

Fattori fuorvianti nelle rappresentazioni grafiche: un catalizzatore per riconoscere la complessità dell'interpretazione dei grafici statistici

Misleading factors in graphical representations: a catalyst for recognizing the complexity of interpreting statistical graphs

Umberto Dello Iacono* e Maria Alessandra Mariotti^{o1}

*Dipartimento di Matematica e Fisica, Università della Campania “L. Vanvitelli”, Caserta – Italia

^oDipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Università di Siena – Italia

✉ umberto.delloiacono@unicampania.it, mariotti21@unisi.it

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA INGLESE

Sunto / La letteratura ha mostrato chiaramente come i grafici statistici possano essere intenzionalmente fuorvianti: la rappresentazione grafica dell'informazione statistica può essere progettata e realizzata con l'intento di persuadere e modificare i giudizi di valore dei lettori sulla base di una percezione ingannevole; più in generale, il processo di interpretazione può essere influenzato dall'utilizzo di fattori fuorvianti. In una prospettiva educativa, si ipotizza che sia possibile sfruttare gli effetti prodotti da specifici fattori fuorvianti per progettare un intervento didattico incentrato sull'interpretazione dei grafici statistici e finalizzato a far emergere tali fattori e con essi la consapevolezza degli effetti da essi prodotti. Questo articolo presenta l'analisi dei dati raccolti in una prima sperimentazione e mostra come attività opportunamente progettate possano rendere i futuri insegnanti consapevoli dell'effetto dei fattori fuorvianti, ma anche e più in generale, favorire lo sviluppo della loro consapevolezza della complessità del processo di interpretazione.

Parole chiave: rappresentazioni grafiche; grafici statistici; *lie factor*; regole intuitive; futuri docenti.

Abstract / Literature has clearly shown how statistical graphs can be intentionally misleading: graphical representation of statistical information can be designed and realized with the intention of persuading and changing readers' value judgments on the basis of deceptive perception; more generally, the interpretation process can be affected by using misleading factors. Taking an educational perspective, this article assumes the hypothesis that it might be possible to exploit the effects produced by specific misleading factors for designing a didactical intervention focused on the interpretation of statistical graphs and aimed at bringing out these factors and with them an awareness of the effects they produce. The article reports on a first experimentation where the analysis of the data collected shows how appropriately designed activities can make prospective teachers aware of the effect of misleading factors, but also and more generally foster the development of their awareness about the complexity of the interpretation process.

Keywords: graphical representations; statistical graphs; *lie factor*; intuitive rules; prospective teachers.

1. Gli autori hanno contribuito in egual misura allo sviluppo del manoscritto ed entrambi hanno letto e approvato il manoscritto finale. Gli autori dichiarano che il contenuto del manoscritto non è stato pubblicato o presentato per la pubblicazione altrove.

1 Introduzione

Per rendere le persone dei cittadini² riflessivi (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2019) è sempre più necessario educarle all'interpretazione dei grafici statistici: non si tratta solo di saper leggere dati numerici, ma anche di riconoscere relazioni tra questi dati che siano significative rispetto al contesto (Balchin & Coleman, 1966; Ben-Zvi et al., 2017). Grafici, diagrammi o altre figure possono essere intenzionalmente progettati con l'obiettivo di persuadere e modificare i giudizi di valore dei lettori sulla base di una percezione ingannevole. Ha quindi senso analizzare alcune caratteristiche dei grafici che possono risultare ingannevoli, come chiarito nel classico contributo di Huff (1993), che parla di *"How to lie with statistics"*, e come ripreso da Parks e Yeh (2021).

Da un punto di vista didattico, è importante preparare gli insegnanti ad affrontare questo argomento in classe, educando quindi i futuri docenti non solo a riconoscere il problema dei possibili effetti fuorvianti nella lettura dei grafici statistici, ma anche, e più in generale, a prendere coscienza della complessità dell'interpretazione dei grafici statistici come problema didattico.

Come verrà discusso in questo articolo, si possono identificare due principali obiettivi educativi:

- da un lato, un obiettivo immediato è quello di rendere consapevole chi legge il grafico del fatto che i fattori fuorvianti possono influenzare l'interpretazione dei grafici statistici;
- dall'altro, un obiettivo più generale è quello di educare alla lettura dei grafici statistici esplicitando la complessità del processo interpretativo, in particolare esplicitando i due livelli di interpretazione, quello dei dati e quello delle relazioni tra i dati.

Partendo dall'ipotesi che i fattori fuorvianti possono avere l'effetto di condurre a un'interpretazione ingannevole dei dati, si può ipotizzare che tali fattori, e gli effetti che ci si aspetta dalla loro presenza, possano essere utilizzati nella formazione insegnanti con l'intento di favorire la consapevolezza del processo di interpretazione dei grafici statistici, in particolare sulla complessità relativa ai due livelli di rappresentazione: quello dei dati e quello delle loro relazioni. Questa ipotesi ha ispirato la progettazione di un intervento incentrato sull'interpretazione dei grafici statistici: la scelta dei compiti, in particolare la scelta delle rappresentazioni proposte per l'interpretazione, mira a far emergere fattori fuorvianti e con essi la consapevolezza dei lettori dei diversi livelli di rappresentazione. Il presente lavoro riporta i primi risultati ottenuti da una sperimentazione dell'intervento di formazione, finalizzata ad esplorarne l'efficacia.

2 Il tema in primo piano

Le rappresentazioni grafiche, più o meno direttamente collegate alle elaborazioni statistiche, sono presenti in quasi tutti i settori della vita quotidiana (Gigerenzer et al., 1989): sono molto comuni in politica e in economia e compaiono spesso in TV, sulle riviste, sui giornali o sui *social media* e in molte presentazioni create quotidianamente. Questi grafici vengono utilizzati sia per l'analisi dei dati sia per la comunicazione, e spesso sono rappresentazioni che gli studenti incontrano nei programmi scolastici, relativamente a discipline come le scienze e gli studi sociali, e naturalmente in matematica e fisica (Friel et al., 2001). Pertanto, saper interpretare correttamente queste rappresentazioni è un'importante abilità da sviluppare. Nel quadro PISA (OECD, 2019), la capacità di rappresentazione è intesa come la capacità di «selezionare, interpretare, tradurre e utilizzare una varietà di rappresentazioni per descrivere una situazione, interagire con un problema o presentare il proprio lavoro» (OECD, 2019, p. 81, traduzione degli auto-

2. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

ri). Le rappresentazioni a cui si fa riferimento includono «grafici, tabelle, diagrammi, immagini, equazioni, formule e materiali concreti» (OECD, 2019, p. 81, traduzione degli autori). In matematica, per rappresentare e comunicare le informazioni, si possono usare molteplici registri che possono riferirsi a dati qualitativi e quantitativi. Tuttavia, tra le rappresentazioni più comuni, quelle grafiche giocano un ruolo privilegiato in base all'assunto condiviso che possano supportare la visualizzazione. Come afferma Presmeg (2006), «[...] la visualizzazione comprende i processi di costruzione e trasformazione sia delle immagini mentali visive sia di tutte le scritture di natura spaziale che possono essere implicate nel fare matematica» (p. 206, traduzione degli autori). La visualizzazione entra spesso in gioco nei processi di ragionamento e di risoluzione dei problemi (Arcavi, 2003; Stylianou & Silver, 2004), forse perché rende i dati "percettivamente facili" da interpretare (Larkin & Simon, 1987). Infatti, data una sequenza di numeri, la costruzione di una linea che li unisce può produrre una rappresentazione grafica che può aggiungere ulteriori informazioni; ad esempio, una linea può essere interpretata come rappresentante l'andamento di una sequenza di dati. Una rappresentazione di questo tipo può essere ancora più efficace di quella offerta da una tabella: l'aumento, la stabilità e la diminuzione di un particolare fenomeno possono essere immediatamente colti osservando l'inclinazione della linea, verso l'alto, orizzontale o verso il basso (Eshleman, 2002). A tal proposito, alcuni autori sostengono che i grafici siano naturalmente interpretabili (Zacks & Tversky, 1999), anche se molti studi hanno evidenziato che gli studenti hanno difficoltà a interpretare correttamente alcune rappresentazioni grafiche, ad esempio gli istogrammi (Bruno & Espinel, 2009; Cooper, 2018; Cooper & Shore, 2010; Derouet & Parzysz, 2016; Lem et al., 2013; Watson & Moritz, 1998) o i grafici a linee (Ali & Peebles, 2013; Koslyn, 2006). In sostanza, ciò che conta è come l'osservatore interpreta una rappresentazione grafica (Chabris & Koslyn, 2005); ad esempio, spesso vengono interpretati correttamente i grafici a barre nei quali c'è bisogno di valutare l'altezza delle barre, mentre si riscontrano difficoltà nel confrontare le relazioni tra le parti in un grafico a torta poiché si tratta di un processo che richiede il confronto tra relazioni "parte/intero" oppure fra angoli. Queste difficoltà di interpretazione spesso persistono nonostante i numerosi interventi educativi (Kaplan et al., 2014).

2.1 L'interpretazione dei grafici statistici

È possibile interpretare una determinata rappresentazione grafica a due livelli: quello dei dati e quello delle relazioni tra i dati. Poiché esistono diversi modi di rappresentare i dati, ciascuno di essi può evidenziare aspetti diversi e, di conseguenza, diversi modi di rappresentare le relazioni tra i dati. Ad esempio, i due grafici della Figura 1 rappresentano gli stessi dati (cioè il numero di bottiglie di vino vendute nel 2020 dai due venditori A e B della stessa azienda X) ma in modo diverso.

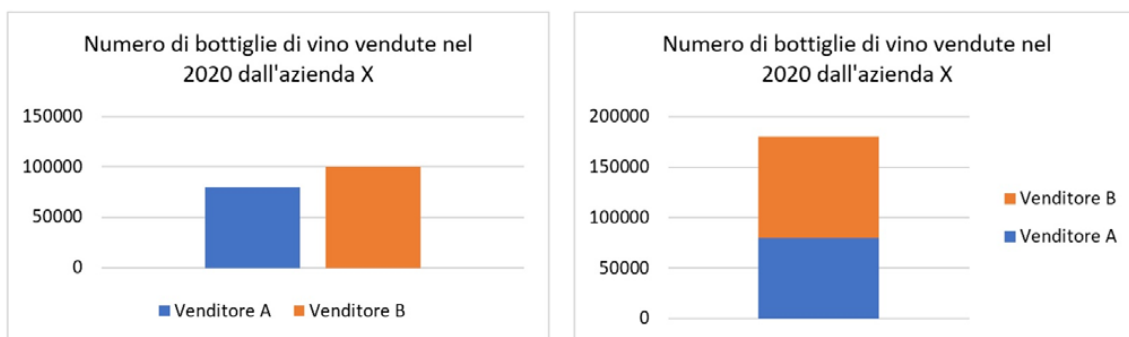


Figura 1. Grafici che rappresentano le stesse informazioni ma in modo diverso.

Il grafico di sinistra rappresenta separatamente i dati relativi ad A e quelli relativi a B, mentre il grafico di destra rappresenta i due dati combinati in un'unica barra. Per quanto riguarda la relazione tra i dati,

le due rappresentazioni non sono equivalenti: da un lato, mentre la differenza di vendite tra i due venditori è evidente nel grafico di sinistra, non può essere percepita con altrettanta evidenza guardando il grafico di destra; dall'altro, il totale delle vendite dei due venditori è evidente nel grafico di destra, mentre non può essere percepito direttamente dal grafico di sinistra. Tale variabilità interpretativa intrinseca al tipo di grafico statistico utilizzato può spiegare le difficoltà degli studenti sia nell'affrontare i grafici, sia nel controllare quelli che Cairo (2015) chiama "*misleading graphics*", ossia caratteristiche dei grafici che possono produrre interpretazioni fuorvianti. Nel seguito queste caratteristiche sono chiamate *fattori fuorvianti*, e se ne presenta una sintesi nel par. 3.

3 Quadro concettuale

La progettazione dell'intervento didattico ha richiesto la selezione di compiti interpretativi da utilizzare coerentemente con l'ipotesi formulata; sono stati quindi considerati i risultati riportati in letteratura sui possibili effetti prodotti da particolari fattori fuorvianti. Inoltre, si è tenuto conto di particolari tratti caratteristici del processo interpretativo dovuti ad aspetti percettivi, come l'attenzione dell'osservatore nei confronti della *figura*, e non di ciò che rimane nello *sfondo*. L'interesse è sui fattori fuorvianti (dualità *figura-sfondo*, distorsione del sistema di riferimento), che possono spiegare alcune delle difficoltà nell'interpretazione di un grafico statistico.

3.1 Dualità *figura-sfondo*

Nell'interpretazione dei grafici, alcune informazioni sui dati possono essere evidenti, cioè percepite direttamente, mentre altre devono essere ottenute attraverso un'ulteriore elaborazione. Pertanto, i risultati classici sui processi percettivi possono essere utili per identificare possibili fattori fuorvianti, in particolare i principi formulati dalla teoria della Gestalt. Hartmann e Crosswhite (1966) sottolineano che «ogni esperienza o vita mentale implica una differenziazione del campo sensoriale o percettivo a cui l'organismo può rispondere secondo uno schema *figura-sfondo*» (p. 657, traduzione degli autori). Esiste quindi un dualismo tra *figura* e *sfondo*, che è una caratteristica di ogni atto percettivo. La *figura* è la caratteristica della situazione alla quale l'osservatore rivolge la propria attenzione, ciò che rimane è da considerarsi *sfondo* e avrà un ruolo secondario. Pertanto, in un'immagine la relazione tra le parti e l'insieme può influenzare il processo di percezione, indirizzando l'attenzione dell'osservatore verso una parte (la *figura*) piuttosto che un'altra che di conseguenza resterà come *sfondo*.

3.2 Distorsione del sistema di riferimento

Per quanto riguarda i grafici cartesiani o a barre, esiste una certa flessibilità nella scelta dell'unità di misura sugli assi di riferimento: qualora si scelga un sistema di riferimento non monometrico, ciò può comportare l'allungamento o la compressione di uno o di entrambi gli assi che a sua volta può modificare l'aspetto dei dati rappresentati. Ad esempio, in **Figura 2**, attraverso la compressione dell'asse delle ordinate nel grafico A e l'allungamento dell'asse delle ascisse nel grafico B, si modifica percettivamente la pendenza del segmento rappresentato. Così, piccole differenze nella variazione di una delle variabili possono apparire ingrandite e, al contrario, grandi differenze possono apparire attenuate (Eshleman, 2002). Tutto questo è parte della normale prassi dell'uso di grafici (statistici e non); ad esempio, è il caso di rappresentazioni per le quali i grafici si basano su sistemi di riferimento semilogaritmici o logaritmici, oppure le rappresentazioni del globo terrestre o le mappe di sistemi di trasporto (come le mappe delle metropolitane): in questi casi, le distanze sulla rappresentazione non sono proporzionali a quelle reali e si rinuncia alla proporzionalità per mettere in luce altri aspetti. Tuttavia, rappresentazioni di questo tipo richiedono da parte di chi le interpreta un buon controllo concettuale sul processo di rappresentazione al fine di assicurarne una lettura efficace.

