

Coreo-Graph: un laboratorio didattico di teoria dei grafi e danza

Coreo-Graph: a learning laboratory of graph-theory and dance

Teresa Calogera^{••} e Tiziano Penati^{•••}

[•]Dipartimento di Matematica “F. Enriques”, Università di Milano – Italia

^{••}Istituto di Istruzione e Formazione Professionale “Immaginazione e Lavoro”, Milano – Italia

^{•••}Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, Istituto Nazionale di Alta Matematica “F. Severi”,
Università di Parma – Italia

✉ teresa.calogera@gmail.com, tiziano.penati@unimi.it

Sunto / Questo contributo rivisita un laboratorio didattico di teoria dei grafi descritto in Gaio et al. (2020), basato sul problema dei ponti di Königsberg di Eulero, estendendone alcuni aspetti concettuali e alcune attività laboratoriali; inoltre, si propone un'attività motoria ispirata alla danza, allo scopo di esplorare i cammini euleriani e le loro proprietà. In questa nuova veste, il progetto è stato proposto e sperimentato nel biennio scolastico 22/23-23/24 come attività di rafforzamento delle competenze curriculari di *problem solving*. Allo stesso tempo, esso è stato un'occasione di riflessione sul ruolo delle attività *embodied* nel facilitare la creazione di concetti astratti della matematica.

Parole chiave: teoria dei grafi; danza; *embodied cognition*; *problem solving*; problema di Königsberg.

Abstract / This contribution revisits a learning laboratory of graph theory, based on the well-known Königsberg's bridges problem due to Euler, already proposed and described in Gaio et al. (2020): some of its conceptual aspects and laboratory activities are extended, in particular by inserting a dance-inspired activity in order to explore the properties of eulerian paths. In this new guise, the project was proposed and tested in the school years 22/23-23/24 as an activity to strengthen the curricular skills of problem solving. At the same time, it was an opportunity to think over the role of embodied activities in facilitating the formation of abstract concepts of mathematics.

Keywords: graph theory; dance; embodied cognition; problem solving; Königsberg's problem.

1 Introduzione

Il progetto qui descritto nasce con l'intento di offrire un laboratorio di teoria dei grafi che sia di potenziamento delle competenze di *problem solving* nella scuola secondaria di primo grado¹ e nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado² per le classi aderenti al Progetto Liceo Matematico³ (denominate nel seguito "classi del Liceo Matematico" o più semplicemente "Liceo Matematico") riprendendo la sperimentazione di *outdoor learning* descritta in Gaio et al. (2020) e valutandone possibili integrazioni e modifiche. Una delle strategie consolidate nel proporre la teoria dei grafi nei vari ordini scolastici, come attività di potenziamento di *problem solving*, è quella di presentarla come strumento per la risoluzione del celebre problema dei ponti di Königsberg di Eulero (Ferrarello & Mammana, 2017; González et al., 2021; Robinson, 2006; Santoso, 2018). Il fiume Pregel crea all'interno della città di Königsberg due isole, che sono collegate alla terraferma da sei ponti, mentre un settimo ponte collega le due isole tra di loro (Figura 1, immagine di sinistra): il problema consiste nel chiedersi se esista o meno un percorso che, partendo da una qualunque delle quattro regioni delimitate dal fiume Pregel, permetta di attraversare in sequenza tutti i sette ponti che collegano tali regioni, senza attraversare due volte lo stesso ponte. La non esistenza di un simile percorso deriva dall'applicazione del teorema di Eulero, riportato di seguito, al grafo che si ottiene associando un vertice ad ogni regione e un arco ad ogni ponte della mappa in questione (Figura 1, immagine di destra).

Teorema di Eulero (Teorema sui cammini/circuiti euleriani in grafi connessi)

In un grafo connesso G , di vertici $v_i \in V$:

- I. Se tutti i vertici v_i hanno grado pari, allora esistono cammini euleriani e non dipendono dalla scelta iniziale del vertice. Inoltre, il vertice di partenza e di arrivo coincidono (ovvero i cammini sono circuiti euleriani).
- II. Se esistono solo due vertici v_1 e v_2 di grado dispari, allora esistono solo cammini euleriani che partono in v_1 e terminano in v_2 o viceversa (quindi non sono circuiti euleriani).
- III. In tutti gli altri casi non esistono cammini euleriani.

Infatti, una soluzione al problema dei ponti di Königsberg corrisponde a un cammino euleriano sul grafo (ovvero a una sequenza di vertici e archi che contenga una e una sola volta tutti gli archi presenti), e il grafo di Figura 1 presenta quattro vertici $\{v_i\}_{i=1,\dots,4}$ di grado dispari, dove il grado di un vertice v_i indica il numero di archi ad esso collegati.

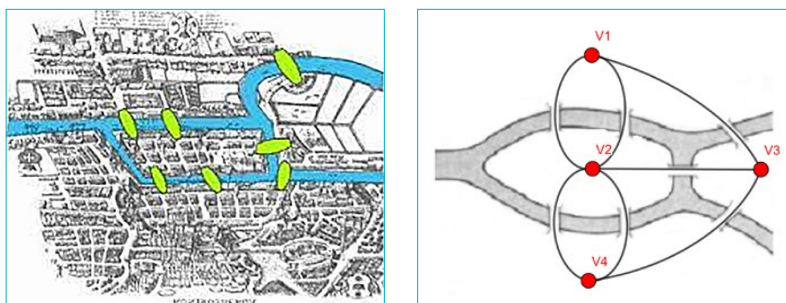


Figura 1. Illustrazione del problema dei ponti di Königsberg di Eulero (fonte Wikipedia) e del corrispondente grafo.

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.
 2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Cantone Ticino.
 3. Il Progetto Liceo Matematico, diffuso in tutta Italia e caratterizzato da una forte collaborazione tra scuole secondarie e università, prevede ore aggiuntive rispetto a quelle curriculari per trattare temi di matematica, soprattutto attraverso attività interdisciplinari. Per maggiori informazioni si consulti il sito: <https://www.liceomatematico.it>. In particolare, in questo articolo, il riferimento è al Polo di Milano Statale.

La proposta didattica contenuta in Gaio et al. (2020) è riproporre il tema del problema dei ponti di Königsberg in un contesto motorio di orientamento all'interno di una mappa cittadina: l'idea dell'attività è quella di cercare, se esiste, una soluzione al *problema della guida turistica*, che deve accompagnare un gruppo di turisti⁴ lungo un itinerario, facendo in modo che ciascuna strada (che compone l'itinerario) venga percorsa una e una sola volta. Successivamente, la stessa tipologia di problema viene riproposta col linguaggio della teoria dei grafi, per mettere in luce la struttura geometrica del problema, il ruolo del grado di un vertice e illustrare il teorema di Eulero sull'esistenza dei cammini euleriani. La scelta metodologica è dunque quella di integrare le attività laboratoriali di *problem solving* con esperienze di tipo *embodied*, che stimolino il riconoscimento della struttura di un problema matematico assegnato e dei suoi elementi, ancorandoli così a un'esperienza concreta che ne faciliti il successivo studio astratto. Rispetto a tale progettazione, si è deciso di ampliare e modificare le attività laboratoriali in due direzioni:

- è stato aggiunto un costante focus sulla scelta del vertice di partenza in relazione alle proprietà di apertura o chiusura dei cammini, per rinforzare la riflessione sul ruolo del grado di un vertice all'interno dell'enunciato del teorema di Eulero. Le classi hanno così potuto lavorare fin dall'inizio su aspetti locali (la scelta del vertice) e globali (chiusura dei cammini) delle soluzioni;
- l'attività motoria è stata ripensata per renderla osservabile direttamente da parte dei docenti/esperti durante tutto il suo svolgimento. Ispirandosi alla danza, si è infatti sostituito il *problema della guida turistica* con quello che ha preso il nome di *problema delle coreografie euleriane*, da cui il titolo *Coreo-Graph*: l'obiettivo è quello di eseguire una sequenza di passi che collegano alcune posizioni assegnate (coreografia), in modo tale che tutti i passi siano eseguiti esattamente una e una sola volta (si veda il par. 4.2).

Nella sperimentazione è stato possibile proporre tale esperienza motoria solo all'interno del contesto della scuola secondaria di primo grado, mentre le classi del Liceo Matematico hanno dovuto svolgere le attività dei ponti e dei grafi in sequenza; questa differenza è stata comunque un'occasione per riflettere sull'efficacia di un'attività *embodied* nella formazione di nuovi concetti matematici.

Il resto del lavoro è organizzato come segue. Nel par. 2 si richiamano sinteticamente i temi teorici portanti del progetto, ovvero il *problem solving* e l'*embodiment*. Nel par. 3 vengono descritti gli obiettivi formativi e la metodologia adottata nello svolgimento del laboratorio. Il par. 4 è dedicato alla descrizione delle varie fasi del laboratorio e alla presentazione dell'attività *Coreo-Graph*. Il par. 5 raccoglie i risultati della sperimentazione, mentre il par. 6 è dedicato alle conclusioni e alle prospettive di sviluppo del progetto qui descritto.

2 *Problem solving ed embodiment*

2.1 Il *problem solving*

La comprensione degli elementi fondamentali della teoria dei grafi e il teorema di Eulero non costituiscono, dal punto di vista didattico, il fine del laboratorio proposto, quanto più un mezzo per mostrare e far sperimentare un'attività di *problem solving*. Come afferma Schoenfeld, il punto di partenza è la convinzione che

«L'insegnamento della matematica dovrebbe rendere gli studenti consapevoli del significato della disciplina: della sua portata, potenza, applicazione e storia. Dovrebbe dare loro una percezione di cosa sia la matematica e di come venga praticata, a un livello appropriato affinché gli studenti possano sperimentarlo e capirlo».

(Schoenfeld, 1992, p. 335, traduzione degli autori)

4. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

Per quanto possa risultare difficile fornire una definizione condivisa del concetto di *problem solving*, o di cosa caratterizzi un'attività di *problem solving* come tale (Chamberlin, 2008), si concorda sul fatto che un problema che rappresenti una sfida nuova e coinvolgente, e che non sia risolvibile con un semplice accesso a conoscenze già note (Schoenfeld, 1992, 1994), offra un'occasione per cogliere il significato della matematica. Un'attività di *problem solving*, infatti, non deve fornire uno strumento da applicare in maniera ripetitiva, come accade nello svolgimento di un esercizio. Piuttosto, deve portare a una personale ricerca (*plan*), sperimentazione (*act*) e verifica (*test*) delle possibili soluzioni del problema (Ortiz, 2016; Pólya, 1945), anche attraverso la formulazione e la validazione di congetture. La ricerca di una soluzione spesso richiede la ripetizione di diversi tentativi, che sono necessari per indagare la natura del problema e che quindi possono facilitarne la comprensione. Proprio la comprensione del problema dovrebbe essere l'obiettivo ultimo di tali attività (Schoenfeld, 1992, 1994): per questo, dopo aver trovato una soluzione, è significativo interrogarsi sull'esistenza di altre soluzioni, o sulle proprietà che le soluzioni dovrebbero avere per essere tali; altrettanto significativa è inoltre la prassi di provare a modificare i dati del problema in modo che esso ammetta almeno una soluzione (eventualmente assegnata a priori). Queste sono le principali strategie di *problem solving* che si possono ritrovare nelle attività qui descritte, proposte in varie fasi del progetto come metodologie per accompagnare le classi verso un'indagine più ampia e approfondita del problema, necessaria a cogliere il contenuto del teorema di Eulero.

