

Deltoidi come aquiloni. Un “volo” attraverso la geometria

Deltoids like kites. A travel through geometry

Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi, Floriana Paternoster,
Daniela Rivelli e Daniela Zambon

Mathesis Pesaro, Italia¹

1

Sunto / In questo lavoro viene presentato un percorso di geometria piana che ha come protagonista una figura spesso trascurata nelle classi: il deltoide. La metodologia proposta è di tipo attivo e operativo e fa uso sia di artefatti (“modelli dinamici”) costruiti dagli alunni, sia di software geometrici (Cabri, Geogebra). Si espone il quadro teorico di riferimento e il sapere matematico ricavabile dalle attività suggerite; vengono anche date indicazioni sulla modalità di organizzazione e gestione delle attività in classe e sul loro valore educativo e conoscitivo.

Parole chiave: laboratorio matematico; modelli dinamici; software geometrici; quadrilateri.

Abstract / This work presents a plan geometry learning unit that highlights the deltoid, a figure often neglected in the classrooms. The proposed methodology is active and operative, employing both artifacts (“dynamic models”) built by the students and geometrical software (Cabri, Geogebra). The theoretical reference framework and the mathematical knowledge that can be gained from the suggested activities are explained and instructions on the organization and the activities management in the classroom are provided together with their educative and cognitive value.

Key words: mathematical laboratory; dynamic models; geometric software; quadrilaterals.

1 Premessa

In questo articolo² ci occuperemo di una figura geometrica spesso trascurata: il deltoide o “aquilone”. Proponiamo di analizzarne le proprietà attraverso un percorso di “scoperta operativa” realizzabile in classi di scuola elementare, media e media superiore. In questa ipotesi di lavoro, i concetti prendono progressivamente forma attraverso la manipolazione di materiali (modelli dinamici concreti, software), l’osservazione e la successiva rielaborazione mentale e verbale. Siamo convinte infatti che la matematica non sia la scienza delle formule trasmesse e passivamente apprese, ma un mondo di conoscenza da esplorare liberamente. Gli alunni devono diventare i protagonisti e gli artefici del proprio apprendimento, in un contesto laboratoriale, dove si osserva, si congettura, si “sperimenta” e infine si valida o meno quanto ipotizzato. Anche l’attività matematica può quindi prevedere un approccio sperimentale (Castelnuovo, 1963; 1972).

Una metodologia di costruzione attiva della conoscenza può contribuire a superare due ostacoli: lo scarso interesse di molti allievi nei confronti della matematica

2

1. Per consultare MathesisPesaro si veda: www.mathesispesaro.altervista.org/attivita.

2. Il presente contributo nasce come sintesi e selezione di parti di un testo più ampio, pubblicato sotto forma di e-book (Facenda et al., 2014); ad esso indirizziamo chi fosse interessato ad ulteriori ampliamenti e approfondimenti del tema qui trattato.

e il luogo comune che questa disciplina sia difficile e sia solo per chi “la capisce”. La matematica invece va pensata (e affrontata) come una stimolante attività del pensiero: non è un gioco di formule, né una raccolta di “ricette”, ma una attività che arricchisce le risorse degli alunni. Perché ciò avvenga sono necessari passione e interesse. Ma come interessare e appassionare gli allievi? Una strategia può essere, appunto, coinvolgerli in un processo di manipolazione, osservazione, esplorazione e scoperta. Gli alunni, usando sia la testa che le mani, inseriranno ciò che di nuovo viene costruito nella trama dei concetti già elaborati, al fine di imparare a pensare matematicamente e fare propria una competenza spendibile in contesti diversi.

Il percorso didattico che suggeriamo utilizza dei materiali dinamici: software geometrici e modelli concreti. Questi ultimi sono artefatti semplici, prodotti dagli stessi alunni con cartoncino, puntine di Parigi (in Italia chiamate fermacampioni), filo elastico, legnetti ecc. Gli uni e gli altri permettono di produrre rappresentazioni di oggetti matematici e lavorare su di esse; ricordiamo qui che la matematica opera su oggetti che sono accessibili solo attraverso rappresentazioni (Duval, 1993; D’Amore, 2003). Nei modelli “concreti” la dinamicità si realizza attraverso la presenza di elementi mobili, che consentono di variare il loro aspetto. Nei software dinamici, invece, è disponibile la funzione di “trascinamento” (*dragging*), che ugualmente consente di deformare e quindi modificare in modi diversi le costruzioni geometriche realizzate. La caratteristica principale di ambedue queste tipologie di materiali didattici è quindi il movimento, il dinamismo. Tale aspetto dinamico ha una forte connotazione spazio-temporale, dal momento che c’è un “prima”, un “durante” e un “dopo”; inoltre il movimento suggerisce relazioni di causa-effetto, non osservabili in una presentazione statica della geometria. Per dare forma a queste relazioni si può usare l’implicazione logica “se ..., allora ...” e passare così da una relazione causale e cronologica a una più formale (Mariotti, 2011). Ancora, l’utilizzo di artefatti favorisce l’uso di altri linguaggi (simbolico, grafico ecc.) nel momento in cui gli alunni devono esprimere osservazioni e congetture suggerite dai materiali (Laborde, 2000; 2007).

Qualsiasi modifica operata sul materiale comporta un feedback, una retroazione. Ad esempio, è possibile che la figura, in conseguenza di un movimento che ne ha cambiato anche di poco la forma, perda una proprietà oppure ne acquisti un’altra che non era stata prevista, così che emergono nuove relazioni tra elementi della figura stessa.

Oltre a ciò che attraverso il movimento cambia, è necessario anche guardare ciò che nonostante il movimento non cambia: gli invarianti che permettono di far emergere il contenuto cognitivo del modello. La contrapposizione e il confronto tra varianti e invarianti è un aspetto qualificante dell’attività di esplorazione degli oggetti geometrici. In un approccio statico alla geometria, gli invarianti sono rilevabili con maggiore difficoltà, ma è proprio la loro osservazione che stimola i processi di generalizzazione che permettono di arrivare a proprietà e teoremi. Un ambiente di geometria dinamica consente infatti di effettuare variazioni mirate, esaltando appunto gli invarianti relazionali, grazie ai quali si costruisce la trama concettuale della conoscenza geometrica.

Il dinamismo anticipa l’evoluzione del pensiero, esalta le relazioni tra elementi delle figure e favorisce un’analisi delle situazioni svincolata dai processi di misura, realizzando situazioni di *problem posing*. Durante l’attività, l’attenzione dell’allievo e quella del docente sono concentrate sul “processo” più che sul “prodotto”, sulla costruzione di immagini mentali più che sulla ricerca di un risultato predefinito. Infatti il lavoro così organizzato non è applicazione di procedure, ma formulazione e/o verifica di congetture/proprietà/teoremi.

Durante il lavoro di osservazione, manipolazione e scoperta, l'alunno è stimolato a essere autonomo; gestisce il proprio materiale, i tempi e i modi dell'osservazione in maniera diretta e personale. La costruzione della conoscenza diventa quindi un processo individualizzato.

A partire dai primi tentativi degli allievi, l'insegnante può seguire lo sviluppo del senso critico e l'arricchimento e l'affinamento dei diversi linguaggi (gestuale, verbale, simbolico, grafico ecc.).

Questa modalità di lavoro conduce in modo naturale al confronto e alla discussione. Gli alunni, essendo chiamati ad argomentare, procedono “spontaneamente” a una revisione critica delle proprie convinzioni ed affermazioni; sono pertanto indotti a riflettere sui propri processi di pensiero nel momento in cui si sforzano di renderli chiari agli altri (Bartolini Bussi & Boni, 1995; Radford, 2006). Nella discussione ogni allievo espone infatti le proprie osservazioni, le proprie congetture e le proprie proposte, che vengono sottoposte al vaglio, ed eventualmente alla critica, sia dei compagni sia dell'insegnante. La discussione sarà coordinata e gestita dal docente (dà la parola, fa da mediatore e moderatore, seleziona il sapere pertinente e significativo, mette a fuoco, problematizza, rilancia la discussione e valida il sapere emerso) con l'obiettivo di costruire ed esprimere nuove conoscenze, in forma condivisa e matematicamente corretta.