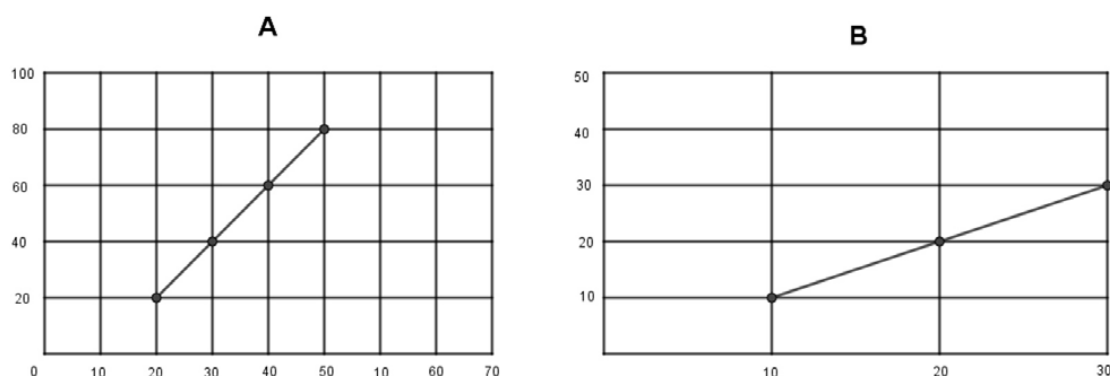


Figura 2. L'allungamento o la compressione degli assi modificano l'aspetto dei dati rappresentati.

In effetti, per l'autore del grafico esiste la possibilità di distorcere intenzionalmente le informazioni al fine di indurre una lettura falsata. Per descrivere questo fenomeno che lega una possibile distorsione intenzionale e il suo effetto ingannevole, Tufte parte dalla considerazione che «un grafico non distorce se la rappresentazione visiva dei dati è consistente con la rappresentazione numerica» (Tufte, 1983/2001, p. 55, traduzione degli autori), cioè se esiste una proporzionalità diretta tra la rappresentazione dei dati, fisicamente misurata sul grafico, e i dati rappresentati. Di qui la definizione di *lie factor* come il rapporto tra la dimensione dell'effetto mostrato nel grafico (cioè la differenza relativa tra le rappresentazioni) e la dimensione dell'effetto mostrato nei dati (cioè la differenza relativa tra i dati). In base alla precedente descrizione della complessità intrinseca della rappresentazione statistica, questa definizione di *lie factor* risulta interessante perché particolarmente significativa rispetto alla distinzione tra il livello di interpretazione dei dati e il livello di interpretazione della relazione tra i dati. Secondo come viene definito matematicamente, il *lie factor* è un indice che misura l'eventuale "distorsione" del grafico: quando il *lie factor* è uguale a 1, non c'è una vera e propria distorsione; quando il *lie factor* è maggiore (minore) di 1, allora la dimensione dell'effetto mostrato nel grafico è maggiore (minore) della dimensione dell'effetto mostrato nei dati, il che porta a sovrastimare (sottostimare) la relazione tra i dati. La seguente Figura 3 mostra due esempi di grafici a barre realizzati a partire dagli stessi dati.

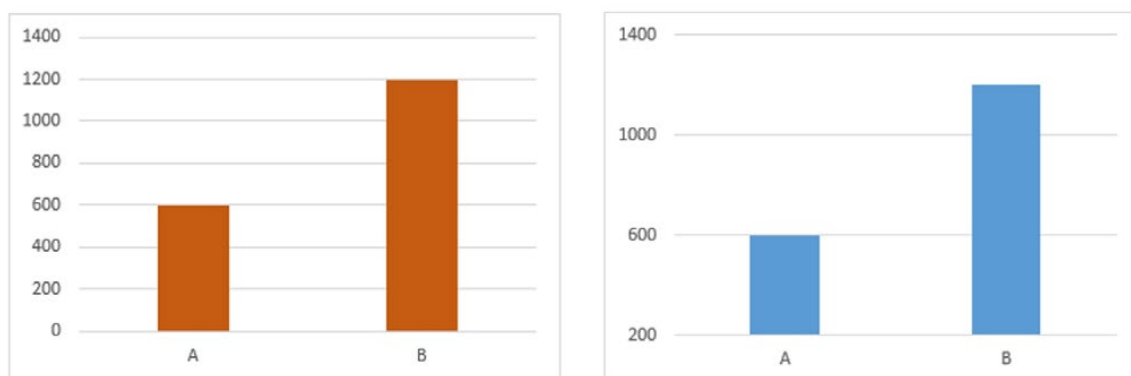


Figura 3. Due esempi di grafici a barre con *lie factor* diversi realizzati a partire dagli stessi dati.

Nel grafico di sinistra, il *lie factor* è uguale a 1 poiché le altezze delle barre sono proporzionali ai valori riportati sull'asse verticale. Nel grafico a destra, invece, non c'è proporzionalità. Infatti, la barra "B" ha un'altezza che è più del doppio di quella della barra "A", ma ciò non è in accordo con i valori sull'asse verticale.

Nel grafico di destra, dunque, il *lie factor* è maggiore di 1 e l'osservatore è portato a sovrastimare i dati. Tufte (1983/2001) riporta diversi esempi di gravi distorsioni esprimibili attraverso la nozione di *lie factor*. In alcuni casi la mancata diretta proporzionalità tra la rappresentazione dei dati, fisicamente misurata sul grafico, e i dati rappresentati può essere un fattore fuorviante intenzionale che produce effetti fuorvianti, come nel grafico di destra della Figura 3.

Questo lavoro intende far emergere tali effetti della distorsione per portare gli studenti e gli insegnanti a riflettere su questi aspetti, e in generale sul processo di interpretazione di grafici; tutto questo è chiarito nella sezione che segue.

4 Ipotesi e domanda di ricerca

Il quadro concettuale sopra descritto ha guidato il progetto di ricerca e ispirato la progettazione di un intervento didattico il cui scopo è rendere i partecipanti consapevoli della complessità dell'interpretazione dei grafici statistici e dei grafici in generale.

L'ipotesi riguardante il ruolo svolto dalla presenza di fattori fuorvianti nel prendere consapevolezza della complessità del processo di interpretazione ha orientato la progettazione: sono stati intenzionalmente introdotti fattori fuorvianti nei compiti di interpretazione con la previsione non solo che insorgessero i relativi effetti, ma che la presa di coscienza di questi effetti potesse innescare la riflessione sul processo di interpretazione e sulla complessità di tale processo.