Le attività descritte nel par. 4 offrono complessivamente una visione della matematica tutt'altro che procedurale, in accordo con la natura esplorativa del *problem solving*. Lo studente, infatti, per portare a termine ciascuno dei compiti che gli vengono assegnati, non deve riprodurre schemi o algoritmi spiegati dall'insegnante, ma, piuttosto, è invitato a confrontarsi con un problema nuovo per la risoluzione del quale egli avrebbe bisogno dell'aiuto di qualcuno appena più esperto. Perciò, l'insegnante non si pone come unico detentore del sapere che fornisce istruzioni da seguire, quanto più come autentico soggetto che indaga e affronta il problema insieme agli studenti, con l'obiettivo di aiutarli a «rendere il pensiero visibile» (Collins et al., 1991). In questo modo, avviene un processo in cui l'attività cognitiva degli studenti e quella metacognitiva incoraggiata dall'insegnante si integrano continuamente e permettono non solo la comprensione del particolare, ma anche la scoperta – o l'approfondimento – di un modo di agire tipicamente matematico.

2.2 L'embodiment

Il modo in cui attribuiamo un significato a un concetto matematico è modellato dalla nostra interazione con il mondo, che avviene attraverso il movimento e la percezione. Il concetto di *embodiment* si riferisce quindi al contributo del corpo, attraverso le esperienze motorie e sensoriali, nei processi di formazione, comprensione e comunicazione dei concetti astratti della matematica (Alibali & Mitchell, 2012; Núñez, 2000, 2008; Smith & Walkington, 2019); in tal senso, le potenzialità e i limiti del nostro pensiero astratto dipendono anche dalle capacità e dalle restrizioni del nostro sistema motorio-sensitivo. Tale influenza è visibile, per esempio, quando immaginiamo un insieme come una collezione di oggetti a noi noti (Núñez, 2008), oppure una frazione (e quelle ad essa equivalenti) come una porzione di una torta divisa in parti uguali (Edwards, 2009), un angolo come una regione di piano compresa tra due braccia (Alibali & Mitchell, 2012), l'ordinamento dei numeri naturali sulla linea orientata e il concetto di proporzionalità tra interi come spostamenti relativi di un individuo rispetto ad un altro (Smith & Walkington, 2019; Way et al., 2014), le proprietà del grafico di una funzione come traiettorie descritte da movimenti del corpo nello spazio (Gerofsky, 2011). In tutti questi esempi ragioniamo infatti sui concetti della matematica e sulle loro relazioni dando loro un significato attraverso un riferimento concreto. Un'attività *embodied* è dunque un'attività didattica in cui «l'esperienza fisica è connessa ad azioni e percezioni matematicamente rilevanti» (Smith & Walkington, 2019, p. 17), che possono avvenire attraverso il movimento del corpo, la manipolazione di materiali o in generale con esperienze dirette e pratiche.

Nel progetto qui presentato, lo strumento scelto per avvicinarsi alla comprensione degli elementi costitutivi della teoria dei grafi e alla risoluzione del problema è un'attività *embodied* che utilizza la danza: gli schemi geometrici e ritmici presenti nei movimenti, e nella musica che li accompagna, possono infatti offrire un'esperienza complementare per indagare e comprendere le proprietà di alcuni oggetti matematici (Gerofsky, 2013; Gerofsky et al., 2023). L'introduzione di una traduzione intermedia tra le mappe e i grafi, attraverso l'utilizzo di schemi coreografici, può facilitare l'analogia tra il problema dei ponti di Königsberg e la teoria dei grafi, perché il pensiero si trasforma in un'azione del corpo. I ponti da attraversare tra una regione e l'altra diventano così passi da eseguire tra due posizioni nello spazio, ovvero archi tra due vertici. Un cammino euleriano, di conseguenza, si trasforma in una sequenza non ripetuta di passi in una coreografia, che diventa un circuito nel momento in cui la sequenza termina nella stessa posizione in cui è iniziata. Allo stesso modo, il grado di un vertice, ossia il numero di ponti costruiti a partire da una data regione, corrisponde al numero di passi distinti con cui si raggiunge o si abbandona una data posizione nella coreografia.

3 Obiettivi, metodi e strumenti

3.1 Contesto di riferimento, durata dell'attività e modalità di collaborazione con gli istituti

Il laboratorio qui descritto è stato ideato principalmente per la scuola secondaria di primo grado e, in una formula opportunamente adattata, per il biennio delle scuole secondarie di secondo grado. Nel primo caso, il progetto ha coinvolto 6 classi seconde della scuola secondaria di primo grado durante il biennio scolastico 22/23-23/24 di sperimentazione, per un totale di oltre 120 partecipanti, ed è stato diviso in tre incontri in orario curricolare, della durata rispettivamente di due ore (fase 1, problema dei ponti), un'ora (fase 2, *Coreo-Graph*, ovvero ricerca di coreografie euleriane) e due ore (fase 3, teoria dei grafi, teorema di Eulero e sue applicazioni). In questo contesto, si è cercato di mantenere i tre incontri molto ravvicinati, per non disperdere la comprensione e l'attenzione acquisite durante ciascuna fase. Nel contesto del Liceo Matematico, il progetto, privato della parte motoria, ha coinvolto nello stesso periodo 5 classi, per un totale di quasi 150 partecipanti, ed è stato svolto presso il Dipartimento di Matematica "F. Enriques" dell'Università di Milano nell'arco di mezza giornata.

Il progetto nella forma qui descritta è stato sviluppato da entrambi gli autori, ed è stato offerto agli istituti come attività di Terza Missione: esso è sempre stato svolto in forma gratuita e solidale, senza alcuna autorizzazione alla raccolta ed elaborazione dei dati ai fini della ricerca scientifica. Gli autori hanno sempre partecipato come esperti alla realizzazione del progetto, talvolta affiancati da alcuni studenti del corso di laurea triennale o magistrale in matematica, interessati ad acquisire crediti formativi di tipo F⁵ nell'area della didattica della matematica.

3.2 Metodologie didattiche

3.2.1 L'attività dei ponti di Königsberg e le due domande guida

Il progetto rispecchia la suddivisione già illustrata in Gaio et al. (2020) in tre fasi, che rappresentano tre successivi momenti di lavoro con ciascuna classe: in tale suddivisione, il problema dei ponti di Königsberg proposto inizialmente, e lasciato insoluto, viene ripreso solo alla fine dell'ultima fase dove, opportunamente tradotto nel linguaggio della teoria dei grafi, viene risolto.

Nella rivisitazione qui proposta, si è deciso di non limitarsi alla questione della sola esistenza delle soluzioni, ma di estendere l'analisi alle loro proprietà, focalizzandosi anzitutto sul ruolo svolto dai vertici

5. I crediti formativi di tipo F sono riconosciuti agli studenti universitari per attività che permettono di acquisire conoscenze e competenze aggiuntive non rientranti nelle consuete attività formative caratterizzanti. Tali crediti completano il profilo dello studente in termini di capacità linguistiche, informatiche, comunicativo-relazionali e consapevolezza professionale.

di partenza. Infatti, in tutte e tre le fasi del progetto, sono state poste sempre le stesse due domande:

1. Esistono delle soluzioni al problema?
2. Esistono delle soluzioni partendo da qualunque regione/posizione/vertice?

La progettazione di tale estensione si è ispirata all'attività disponibile sul sito Mathigon,⁶ mantenendo la scelta di iniziare il laboratorio con la sfida più impegnativa, costituita proprio dal problema dei ponti di Königsberg; in tal modo le classi si sono subito confrontate con la difficoltà della possibile inesistenza di una soluzione al problema assegnato, difficoltà resa evidente dall'apparente fallimento dei ripetuti tentativi. Questo è sembrato il modo migliore per stimolare fin dall'inizio la creazione di quelle strategie di *problem solving* che sarebbero risultate utili allo svolgimento e alla comprensione delle attività successive (Jonsson et al., 2014; Kapur, 2010, 2011), proponendo allo stesso tempo una narrazione ancorata al contesto storico del problema.

3.2.2 Strategie di problem solving attese

L'attenzione sistematica al ruolo dei vertici iniziali (e finali) delle soluzioni punta anzitutto a facilitare il riconoscimento della struttura comune alle tre diverse situazioni (I, II, III) per preparare il terreno alla formulazione e alla comprensione dell'enunciato del teorema di Eulero. Il cambio di contesto proposto tra ogni attività e la successiva (già presente in Gaio et al., 2020), e in particolare tra l'attività sulle mappe e quella sulla danza, vuole rinforzare l'analogia tra le varie situazioni, al fine di facilitare la trasformazione del problema di Königsberg nel grafo corrispondente.

Inoltre, prima di approfondire il ruolo del grado di un vertice in un grafo, si è scelto di consolidare l'analisi delle proprietà delle eventuali soluzioni, per offrire una visione più ampia e chiara circa la questione della loro esistenza. Se una soluzione esiste, può infatti assumere solo due forme: può essere un cammino aperto che inizia e termina in due vertici distinti del grafo (nel qual caso, tutte le soluzioni condividono gli stessi vertici di inizio e fine), oppure può costituire un circuito che inizia e termina sempre nello stesso vertice di partenza (in questo caso, la scelta del vertice di partenza è arbitraria).

La riflessione sul ruolo dei vertici e sulle proprietà delle eventuali soluzioni viene sviluppata anche introducendo quello che qui viene chiamato il *problema inverso*. Se nel *problema diretto* gli elementi della mappa o del grafo sono fissati e l'incognita è data dal cammino euleriano, nel *problema inverso* ci si chiede come modificare un grafo o una mappa in modo da avere determinati cammini euleriani. Si ritiene infatti che il confronto col *problema inverso* possa aiutare sia a riconoscere le proprietà locali (come il grado di un vertice) che discriminano tra esistenza e non esistenza delle soluzioni, sia a verificare la validità del teorema di Eulero. Anche in questo caso, la proposta qui presentata trova un parallelo nelle strategie di *problem solving*, in cui si interviene sui dati di un problema per garantire che esso ammetta almeno una soluzione (in questo caso assegnata a priori).

3.2.3 L'attività Coreo-Graph

L'uso della danza rappresenta l'ingrediente di originalità di questo progetto nell'ambito dell'attività didattica di tipo *embodied* applicata alla teoria dei grafi (a differenza del lavoro di Gerofsky et al., 2023, dove l'utilizzo dei circuiti euleriani su un grafo è finalizzato alla costruzione di performance artistiche). Uno dei suoi principali vantaggi è la flessibilità: l'attività, infatti, può essere facilmente adattata ai diversi contesti in cui è stata sperimentata (palestre, auditorium, giardini), e permette non solo di osservare le classi al lavoro, ma di stimolarle proponendo variazioni al problema assegnato, come l'aggiunta o la rimozione di un passo o la composizione di due distinte coreografie in sequenza. Inoltre, rispetto alla proposta di Gaio et al. (2020), l'adozione di uno spazio di esplorazione più contenuto permette agli studenti di mantenere una doppia prospettiva sul problema: una visione interna, mentre eseguono la coreografia, e una visione esterna, mentre la osservano.