In questa modalità di lavoro l'insegnante non può essere un “trasmettitore di informazioni”: dovrà orientare, fare da guida, fornire modelli di apprendimento, essere garante della correttezza scientifica di quanto si va elaborando. Agli alunni deve arrivare un'immagine della matematica rigorosa ma aperta, dinamica e quindi amichevole, anche attraverso la “messa in gioco” personale dell'insegnante.

Modelli concreti e software dinamici sono materiali adattabili a situazioni didattiche diverse e consentono una gestione produttiva degli errori. Infatti il clima di ricerca attiva e di forte comunicazione, in cui tutti devono/possono esprimersi, attenua la paura di sbagliare. Anzi, una conclusione imprecisa o sbagliata può diventare un'occasione preziosa per discutere, per cercare esempi e controesempi, per precisare meglio o circoscrivere una intuizione: in ultima analisi, un fattore di crescita per tutti. Un'ultima annotazione: come usare in modo integrato modelli concreti e software nella didattica della geometria? Sottolineiamo subito che entrambi questi strumenti non sono “lavagne potenziate”, cioè strumenti che l'insegnante usa in prima persona – a scopo illustrativo – senza che gli alunni siano coinvolti attivamente. Al contrario, il loro uso va inserito all'interno di una modalità di lavoro fortemente connotata in senso laboratoriale ed euristico (Facenda et al., 2006; 2007; 2008a, b). In secondo luogo, l'insegnante deve avere ben presenti le specificità dei materiali di lavoro, così da renderli complementari e sinergici tra loro. Per quanto riguarda i tempi di utilizzazione, è opportuno proporre i modelli concreti prima dell'approccio al software, che si colloca ad un livello di astrazione più alto (Laborde & Marcheteau, 2008).

Entrambi i tipi di materiale consentono di portare alla luce ciò che in una figura, col movimento, cambia e ciò che resta uguale, fornendo stimoli percettivi e osservazioni preziose, che rendono più agevole la strutturazione di insiemi di figure geometriche. Scoprire le proprietà invarianti, metterle a fuoco e verbalizzarle, sono attività che contribuiscono a definire l'immagine dell'oggetto geometrico nella mente degli studenti, favorendo la progressiva formazione dei concetti. Una situazione in continuo divenire suggerisce inoltre punti di vista diversi che possono condurre a definizioni differenti per uno stesso oggetto geometrico. *Definire* significa presentare gli elementi indispensabili per tracciare l'identikit di una figura, senza dare niente di più di ciò che serve; cercare di formulare più definizioni stimola l'uso di fantasia e libertà.

2 Il modello dinamico “deltoide”: presentazione

Ci riferiamo qui a un oggetto fisico (Figura 1) la cui costruzione è molto semplice e richiede l’uso di strumenti e di materiali facilmente reperibili e anche poco costosi.

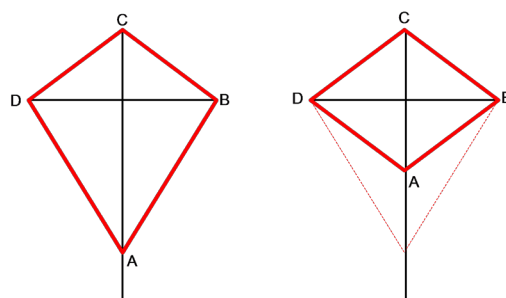


Figura 1
 Il modello “in movimento”: due posizioni possibili.

Ogni alunno produce il proprio modello partendo da una scheda di istruzioni, esposte sia a parole che attraverso disegni (vedi **Allegato 1**). Deve quindi leggerle con attenzione, decodificare la terminologia e poi “tradurle” in azioni, ordinatamente e con precisione: si tratta già per parecchi allievi di un primo e non banale impegno. I segmenti che in **Figura 1** sono indicati come BC, CD e BD sono disegnati direttamente sul cartoncino. La traccia AC è invece un’incisione. Quelli che saranno i lati AD e AB sono fatti con del filo elastico, così da permettere il movimento del vertice A lungo il “taglio” AC. (Si veda un **filmato** del modello in movimento). Quando il vertice A trasla lungo l’incisione, alcune caratteristiche del modello non si modificano:

- la diagonale AC (o il suo prolungamento, nel caso dei deltoidi concavi) biseca sempre DB, che è la diagonale “fissa”;
- le due diagonali, AC e DB, restano sempre perpendicolari tra loro;
- l’angolo $\widehat{BCD}$ non si modifica, essendo formato da due segmenti disegnati.

Lo spostamento del vertice A lungo l’incisione fa sì che il modello generi dei deltoidi. La prima tappa della costruzione del modello consiste nel disegnare il triangolo isoscele BCD. Se non vengono date indicazioni agli alunni in merito all’ampiezza dell’angolo $\widehat{BCD}$, si osserva che in genere l’opzione “angolo retto” è scelta con minore frequenza e prevale l’angolo acuto. È possibile che ciò sia dovuto al fatto che l’eventuale angolo retto si presenterebbe in posizione “non canonica” e/o che l’immagine di angolo che domina nella mente degli allievi è quella, appunto, dell’angolo acuto. Se, per rendere più agevole la costruzione del modello, viene incollato sul cartoncino-base un foglio di carta quadrettata, si osserva che la scelta “angolo retto” per $\widehat{BCD}$ diventa più frequente, evidentemente per l’influenza della quadrettatura. Questa, tuttavia, spinge gli alunni a effettuare, spostando il vertice mobile, un movimento non continuo ma a “scatti”, in cui ogni scatto coincide con un quadretto del foglio. Ne deriva che l’insieme delle figure che si generano è visto come discreto e finito. La nostra figura può essere costruita anche con Cabri e GeoGebra (programmi in **Allegato 2**).

Traslando il vertice mobile, quali proprietà hanno i quadrilateri che si formano? Per

un’analisi puntuale, agli alunni verrà fornita una scheda-guida; ne diamo nell’Allegato 3 due versioni, una più dettagliata e una – per così dire – “sintetica”.

L’insegnante può decidere quale delle due proposte si adatta meglio al contesto della propria classe, in base al livello di approfondimento consentito dalle caratteristiche della classe stessa, del curriculum già svolto, delle locuzioni e dei vocaboli già introdotti e padroneggiati dagli allievi.

Molte domande presenti nella versione dettagliata della scheda-guida possono apparire ripetitive e/o ridondanti: si tratta di una nostra, precisa scelta. I ragazzi, nelle loro produzioni scritte, tendono infatti ad essere molto sintetici e la nostra insistenza è un tentativo di ottenere risposte più ampie e articolate. Sulla base delle nostre esperienze, non sempre tale sollecitazione raggiunge il risultato auspicato: i ragazzi si esprimono con difficoltà e tendono a dare per scontate numerose osservazioni. A nostro avviso, tuttavia, è sempre utile e necessario stimolarli a verbalizzazioni più esplicite e argomentate. Sono richiesti anche disegni, che non debbono sostituire la verbalizzazione ma accompagnarla e che ci riveleranno molto sulle immagini concettuali³ elaborate dai nostri allievi.

3

3 L’organizzazione del lavoro in aula con il supporto di modelli dinamici concreti

Per sfruttare in maniera efficace le potenzialità di questo e di tutti i modelli dinamici concreti è opportuno un lavoro preliminare da parte dell’insegnante. Questi dovrà possedere una conoscenza approfondita della situazione geometrica che propone agli alunni; sarà necessario pertanto che svolga un’analisi a priori dell’artefatto: dovrà muoverlo, osservando varianti ed invarianti, individuando relazioni tra gli elementi delle figure e mettendo a fuoco il sapere matematico che il modello consente di far emergere. Ciò gli permetterà di individuare e selezionare gli obiettivi di lavoro da privilegiare tra quelli possibili. L’insegnante dovrà anche essere sempre pronto a eventuali deviazioni dal percorso prestabilito per cogliere le occasioni di ampliamento che questi strumenti di lavoro, aperti e ricchi di stimoli, forniscono.