L'ipotesi di ricerca e la domanda di ricerca sono state quindi formulate come segue:

- *Ipotesi di ricerca*: l'introduzione di fattori fuorvianti nei grafici può portare il solutore del compito a prendere coscienza della complessità del processo interpretativo; in qualsiasi grafico la rappresentazione dei dati determina anche il modo in cui vengono rappresentate le relazioni tra di essi.
- *Domanda di ricerca*: esistono prove che l'intervento didattico progettato possa promuovere la consapevolezza della complessità del processo interpretativo? In particolare, esiste qualche evidenza dell'influenza di fattori fuorvianti sull'innescare di tale consapevolezza?

Considerando l'importanza di educare all'interpretazione dei grafici, e dei grafici statistici in particolare, abbiamo scelto come destinatari del nostro intervento didattico gli studenti dell'ultimo anno del corso di laurea magistrale in matematica (di seguito denominati "partecipanti"), considerati per questo potenziali futuri insegnanti di matematica.

5 Metodo

Di seguito viene descritto il disegno dell'intervento didattico, i partecipanti e l'organizzazione dell'intervento, la raccolta dei dati e i criteri di analisi dei dati.

5.1 Il disegno dell'intervento didattico

Si è voluto esplorare l'ipotesi di ricerca su diversi tipi di grafici per ampliare il più possibile il caso di studio. Per questo motivo, il disegno dell'intervento didattico è stato incentrato su compiti che chiedevano di interpretare due tipologie di grafici statistici: grafici a linee e grafici a barre. Per ciascuna delle

due tipologie, sono stati prodotti tre differenti grafici che rappresentano lo stesso insieme di dati, ma che differiscono per il modo in cui sono rappresentati i dati e di conseguenza le relazioni tra di essi. Le differenze sono dovute all'introduzione di particolari fattori fuorvianti: ad esempio, l'asse delle ordinate è omesso, è ingrandito, i valori riportati non partono dall'origine degli assi, la proporzionalità non è rispettata o le dimensioni delle barre sono allungate.

5.1.1 Progettazione dei grafici utilizzati nell'intervento didattico

Nella creazione dei grafici sono stati considerati i seguenti fattori fuorvianti.

- F1. In accordo con i principi enunciati dalla Gestalt e dagli studi di Hartmann e Crosswhite (1966), in un grafico statistico, la relazione tra le parti e il tutto può influenzare il processo di percezione dirigendo l'attenzione dell'osservatore e di conseguenza la focalizzazione su ciò che deve essere considerato la *figura* e lasciando ciò che rimane come *sfondo*;
- F2. In accordo con gli studi di Tufte (1983/2001), la presenza di un *lie factor* maggiore (minore) di 1 può influenzare l'interpretazione di un grafico statistico portando l'osservatore a sovrastimare (sottostimare) la relazione tra i dati.

I sei grafici sono presentati nella Tabella 1, che è organizzata visualizzando nella stessa colonna i tre grafici dello stesso tipo.

	1	2
A		
B		
C		

Tabella 1. Le tre versioni dei grafici statistici secondo le due tipologie.

Nel seguito, i grafici della **Tabella 1** saranno indicati con il riferimento alla riga e alla colonna. Ad esempio, il grafico C1 è quello che si trova nell'angolo in basso a sinistra della **Tabella 1**.

Per quanto riguarda i grafici a linee, i dati visualizzati nei tre grafici sono gli stessi e riportano le "Spese in tecnologia in Italia nel 2020", ma il loro aspetto differisce a causa di alcuni fattori fuorvianti. L'andamento della curva, rappresentato da una linea lentamente crescente, è lo stesso nei grafici A1 e C1, ma nel grafico A1 l'asse delle ordinate è omesso. In base al fattore fuorviante F1, l'assenza dei valori sull'asse delle ordinate può passare inosservata all'osservatore (*sfondo*). Nel caso del grafico B1, l'asse delle ordinate non parte da 0 (fattore fuorviante F2). Il risultato è un grafico che percettivamente cresce rapidamente, e questo potrebbe portare all'interpretazione di un grande aumento delle spese. Per quanto riguarda i grafici a barre, i dati visualizzati nei tre grafici sono gli stessi e riportano il "Numero di bottiglie di vino vendute dall'azienda Vines nel 2019" da tre venditori (venditore A, venditore B e venditore C). Nel grafico A2, i valori sull'asse delle ordinate non partono da 0, dettaglio che potrebbe non essere notato dall'osservatore (*sfondo*) in accordo con il fattore fuorviante F1. Lo scopo è quello di sminuire percettivamente il lavoro del venditore A, la cui relativa colonna ha un'altezza, e quindi un'estensione, quasi pari a zero. Il grafico C2 è ottenuto dal grafico A2 allungando l'asse delle ordinate, generando così un grafico con *lie factor* maggiore di 1 che può portare l'osservatore a sovrastimare i dati, in accordo con il fattore fuorviante F2, e a percepire una differenza molto forte tra il venditore C e gli altri. Il grafico B2 mostra le informazioni in modo "onesto", cioè i valori sull'asse delle ordinate partono da 0, ma sono meno dettagliati.

5.1.2 La struttura dell'intervento didattico

L'intervento didattico consiste in tre fasi con diversi compiti di interpretazione, ispirati dall'ipotesi di ricerca sul ruolo che i fattori fuorvianti possono avere nell'innescare negli studenti la consapevolezza della complessità del processo di interpretazione.

La fase 1 mira a che il solutore si concentri sull'interpretazione dei diversi grafici sopra descritti. Il compito consiste nel presentare i sei grafici della **Tabella 1**, uno alla volta, in modo che vengano mostrati consecutivamente i grafici di tipologie diverse: prima i grafici della prima riga (A1 e A2), poi quelli della seconda riga (B1 e B2) e infine quelli della terza riga (C1 e C2). Per ogni grafico, ai partecipanti sono poste le seguenti domande: *Osserva il grafico. Cosa si può dedurre? Quali informazioni sta cercando di comunicare? Giustifica la tua risposta. Inoltre, attribuisce un titolo significativo al grafico.*

In accordo con l'ipotesi principale, tali domande hanno lo scopo di guidare verso l'interpretazione dei diversi grafici in termini di relazione tra i dati. A questo proposito, la richiesta di un titolo significativo è un elemento chiave: infatti, ci si aspetta che in questa fase iniziale dell'attività, le risposte a questa richiesta possano rivelare l'effetto dei fattori fuorvianti.

La fase 2 mira a che il solutore si concentri sulla differenza tra rappresentazione dei dati e rappresentazione delle relazioni tra i dati; secondo l'ipotesi principale, l'attività si basa sul confronto di diversi grafici: ci si aspetta che l'effetto prodotto da specifici fattori fuorvianti possa promuovere la consapevolezza del solutore delle discrepanze e delle incongruenze, portandolo così a prendere coscienza della complessità del processo di interpretazione. Nella fase 2, tutti i grafici dello stesso tipo vengono presentati contemporaneamente: prima i grafici a linee (A1, B1 e C1), poi i grafici a barre (A2, B2 e C2), ossia sono presentati insieme i tre grafici che differiscono per gli effetti dei fattori fuorvianti. Il compito è formulato come segue: *Guarda i grafici. Pensi che dicano la stessa cosa? Rappresentano le stesse informazioni? Cercano di comunicare le stesse informazioni? Giustifica le tue risposte e riporta le tue riflessioni.*

La richiesta esplicita di confronto ha come obiettivo quello di portare il solutore ad analizzare i tre casi alla ricerca di somiglianze e differenze: l'effetto di fattori fuorvianti può emergere portando il solutore a riconoscere la differenza tra rappresentazioni di dati e rappresentazioni di relazioni tra dati.