6. <https://it.mathigon.org/course/graph-theory/bridges>.

Di contro, l'attività *Coreo-Graph* introduce una difficoltà aggiuntiva rispetto alla proposta di Gaio et al. (2020), ovvero la richiesta di *fondere spazio e tempo*, sincronizzando lo schema motorio con la base musicale (Gerofsky, 2013). Consapevoli che questo potesse costituire un ostacolo all'attività *embodied*, si è fatto ricorso ad alcune metodologie dell'insegnamento della danza per facilitarne lo svolgimento. Come descritto più in dettaglio nel par. 4, sono state distinte due fasi: inizialmente, tutti i membri della *crew* hanno eseguito le coreografie euleriane sugli schemi a pavimento come momento di verifica e riproduzione delle soluzioni; e solo dopo aver acquisito gli schemi motori, i ballerini hanno sincronizzato i movimenti con la base musicale. Per accompagnare gradualmente gli studenti fino all'esibizione finale, è stato inoltre dedicato un breve spazio all'ascolto del brano, aiutandoli a riconoscerne elementi utili come il ritmo, gli accenti e la suddivisione tra strofe e ritornello.

Questo laboratorio di danza offre un'esperienza che viene ripresa nello sviluppo della fase teorica successiva, perché concretizza l'idea di cammino euleriano su un grafo come un processo dinamico. La possibile riduzione del livello di astrazione (Hazzan & Hadar, 2005) derivante da questa attività è stata quindi bilanciata dalla richiesta di produrre sempre una rappresentazione simbolica di tali coreografie. In particolare, l'uso di stringhe alfanumeriche in corrispondenza biunivoca con le coreografie ha permesso di mantenere una visione più astratta del concetto di cammino su un grafo (inteso come sequenza di vertici e archi), offrendo al tempo stesso uno strumento rappresentativo efficace nell'esplorazione delle coreografie.

3.2.4 Il teorema di Eulero e la sua applicazione ai problemi precedenti

Il punto di arrivo del progetto non è solo la formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero, ma anche il suo utilizzo per rileggere e risolvere tutte le attività svolte nelle fasi precedenti (cammini sulle mappe e coreografie nella danza): con quest'ulteriore compito si è voluto evidenziare la differenza tra risolvere un problema specifico per tentativi e sfruttare l'analogia con altri contesti, per identificare una strategia più efficace che sia poi di immediata applicazione a problemi che ne condividono la stessa struttura.

3.3 Strumenti

Nelle varie fasi sono stati proposti alle classi diversi strumenti e modalità per lo studio dei cammini euleriani: attività con carta e penna, facili da riproporre in ogni contesto scolastico; laddove possibile, uso dei tablet disponibili negli istituti (laboratori informatici itineranti), per accedere alle attività del sito Mathigon in modalità digitalmente sicura e controllata. L'attività motoria *Coreo-Graph* è stata invece introdotta da video esplicativi autoprodotti, per anticipare in aula la spiegazione di ciò che avrebbero poi dovuto svolgere in palestra. La restituzione delle risposte alle due domande guida, nel contesto delle coreografie euleriane, è stata svolta con un Padlet amministrato dagli esperti: la condivisione delle considerazioni riportate sul Padlet dagli studenti ha permesso di avviare in aula una discussione sul ruolo dei vertici e sulle differenti proprietà di apertura e chiusura delle soluzioni. La classificazione delle tre tipologie di grafo contenute nel teorema di Eulero è stata invece supportata dalla compilazione alla lavagna di due tabelle che raccolgono i risultati dell'attività sui grafi, che saranno illustrati nel par. 4.3.1.

3.4 Obiettivi formativi

Come già osservato da Mammana e Milone (2010) nella loro sperimentazione con analoghe fasce d'età, l'assenza di prerequisiti specifici rispetto alla teoria dei grafi nel curriculum di matematica delle scuole secondarie (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010, 2012) consente alla maggior parte dei partecipanti di potersi mettere in gioco, servendosi principalmente della propria curiosità e delle proprie capacità logico-intuitive.

Il progetto mira infatti a mantenere un buon livello di interesse delle classi durante le varie fasi del suo sviluppo, facendole lavorare sugli aspetti logici e intuitivi del percorso di risoluzione del problema. In

tal modo, esso vuole operare allo stesso tempo su due differenti aspetti della pratica laboratoriale. Da una parte vuole promuovere l'utilità e la necessità dei contenuti della disciplina, lavorando in maniera guidata sul processo di creazione degli strumenti matematici necessari alla risoluzione del problema assegnato, come da traguardo di competenza prefissato dalle Indicazioni Nazionali: «[L'allievo] ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà» (MIUR, 2012, p. 51); dall'altra, caratterizzandosi proprio come attività di *problem solving*, esso vuole accompagnare verso un'azione creativa che è difficile da includere sistematicamente nella didattica frontale della matematica, dove la teoria di norma precede la sua applicazione. In questo caso la pratica laboratoriale vuole condurre alla formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero, attraverso il raggiungimento di alcuni obiettivi specifici:

- Passare da una fase sperimentale (per tentativi) alle successive fasi di formulazione di un enunciato (congettura) e della sua verifica.
- Risolvere un problema passando attraverso la risoluzione di problemi simili, ovvero in cui si osserva la medesima struttura (analogia).
- Riflettere sull'esistenza e non esistenza delle soluzioni di un problema. In particolare, il progetto si pone due obiettivi distinti: primo, fornire esempi di problemi che non ammettono soluzioni; secondo, mostrare che la non esistenza delle soluzioni di un problema può essere più difficile da argomentare rispetto all'esistenza.
- Sperimentare l'uso del problema inverso come metodologia utile alla risoluzione e comprensione del problema diretto.

4 Descrizione del laboratorio

Il progetto, nel suo complesso, è un vero e proprio laboratorio di matematica, secondo la definizione che ne viene data in Anichini et al. (2004, p. 28): esso è infatti «un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici», costruzione che «è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività». Nella descrizione del laboratorio, si delineano i diversi aspetti che emergono da tale definizione, esplicitando dunque quali sono i significati che vengono costruiti, gli strumenti attraverso cui essi vengono indagati e indicando la modalità di interazione tra esperti e studenti e quella da incoraggiare all'interno del gruppo classe.

4.1 Fase 1: i ponti di Eulero e le sue varianti

La prima fase si focalizza sulla risoluzione del problema dei ponti, nella versione originaria del problema di Eulero e in alcune sue varianti. È stata introdotta la definizione di *cammino euleriano* (o *percorso euleriano*) sulla mappa come una soluzione a tale problema, ovvero un percorso che, partendo da una regione, attraversa una e una sola volta tutti i ponti della mappa (in accordo con la definizione di *euler trial* in Bondy e Murty, 1976). Per questa fase ci si è inizialmente appoggiati e ispirati alle attività proposte sul sito Mathigon: il sito permette di confrontarsi col problema dell'esistenza e non esistenza delle soluzioni attraverso uno strumento digitale che facilita la ricerca delle soluzioni per tentativi (offrendo la possibilità di ripulire la mappa dopo ogni tentativo). In aggiunta alle mappe già proposte da Mathigon, sono stati inseriti due esempi di mappe che includono il caso non contemplato nel sito, ovvero quello di mappe che ammettono cammini euleriani chiusi a partire da ciascuna delle regioni di cui la mappa è composta (ovvero dei circuiti). La Figura 2 mostra alcune delle mappe utilizzate in

questa fase, nell'ordine con cui sono state assegnate alle classi, ovvero: come prima mappa, quella che riproduce il problema dei ponti di Königsberg (in alto a sinistra, mappa 1 di Mathigon), una seconda mappa che ammette cammini aperti che iniziano e terminano in due regioni distinte (in alto a destra, mappa 2 di Mathigon) e una terza mappa che ammette circuiti che iniziano da ciascuna delle quattro regioni indicate (scelta tra le due mostrate in basso alla Figura 2). In alcune classi, la mappa in alto a destra di Figura 2 è stata sostituita con la mappa 3 di Mathigon (qui non riprodotta). Per lo svolgimento della terza e ultima mappa è stata inoltre introdotta la *rappresentazione simbolica* regioni (lettere) – ponti (numeri interi) di un percorso sulla mappa. Ad esempio, nel caso della mappa in basso a sinistra in Figura 2, si possono numerare i ponti da sinistra verso destra: una possibile soluzione che inizia e termina nella regione A si scriverà quindi come A1D6C5B4A3B2A.

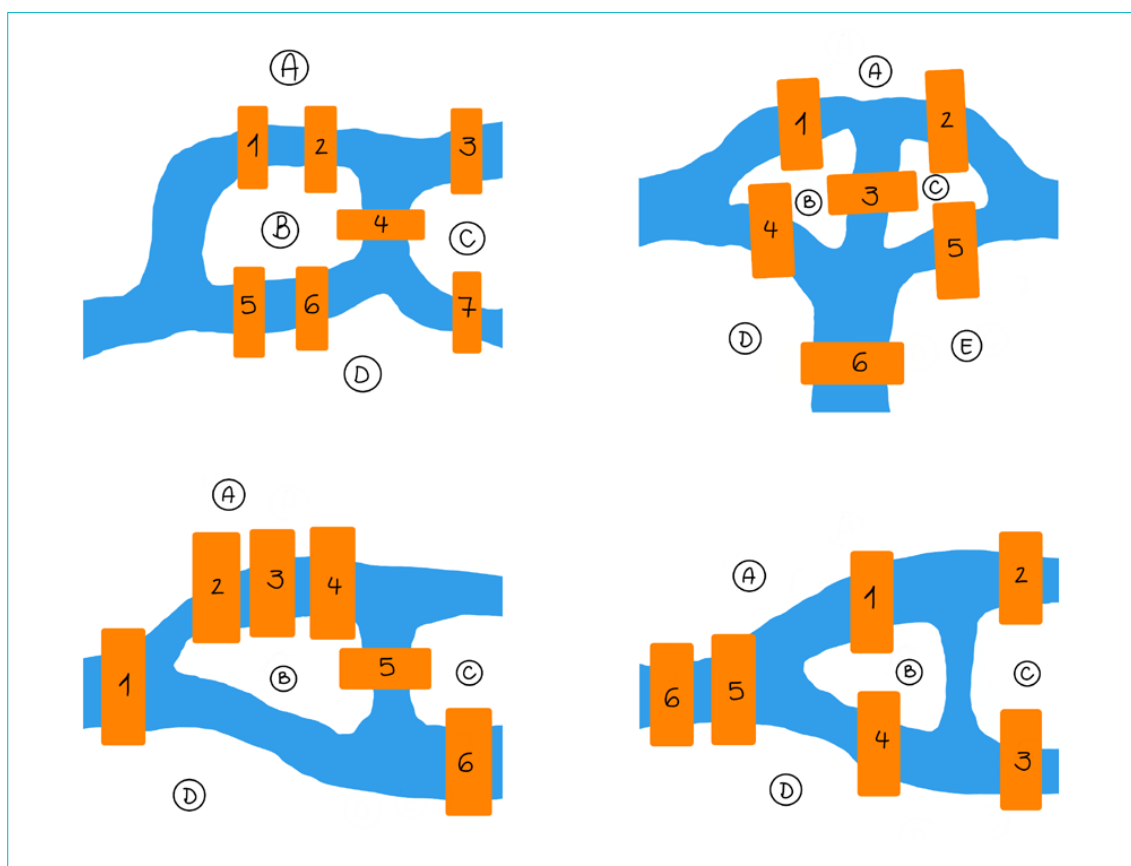


Figura 2. Mappe usate per la prima fase. In alto, una riproduzione delle prime due mappe presenti sul sito Mathigon (la prima corrisponde al problema di Eulero originale). In basso due mappe usate come esempi dell'esistenza di cammini euleriani che iniziano da ognuna delle quattro regioni.