Nella fase di preparazione rientra anche la riflessione sulle modalità di organizzazione dell’attività in aula, che possono essere diverse: per piccoli gruppi (omogenei o eterogenei) oppure individuale. In ogni caso ciascun alunno deve operare sul proprio modello e scrivere le osservazioni (personali o di gruppo) sul proprio quaderno. Il docente dovrebbe rimanere il più possibile neutrale: sono gli allievi che devono essere, e sentirsi, protagonisti.

Il tempo di svolgimento necessario è legato al livello di approfondimento richiesto, all’abitudine a lavorare con materiali e, ovviamente, alle caratteristiche della classe. Il modello in esame richiede dalle tre alle quattro ore (costruzione compresa), per avere delle risposte che possano in seguito costituire materiale sufficiente ad una prima discussione.

3. Ricordiamo che gli oggetti di studio della geometria sono costruzioni mentali che fondono «aspetti figurali (forma, posizione, grandezza) con aspetti concettuali (idealità, astrattezza, generalità e perfezione)» (Sbaragli, 2006). Proprietà figurali e concettuali dovrebbero integrarsi nelle immagini mentali degli alunni, originando “immagini concettuali” corrette.

Suggeriremo inoltre nei paragrafi seguenti il ricorso ad altri modelli dinamici, con il ruolo di controesempi o esempi di appoggio, per superare una conclusione sbagliata o una misconcezione, per rafforzare un'affermazione o validare una scoperta. Un controesempio ben scelto può diventare essenziale per superare una difficoltà o come supporto al ragionamento. È bene quindi che l'insegnante abbia, in classe, altri modelli dinamici da utilizzare al momento opportuno.

4 Sapere matematico (ma non solo)

4.1 Quali tipi di figure si formano e quante di ogni tipo

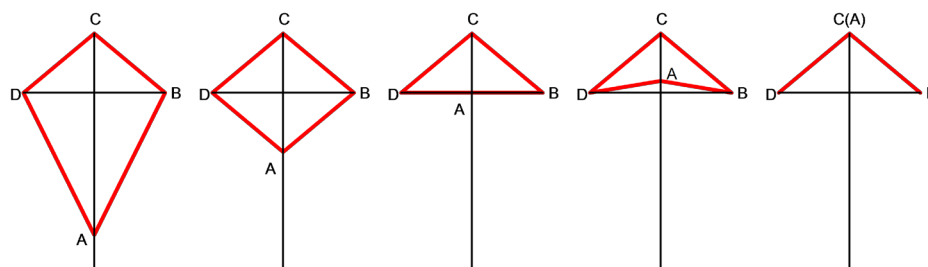


Figura 2
 Alcune figure ottenibili
 nel movimento.

Se trasliamo il vertice A lungo la scanalatura (Figura 2), si formano infiniti deltoidi convessi e infiniti deltoidi concavi. A un certo punto, però, ecco apparire un “intruso”: un quadrilatero con un angolo di 180° , che chiameremo “caso limite”. Gli alunni quasi certamente diranno che si tratta di un triangolo; in effetti, avendo i lati DA e BA adiacenti, esso prende la forma di un triangolo isoscele (BCD).

Una prima interessante osservazione: questa figura-limite ha il ruolo di elemento di separazione tra due insiemi di deltoidi: quelli concavi e quelli convessi.

Durante il movimento del vertice A, però, si è presentata anche un'altra posizione che ha qualcosa di particolare: quella in cui i lati sono tutti della stessa lunghezza. Di che figura si tratta? Dipende evidentemente dall'ampiezza scelta per l'angolo $\widehat{BCD}$: se questo è retto si tratterà di un quadrato, in tutti gli altri casi di un rombo generico. Quando, invece, il vertice A arriva a coincidere con il vertice C, i lati si trovano a essere sovrapposti a coppie. La figura diventa allora una spezzata chiusa, che può essere letta come un quadrilatero degenero.

“Scoprire” un rombo tra i deltoidi rivela l'inclusione dell'insieme dei rombi in quello dei deltoidi. Ma se i rombi sono deltoidi, cosa li distingue in particolare? L'osservazione ci dice che i rombi sono sì dei deltoidi, ma hanno “qualcosa in più”: lati della stessa lunghezza (e di conseguenza angoli opposti della stessa ampiezza).

Se poi il modello è stato realizzato in modo che nel movimento si formi un quadrato (ampiezza dell'angolo $\widehat{BCD} = 90^\circ$), si potrà concludere che anche il quadrato è un elemento dell'insieme dei deltoidi.

Che relazione c'è tra questi due quadrilateri, rombo e quadrato, che si possono formare? Il nostro modello non può aiutarci, dal momento che, se genera un rombo generico (angolo $\widehat{BCD}$ non retto), non è in grado di generare un quadrato. Si potrebbe certamente ragionare in modo analogo a quanto fatto in precedenza per la relazione

tra rombi e deltoidi; in fondo il quadrato è anch’esso un rombo “con qualcosa in più”: gli angoli tutti della stessa ampiezza o, se si preferisce, con le diagonali uguali. Per validare o confutare la congettura possono aiutarci altri modelli. Il più noto e facile da realizzare è costituito da quattro asticcioline della stessa lunghezza incernierate a due a due agli estremi. Dato che è articolabile, esso permette di passare dal quadrato a infiniti rombi e viceversa (Figura 3). La lunghezza dei lati, naturalmente, non cambia e rappresenta quindi l’invariante di questo modello. Questo semplice dispositivo conferma l’intuizione iniziale: all’interno dell’insieme dei rombi ci sono i quadrati. Ci piace per questo chiamarlo “modello di appoggio”, perché sostiene e valida la nostra congettura.

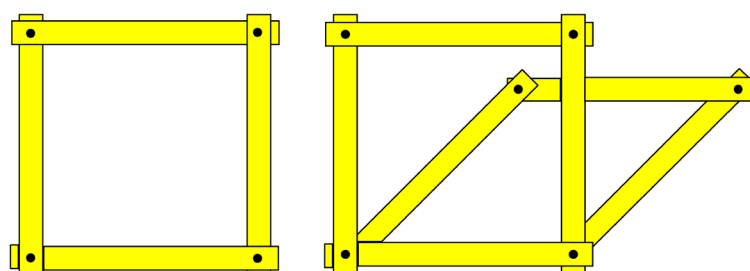


Figura 3
 Il modello “rombo articolabile”.

Le relazioni che sono state già individuate possono essere rappresentate con un diagramma di Eulero–Venn, come quello seguente (Figura 4), che rappresenta sia l’inclusione dei quadrati nei rombi che quella dei rombi nei deltoidi.

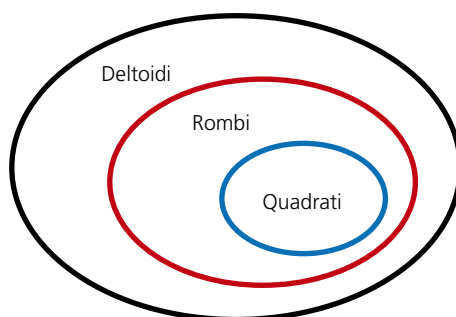


Figura 4
 Insieme dei deltoidi.

Riprendiamo ora in considerazione il modello concreto “deltoide”. In esso, due caratteristiche non si modificano nel corso del movimento: le diagonali restano perpendicolari e almeno una di esse è bisecata dall’altra (o dal suo prolungamento). Questi invarianti condizionano la tipologia delle figure che si formano; non sarà infatti mai possibile ottenere dei generici parallelogrammi e nemmeno dei generici trapezi, perché quando nel movimento due lati opposti si trovano ad essere paralleli lo sono inevitabilmente anche gli altri due. In più, quando ciò si verifica, i lati sono tutti della stessa lunghezza.