La fase 3 mira a favorire la riflessione dei partecipanti sull'intera attività svolta in relazione al loro possibile futuro ruolo di insegnanti. A tal fine, a ciascun partecipante è chiesto: *Riporta le tue riflessioni sull'attività. Come futuro insegnante, soffermati sugli aspetti educativi che ritieni importanti.*

5.1.3 Partecipanti e organizzazione dell'intervento didattico

I partecipanti alla sperimentazione sono stati diciannove studenti del secondo anno del corso di laurea magistrale in matematica (quindi già in possesso di una laurea triennale in matematica) che frequentavano il corso di Didattica della matematica presso l'Università della Campania "L. Vanvitelli". I partecipanti hanno svolto l'attività durante le lezioni del corso e hanno acconsentito alla raccolta dei dati. L'attività è stata svolta in due lezioni consecutive. Nella prima lezione, della durata di 2 ore, si è svolta la fase 1. Nella seconda lezione, della durata di 3 ore, sono state sperimentate sia la fase 2 (in circa 2 ore) sia la fase 3 (in circa 1 ora). I partecipanti hanno avuto la possibilità di riflettere attentamente su ogni domanda e di formulare le loro risposte senza fretta. L'insegnante non è intervenuto durante l'attività.

Tutte le fasi sono state implementate sulla piattaforma Moodle utilizzando il modulo "Questionario" di Moodle. Ogni fase è stata realizzata attraverso un questionario diverso. Grazie alla funzione "Termini di accesso" di Moodle, i questionari sono stati vincolati l'uno all'altro, il che significa che i partecipanti potevano accedere ai questionari successivi solo dopo aver completato e inviato quelli precedenti. In questo modo, gli studenti hanno affrontato tutte le fasi in modo sequenziale, come previsto dal disegno dell'intervento didattico. Inoltre, sempre in accordo al disegno, impostando in Moodle l'opzione "Visibilità dei questionari inviati" su "mai", i partecipanti non hanno potuto visualizzare le proprie risposte inviate nelle fasi precedenti.

Tutti i dati sono stati raccolti attraverso la piattaforma Moodle.

6 Analisi dei dati e risultati

È stata condotta un'analisi qualitativa delle risposte dei partecipanti e dei commenti che hanno scritto, cercando nei dati raccolti un'interpretazione delle rappresentazioni che mostrasse l'effetto atteso dei fattori fuorvianti. Tenuto conto del ruolo che ogni fase della sequenza avrebbe dovuto svolgere, il resoconto dell'analisi è stato strutturato in base alle tre fasi e ai loro obiettivi specifici.

I partecipanti sono stati indicati con le etichette P1, P2, ..., P19.

6.1 Fase 1

In questa fase un'attenzione specifica è stata rivolta al titolo che i partecipanti sono stati invitati ad attribuire ai grafici. In coerenza con il fattore fuorviante F1, l'attenzione iniziale della maggior parte dei partecipanti si è concentrata su parti specifiche dei grafici, trascurandone altre.

Grafici a linee. Per quanto riguarda i grafici a linee, la maggior parte dei partecipanti sembra essere stata influenzata dal fattore fuorviante F1. Come previsto, per il grafico B1, la maggioranza (quindici partecipanti) ha sovrastimato l'inclinazione della linea e ha fatto riferimento a un aumento significativo della spesa. Per il grafico A1, tutti i partecipanti, invece, hanno fatto riferimento a un aumento della spesa. In particolare, cinque partecipanti hanno fatto riferimento a una crescita «costante», due a una crescita «quasi lineare» e uno a una crescita «progressiva». Tuttavia, sedici partecipanti hanno evidenziato una «crescita lenta». Nove partecipanti hanno sottovalutato l'informazione rappresentata dal grafico C1, e hanno fatto riferimento a un «leggero aumento», un «piccolo aumento» o un «aumento regolare» della spesa. Solo tre partecipanti hanno menzionato un «aumento elevato».

Anche nel caso in cui sono stati percepiti più dettagli di rappresentazione, l'effetto dei fattori fuorvianti F1 e F2 è persistito.

Nel caso del grafico B1 alcuni partecipanti hanno notato la presenza dei valori sull'asse delle ordinate, omessi invece nel grafico A1. Di seguito alcuni esempi:

- P2: «Da quel grafico [B1] si deduce un aumento della spesa in Italia. A differenza del grafico precedente [A1], questo aumento è supportato da valori».
- P15: «In questo caso [B1] l'unità di misura riportata sull'asse delle ordinate rende leggibile l'informazione quantitativa».

Altri hanno fatto riferimento a informazioni più dettagliate, ad esempio:

- P7: «In questo caso [B1] si può dedurre un andamento meno regolare, essendo le informazioni più dettagliate e quindi il grafico più accurato».
- P13: «In questo grafico [B1] possiamo vedere in modo più dettagliato la spesa sostenuta nel 2020».

Alcuni partecipanti hanno fatto esplicitamente riferimento a valori numerici, come ad esempio:

- P18: «Si può dedurre che le spese sono aumentate, passando da 19'000'000 di gennaio 2020 a 25'000'000 di dicembre, mantenendosi stabili tra febbraio e marzo».

In generale, gli effetti dei fattori fuorvianti sono stati evidenti, come mostrano le interpretazioni e soprattutto i titoli dati da P1 e P4 (Tabella 2).

	Grafico A1	Grafico B1	Grafico C1
P1	«Si può dedurre che nel periodo gennaio-marzo la spesa è costante, mentre nel periodo aprile-dicembre si registra un aumento della spesa. Titolo: Aumento della spesa».	«Alla fine dell'anno si registra un aumento sostanziale della spesa rispetto a gennaio. Titolo: Aumento della spesa».	«Alla fine dell'anno si registra un leggero aumento della spesa. Titolo: Leggero aumento della spesa per la tecnologia».
P4	«Il grafico mostra che nel corso di un anno la spesa è aumentata progressivamente. Titolo: Soldi spesi per la tecnologia».	«Nel 2020 la spesa per la tecnologia è aumentata in modo quasi esponenziale. Titolo: Aumento vertiginoso della spesa per la tecnologia».	«La spesa nella tecnologia è aumentata costantemente nel corso del 2020 in Italia, passando da € 20'000'000 dell'anno precedente a ben € 25'000'000. Titolo: La spesa in tecnologia continua a crescere in Italia».

Tabella 2. Interpretazione dei grafici a linee date da P1 e P4.

Tuttavia, già nella fase 1, quando i diversi grafici si sono susseguiti, si sono potute rilevare alcune osservazioni esplicite su possibili interpretazioni fuorvianti. Alcuni partecipanti hanno iniziato a confrontare i grafici dello stesso tipo visualizzati in momenti diversi e sembrano aver riconosciuto una differenza tra le rappresentazioni dei dati e le rappresentazioni delle relazioni tra i dati.

Ad esempio, per quanto riguarda i grafici a linee, P9 ha notato che gli ultimi due grafici (rispettivamente C1 e B1) rappresentavano le stesse informazioni, ma in modo diverso. Ha scritto:

«Ho notato che i valori in realtà non differiscono da quelli del grafico precedente che mostrava le stesse informazioni. Tuttavia, la linea non ha un aumento molto visibile e quindi suggerisce un leggero aumento della spesa. Gli do il titolo "Leggero aumento della spesa tecnologica"».