La breve discussione avviata in conclusione della fase 1 ha posto l'accento sul confronto tra le tre situazioni presentate, che esemplificano i tre possibili casi del teorema di Eulero. In questa fase si intendeva anzitutto far emergere le differenze tra le tre situazioni, per facilitare l'analogia con la fase successiva e per iniziare a discutere delle strategie di *problem solving*. Si è sempre concluso assieme alle classi che la risolubilità di un problema si può ottenere attraverso la scoperta di almeno una soluzione. Mostrare la non risolubilità è invece molto più difficile: quando non riusciamo a trovare la soluzione infatti, non siamo sicuri della sua inesistenza, a meno di esplorare tutti i cammini possibili. Andare per tentativi è faticoso e poco efficiente, ma anche necessario per costruirsi una prima rappresentazione della situazione matematica da indagare.

4.2 Fase 2: il problema della coreografia euleriana

Col problema della *coreografia euleriana* si vuole riproporre il problema della ricerca di cammini euleriani su un grafo nel contesto della danza: il tentativo è quello di progettare un'attività capace di combinare un'analisi geometrica della situazione proposta con una disciplina artistico-motoria in grado di intercettare alcuni interessi o tendenze della fascia d'età considerata.

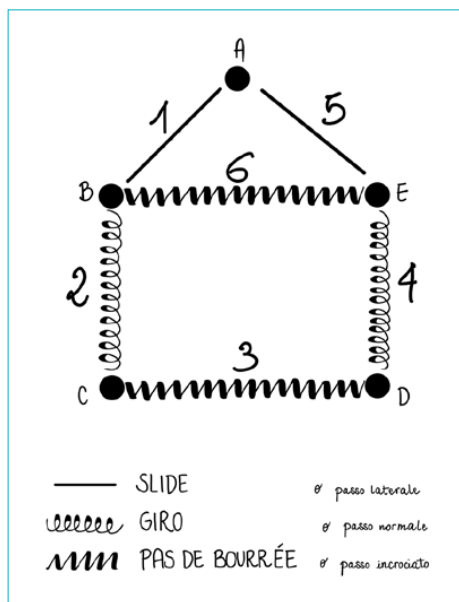


Figura 3. Schema coreografico a "casetta": i pallini neri etichettati con lettere maiuscole indicano le posizioni assegnate, mentre i passi numerati indicano i possibili spostamenti tra le posizioni.

La prima parte di questa attività si è svolta in classe. Il punto di partenza è stato lo schema di Figura 3, di cui si sono precisati gli elementi costitutivi, anticipando di fatto la struttura di un grafo (esattamente come era stato fatto in Gaio et al. (2020) per l'itinerario sulla mappa):

- le posizioni – ovvero i "vertici" in cui si può trovare il ballerino;
- i passi – ovvero gli spostamenti che sono consentiti tra le posizioni assegnate;
- lo stile dei passi – ovvero il modo con cui si effettua ciascuno spostamento.

È stata introdotta una definizione di *coreografia* sullo schema assegnato, in analogia al concetto di cammino sulle mappe della prima fase: con *coreografia* si intende ogni sequenza di passi che parta e termini nelle posizioni assegnate, compatibile con lo schema. Il ballerino può quindi spostarsi solo tra posizioni collegate da passi (a prescindere dallo stile del passo). Allo stesso modo, ripensando al problema dei ponti (i ponti sono ciò che ci fa passare da una regione all'altra), diventa naturale definire una *coreografia euleriana* come una sequenza di passi dello schema assegnato che consenta al ballerino di compiere tutti i passi dello schema, ma facendo ogni passo una e una sola volta. Usando anche in questo contesto la rappresentazione simbolica già introdotta, si può fornire quindi un esempio di coreografia euleriana: *B6E5A1B2C3D4E*. Per rinforzare il concetto di *eulerianità*, durante la sperimentazione sono stati mostrati dei video autoprodotti, con riferimento allo schema di Figura 3: in alcuni viene eseguita una coreografia euleriana e in altri viene commesso un errore (un passo non viene eseguito oppure viene eseguito due volte).

4.2.1 L'attività Coreo-Graph

Dopo aver diviso gli studenti in gruppi (o *crew*), è stato assegnato a ogni gruppo uno schema di danza equivalente a un grafo, come quello in Figura 3. Sono state distribuite tre diverse tipologie di schemi illustrati in Figura 4 (uno schema per ciascuna *crew*), di cui due risolubili (nel senso dell'esistenza di coreografie euleriane) e uno non risolubile:

- uno schema risolubile con (due) vertici di grado dispari (CG1);
- uno schema risolubile con soli vertici di grado pari (CG2);
- uno schema non risolubile (CG3).

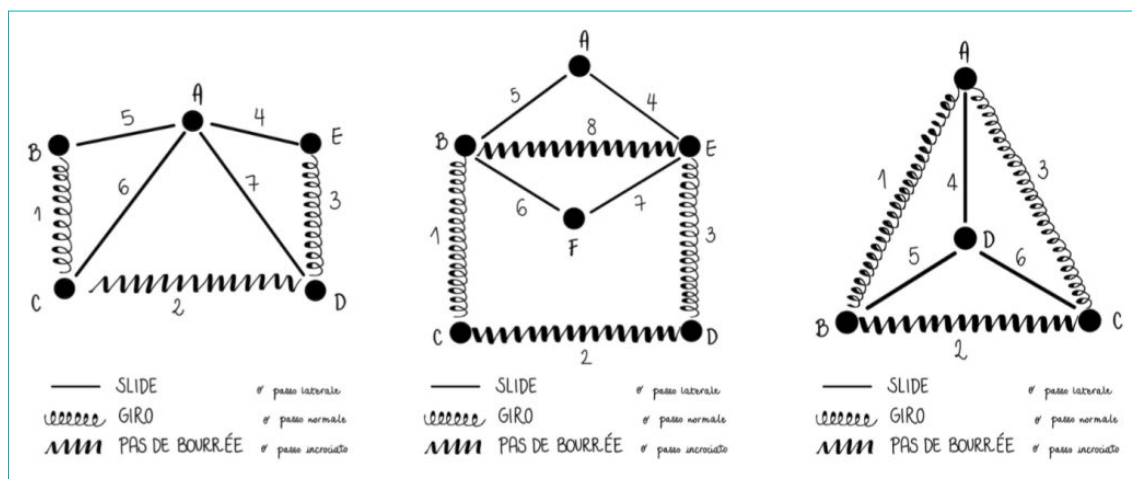


Figura 4. In ordine da sinistra a destra: CG1, CG2, CG3.

Si sono poi resi visibili gli schemi sul pavimento attraverso dei cerchi colorati per le posizioni e dei nastri per i passi (come in Figura 5).



Figura 5. Esempio di schema CG1 riprodotto in palestra.

Al fine di lavorare sulle stesse due domande guida della fase precedente, opportunamente declinate nella nuova attività, è stato chiesto a ciascuna *crew* di svolgere nell'ordine indicato i seguenti compiti:

1. Provare a identificare le possibili coreografie euleriane e scriverle con la rappresentazione simbolica, prestando attenzione al ruolo svolto dalla scelta del vertice di partenza (posizione iniziale del ballerino). Dopo una prima fase di esplorazione, alla *crew* in possesso dello schema CG3 viene proposto di aggiungere un passo tra due posizioni a scelta, in maniera tale da assicurare l'esistenza di almeno una coreografia euleriana.
2. Eseguire (a turno) una delle coreografie precedentemente identificate senza base musicale, usando i riferimenti sul pavimento.
3. Scegliere due membri della *crew* disposti a memorizzare le coreografie sincronizzandosi con la base musicale, eventualmente modificando a proprio piacimento lo stile dei passi indicati nello schema.
4. Far eseguire ai/alle ballerini/e selezionati dalle *crew* le proprie coreografie euleriane, nella breve esibizione finale.

A conclusione di questa attività, le *crew* hanno postato le proprie risposte alle due domande guida su un Padlet condiviso e amministrato dagli esperti esterni: ogni *crew* aveva il compito di riportare le risposte alle due domande sotto le immagini precaricate degli schemi di **Figura 4**, sostenendo tali risposte con alcuni esempi di coreografie euleriane trovate. Inoltre ciascuna *crew* è stata invitata a osservare gli schemi e le soluzioni degli altri gruppi: infatti questa fase di restituzione su Padlet verrà poi ripresa e commentata in classe durante l'inizio della terza ed ultima fase, prima di presentare la teoria dei grafi.

4.3 Fase 3: introduzione alla teoria dei grafi e teorema di Eulero

L'inizio della terza fase ha ripreso il problema della coreografia euleriana sviluppato sul Padlet dalle varie *crew*. Attraverso la condivisione delle risposte e degli esempi forniti dai vari gruppi, si sono fatte emergere le diverse proprietà delle coreografie euleriane, ovvero il collegamento tra proprietà locali e globali delle soluzioni al problema assegnato:

1. quando esistono coreografie euleriane che partono da ogni vertice dello schema, la coreografia è sempre un circuito;
2. quando invece i possibili vertici di partenza per le coreografie sono solamente due, essi sono sempre il punto di partenza e di arrivo di una coreografia euleriana aperta.

Prima di abbandonare la riflessione sull'attività motoria in favore della teoria dei grafi, si è estesa la risoluzione del *problema inverso* (già descritto nel par. 3) agli schemi CG1 e CG2 di **Figura 4**, in precedenza proposta per il solo schema CG3; si è quindi chiesto ad ogni *crew* di rimuovere un solo passo in maniera tale da modificare la tipologia delle proprie coreografie euleriane (da chiuse ad aperte e viceversa). La terza e ultima fase è proseguita con due momenti distinti:

1. la ricerca e classificazione di cammini euleriani su grafi connessi, la formulazione del teorema di Eulero e l'utilizzo del teorema per rileggere il problema inverso delle coreografie euleriane;
2. la trasformazione e risoluzione del problema dei ponti di Königsberg e di alcune sue possibili varianti.

4.3.1 Ricerca e classificazione di cammini euleriani su grafi connessi

Dopo aver sottolineato come il numero di vertici, il numero di passi e il modo con cui i passi collegano i vertici sia tutto ciò che caratterizza la risolubilità del problema della ricerca di una coreografia euleriana, sono stati introdotti formalmente gli elementi di un grafo (vertici, archi, estremi di un arco) e ci si è soffermati sulla nozione di grado di un vertice. Si è deciso di evidenziare maggiormente que-

sta nozione, osservando come cambino i gradi dei cinque vertici nelle tre trasformazioni sul grafo in Figura 6: nello specifico, si è mostrato che l'aggiunta, la rimozione e lo spostamento di un arco (che possiamo immaginare come l'azione di "tagliare" un arco nei suoi vertici e di "incollarlo" ad altri vertici del grafo) incrementano o riducono di un'unità i gradi dei vertici adiacenti all'arco, coerentemente con l'operazione effettuata.