Dal punto di vista didattico è interessante chiedersi quali figure *non* si possono ottenere perché significa approfondire la questione relativa a quali proprietà sono compatibili o non compatibili con la definizione di un certo quadrilatero. Si tratta di una forma di *problem posing*, che può nascere spontaneamente durante la discussione in classe o essere sollecitata dall’insegnante.

4.2 Lati

Quando nel modello "deltoide" il vertice A si muove lungo l'incisione, le lunghezze dei lati CD e CB non si modificano; al contrario, quelle degli altri due cambiano con continuità.

In genere, gli alunni osservano agevolmente che si può ottenere un rombo (lati della stessa lunghezza) o addirittura un quadrato (se l'ampiezza dell'angolo $\widehat{BCD}$ è di 90°). La proprietà invariante, relativa ai lati, è che si possono sempre riconoscere due coppie distinte di lati consecutivi che hanno la stessa lunghezza: $\overline{CD} = \overline{CB}$ e $\overline{DA} = \overline{AB}$ (Figura 5).

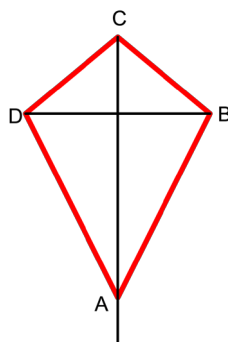


Figura 5
Immagine di un deltoide generico.

Possiamo quindi definire il deltoide come un "quadrilatero con due coppie distinte⁴ di lati consecutivi della stessa lunghezza".

4

Per confermare questa definizione possiamo usare un modello di appoggio che conservi la condizione utilizzata: avere cioè due coppie distinte di lati della stessa lunghezza. Lo si realizza facilmente con quattro asticcioline a due a due uguali e incernierate agli estremi come in Figura 6:

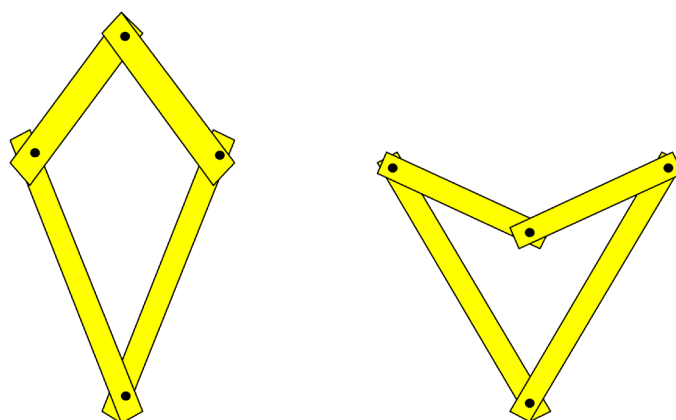


Figura 6
Deltoide articolabile.

Articolando le asticcioline si ottengono sempre e solo deltoidi, sia convessi che concavi. Possiamo analizzare, con gli alunni, i due modelli di appoggio fin qui utilizzati per scoprirne analogie e differenze: le figure concave (che non degenerano in una spez-

4. È necessario specificare "coppie distinte" per escludere il caso di un quadrilatero con tre lati uguali; esso avrebbe "due coppie di lati uguali" NON distinte. Infatti i tre lati uguali, che possiamo chiamare a, b, c, darebbero luogo alle coppie: $a=b$ e $b=c$, che non sono però distinte in quanto hanno in comune b.

zata) si ottengono solo con questo secondo modello, mentre entrambi generano figure isoperimetriche ma non equivalenti. L'area massima si ottiene in entrambi i casi in corrispondenza della posizione in cui si genera un quadrilatero che ha una coppia di angoli opposti retti. La verifica è possibile attraverso la traduzione dei modelli sia per Cabri che per GeoGebra (Allegato 4).

4.3 Diagonali

Esaminiamo ora un altro elemento della figura: le diagonali. Nel modello “deltoide dinamico” esse hanno delle proprietà che non dipendono dal movimento del vertice A lungo il taglio:

- la loro posizione reciproca: sono perpendicolari;
- la lunghezza della diagonale DB;
- la bisezione della diagonale DB da parte dell'altra diagonale o del suo prolungamento (che si comporta da asse di simmetria).

La diagonale AC (corrispondente alla scanalatura) ha invece lunghezza variabile: passa da un massimo a un minimo. Il massimo è la misura consentita dai limiti fisici del modello (lunghezza della scanalatura e estensibilità del filo elastico). Il minimo è zero e si raggiunge nel caso degenere “segmenti sovrapposti”, cioè quando i vertici A e C coincidono.

Quando si genera un rombo entrambe le diagonali si bisecano. Se poi l'angolo $\widehat{BCD}$ è retto e si forma un quadrato, le diagonali sono anche della stessa lunghezza.

Muovendo A verso il vertice C oltre il “caso limite” del quadrilatero con un angolo di ampiezza 180° (triangolo), i deltoidi che si generano sono concavi. Cosa succede, da qui in poi, alle diagonali? Sarà interessante osservare come gli alunni reagiscono nel constatare che una diagonale è esterna e di conseguenza non interseca più l'altra. Per condurre un'analisi approfondita può essere utile riprendere l'ultimo modello di appoggio e arricchirlo di un nuovo elemento: le diagonali, costruite con del filo elastico (Figura 7). Articolandolo si vedrà come una delle diagonali, dopo essersi sovrapposta ai lati adiacenti nella posizione “caso limite”, diventa esterna alla figura. Si potrebbe prendere spunto da questa osservazione per discutere con gli alunni intorno alla definizione di diagonale; spesso, alla domanda “cos'è la diagonale di un poligono”, gli alunni rispondono: “è un segmento che taglia la figura in due parti”, “che la taglia a metà”. Naturalmente, vedere con i propri occhi una diagonale che “sta fuori” dalla figura – e quindi non la “taglia” affatto in due parti – mette in crisi la loro possibile convinzione. (Si veda il [video](#) sul deltoide con legnetti in movimento).

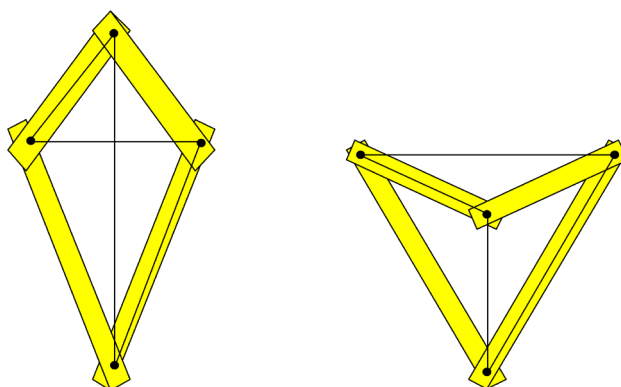


Figura 7
 Deltoide articolabile
 con diagonali.

Possiamo definire il deltoide facendo riferimento alle caratteristiche delle diagonali (perpendicolarità e bisezione di una di esse)? Se diciamo che esso è un "quadrilatero con le diagonali perpendicolari" includiamo oltre ai deltoidi anche trapezi e quadrilateri generici, che *possono* avere questa caratteristica. Anche la frase "quadrilatero con almeno una diagonale che biseca l'altra" non è accettabile perché include – oltre ai deltoidi – tutti i parallelogrammi.

Per formulare una definizione corretta in base ai nostri scopi è perciò necessario considerare entrambe le proprietà: "Il deltoide è un quadrilatero con le diagonali perpendicolari di cui almeno una è bisecata dall'altra o dalla retta che la contiene". Anche in questo caso possiamo cercare conferma utilizzando un modello d'appoggio. Consiste in due listelli di cartone molto resistente o, meglio ancora, di compensato nei quali è stata praticata una fessura per quasi tutta la loro lunghezza. I due listelli, che possono essere della stessa lunghezza o di lunghezze diverse, vanno uniti con una vite e un bulloncino. I loro estremi (nei quali è stato praticato un foro) vanno poi collegati con un filo elastico.

