cesta sotto l'albero. Cosa c'era dentro?

A questo punto consideriamo i suggerimenti degli studenti. Inevitabilmente, alcuni studenti proporranno che la cesta sia vuota, sostenendo che ogni orso ha mangiato un terzo delle mele totali. Tuttavia, altri studenti potrebbero obiettare a questa opinione, affermando che ognuno aveva mangiato solo un terzo di ciò che c'era nella cesta al momento del proprio risveglio. Dunque, se Molly, al risveglio, aveva mangiato un terzo di ciò che c'era nella cesta, i due terzi di questa quantità avrebbero dovuto essere ancora nella cesta. Solo nel momento in cui tutti gli studenti sono d'accordo rispetto a questo aspetto, è tempo di porre una domanda. Se quando gli orsi si risvegliarono al mattino erano rimaste 8 mele nella cesta, quante mele aveva lasciato loro la fata?

Questo problema può essere presentato sia a studenti di scuola elementare sia ad insegnanti in

formazione. Nella nostra esperienza, gli insegnanti che cercano di utilizzare l'algebra per trovare la soluzione di solito falliscono nella risoluzione. L'utilizzo di una strategia di lavoro a ritroso o disegnare diagrammi porta alla soluzione più velocemente e in modo più convincente. Di mattina c'erano 8 mele. 8 mele rappresentano i $\frac{2}{3}$ di ciò che vide Molly quando si svegliò, allora c'erano 12 mele nella cesta in quel momento. 12 mele sono i $\frac{2}{3}$ di ciò che vide Mickey quando si svegliò, per cui c'erano 18 mele nella cesta in quel momento. Infine, 18 mele sono i $\frac{2}{3}$ di ciò che vide Minnie e di ciò che la fata donò ai tre orsi. All'inizio, dunque, c'erano 27 mele nella cesta.

La soluzione in sé non è tuttavia il nostro interesse principale. Ciò che è più importante per noi è quello che questa storia introduce in una maniera giocosa e potente, ossia l'idea che una frazione sia relazionata alla quantità iniziale presa come intero e che questo intero possa cambiare.

La mancanza di attenzione verso l'intero conduce a misconcezioni presenti nelle storie che coinvolgono l'aumento o la diminuzione di una quantità mediante la stessa frazione. Per esempio, il prezzo può aumentare del 10% e poi diminuire del 10%. L'iscrizione ad un determinato club può aumentare di $\frac{1}{5}$ in un anno e diminuire di $\frac{1}{5}$ l'anno successivo. Ciò che ci si aspetta intuitivamente in questi casi è che queste variazioni si annullino a vicenda e che si arrivi all'importo iniziale. Ma questo non è ovviamente possibile, poiché l'aumento e la diminuzione relativi si riferiscono ad importi diversi, ossia la frazione o la percentuale è considerata rispetto a un intero diverso. Questa misconcezione è ben documentata nella letteratura di ricerca, la nostra speranza, forse ingenua, è che la storia degli orsi e delle mele possa richiamare l'attenzione esplicita degli studenti sulla considerazione dell'intero di riferimento ogni volta che la soluzione di un problema dipenda da una tale considerazione.

Traduzione di

Angela Donatiello, Università degli Studi di Salerno
adonatiello@unisa.it

Bibliografia

- Baker, A., & Greene, E. (1987). *Storytelling: Art and technique*. R.R. Bowker Company.
- Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 132–144. <https://doi.org/10.2307/749140>
- Bauer, C. F. (1993). *New handbook for storytellers*. American Library Association.
- Burrell, A. (1971). *A guide to story telling*. Gryphon Books. (Originale pubblicato nel 1926).
- Egan, K. (1986). *Teaching as story telling: An alternative approach to teaching and curriculum in the elementary school*. University of Chicago Press.
- Haven, K. (2000). *Super simple storytelling: A can-do guide for every classroom, every day*. Teacher Ideas Press.
- Mason, J. (2001). Tunja Sequences as example of employing students; power to generalize. *Mathematics Teacher*, 94(3), 164–169. <https://doi.org/10.5951/MT.94.3.0164>
- Mason, J. (2007). *Structured variation grids*. <http://www.pmatheta.com/structured-variation-grids.html>
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277–289. <https://doi.org/10.1007/BF00312078>

Pellowski, A. (1977). *The world of storytelling*. R.R. Bowker Company.

Polya, G. (1988). *How to solve it*. Princeton University Press. (Originale pubblicato nel 1945).

Shedlock, M. (1924). *The art of the story-teller*. D. Appleton and Company.

Tahan, M. (2001). *L'uomo che sapeva contare*. Salani Editore. (Titolo originale: *The man who counted* pubblicato nel 1972).

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling*. Brill.