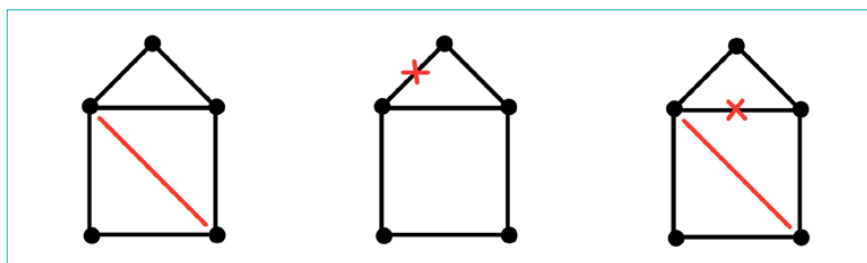


Figura 6. Trasformazioni su un grafo. Nell'ordine da sinistra a destra: aggiunta di un arco (primo esempio), rimozione di un arco (secondo esempio), spostamento di un arco oppure taglia-incolla (terzo esempio).

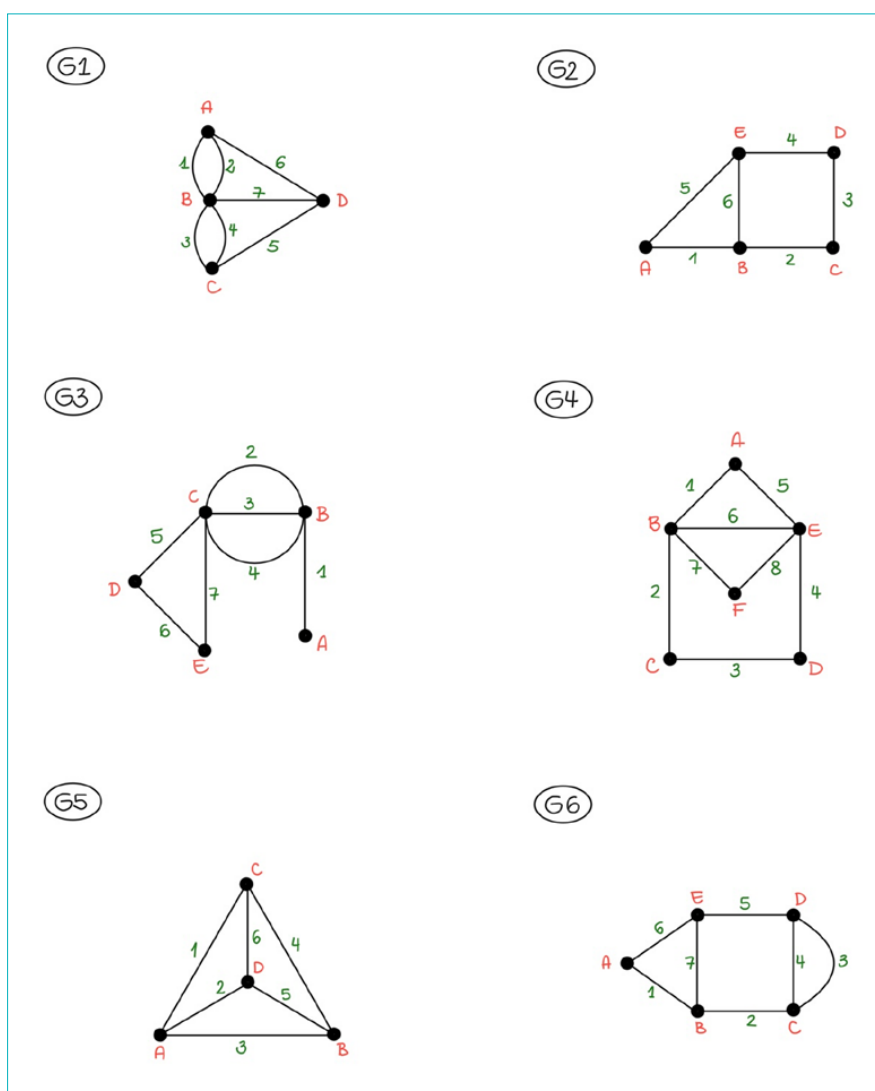


Figura 7. Scheda per la ricerca di cammini euleriani su grafi usata nella terza fase.

La **Figura 7** mostra la scheda che a questo punto del laboratorio è stata distribuita nelle classi, con la richiesta di rispondere alle solite due domande guida nel caso dei grafi. Per avere omogeneità nella rappresentazione simbolica dei cammini euleriani e velocizzare la successiva classificazione dei grafi, si è deciso di etichettare i grafi come G1, ..., G6 e di attribuire a priori lettere e numeri ai vertici e agli archi di ciascun grafo. È stato infatti chiesto di esplorare l'esistenza di possibili cammini euleriani, al variare del vertice di partenza, appuntando su un foglio la rappresentazione simbolica delle soluzioni trovate per ciascun grafo analizzato. Molti dei grafi proposti in questa scheda corrispondono alla schematizzazione di problemi già incontrati nelle fasi precedenti, al fine di sottolineare l'analogia tra le attività svolte nel laboratorio: per esempio, il grafo G1 corrisponde al problema di Eulero in **Figura 1**, il grafo G2 corrisponde allo schema di **Figura 3**, mentre G4 e G5 corrispondono a due degli schemi di **Figura 4**.

I risultati di questa attività sono stati raccolti in due tabelle: una prima tabella (**Tabella 1**, a sinistra) con le risposte alle due domande guida per ogni grafo, una seconda tabella (**Tabella 1**, a destra) con la classificazione dei grafi in funzione di tali risposte (primo, secondo e terzo tipo). In tal modo si sono volute schematizzare le tre situazioni previste dall'enunciato del teorema di Eulero: la classificazione dei grafi introdotta, in grafi del primo (I), secondo (II) e terzo (III) tipo, rispecchia fedelmente le tre parti dell'enunciato del teorema. Per esempio, con riferimento alla scheda riportata in **Figura 7**, G4 è l'unico esempio di grafo che ha tutti i vertici di grado pari (primo tipo), mentre G2 e G3 sono gli unici ad avere soltanto due vertici di grado dispari (secondo tipo); i grafi rimanenti sono tutti del terzo tipo, in quanto ammettono almeno quattro vertici di grado dispari.

Nell'adattamento del progetto per il Liceo Matematico, solo a questo punto si sono evidenziate le differenze tra le soluzioni nei grafi del primo e secondo tipo, sottolineando il collegamento tra la dipendenza dal vertice iniziale e la tipologia delle soluzioni, ovvero il fatto che i cammini euleriani siano o meno dei circuiti.

Grafo	Esistenza cammino euleriano	Dipendenza dai vertici
G1	No	/
G2	Sì	Sì
G3	Sì	Sì
G4	Sì	No
G5	No	/

Tipo	Grafi
I tipo	G4
II tipo	G2, G3
III tipo	G1, G5, G6

Tabella 1. Tabelle per la classificazione dei grafi G1, ..., G6 di **Figura 7**.

Per far emergere il ruolo del grado nei tre differenti tipi di grafo classificati nella **Tabella 1**, ci si è anzitutto focalizzati sui grafi del secondo tipo: l'obiettivo è riconoscere il ruolo del grado dei due vertici *speciali* da cui iniziano e terminano tutti i cammini euleriani. Per facilitare il riconoscimento del ruolo della (dis)parità del grado di tali vertici, è possibile far riflettere sul percorso che si ottiene quando si traccia⁷ un cammino euleriano sul grafo G2, sviluppando un argomento di tipo *entry-exit* nei vertici che si incontrano lungo lo sviluppo del cammino (Ferrarello & Mammana, 2017). Infatti, dai vertici di partenza/arrivo si esce/entra una volta in più di quanto si entri/esca, mentre tutti gli altri vertici sono di

⁷ Come nel gioco in cui si chiede di disegnare la casetta senza mai staccare la matita dal foglio e senza tracciare due volte lo stesso segmento.

passaggio, quindi si entra ed esce lo stesso numero di volte. Dunque, per avere vertice di partenza e di arrivo distinti, questi devono necessariamente avere grado dispari, mentre tutti gli altri devono avere grado pari. Una volta riconosciuto il ruolo discriminante svolto dal grado dei due vertici in questa tipologia di grafo, si procede per confronto con gli altri due tipi di grafi, giungendo alla formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero.

Questo primo momento si è concluso rileggendo il problema della coreografia euleriana alla luce del teorema di Eulero. Da una parte, si è utilizzato il teorema per rispondere nuovamente alle domande guida sugli schemi di Figura 4, lavorando sui grafi corrispondenti. Dall'altro, si è proposto di usare lo stesso teorema per risolvere il problema inverso affrontato all'inizio di questa terza fase: per esempio, nel caso dello schema CG3 di Figura 4, si è visto che il passo può essere aggiunto tra qualunque coppia di vertici, trasformando lo schema di partenza da un grafo del terzo tipo in un grafo del secondo tipo. Infatti, le crew che hanno aggiunto un passo al grafo CG3 hanno sempre realizzato coreografie che partivano e terminavano da due vertici distinti.

4.3.2 Trasformazione e risoluzione del problema dei ponti di Königsberg

Il secondo momento è iniziato con la proposta di usare il teorema per risolvere il problema dei ponti di Königsberg; per collegare la mappa con il corrispondente grafo bisogna infatti identificare ogni regione con un punto (come se fosse un punto a caso da cui partire all'interno della stessa regione) e ogni ponte con un arco (può risultare necessario esplicitare l'analogia tra gli archi che si possono attraversare una e una sola volta, e lo stesso ruolo svolto dai ponti). Effettuata tale trasformazione (nel nostro caso con un'animazione costruita in GeoGebra),⁸ diventa naturale identificare la mappa di partenza con il grafo G1 di Figura 7, concludendo la non esistenza delle soluzioni.

Dopo aver mostrato come esplorare le mappe della prima fase trasformandole in opportuni grafi, è possibile proporre delle sfide conclusive sulle mappe per valorizzare l'efficacia di un'opportuna modellizzazione matematica del problema e dello strumento teorico offerto dal teorema di Eulero. Una variante interessante consiste nell'abbattimento di un ponte e nella sua ricostruzione in modo da rendere risolvibile il problema. È stata quindi posta la domanda: «Nel problema dei ponti di Königsberg è possibile demolire e ricostruire uno dei ponti in un altro punto della mappa, in modo che il grafo corrispondente ammetta dei cammini euleriani? In particolare, dove bisognerebbe ricostruire il ponte se si volesse un grafo del I tipo? E dove se si volesse un grafo del II tipo?». Questa proposta è stata illustrata in alcuni casi attraverso la mappa del problema originale (mappa in alto a sinistra in Figura 2), in altri attraverso la mappa 4 proposta dal sito Mathigon (qui riprodotta in Figura 8), che ammette G5 come grafo associato.