Data la scanalatura centrale, i due listelli possono "scivolare" uno rispetto all'altro; inoltre, la vite che li collega consente di ruotarli. Si può quindi modificare sia la posizione del punto di intersezione che l'inclinazione reciproca dei listelli, ottenendo così tutti i quadrilateri convessi e, come casi limite, dei triangoli (Figure 8 e 9).

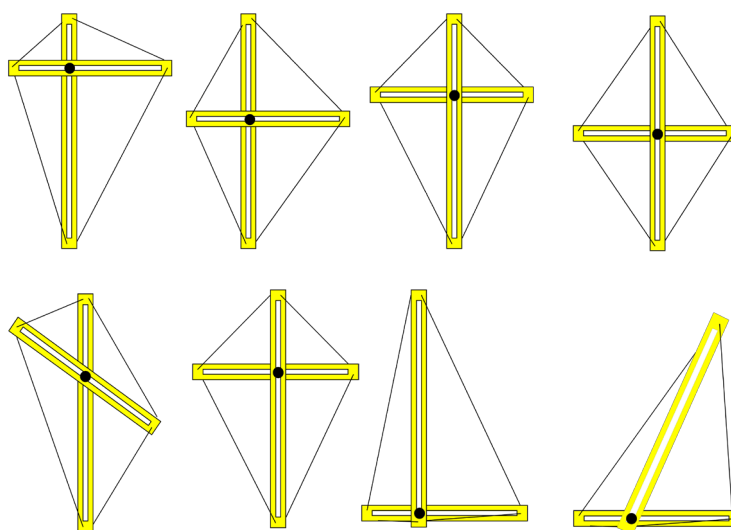


Figura 8
 Figure ottenibili con
 il modello a listelli di
 lunghezze diverse.

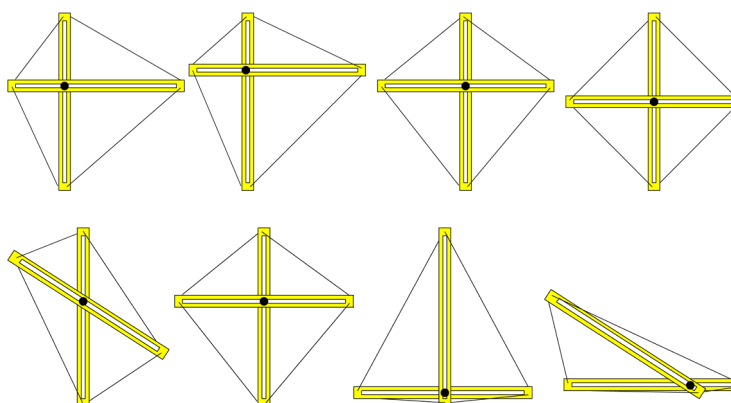


Figura 9
 Figure ottenibili con
 il modello a listelli della
 stessa lunghezza.

Queste situazioni si possono indagare anche attraverso figure Cabri o GeoGebra (Allegato 5).

4.4 Angoli

Anche per gli angoli ci chiediamo se, durante il movimento del modello “deltoide”, si modificano le loro ampiezze oppure no e, in caso affermativo, in che modo. L’angolo $\widehat{BCD}$ non cambia la sua ampiezza; tutti gli altri, invece, variano. Man mano che il vertice A trasla verso C, l’ampiezza dell’angolo $\widehat{BAD}$ aumenta e quella degli altri due angoli, $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$, diminuisce; gli ultimi due, però, avranno sempre uguale ampiezza.

Quando si forma il rombo sono congruenti le coppie di angoli opposti; se si ottiene un quadrato gli angoli sono tutti retti.

L’angolo $\widehat{BAD}$, man mano che A trasla, passa da infinite posizioni in cui è convesso ad infinite posizioni in cui è concavo. Come abbiamo già rilevato, l’elemento di separazione tra i due insiemi di angoli è l’angolo piatto che si forma quando i lati AB e AD diventano adiacenti, e quindi il modello mostra un “triangolo”.

Questa posizione “a triangolo isoscele” (Figura 10a) può consentire di giustificare, in maniera diversa, che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è 360° . Infatti i 180° dell’angolo piatto $\widehat{BAD}$ si vanno ad aggiungere ai 180° che sono la somma delle ampiezze degli angoli interni di qualsiasi triangolo. Continuiamo la traslazione del vertice A fino a portarlo a coincidere con C (caso degenero; Figura 10b): in questa posizione gli angoli $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$ hanno ampiezza nulla, ma gli altri due sono esplementari (cioè la somma delle loro ampiezze è 360°).

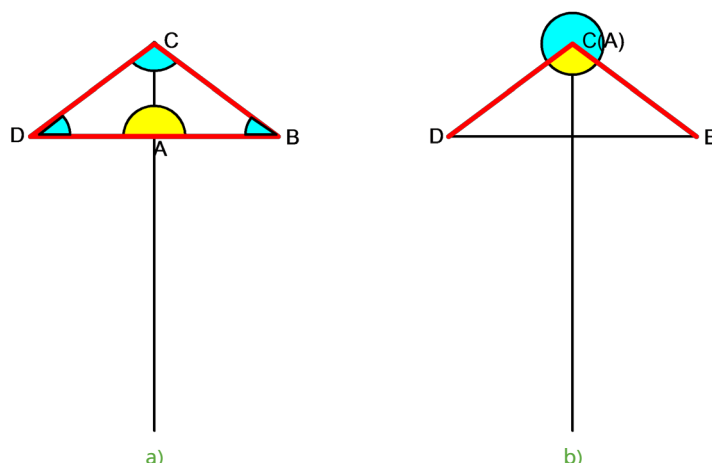
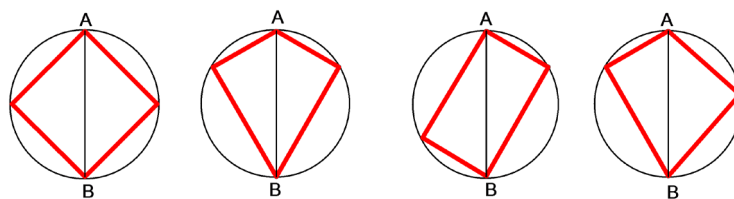


Figura 10
 Il caso limite e il “caso degenero”: nel primo caso A, B, D sono allineati e nel secondo caso AB e AD si sovrappongono rispettivamente a BC e CD.

In tutti i quadrilateri che si generano, almeno due angoli, opposti, hanno la stessa ampiezza. Si può pensare di utilizzare questa proprietà per costruire una nuova definizione di deltoide? Non è possibile, perché ci sono quadrilateri che la possiedono ma non sono deltoidi, come ad esempio tutti i parallelogrammi generici. Si tratta di una proprietà che è infatti necessaria, ma non sufficiente (questo è un buon esempio da utilizzare in classe per introdurre – o ribadire – il diverso significato di questi due termini).

La conferma che l’invarianza della congruenza di due angoli opposti non è condizione sufficiente per avere un deltoide, la si trova nel modello in Figura 11. In questo artefatto (vedi scheda di costruzione in Allegato 6) due vertici opposti – estremi di un diametro – sono fissi; gli altri due possono essere mossi, ognuno lungo una semicirconferenza, scorrendo in una scanalatura. (Si veda il video dei quadrilateri inscritti in una circonferenza).

Figura 11
 Quadrilateri inscritti in una circonferenza nei quali due vertici opposti – estremi di un diametro – sono fissi.



Modificando a piacere la posizione dei due vertici liberi si ottengono quadrilateri che hanno tutti almeno una coppia di angoli opposti della stessa ampiezza: sono infatti inscritti in una semicirconferenza, quindi entrambi retti. Le diverse posizioni dei vertici mobili permettono di ottenere, oltre a quadrati e deltoidi, anche rettangoli e quadrilateri generici.