P9 ha notato che i valori del grafico C1 sono gli stessi del grafico B1 e che, a parità di dati rappresentati, la rappresentazione delle relazioni tra i dati può essere diversa: nel grafico C1, «la linea non ha un aumento molto visibile», cioè il grafico C1 «suggerisce un leggero aumento della spesa»; nello specifico, P9 ha confermato la differenza nell'interpretazione della relazione tra i dati, formulando il titolo «Leggero aumento della spesa tecnologica».

Grafici a barre. Analogamente, l'effetto di fattori fuorvianti è emerso nel caso dei grafici a barre. Per quanto riguarda i grafici A2 e B2, la maggior parte dei partecipanti sembra essere stata influenzata dal fattore fuorviante F1 e si è concentrata sulle altezze delle colonne e, in particolare, sulla colonna più alta (*figura*). Solo quattro partecipanti sembrano essersi soffermati sui valori dell'asse y e nessun partecipante ha osservato che l'asse y non parte da zero (*sfondo*). Come effetto del fattore F2, dodici partecipanti, in riferimento al grafico C2, hanno affermato che il venditore C è di gran lunga «il miglior venditore». I partecipanti sembrano essersi concentrati sulle dimensioni delle immagini: hanno ritenuto che il venditore fosse tanto più bravo quanto più era alta la colonna del grafico a lui riferita, indipendentemente dai valori sull'asse delle ordinate. Anche in questi casi sono state utilizzate le stesse espressioni, «aumento significativo» e «leggero aumento».

Scendendo nei dettagli delle informazioni fornite dai singoli partecipanti, anche per quanto riguarda i grafici a barre, P9 ha scritto:

«Da questo grafico [C2] noto sempre una maggiore vendita del venditore C rispetto agli altri. In realtà, leggendo la scala a sinistra i valori non sono diversi da quelli dei grafici precedenti. Tuttavia, suggerisce che il venditore A non vende quasi nulla, mentre il venditore C è un successo. L'ho intitolato "Supremazia del venditore C"».

P9 ha sostenuto che il grafico C2 rappresenta gli stessi dati dei grafici precedenti («leggendo la scala a sinistra i valori non si distinguono dai grafici precedenti»). Tuttavia, il modo distorto in cui la relazione tra i dati è rappresentata nel grafico C2 riprende quella visualizzata negli altri grafici dello stesso tipo. P9 ha scritto che il grafico C2 «suggerisce che il venditore A non vende quasi nulla, mentre il venditore C è un successo» e infine ha assegnato al grafico il titolo «Supremazia del venditore C».

Anche P8 ha mostrato di essere consapevole delle differenze nella rappresentazione dei dati, ma è emerso l'effetto del fattore fuorviante F2; infatti, P8 ha scritto:

«L'asse delle ordinate rispetto al grafico precedente è molto più distanziato, quindi la risposta diventa molto più evidente: il venditore C ha venduto molto di più».

In una certa misura, alcuni partecipanti sembra che abbiano già discriminato in fase 1 la differenza tra la rappresentazione dei dati e la rappresentazione delle relazioni tra i dati, ma ciò è rimasto raro e limitato.

6.2 Fase 2

Nella fase 2, quando il confronto tra grafici è stato esplicitamente richiesto, si sono cercate evidenze di diverse interpretazioni di grafici dello stesso tipo che mostrassero l'emergere della consapevolezza

che le differenze di interpretazione potevano essere indotte da specifiche scelte nelle rappresentazioni. L'analisi si è concentrata principalmente sull'emergere di commenti che rivelassero lo spostamento dell'attenzione dalla rappresentazione dei dati alle diverse possibili rappresentazioni delle loro relazioni reciproche; in particolare, si è cercato di osservare in che misura gli effetti di un fattore fuorviante contribuissero allo sviluppo della consapevolezza dell'interpretazione.

Come previsto, nella fase 2, la richiesta esplicita di osservare e confrontare i grafici dello stesso tipo e visualizzati contemporaneamente ha portato i partecipanti a notare dettagli non osservati in precedenza, anche se non tutti sembrano aver raggiunto la consapevolezza dell'intera complessità del processo interpretativo ed essere in grado di descriverlo pienamente.

L'analisi ha evidenziato la consapevolezza dei partecipanti delle differenze tra grafici dello stesso tipo. Possiamo dire che quasi tutti i partecipanti si sono resi conto delle differenze, ma solo una parte di loro (nove) sembra essere consapevole del fatto che tali differenze possano influenzare l'interpretazione della relazione tra i dati, osservando esplicitamente che, sebbene i grafici rappresentino gli stessi dati, in realtà rappresentano relazioni diverse tra tali dati. Si noti che l'attenzione si è concentrata su parti specifiche dei grafici, ad esempio le figure o le etichette, «la presenza dell'unità di misura...» o «l'altezza delle barre...». Questo spostamento di attenzione è stato accompagnato da diverse interpretazioni introdotte da espressioni come «il grafico suggerisce che...» o «il grafico vuole comunicare che...»; queste interpretazioni testimoniano un maggiore livello di consapevolezza dell'intenzionalità dei grafici di comunicare informazioni specifiche e possono corrispondere a una raggiunta consapevolezza dell'impatto che le scelte fatte per rappresentare i dati possono avere sull'interpretazione della relazione tra i dati.

Grafici a linee. Per quanto riguarda i grafici a linee, P4 scrive:

«Ovviamente l'informazione comunicata è la stessa, quello che cambia è il come e, soprattutto, cosa viene enfatizzato: nel primo si mostra solo l'aumento annuale, senza specificare la somma; nel secondo si vuole mostrare, in particolare, la variazione mensile della spesa; nel terzo si vuole mostrare la variazione annuale, mostrando numericamente la differenza da gennaio a dicembre».

P4 ha affermato che «l'informazione comunicata è la stessa», ma sembra aver riflettuto sul fatto che i grafici mirano a enfatizzare aspetti diversi; tuttavia, non è chiaro quanta "enfasi" possa diventare "fuorviante". Un'analisi più approfondita è stata condotta da P3, P12 e P9, che hanno utilizzato rispettivamente espressioni che fanno riferimento all'intenzionalità del processo di rappresentazione e di conseguenza a quanto possa essere aperta l'interpretazione.

Espressioni come «vuole evidenziare», «sembra che l'aumento sia minore rispetto al secondo» e «vuole suggerire» esprimono l'intenzionalità dei grafici di mostrare relazioni specifiche tra i dati:

- P3: «[...] Il grafico 2 [B1] invece vuole evidenziare come la spesa per la tecnologia aumenti solo di mese in mese».
- P12: «[...] Guardando gli ultimi due [B1 e C1], i grafici vogliono comunicare le stesse informazioni, ma nell'ultimo grafico sembra che l'aumento sia minore rispetto al secondo, perché nel secondo la spesa è mostrata in modo più dettagliato».

P3 e P12 sembrano aver riconosciuto una differenza tra la rappresentazione dei dati e le relazioni tra di essi, ma non l'hanno esplicitata. Al contrario, P9 ha scritto:

«[...] il secondo e il terzo rappresentano la stessa informazione ma non vogliono comunicare la stessa informazione. Infatti, il secondo vuole suggerire un aumento della spesa, mentre il terzo vuole suggerire un leggero aumento della spesa».