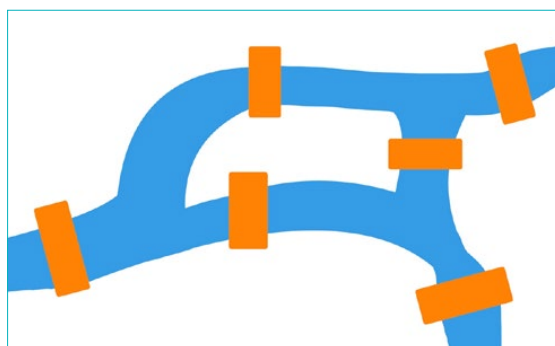


Figura 8. Riproduzione della mappa 4 dell'attività sui ponti di Königsberg proposta dal sito Mathigon.

8. <https://www.geogebra.org/m/yesf6e3s>.

A conclusione dell'intero laboratorio, si è proposto di risolvere il problema dell'esistenza di cammini euleriani su una nuova mappa ispirata alla topografia della città olandese di Leiden (in Figura 9 una mappa di Leiden e la semplificazione proposta, costituita da 8 regioni e 13 ponti), per rinforzare il contrasto tra l'approccio iniziale e la semplicità offerta dal teorema nel mostrare la non esistenza delle soluzioni: la schematizzazione scelta e qui mostrata presenta infatti almeno quattro regioni (E, F, G, H) con un numero dispari di ponti.

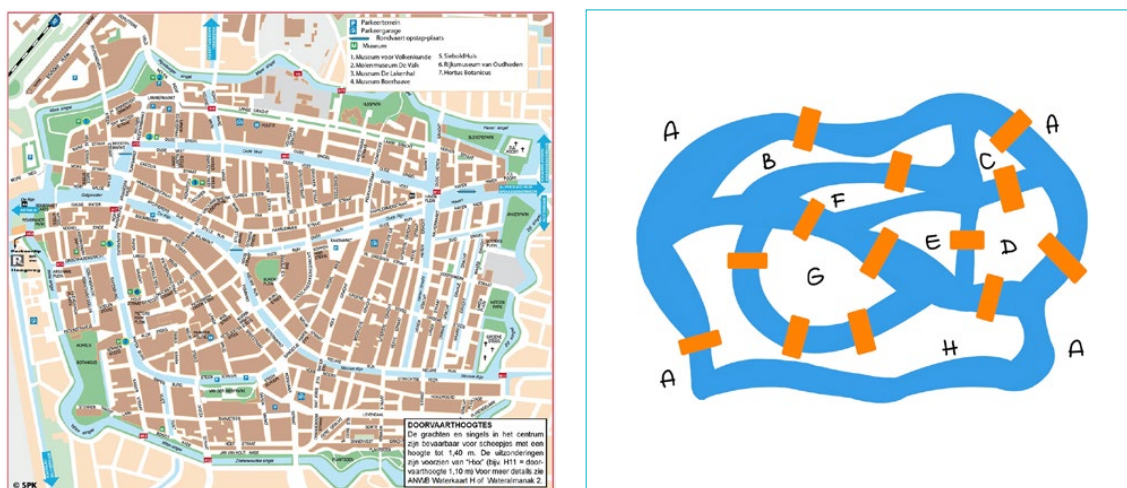


Figura 9. Una mappa della città di Leiden (fonte OnTheWorldMap.com)⁹ e la semplificazione proposta, con 8 regioni e 13 ponti.

5 Risultati della sperimentazione

In questa sezione sono raccolti i principali risultati della sperimentazione del progetto. Sono raggruppati per tematiche; dove significativo, sono messe in luce le differenze tra la sperimentazione fatta nella scuola secondaria di primo grado e quella fatta nelle classi del Liceo Matematico.

5.1 Mappe, ponti e le strategie di *problem solving*

La scelta di iniziare il laboratorio con il problema dei ponti di Königsberg ha permesso a ciascuno studente di creare la propria rappresentazione geometrica del problema e di sviluppare le proprie strategie risolutive (Jonsson et al., 2014; Kapur, 2010, 2011). Ne sono stati la conferma da una parte la rapidità mostrata nel risolvere le successive attività sulle mappe, ma soprattutto i diversi commenti su quali elementi del problema sembrassero costituire l'ostruzione all'esistenza di un cammino euleriano: con riferimento alla mappa in alto a sinistra di Figura 2, riportata in Figura 10 per comodità, per alcuni l'ostruzione sembrava essere rappresentata dal numero dispari di ponti, per altri la mancanza o la presenza di un ponte in eccesso in una specifica posizione della mappa (entrambe manifestazioni di un "errato" grado della regione). Esempi di quest'ultima argomentazione sono state risposte del tipo: «Se tolgo il ponte 4 tra le regioni B e C, riesco a trovare una soluzione che parte da A e finisce in D», che possiamo collegare a una tipica strategia di *problem solving*, ovvero «come modificare i dati in modo da riuscire a determinare l'incognita» (Pólya, 1945, p. 78, traduzione degli autori).

9. <https://ontheworldmap.com/netherlands/city/leiden/leiden-city-center-map.html>.

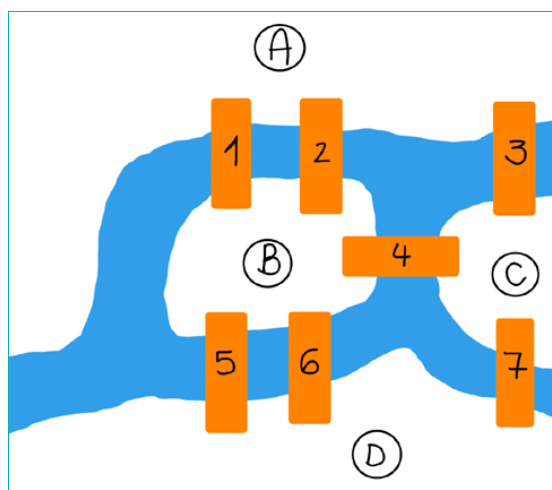


Figura 10. Prima mappa fornita nella fase 1: quella che modella il problema di Königsberg.

Di fronte al problema dell'esistenza di un cammino euleriano nella mappa di Königsberg, tutte le classi si sono sempre sostanzialmente divise in due gruppi: da una parte chi era disposto a scommettere sull'esistenza di un percorso euleriano, che risultava però inaccessibile con la strategia usata, dall'altra chi era ragionevolmente convinto della sua non esistenza, a fronte dei numerosi tentativi falliti. Nel caso del Liceo Matematico, questa seconda posizione era spesso sostenuta da argomenti (non sempre corretti) relativi alla particolare distribuzione dei ponti tra le regioni assegnate; per esempio, una frase del tipo: «Non possono esistere soluzioni perché il numero di ponti nella regione centrale B è dispari», per quanto non sia la corretta spiegazione della non esistenza dei cammini euleriani, anticipa di fatto una congettura sul ruolo del grado di un vertice nel corrispondente grafo. Viceversa, all'interno delle classi della scuola secondaria di primo grado si è riscontrato che *il credere nell'esistenza di una soluzione*, più che una congettura supportata dalla sperimentazione, pareva esser frutto del contratto didattico secondo cui un docente di norma non propone un problema impossibile. Tuttavia, al termine dell'attività sulle tre mappe, una parte significativa degli studenti si è spesso ritrovata a cambiare opinione a favore della non esistenza.

In particolare, la simmetria della seconda mappa in Figura 2 ha ridotto la complessità del problema, consentendo di dedurre il ruolo svolto dalle regioni centrali con una esplorazione parziale di tutti i percorsi ammissibili: ogni percorso costruito a partire da una delle due regioni di destra si "riflette" in un corrispondente percorso che parte da una delle due regioni di sinistra, e viceversa. Questa strategia di semplificazione della ricerca delle soluzioni (Pólya, 1945), è stata riscontrata tanto nella scuola secondaria di primo grado quanto nel contesto del Liceo Matematico. Nella scuola secondaria di primo grado ha però rischiato di spostare l'attenzione su un aspetto secondario del problema: la simmetria è diventata in alcuni casi la proprietà discriminante per l'esistenza di percorsi euleriani con inizio e fine dalle "isole centrali".

5.2 Aspetti di traduzione e di rappresentazione

Nelle prime battute dell'attività sulle mappe vi sono state talvolta delle difficoltà nella comprensione delle due domande guida e della definizione di cammino euleriano: è stato necessario sempre sottolineare il fatto che i cammini dovessero *partire da una regione* e non da un ponte e che questo ultimo dovesse essere *attraversato interamente* da una regione all'altra (questo per evitare che venissero considerate come soluzioni quelle costruite attraversando solo parzialmente un ponte). In tal modo si è chiarito fin da subito il diverso ruolo dei due elementi caratterizzanti il problema, necessario per riconoscere l'analogia tra le tre fasi del laboratorio: vi sono elementi da cui si parte e si arriva, ed elementi che li collegano e che quindi vengono attraversati.

Di fronte alla proposta di usare il teorema di Eulero per risolvere il problema dei ponti, in molti hanno evidenziato l'analogia tra le due situazioni, identificando correttamente regioni-vertici e ponti-archi con affermazioni del tipo «È come se le regioni fossero i vertici e i ponti gli archi». Ovviamente, non sono mancati episodi in cui la reazione istintiva è stata quella di identificare i ponti con i vertici: proprio in questi casi, è stato sufficiente rimarcare quali fossero gli elementi del grafo da "attraversare" una e una sola volta per far rapidamente convergere verso una corretta *traduzione* della mappa di Königsberg nel relativo grafo.

All'interno della prima fase è stata introdotta la rappresentazione simbolica dei cammini, a complemento di quella geometrica. Vi sono state classi in cui tale rappresentazione è emersa spontaneamente fin dalle prime due mappe, soprattutto nel caso delle classi del Liceo Matematico, come necessità di annotare in maniera efficiente le soluzioni trovate. Di norma però, la maggior parte degli studenti ha preferito una rappresentazione geometrica delle soluzioni, tracciando i cammini con colori diversi sulla mappa. Tuttavia, vi sono stati casi isolati dove la rappresentazione simbolica è stata usata per manipolare un circuito: per esempio, nella rappresentazione $A1D6C5B4A3B2A$ (già introdotta come esempio di rappresentazione simbolica di un circuito euleriano per la mappa in basso a sinistra nella Figura 2 del par. 4.1) si può spostare la terna regione-ponte-regione $A1D$ alla fine del percorso e ottenere (senza ripetere due volte la regione A) la soluzione $D6C5B4A3B2A1D$ che ha D come nuova regione di partenza e di arrivo. Più spesso sono emerse considerazioni equivalenti riferite direttamente al circuito tracciato sulla mappa: infatti, la precedente costruzione equivale a dire che il circuito può essere percorso scegliendo liberamente la regione (vertice) da cui partire, mantenendo inalterato l'ordine con cui ponti e regioni vengono attraversati.