La proprietà “possedere almeno due angoli opposti congruenti” non basta quindi per costruire una definizione di deltoide; è necessario aggiungerne un'altra, ad esempio le caratteristiche delle diagonali. In questo modo, si può definire il deltoide come: “quadrilatero con almeno una coppia di angoli opposti della stessa ampiezza e le diagonali perpendicolari”.

Questa definizione contiene il quantificatore “almeno”, riferito alla coppia di angoli uguali. Esso consente di includere, nella definizione, anche i rombi, che hanno due coppie di angoli opposti della stessa ampiezza. Quanto alle diagonali perpendicolari, anch'esse richiamate nella definizione, la loro presenza esclude sia i parallelogrammi generici che i rettangoli generici; non esclude però i quadrati, che – come si è visto – sono infatti inclusi nell'insieme dei deltoidi. Lo possiamo verificare riprendendo il modello a diagonali scanalate:

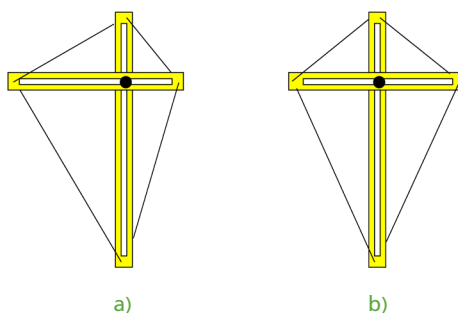


Figura 12
 Modello articolabile con diagonali scanalate.

Mantenendo perpendicolari le diagonali, se si modifica il loro punto di intersezione, è possibile verificare operativamente la definizione che abbiamo formulato. Disponiamo dunque il modello in modo che una sola delle due diagonali sia bisecata dall'altra, come appunto è nei deltoidi generici (quindi non rombi; **Figura 12b**). Si osserverà che il quadrilatero acquista immediatamente anche un'altra proprietà: due angoli opposti assumono la stessa ampiezza. Di conseguenza, diventano della stessa lunghezza anche le due coppie (distinte) di lati consecutivi. (Si veda il [video](#) del modello a diagonali scanalate perpendicolari).

4.5 Assi di simmetria

Esaminiamo ora, nel modello “deltoide” che è al centro della nostra esposizione, l'elemento assi di simmetria. Traslando il vertice A lungo la scanalatura, si formano tutte figure che hanno un asse di simmetria: questo coincide con la diagonale varia-

bile AC. Ne consegue che quest'ultima è anche sempre bisettrice degli angoli $\widehat{BCD}$ e $\widehat{BAD}$. Nella posizione di A in cui si forma un rombo, entrambe le diagonali sono assi di simmetria; se poi il modello, avendo l'angolo $\widehat{BCD}$ retto, consente di ottenere il quadrato, sono assi di simmetria anche le mediane.

È possibile formulare una definizione di deltoide facendo riferimento solo agli assi di simmetria: "quadrilatero con almeno un asse di simmetria che coincide con una diagonale".

Per convincersi che quest'ultima è proprietà sufficiente basta una semplice osservazione: se si prende un triangolo qualsiasi e lo si sottopone ad una simmetria assiale con asse una retta che contiene uno qualsiasi dei suoi lati, la figura che si ottiene è sempre un deltoide. La Figura 13 lo mostra.

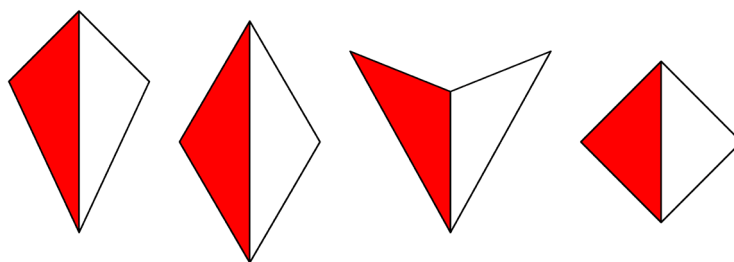


Figura 13
Deltoidi ottenuti
simmetrizzando un
triangolo.

4.6 Perimetro e area

Analizziamo ora alcuni aspetti metrici, perimetro e area, delle figure generate dal modello concreto "deltoide". Una prima osservazione: il perimetro e l'area delle figure prodotte durante il movimento variano costantemente e quindi si possono ricercare i valori massimi e quelli minimi. Questa indagine, che può sembrare scontata e quindi poco interessante, ci porta invece ad andare oltre i limiti dell'oggetto-modello, lasciando campo libero all'immaginazione; allora le cose cambiano in maniera significativa e il discorso si fa, subito, ben più coinvolgente. Ancora una volta, si potrebbe produrre una situazione di *problem posing* spontaneo, che un'impostazione esclusivamente statica ben difficilmente offre. È utile assecondare queste curiosità, che contribuiscono a spingere gli alunni verso un livello di astrazione maggiore e arricchiscono le loro immagini mentali.

Perimetro

Il perimetro massimo si ottiene nella posizione in cui la distanza tra A e C è la maggiore possibile. Ma non appena si abbandona il modello concreto e ci si affida a un "modello mentale", le cose cambiano: il vertice A può allontanarsi all'infinito da C. Dunque, in questo caso, il perimetro non ha un massimo. Invertendo il movimento, il perimetro inizialmente diminuisce; il minimo si verifica nella posizione in cui il quadrilatero appare come un triangolo isoscele. Infatti, il modello mostra la posizione "segmenti adiacenti" come un quadrilatero degenere. Superato questo punto, ricompaiono i deltoidi, questa volta concavi: e il perimetro riprende ad aumentare. Ogni deltoide concavo che si genera dal triangolo isoscele in poi, fino alla posizione "segmenti sovrapposti" compresa, ha un "gemello" isoperimetrico convesso, che si è prodotto nel "tragitto" tra rombo e triangolo. Si osservi la Figura 14: i lati DA e BA assumono successivamente posizioni simmetriche rispetto alla diagonale AC; DA" è

simmetrico a DA' e BA'' è simmetrico a BA' , entrambe le coppie rispetto alla diagonale BD . Poiché DC e BC non variano mai, i quadrilateri $A''BCD$ e $A'BCD$ rimangono sempre isoperimetrici.

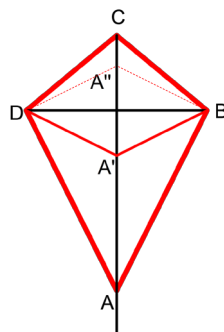


Figura 14
 Esempio di coppia di
 deltoidi isoperimetrici.

Area

Quando il vertice A è alla maggiore distanza possibile (nel modello) rispetto a C si ha l'area massima. Si può, anche in questo caso, proseguire con l'aiuto dell'immaginazione: se A si potesse allontanare all'infinito da C anche l'area non avrebbe massimo. La percezione invece ci aiuta a individuare il minimo con chiarezza: si tratta del quadrilatero degenerare, cioè la posizione a segmenti sovrapposti. Qui l'area è, evidentemente, zero. Man mano che l'area va verso il suo minimo anche una delle due diagonali (quella variabile) fa lo stesso; infatti, mentre il vertice A trasla verso C , la diagonale in questione diminuisce fino ad annullarsi: quando la sua misura è zero, si azzerava anche l'area.

Le variazioni dell'area e del perimetro che sono state fin qui esaminate separatamente non hanno il medesimo andamento: i massimi e i minimi non sempre coincidono; posizioni di isoperimetria non comportano anche l'equiestensione. Si pensi, ad esempio, al caso dei deltoidi isoperimetrici "gemelli", di cui si è detto parlando di perimetri (Figura 14). I due deltoidi $A''BCD$ e $A'BCD$ – che hanno lo stesso perimetro – non hanno certamente la stessa area.