P9 ha distinto tra i dati che i grafici rappresentano («il secondo e il terzo rappresentano la stessa informazione») e ciò che intenzionalmente non vogliono comunicare («ma non vogliono comunicare la stessa informazione»). P9 ha usato le stesse parole, «la stessa informazione», una volta per riferirsi ai dati e poi per riferirsi alle relazioni tra i dati (aumento della spesa). Sembra non rendersi conto dell'incoerenza di questo uso o forse ha cercato di esprimere la relazione tra rappresentare e comunicare e la sua complessità.

Grafici a barre. P9 ha dato una risposta abbastanza simile nel caso dei grafici a barre:

«Anche in questo caso, i grafici rappresentano tutti le stesse informazioni, ma comunicano informazioni diverse. Il terzo grafico [C2] suggerisce che solo il venditore C vende, il venditore B vende poco e il venditore A non vende affatto. Il primo grafico [A2] comunica un divario tra l'addetto alle vendite C e gli altri assoluti. Il secondo grafico [B2] mostra invece una vendita più omogenea dei prodotti».

P9 ha utilizzato le espressioni «i grafici rappresentano tutti le stesse informazioni ma comunicano informazioni diverse», tuttavia ha specificato che «il terzo grafico suggerisce...» e «il primo grafico comunica...» per indicare che i dati rappresentati sono gli stessi, ma i modi in cui sono rappresentati nei diversi grafici suggeriscono interpretazioni diverse.

In realtà, in generale nel caso dei grafici a barre, troviamo risposte simili; ad esempio, P3 ha sottolineato la differenza sulla possibile interpretazione indotta dall'intenzione di comunicare informazioni diverse e ha parlato esplicitamente di distorsione. P3 ha scritto:

«Rappresentano la stessa informazione ma vogliono comunicare informazioni diverse. Il vino del venditore C è stato acquistato il doppio delle volte rispetto al vino del venditore B, che è stato acquistato il doppio delle volte rispetto al vino del venditore A. Il grafico 1 [A2] e il grafico 3 [C2] vogliono distorcere questa informazione. In questi grafici si tende a minimizzare le bottiglie di vino del venditore A e del venditore B».

L'uso dell'espressione «Il grafico 1 e il grafico 3 vogliono distorcere» mostra che P3 ha riconosciuto l'effetto dei fattori fuorvianti. Anche P4 ha riconosciuto tale effetto. Infatti, ha notato l'allungamento dell'asse delle ordinate nel grafico C2 (fattore F2) e l'effetto che questo allungamento provoca a livello percettivo, cioè un «divario meno netto» nelle vendite. P4 ha scritto:

«Anche in questo caso l'informazione è la stessa: cambia il modo di presentare il risultato; l'effetto ottenuto diminuendo la scansione delle bottiglie vendute, e quindi l'altezza dei grafici a barre, è un divario meno netto nel secondo [B2] rispetto al terzo [C2]».

Questo effetto visivo è stato osservato anche da P5, che ha usato l'espressione «visivamente l'impatto è diverso». Ha scritto:

«A livello quantitativo riportano le stesse informazioni, ma visivamente l'impatto è diverso perché dal secondo [B2] al terzo [C2] si evidenzia il divario importante sulle vendite di C rispetto ad A e B».

Per P8, è necessario andare oltre «l'impatto visivo» per comprendere appieno ciò che i grafici cercano di comunicare, ossia le relazioni tra i dati:

«Quando li leggi, l'impatto visivo è certamente importante, ma devi concentrarti di più sui dati in un grafico. Gli intervalli del terzo grafico hanno un'ampiezza maggiore e, di conseguenza, rendono più chiaro ciò che vogliamo trasmettere».

P8 ha notato i fattori fuorvianti («gli intervalli del terzo grafico hanno un'ampiezza maggiore») e il loro effetto che porta a una diversa interpretazione del grafico.

6.3 Fase 3

I commenti forniti dai partecipanti nella fase 3 sono stati analizzati con l'obiettivo di fornire una risposta alla domanda di ricerca riguardante la consapevolezza della complessità del processo di interpretazione dei grafici statistici e quanto tale consapevolezza sia legata alla presenza e agli effetti di fattori fuorvianti.

Dall'analisi delle risposte dei partecipanti alla fase 3, si evince che per la maggior parte di loro sia aumentata la consapevolezza del processo di interpretazione e della sua complessità. La maggior parte dei partecipanti (undici) ha sottolineato l'importanza di concentrarsi sui dettagli nell'interpretazione dei grafici. Ad esempio, P16 ha scritto:

«Ciò che è veramente importante alla fine di questa attività è soffermarsi sui dati a disposizione e analizzarli in dettaglio».

P11 ha sottolineato l'importanza di osservare «l'andamento del grafico» ma anche la «scala utilizzata». Ha scritto:

«Penso che questa attività sia utile per gli studenti per imparare a guardare un grafico nella sua interezza, cioè i valori inseriti, la scala utilizzata, l'andamento del grafico e come ricavarne informazioni utili».

Anche P5 ha parlato di dettagli, ma anche di una consapevolezza degli errori commessi, maturata gradualmente durante l'attività:

«Durante questi diversi questionari, ho preso gradualmente coscienza degli errori di valutazione che avevo commesso nelle fasi precedenti, emersi proprio dal confronto di situazioni simili e con una maggiore riflessione sui dettagli».

Ricordando gli effetti dei fattori fuorvianti sperimentati nelle fasi precedenti, P8 ha fatto riferimento al fatto che a volte i grafici possono essere progettati intenzionalmente per indurre una specifica interpretazione. Ha quindi sottolineato l'importanza di saper leggere i grafici per capire quali informazioni vogliono comunicare e individuare eventuali intenzioni fuorvianti. Infatti, P8 ha scritto:

«Saper leggere un grafico non ti rende schiavo di quello che gli altri vogliono farti capire, ma puoi avere una tua idea chiara e immediata».

Allo stesso modo, P3 e P9 hanno fatto esplicito riferimento all'inganno. P3 ha scritto:

«I grafici devono essere ben interpretati perché possono essere ingannevoli».

Tuttavia, P9 ha sottolineato sia la necessità di essere attenti sia la necessità di un'abilità specifica per interpretare un grafico; ha scritto:

«Questa attività mi suggerisce che l'informazione che si vuole trasmettere è facilmente manipolabile se la si guarda in modo distratto o se non si sanno leggere i grafici in un certo modo. Penso che sia essenziale saper leggere un grafico e non farsi "ingannare" da ciò che vuole trasmettere».

Oltre a concentrarsi genericamente sull'importanza e sulla complessità di acquisire una competenza specifica per l'interpretazione delle rappresentazioni statistiche, alcuni partecipanti hanno cercato di spiegare in cosa potrebbe consistere tale competenza. Ad esempio, due partecipanti, P1 e P17, sembravano consapevoli della necessità di considerare il modo in cui i dati sono rappresentati e di come tale modo di rappresentazione possa influenzare l'interpretazione delle relazioni tra di essi.

- P1: «Dobbiamo soffermarci sui dettagli perché anche grafici uguali sono apparsi diversi».
- P17: «[...] ad esempio, i grafici sulle vendite di vino all'inizio, per come erano rappresentati, potevano sembrare diversi, ma in realtà valutando i dati si vede che rappresentano gli stessi risultati».