5.3 Coreo-Graph ed *embodiment*

Fin dall'inizio vi era la consapevolezza che proporre un'attività legata alla danza avrebbe comportato dei rischi: il rischio intrinseco che, riconoscendo le soluzioni direttamente sullo schema, ragazzi e ragazze non sarebbero stati invogliati a eseguire le coreografie e il rischio che la danza avrebbe potuto creare in alcuni/e una situazione di disagio. La prima difficoltà è stata superata proprio dall'aver previsto in fase di progettazione la separazione tra la fase della ricerca delle soluzioni (e della loro rappresentazione simbolica) da quella motoria, dove tutti gli elementi di ogni *crew* sono stati invitati a riprodurre le coreografie individuate, senza alcuna base musicale. Rispetto alla seconda potenziale difficoltà, si è anzitutto lasciata ad ogni *crew* la possibilità di scegliere solo due ballerini da far alternare nell'esibizione delle coreografie, garantendo loro ampia libertà nella personalizzazione degli stili dei passi. Nonostante alcune iniziali perplessità, si è sempre riscontrato un buon livello di coinvolgimento e di collaborazione tra i membri di una stessa *crew*: qualcuno, magari "disorientato" dalla natura motoria del compito, ha infatti dedicato maggior impegno nella ricerca delle coreografie sugli schemi, e qualcun altro si è proposto di verificare i risultati ballando le coreografie. In particolare, è stata notata una maggior reticenza nelle ragazze della scuola secondaria di primo grado rispetto ai ragazzi, che si sono spesso mostrati più disinvolti e partecipi (contrariamente a possibili attese indotte dai pregiudizi di genere sulla danza). Dal punto di vista dell'*embodiment*, la richiesta di percorrere fisicamente i grafi (qui mascherati da schemi di danza) ha offerto un'esperienza motoria utile a riconoscere le proprietà di apertura e chiusura delle soluzioni. Durante lo svolgimento dell'attività *Coreo-Graph* alcune *crew* hanno infatti mostrato consapevolezza di queste caratteristiche con espressioni del tipo «Le nostre coreografie iniziano e finiscono sempre nelle stesse posizioni» oppure «Quando balliamo finiamo sempre nella posizione di partenza». Questa attività è stata dunque preziosa per associare la differenza tra circuiti/cammini aperti al differente ruolo svolto dalle posizioni di partenza: tale associazione è stata sviluppata per guidare le classi verso la successiva classificazione dei grafi e la formulazione dell'enunciato del teorema di Eulero.

Aver anticipato l'attività sui cammini euleriani in un grafo, inserendola in un contesto motorio stimolante e coinvolgente, ha fornito a tutti gli studenti un'esperienza a cui attingere per la parte

concettualmente più faticosa del laboratorio, ovvero il riconoscimento del ruolo del grado dei vertici e la formulazione del teorema. È stato evidente come alcuni degli studenti con maggiori difficoltà di concentrazione abbiano vissuto l'attività con carta e penna come poco interessante o faticosa: per questi studenti, la precedente esperienza di doversi spostare fisicamente tra due posizioni con un passo è stato invece un riferimento concreto a cui rifarsi durante la terza fase. Tale esperienza è stata richiamata durante la spiegazione dell'argomento *entry-exit*, per riflettere sulla parità del grado dei vertici di passaggio (ogni abbandono della posizione è compensato da un ritorno, e viceversa), rispetto ai vertici di inizio e fine della coreografia.

Sebbene non sia emersa esplicitamente nelle discussioni, la naturalezza con cui le classi – contrariamente alle aspettative iniziali – hanno spesso trasformato il problema dei ponti di Königsberg nel relativo grafo potrebbe aver beneficiato della mediazione offerta da questa esperienza motoria. L'esecuzione delle coreografie euleriane ha infatti attribuito un significato concreto al concetto di "attraversamento", nella richiesta di compiere fisicamente uno spostamento tra le posizioni (ovvero i vertici) dello schema; ciò potrebbe aver agevolato anzitutto l'associazione logica tra ponti e archi, e quindi la successiva identificazione delle regioni con i vertici del grafo.

5.4 Formulazione dell'enunciato

La terza fase sintetizza tutto il percorso svolto nel laboratorio: dalla ricerca di cammini euleriani, alla riflessione sulla parità del grado dei vertici, fino alla formulazione del teorema di Eulero. Di questi aspetti, la parte che ha creato maggior difficoltà è sicuramente l'identificazione del grado dei vertici come proprietà discriminante all'interno dell'enunciato; infatti, avere a disposizione un numero molto ridotto di esempi a cui riferirsi, nonostante le tre fasi abbiano ripetuto sostanzialmente lo stesso schema, può condurre verso congetture non completamente corrette. Per esempio, è capitato che qualche studente si sia convinto che i grafi del secondo tipo dovessero avere 5 vertici, come G2 e G3, oppure che fosse importante avere più archi che vertici (ma è stato fatto notare che questo vale per tutti i grafi della scheda di Figura 7). Qualcuno si è invece concentrato sulla presenza di triangoli in G2 e G4 come condizione indispensabile per l'esistenza di almeno un cammino euleriano: per quanto la presenza di triangoli possa essere un elemento significativo in un grafo,¹⁰ questa congettura è stata subito abbandonata quando si è fatto notare che esistono triangoli anche in G5 e G6. Focalizzarsi su un numero limitato di esempi specifici può quindi essere fuorviante, e comunque insufficiente a immaginarsi il caso generale di riferimento (Kapur, 2010, 2011). Per ricondurre la narrazione verso la corretta congettura, eliminando di volta in volta falsi candidati, ci si è quindi serviti di esempi aggiuntivi, come quelli in Figura 11.

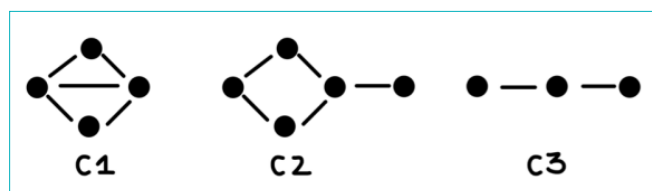


Figura 11. Controesempi: G2 e G3 hanno entrambi 5 vertici, mentre C1 ne ha solamente 4. In G2, G3 e C1 compaiono dei triangoli, mentre in C2 no. In tutti i grafi precedenti c'è un ciclo, in C3 no. Inoltre, C3 è l'unico tra i grafi presentati che ha un numero di vertici maggiore del numero di archi.

Per rendere evidente il ruolo del grado di un vertice rispetto ad altre proprietà del grafo (parità/disparità di vertici o archi), si è insistito sui termini "uscire da" ed "entrare in" un vertice: così, da tutti i

10. Si veda per esempio la condizione equivalente di grafo euleriano come decomponibile in cicli (Harari, 1969, Teorema 7.1.)

vertici di passaggio si entra e si esce lo stesso numero di volte, mentre dal vertice di partenza si esce una volta in più di quante non si rientri e nel vertice di arrivo si entra una volta in più di quante non se ne esca. In questo cruciale passaggio, che porta a riconoscere il ruolo del grado del vertice nell'esistenza e nella tipologia dei cammini euleriani, si è riscontrata una sostanziale differenza tra la scuola secondaria di primo grado e il Liceo Matematico. Nelle classi della scuola secondaria di primo grado, il contenuto dell'enunciato del teorema di Eulero è parso esser stato intuito inizialmente solo da pochi, che hanno poi fatto da guida nell'applicazione dell'enunciato al problema delle mappe. In queste classi, dopo aver ragionato sul grafo G_2 come sopra descritto, ci siamo quindi limitati a verificare la validità dell'enunciato applicandolo agli altri tipi di grafo della **Tabella 1**, senza insistere troppo sull'argomento logico-dimostrativo. Diversamente, le classi del Liceo Matematico hanno spontaneamente cercato di estendere l'argomento usato sul grafo G_2 agli altri tipi di grafo, con un minimo sforzo da parte degli esperti nel guidarli a intravedere uno schema di (parziale) dimostrazione dell'enunciato.

5.5 Problema diretto e problema inverso

In questo laboratorio si è insistito molto sul far lavorare le classi anche sul problema inverso, proponendolo in almeno due situazioni:

- all'inizio della terza fase è stato chiesto come modificare gli schemi di danza, in modo da avere assegnate coreografie euleriane;
- nell'attività conclusiva della terza fase sul teorema di Eulero è stata proposta la rimozione e ricostruzione di un ponte in una mappa, in modo da avere cammini o circuiti euleriani.

In entrambi i casi, per quanto la prima richiesta sia stata proposta *prima* dell'enunciato del teorema e la seconda *dopo* l'enunciato, l'obiettivo è sempre stato quello di mettere in luce l'esistenza di un legame tra le proprietà delle soluzioni (apertura o chiusura) e il ruolo del vertice di partenza, indirizzando l'attenzione verso il grado del vertice come proprietà discriminante. Per tutta la sperimentazione, entrambe le versioni del problema inverso sono sempre state accolte dalle classi come sfidanti, e hanno rappresentato un importante momento di sviluppo e comprensione dell'attività, anche quando la strategia risolutiva si è discostata dalle aspettative: infatti, nello svolgimento dell'ultima attività sull'abbattimento e ricostruzione di un solo ponte, la maggior parte dei partecipanti (sia per la scuola secondaria di primo grado che per il Liceo Matematico) ha lavorato direttamente sulla mappa, piuttosto che con le operazioni di taglia-incolla di un arco sul corrispondente grafo, mostrando un'evidente preferenza verso una rappresentazione meno astratta del problema. Tuttavia, in entrambi i gradi di istruzione secondaria vi sono stati casi isolati di studenti che hanno introdotto in maniera autonoma il concetto di "grado di una regione": essi hanno modificato direttamente sulle mappe la parità del numero di ponti che collegano le diverse regioni, in modo da garantire l'esistenza del cammino euleriano richiesto. Questo trasferimento del concetto di grado dal grafo alla mappa può essere visto come un esempio dell'efficacia dell'intero percorso proposto, che ha stimolato l'analogia tra le diverse situazioni presentate.

6 Conclusioni e sviluppi successivi

La struttura del progetto, nella sua sequenza di varie fasi laboratoriali che conducono alla teoria dei grafi e alla risoluzione del problema dei ponti di Königsberg, ha confermato la sua efficacia come attività di *problem solving*: infatti, essa ha permesso di coinvolgere le classi dalle prime battute, mantenendo viva la loro curiosità fino agli sviluppi finali e offrendo loro una prospettiva storico-sperimen-

tale della disciplina a cui non sono abituati. Le attività proposte hanno dato l'opportunità di lavorare su un problema in maniera esplorativa, ipotizzando e verificando congetture, e mettendo in atto alcune importanti strategie come l'analogia, l'utilizzo delle simmetrie (quando presenti) e lo studio delle relazioni tra le proprietà delle soluzioni e i dati del problema. Più in generale, questa esperienza ha rafforzato quanto già sostenuto in letteratura circa le potenzialità didattiche della teoria dei grafi per sviluppare nella scuola secondaria di primo grado l'attitudine verso il *problem solving* (Ferrarello & Mammana, 2017; Mammana & Milone, 2010; Robinson, 2006; Santoso, 2018).

Le modifiche e integrazioni al progetto contenuto in Gaio et al. (2020), volte a mettere maggiormente in luce le caratteristiche dei cammini euleriani e il ruolo del grado dei vertici, si sono mostrate utili al fine di far emergere l'enunciato del teorema di Eulero come una naturale sintesi delle esperienze laboratoriali, capace a posteriori di risolvere situazioni ben più complesse di quelle assegnate. Tali modifiche si sono mostrate particolarmente utili nel caso della sperimentazione con le classi del Liceo Matematico che, come riportato nel par. 3.1, hanno svolto il laboratorio presso il Dipartimento di Matematica nell'arco di mezza giornata, senza la possibilità di includere alcuna attività *embodied*. A fronte di uno sviluppo del progetto ridotto e condensato in poche ore consecutive, il risultato è stato comunque molto positivo: le classi del Liceo Matematico hanno spesso mostrato un ottimo livello di coinvolgimento, adattandosi con facilità agli aspetti più formali delle attività (rappresentazione simbolica, teoria dei grafi), talvolta anticipando in maniera intuitiva alcuni aspetti geometrici della struttura del problema (chiusura o apertura dei cammini, ruolo del grado di un vertice).