Vale la pena di soffermarsi su riflessioni di questo tipo per lavorare sulla distinzione tra le variazioni di area e le variazioni di perimetro. Si potrebbe pensare che tale distinzione sia acquisita da tutti gli alunni già durante la scuola elementare; tuttavia, l'esperienza ci insegna che la sovrapposizione dei due concetti è, al contrario, un diffuso misconcetto (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Sbaragli, 2005). A nostro avviso, un'impostazione didattica basata su situazioni geometriche statiche ne favorisce l'instaurarsi e il consolidarsi. Al contrario, lavorare su modelli dinamici (sia concreti che virtuali) può mettere in crisi questo errato schema mentale, rendendolo evidente all'insegnante e all'alunno stesso; la pratica costante di esperienze percettive in cui le variazioni di area e perimetro non sono collegate può evitare che il misconcetto insorga o metta radici nella mente degli alunni.

4.7 Formule per il calcolo di perimetro e area

L'interesse nei confronti di area e perimetro e delle loro variazioni può mantenersi ad un livello puramente qualitativo come abbiamo visto nel paragrafo precedente, oppure si può decidere di allargare e approfondire l'analisi; in questo caso diventa

possibile e opportuno il ricorso ai metodi dell'algebra. Anche questo approccio prescindendo dai risultati numerici, ma consente all'alunno di mantenere il contatto con il significato di “ciò che fa” mentre opera con i simboli. Questo può aiutare a superare lo scollamento tra “semantica” (significato dei simboli e delle operazioni che si compiono) e “sintassi” (correttezza formale di quanto si sta eseguendo). Vedremo come le attività operative sui modelli possono inserirsi utilmente in questo delicato processo dialettico tra semantica e sintassi.

Durante l'analisi si possono sollecitare gli alunni a calcolare il perimetro delle figure, individuando il procedimento che ritengono più adatto; tale ricerca può far emergere un'analogia tra i deltoidi e i rettangoli, perché entrambi hanno i lati a due a due della stessa lunghezza. Pertanto, gli alunni osserveranno che le stesse formule saranno applicabili per entrambi i quadrilateri.⁵

5

La formula dell'area del deltoide non è invece immediatamente intuibile; infatti, anche se dalla costruzione del modello ci si rende conto che tutte le figure ottenibili hanno le diagonali perpendicolari, non è affatto evidente che tutti i deltoidi convessi si possano inscrivere in altrettanti rettangoli. Gli alunni saranno facilitati nella scoperta se conoscono una delle formule per calcolare l'area del rombo, in particolare quella collegata al rettangolo di area doppia. È quindi possibile che a qualcuno venga in mente di estendere l'applicazione della formula a tutti i deltoidi, e magari a qualsiasi quadrilatero con le diagonali (d_1 e d_2) perpendicolari (Figura 15).

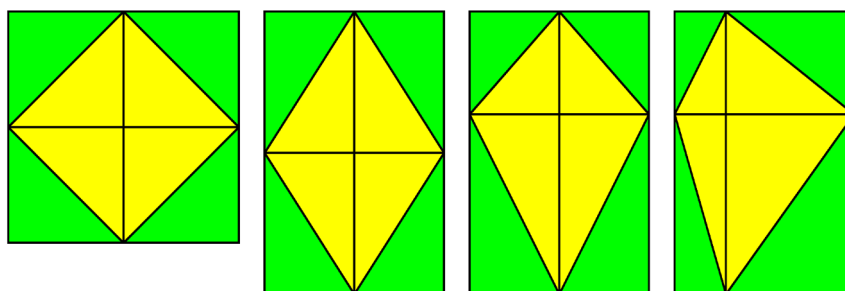


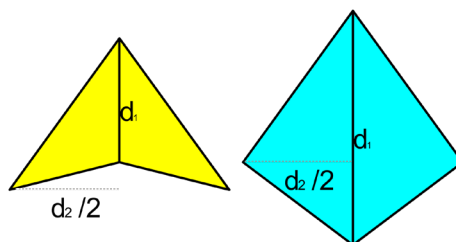
Figura 15
 Quadrilateri a diagonali
 perpendicolari inscritti
 in rettangoli.

Se si ottiene come caso particolare un quadrato, quando l'angolo “fisso” ($\widehat{BCD}$) è retto, la formula individuata $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, è applicabile anche ad esso.

Questa formula è valida anche per i deltoidi concavi? La risposta è sì, ma la verifica non si può realizzare inscrivendo il deltoide in un rettangolo. È necessario cambiare strategia. Abbiamo già visto che qualsiasi deltoide, sia concavo che convesso, può essere visto come il risultato della simmetrizzazione di un triangolo rispetto ad uno dei suoi lati (Figura 13). L'area del deltoide può essere pensata come la somma delle aree dei due triangoli simmetrici. Osserviamo ora i due triangoli in questione: essi hanno un lato che corrisponde alla diagonale variabile del modello “deltoide” (ed è anche asse di simmetria della figura). L'altezza relativa a questo lato corrisponde invece a metà della diagonale fissa, come si può verificare nella Figura 16.

5. Inoltre, il confronto tra le due scritture possibili: $P = 2 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2$ e $P = 2 \cdot (l_1 + l_2)$ rappresenta una occasione di riflessione sulla proprietà distributiva. [Come di consueto nella pratica didattica, indichiamo – sia nel rettangolo che nel deltoide – con l_1 e l_2 due lati di lunghezza diversa].

Figura 16
 Il deltoide come
 “somma” di due triangoli
 simmetrici.



Con semplici passaggi algebrici si arriva di nuovo alla formula: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, infatti, raddoppiando l'area del triangolo – che è metà deltoide – si ottiene l'area del deltoide.

5 La discussione

Abbiamo visto che un punto essenziale dell'attività laboratoriale è la discussione, durante la quale ogni allievo (o gruppo di allievi) espone le proprie osservazioni, congetture e proposte. Vediamo ora brevemente come si potrebbe sviluppare una discussione di bilancio sul lavoro svolto con artefatti.

Gli alunni, prima di socializzare i risultati, analizzano il modello seguendo la traccia di una scheda guida e scrivono le proprie osservazioni sulle questioni poste. La discussione ha inizio dalla lettura di alcune risposte, in modo che chi ascolta possa fare riferimento a opinioni o punti di vista differenti. Durante la lettura l'insegnante non dà giudizi ma coordina, chiede chiarimenti, stimola, ricapitola e appunta alla lavagna gli elementi significativi che vanno emergendo. È bene che in questa fase gli alunni possano manipolare il modello, per meglio seguire gli interventi; eventuali disegni, riprodotti alla lavagna, saranno anch'essi materiale per il dibattito.

Durante la discussione il docente, oltre ad incoraggiare la partecipazione di tutti e a svolgere il ruolo di garante scientifico, avrà cura di non stigmatizzare gli eventuali errori: una volta individuati, questi andranno “volti in positivo” così da diventare fattore di crescita. Il sapere matematico, corretto e condiviso, elaborato nel corso dell'attività e frutto del lavoro di tutti, sarà trascritto da ciascun alunno sul suo quaderno, come documentazione del percorso costruito insieme.

Durante la stesura di questo “testo collettivo”, vengono messi a fuoco i punti chiave dell'indagine svolta e le connessioni con altre aree del sapere matematico, aprendo così la strada a ulteriori esplorazioni. Sarà in questo momento che possono essere particolarmente utili altri modelli per sostenere affermazioni e congetture (esempi di appoggio) o per confutarle (contro esempi), opportunamente scelti.

Altro aspetto da non trascurare: quando si espongono le proprie idee bisogna essere chiari e precisi, per farsi capire senza rischio di fraintendimenti. È quindi essenziale la cura del linguaggio per comunicare con chiarezza il proprio percorso mentale, per argomentare, per fare controproposte. Si sviluppa così anche un atteggiamento critico che vale sia nei confronti di quanto esposto dagli altri che delle proprie affermazioni: gli alunni “si ascoltano” (Vygotskij, 1989) e sono portati di conseguenza a riflettere sui propri meccanismi di pensiero e di apprendimento (metacognizione). Nella fase di discussione, l'insegnante lavora contemporaneamente su più fronti: oltre ai contenuti disciplinari, vanno tenute sotto controllo anche le dinamiche relazionali e i processi di apprendimento dei singoli e della classe. Compito certamente impegnativo, ma i risultati dell'attività possono ampiamente giustificare lo sforzo.

6 Conclusioni

Gli aspetti che abbiamo fin qui indagato non esauriscono tutte le possibilità di analisi offerte dal modello "deltoide". Avrebbero potuto essere affrontati altri argomenti: mediane, centro di simmetria, inscrivibilità e circoscrivibilità delle figure generate, trasformazioni geometriche presenti nel modello, altre relazioni tra elementi della figura (ad es. tra area e diagonale variabile, tra perimetro e lati variabili, tra angoli ecc.), realizzazione di un modello in cui la scanalatura superi il vertice C ecc.; per una trattazione completa rimandiamo all'e-book (Facenda et al., 2014). Quanto esposto in questa sintesi consente comunque di cogliere l'aspetto laboratoriale che è la caratteristica fondamentale della nostra proposta di lavoro. Tuttavia, il fatto che questa impostazione didattica preveda l'uso di artefatti non deve far trascurare un aspetto importante: il modello non è l'"oggetto" matematico, ma solo una sua rappresentazione concreta. Questa consapevolezza, lo ribadiamo, è importante sia per il docente che per gli alunni. Per acquisirla si possono utilizzare opportunamente i condizionamenti imposti dai limiti fisici del modello: le sue dimensioni, l'estensibilità dell'elastico, la lunghezza dell'incisione. Questi aspetti, nell'ottica di un percorso verso l'astrazione, rappresentano una ricchezza. Spingono infatti gli alunni a superare le barriere inevitabili della realtà concreta utilizzando il pensiero, che non ha ostacoli alla sua capacità immaginativa, se non quelli che noi stessi ci poniamo. Per liberarsi dai limiti dell'oggetto concreto gli allievi sono indotti a muoversi nel mondo delle immagini mentali, compiendo i primi passi verso l'astrazione.

Un'ulteriore importante considerazione: le osservazioni e le conclusioni ricavate dall'analisi del modello non sono dimostrazioni; sono "materiali grezzi" con i quali e sui quali è possibile produrre congetture significative. Chiediamoci ora cosa fa l'alunno durante tutta l'attività. Legge, interpreta istruzioni e consegne, realizza modelli concreti, li manipola, descrive oralmente o per iscritto ciò che ha osservato, lo disegna, dà forma verbale alle proprie congetture. Nel fare questo gestisce una continua alternanza o coesistenza di più registri di rappresentazione: simbolico, verbale (scritto e orale), iconico, concreto che concorrono tutti ad accompagnare l'alunno verso l'astrazione. Nello stesso tempo, ogni registro mette in luce i suoi limiti e le sue potenzialità; in alcuni casi, un registro simbolico potrà rivelarsi più funzionale allo scopo rispetto agli altri.

Un ultimo commento a proposito dell'uso di materiali: è raccomandabile presentare uno stesso concetto attraverso l'uso di più modelli, in contemporanea – come si è visto nel caso dei modelli "di appoggio" – o in momenti successivi. Le nuove conoscenze non risultano così legate ad una situazione specifica, ma si propongono come strumenti flessibili, applicabili anche in contesti diversi, generalizzabili.

Siamo consapevoli del fatto che ci sono possibili perplessità e obiezioni di fronte ad una proposta didattica così fortemente connotata in senso operativo e laboratoriale. Primo problema: le classi sono numerose; può quindi essere difficile "tenere la disciplina" in un contesto attivo, che inevitabilmente produce una, almeno apparente, confusione. Tuttavia, l'insegnante attento potrà notare che in genere tutti o quasi tutti gli alunni sono impegnati. Se li osserverà, potrà vedere come si organizzano e ascoltarli mentre discutono, cogliendo frammenti di dialogo che si riveleranno di sorprendente interesse. Non sarà raro verificare che proprio il bambino più impacciato e "debole" di fronte ad un compito matematico "tradizionale", in questo contesto manifesta invece doti insospettite.

Altro punto interrogativo: il tempo. Si può obiettare che per una didattica così impostata e gestita “non c’è abbastanza tempo” a scuola. Vero, ma al termine del percorso è possibile spesso verificare che si è riusciti, sul piano degli apprendimenti, ad andare *oltre* quanto previsto. Questo grazie alla ricchezza di spunti offerti dai materiali, agli scambi e alla socializzazione delle conoscenze. La discussione collettiva fa infatti emergere i concetti che il materiale di lavoro ha consentito di portare alla luce. Si tratta di saperi elaborati in forma condivisa sotto la guida dell’insegnante.

Abbiamo prospettato che la matematica può essere presentata in una veste più amichevole e accattivante rispetto a quella abituale. Per ottenere questo risultato l’allunno deve sentirsi libero di creare, di inventare soluzioni, di fare congetture. Per far sì che l’allunno faccia emergere le proprie intuizioni e sappia confrontarsi con esse, si deve poter lavorare in un contesto di autonomia e libertà.

Il percorso presentato cerca di rispondere a questa richiesta di maggiore libertà senza sacrificare la correttezza scientifica. Le tappe della proposta restano gestibili liberamente, perché ci si può fermare quando si vuole e al punto che si preferisce.

La conoscenza viene così costruita dagli allievi stessi, e non “subita”; l’attività suggerita non è altro che una sollecitazione alla scoperta matematica, al mettersi in gioco e in discussione... diventando una sfida. Come ha commentato un alunno: «Se si muovono le mani si muove anche la mente».

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell’interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotkiano. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A(3), 221–256.

Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della Matematica*. Firenze: Nuova Italia.

Castelnuovo, E. (1972). *Documenti di una esposizione matematica*. Torino: Boringhieri.

D’Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Area e perimetro, aspetti concettuali e didattica*. Trento: Erickson.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., & Paternoster, F. (2006). Utilizzo integrato di modelli dinamici e Cabri nella didattica della geometria. In S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica vent’anni di impegno* (pp. 113-116.). Roma: Carrocci-Faber.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2007). Parallelogrammi inscritti in quadrilateri. Prima parte. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 30A(5), 549–572.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2008a). Parallelogrammi inscritti in quadrilateri. Seconda parte. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 31A(1), 13–32.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2008b). Uso

integrato di Cabri e modelli dinamici: resoconto di una esperienza sui parallelogrammi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 31A(5), 429–444.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2014). *Volare con la matematica: un percorso operativo di geometria dinamica*. Modena: Digital Docet.

Laborde, C. (2000). Dessin et texte dans l'enseignement de la géométrie: leurs interrelations en évolution de l'école élémentaire au début de l'enseignement secondaire. In B. D'Amore (Ed.), *Didattica della Matematica nel III Millennio* (pp. 73-92). Bologna: Pitagora.

Laborde, C. (2007). Using technology as instrument for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of the dynamic geometry. *La matematica e la sua didattica*, 1, 11–20.

Laborde, C., & Marcheteau, A. (2008). L'incontro tra reale e virtuale in Cabri Elem per attività matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di). *Didattica della matematica e azioni d'aula* (pp. 43-56). Bologna: Pitagora.

Mariotti, M. A. (2011). Congetturare e dimostrare in un ambiente di geometria dinamica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Il Convegno del ventennale* (pp. 21-26). Bologna: Pitagora.

Radford, L. (2006). Comunicazione, apprendimento e formazione dell'io comunitario. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di.), *Il Convegno del ventennale* (pp. 65-72). Bologna: Pitagora.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica*, 1, 57-71.

Vygotskij, L. S. (1989). *Pensiero e linguaggio*. Firenze: Giunti.

Autori / Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi, Floriana Paternoster, Daniela Rivelli, Daniela Zambon

Mathesis Pesaro, Italia

anna-maria.facenda@alice.it, fulgenzi.paola@libero.it, janna.nardi@gmail.com,
florpa@libero.it, daniela.rivelli@email.it, zambondaniela53@gmail.com