L'attività motoria *Coreo-Graph*, in accordo con quanto sintetizzato in Smith e Walkington (2019), si è mostrata un'efficace esperienza *embodied* per le classi della scuola secondaria di primo grado: le azioni compiute durante le coreografie hanno sempre avuto piena corrispondenza con i concetti della teoria dei grafi gradualmente proposti nell'ultima fase, offrendo la possibilità di un completo coinvolgimento del corpo e richiedendo la collaborazione dei vari membri della stessa *crew*.

In maniera più specifica, l'attività *Coreo-Graph* ha permesso di anticipare in un contesto motorio-esperienziale gli elementi e i quesiti della teoria dei grafi, facilitandone lo studio più astratto; infatti tale attività ha diluito le difficoltà della terza fase, che altrimenti sarebbe stata troppo densa e faticosa. In particolare, essa ha offerto un costante riferimento tangibile agli aspetti teorici che hanno condotto all'enunciato del teorema di Eulero e alla sua applicazione al problema dei ponti di Königsberg; per esempio nel riconoscimento delle proprietà di apertura e chiusura dei cammini euleriani, nella spiegazione del ruolo del grado dei vertici in un cammino euleriano e nella corretta interpretazione del concetto di eulerianità di un cammino, ovvero nella corretta identificazione di archi e vertici nella trasformazione delle mappe nei corrispondenti grafi.

Ha inoltre offerto alle classi un'esperienza matematica in un contesto differente dalla solita didattica frontale in aula, come quella proposta con carta e penna nella terza fase (la scheda di Figura 7): aver proposto attività tra loro differenti nel contesto, ma analoghe nella struttura del problema, ha permesso di andare incontro alla normale diversità che ci si può attendere in termini di interesse verso la matematica e capacità nel comprenderne i contenuti (Smith & Walkington, 2019).

Questa sperimentazione suggerisce come l'attività *Coreo-Graph* sia stata didatticamente significativa per le classi della scuola secondaria di primo grado, intercettando la richiesta di un'esperienza capace di creare idee matematiche attraverso la pratica laboratoriale. In tal senso, la dimensione del mesospazio che ha caratterizzato la proposta (o altre equivalenti che si possono immaginare e sperimentare) può essere stata più incisiva rispetto alla scelta originale di far lavorare le classi all'interno di un percorso urbano, dove l'osservazione della struttura del cammino e delle sue proprietà è meno diretta. Come già osservato nei paragrafi precedenti, questa dimensione favorisce lo svolgimento durante l'orario curricolare, l'osservazione dei compiti assegnati da parte degli esperti e dei docenti e l'interazione con gli stessi. Inoltre, offre costantemente un duplice punto di vista motorio e percettivo: quello della propria esecuzione della coreografia e quello delle esecuzioni altrui.

Di contro, per le classi del Liceo Matematico l'attività iniziale sulle mappe e i ponti sembra esser stata

sufficientemente propedeutica all'attività teorica sui grafi, probabilmente grazie alla maggior attitudine verso la disciplina e a una capacità di astrazione già più sviluppata in questa fascia d'età. In questo non vediamo necessariamente un ridimensionamento dell'utilità didattica di questa o di altre attività *embodied* nelle classi della scuola secondaria di secondo grado. Infatti, si sarebbe potuto progettare il laboratorio diversamente, anticipando l'attività *Coreo-Graph* come preparatoria alla parte teorica, e spostando l'applicazione al problema dei ponti di Eulero in coda al laboratorio. Una prima indicazione del possibile valore di questa variante viene dalle prime due edizioni dell'evento "Un anno di Licei Matematici",¹¹ svoltesi a conclusione dell'anno scolastico del Liceo Matematico (maggio 2023 e 2024). In tali occasioni, si è proposto ad alcuni gruppi del Liceo Matematico il problema delle coreografie euleriane, a cui si è fatta seguire la formulazione del teorema di Eulero, usando gli schemi di danza come unici esempi rappresentativi dei casi presenti nell'enunciato. Rimane dunque aperta la domanda circa la significatività di un laboratorio *embodied* per le classi della scuola secondaria di secondo grado, sulla quale si concentreranno i possibili sviluppi futuri di questo progetto. Allo stesso tempo, potrebbe essere altrettanto interessante escludere l'attività *Coreo-Graph* dal laboratorio proposto alla scuola secondaria di primo grado, così da verificare l'effettiva rilevanza di questa esperienza *embodied* e ampliare il confronto tra i due diversi gradi di istruzione.

Oltre a proseguire la sperimentazione con queste fasce d'età all'interno degli istituti scolastici del territorio, valutandone possibili estensioni nell'ambito della Computer Science, per il futuro si intende consolidare l'attività *Coreo-Graph* come laboratorio indipendente, sviluppandola eventualmente anche in chiave artistica (come in Gerofsky et al., 2023). È infatti già in corso la proposta di tale attività come strumento per promuovere il *problem solving* anche al di fuori del contesto strettamente scolastico, integrandola nella programmazione di alcuni centri estivi di danza e multisport. Questa estensione sta portando a modificare gli schemi di Figura 4 in modo da renderli più compatibili con l'esistenza di coreografie euleriane costituite da otto passi, che meglio si adattano alla ritmica di alcuni generi musicali frequenti negli stili "urban" (pop, hip-hop, dance, trap ecc.) mostrando l'applicabilità del progetto e la sua efficacia anche in contesti extrascolastici.

Ringraziamenti

Ringraziamo Laura Branchetti, per averci stimolato ed incoraggiato nella stesura di questa sperimentazione, e Giulia Bini, per i preziosi consigli nella lunga fase di revisione. Ringraziamo Alessia Maggioni per la collaborazione durante il suo periodo di tesi, che ha posto le basi per questo progetto. Ringraziamo Sara Gagliani Caputo, per l'invito ed il supporto dato all'evento "Un anno di Licei Matematici". Ringraziamo Maria Luoni, Camilla Pugliese, Giorgia Mazzilli e Beatrice Sacchetti per l'aiuto durante gli incontri con le classi dei licei matematici che si sono susseguite in questi anni. Ringraziamo le insegnanti e le classi dell'Istituto Comprensivo "A. Manzoni" di Ornago e Burago per aver cercato ed accolto questa proposta laboratoriale, e le classi del Liceo Matematico che hanno partecipato con entusiasmo al laboratorio di teoria dei grafi nel biennio 22/23-23/24. Tiziano Penati ringrazia infine Aleksandar Tasovac (in arte Sasko) per il supporto concreto ed i preziosi consigli creativi sull'attività *Coreo-Graph*, e la scuola di danza Danza Passion di Burago di Molgora (MB) per aver accolto la proposta *Coreo-Graph* all'interno della propria programmazione estiva 2024.

Bibliografia

Alibali, M. W., & Mitchell, J. N. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 247–286. <https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446>

11. <https://liceomatematicomilano.unimi.it/>.

- Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (Eds.) (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica (Ciclo secondario)*. Matteoni stampatore.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*. The Macmillan Press Ltd.
- Chamberlin, S. A. (2008). What is problem solving in the mathematics classroom. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 23(1). <https://www.exeter.ac.uk/research/groups/education/pmej/pome23/Chamberlin%20What%20is%20Math%20Prob%20Solving.doc>
- Collins, A., Brown, J. S., & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American Educator*, 6(11), 38–46.
- Edwards, L. D. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 127–141. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9124-6>
- Ferrarello, D., & Mammana, M. F. (2017). Graph theory in primary, middle, and high school. *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research*, 183–200.
- Gaio, A., Capone, R., & Branchetti, L. (2020). Learning math outdoor: Graph theory using maps. In M. Ludwig, S. Jablonski, A. Caldeira & A. Moura (Eds.), *Research on Outdoor STEM Education in the digital Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020* (pp. 95–102). WTM. <https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.12>
- Gerofsky, S. (2011). Seeing the graph vs. being the graph. In G. Stam & M. Ishino (Eds.), *Integrating gestures: The interdisciplinary nature of gesture* (pp. 245–256). John Benjamins Publishing Company. <https://doi.org/10.1075/gs.4.22ger>
- Gerofsky, S. (2013). Learning mathematics through dance. In G. Hart & R. Sarhangi (Eds.), *Proceedings of Bridges 2013: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 337–344). Tessellations Publishing.
- Gerofsky, S., Robertson, S. B., Schaffer, K., & Zharinova, E. (2023). Puppetry, poetry, dance, and sound on the bridges of Königsberg: Embodied work with Euler paths and circuits. In J. Holdener & E. Torrence (Eds.), *Proceedings of Bridges 2023: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 571–578). Tessellations Publishing.
- González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Puertas, M. L. (2021). Characterizing levels of reasoning in graph theory. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(8), em1990. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11020>
- Harari, F. (1969). *Graph Theory*. Addison-Wesley Series in Mathematics.
- Hazzan, O., & Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(3), 255–272.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003>
- Kapur, M. (2010). Productive failure in mathematical problem. *Instructional Science*, 38, 523–550. <https://doi.org/10.1007/s11251-009-9093-x>

- Kapur, M. (2011). A further study of productive failure in mathematical problem solving: Unpacking the design components. *Instructional Science*, 39, 561–579. <https://doi.org/10.1007/s11251-010-9144-3>
- Mammana, M., & Milone, C. (2010). Dal problema al modello: Una sperimentazione sul concetto di grafo nella scuola media. *L'Educazione Matematica*, IX(2), 23–36.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni Nazionali per i licei*. <https://www.gazzettaufficiale.it/gunewsletter/dettaglio.jsp?service=1&datagu=2010-12-14&task=dettaglio&num-gu=291&redaz=010G0232&tmstp=1292405356450>
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf
- Núñez, R. E. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In N. Tadao & K. Masataka (Eds.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–22). PME.
- Núñez, R. E. (2008). Mathematics, the ultimate challenge to embodiment: Truth and the grounding of axiomatic systems. In P. Calvo & T. Gomila (Eds.), *Handbook of Cognitive Science: An Embodied Approach* (pp. 333–353). Elsevier.
- Ortiz, E. (2016). The problem-solving process in a mathematics classroom. *Transformations*, 1(1), 4–13. <https://nsuworks.nova.edu/transformations/vol1/iss1/1>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Robinson, L. A. (2006). *Graph theory for the middle school* [Master's thesis]. East Tennessee State University. <https://dc.etsu.edu/etd/2226>
- Santoso, E. B. (2018). Mathematics classroom activities based on some topics in graph theory to develop critical thinking of primary and secondary school students. *International Journal of Information and Education Technology*, 2(2), 154–160. <https://doi.org/10.24071/ijiet.2018.020207>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). Macmillan.
- Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Smith, C., & Walkington, C. (2019). Four principles for designing embodied mathematics activities. *Australian Mathematics Education Journal*, 1(4), 16–20.
- Way, J., Cartwright, K., & Ginns, P. (2024). A collective approach to embodied learning in early years mathematics (ELEMS Phase 1). In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Herendiné-Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 5173–5180). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/hal-04420789v1>