In entrambi i casi, appare il ruolo degli effetti prodotti dai fattori fuorvianti («anche grafici uguali sono apparsi diversi», «i grafici... potevano sembrare diversi, ma in realtà...»): P1 e P17 sembrano aver raggiunto la consapevolezza del processo di interpretazione riflettendo sulla loro esperienza e in particolare sull'effetto che modi diversi di rappresentare un insieme di dati possono avere sull'interpretazione della loro relazione: come viene rappresentato il numero di bottiglie vendute e come questo può cambiare il modo di rappresentare il tasso di vendita dei venditori di vino.

Le riflessioni dei partecipanti hanno anche tenuto conto della rilevanza didattica di affrontare questi temi in classe con gli studenti. Ad esempio, P10 ha scritto:

«Penso che questa attività sarebbe utile nelle scuole per mostrare come gli stessi diagrammi possano essere fraintesi in modi diversi. È importante perché, lavorando da soli e dando una risposta autonoma, è lo stesso studente che si rende conto di aver sbagliato o meno quando guarda il diagramma successivo. Sbagliare è un ottimo modo per imparare».

Sembra che P10 abbia sottolineato che l'attività permette ai partecipanti di rendersi conto autonomamente dei propri errori e che questo è un passo necessario per l'apprendimento. Molto interessante è la risposta di P15, che avvalorava definitivamente l'ipotesi di ricerca sull'efficacia dell'attività progettata:

«Un'osservazione superficiale dei grafici potrebbe portare a dedurre informazioni errate. È importante sviluppare capacità di osservazione e riflessione, nonché strumenti tecnici, affinché la prima informazione che l'occhio riesce a cogliere non sia quella definitiva. Riuscire a quantificare i dati è l'unico modo perché la nostra percezione non sia falsata. Un aspetto didattico che ritengo importante è certamente la comprensione che non tutto ciò che ci viene presentato è così immediato; gli strumenti appresi durante lo studio che possono risultare così ostici, sono fondamentali affinché i nostri occhi siano, appunto, meno ingannabili».

7 Discussione e conclusioni

Nell'interpretare un grafico statistico, si fanno inferenze sulle relazioni tra i dati rappresentati e queste possono suggerire conclusioni che possono rivelarsi molto diverse tra loro. In particolare, può accadere che particolari modalità di rappresentazione inducano conclusioni distorte (Pastore et al., 2017; Weissgerber et al., 2015). Questo è il caso di quelli che nel presente articolo sono stati chiamati fattori fuorvianti.

La ricerca presentata in questo lavoro nasce dall'ipotesi che i fattori fuorvianti possano essere utilizzati didatticamente per innescare la consapevolezza della complessità del processo interpretativo che coinvolge allo stesso tempo l'interpretazione dei dati e l'interpretazione delle relazioni tra di essi. Partendo da questa ipotesi, è stato progettato un intervento didattico in tre fasi relativo al problema didattico dell'interpretazione dei grafici statistici. Il problema si pone a due livelli: rendersi conto che i grafici possono essere influenzati da fattori fuorvianti; promuovere la consapevolezza della complessità del processo di interpretazione di un grafico statistico. L'intervento didattico è stato sperimentato con studenti dell'ultimo anno del corso di laurea magistrale in matematica. L'analisi dei dati raccolti durante tale sperimentazione sembra supportare la ragionevolezza dell'ipotesi di ricerca. L'analisi dei dati ha mostrato l'emergere dell'effetto dei fattori fuorvianti, ma anche una crescente consapevolezza della complessità del processo interpretativo; in particolare, i partecipanti sembrano aver raggiunto la consapevolezza dell'intenzionalità del processo di rappresentazione e, di conseguenza, di quanto aperta possa essere l'interpretazione, in particolare rispetto alla relazione tra i dati rappresentati. L'analisi presentata sopra può quindi fornire una prima verifica dell'ipotesi di ricerca. Anche se non tutti i partecipanti hanno mostrato uguale profondità nell'esplicitare la relazione tra i dati, molti di loro hanno confrontato i grafici e si sono concentrati sia sui dati sia sulla loro relazione, cercando elementi che potessero esplicitarla. Inoltre, come testimoniano i commenti forniti nella fase 3, l'intervento educativo ha permesso ai partecipanti di vivere momenti in cui hanno assunto un duplice ruolo, prima come studenti, alle prese con la lettura e l'interpretazione dei grafici, e poi come futuri insegnanti, riflettendo sugli aspetti educativi legati all'attività. Come previsto, la fase 3 ha offerto ai partecipanti l'opportunità di riflettere, non come studenti ma come futuri insegnanti, sul ruolo cruciale svolto da specifici aspetti della rappresentazione grafica nell'ambito della statistica e sull'importanza educativa di affrontare questi temi in classe. Come chiarito in precedenza, il contributo di questa ricerca non riguarda direttamente i concetti statistici, poiché si focalizza sul problema educativo dell'interpretazione dei grafici. Tuttavia, affronta un elemento chiave della conoscenza statistica, ossia le rappresentazioni dei dati e i processi di inferenza sulle loro relazioni che derivano da tali rappresentazioni. Da questo punto di vista, la ricerca contribuisce ad aspetti riguardanti lo sviluppo delle conoscenze didattiche degli insegnanti (Shulman, 1986) nell'ambito della statistica (Groth, 2007).

I risultati di questa ricerca sembrano inoltre mostrare che l'ipotesi di ricerca può essere tradotta in un principio di progettazione per interventi didattici: utilizzare grafici costruiti a partire da specifici fattori fuorvianti per rendere gli studenti consapevoli della complessità del processo di interpretazione. Ovviamente, attività simili a quella descritta, analizzata e discussa in questo articolo sono solo un prerequisito per una successiva discussione in classe con gli studenti sugli aspetti dell'interpretazione dei grafici statistici.

C'è un altro aspetto interessante che emerge dall'analisi dei dati e riguarda una questione più generale. Osservando un grafico e interpretando alcune sue caratteristiche, è possibile inferire direttamente non solo le proprietà di ciò che è rappresentato, ma anche altre proprietà relative al contesto, cioè alla situazione da cui i dati sono estratti. Questa inferenza può essere fatta automaticamente senza necessariamente rendere esplicita la relazione con i dati stessi. Dall'analisi dei dati si è osservato, ad esempio, in riferimento al grafico a barre C2, come dodici partecipanti, nel vedere che la barra relativa

al venditore C era la più alta di tutte, hanno automaticamente inferito che C era il miglior venditore in assoluto. Quanto appena descritto potrebbe essere interpretato, a nostro parere, secondo la teoria delle regole intuitive (Fischbein, 2005; Stavy et al., 2006; Tirosh & Stavy, 1999) e, in particolare, alla regola intuitiva “più A – più B”, secondo la quale il confronto $A1 > A2$, in riferimento a una quantità A, si estende al confronto $B1 > B2$ in riferimento a un'altra quantità B che si considera correlata ad A. Ad esempio, se un osservatore vede oggetti della stessa forma, con il primo più pesante del secondo, lanciati dalla stessa altezza, tende a concludere che il primo arriverà a terra prima del secondo. Oppure, se un osservatore vede due angoli (opposti al vertice) con i lati del primo rappresentati più lunghi del secondo, tende a concludere che il primo angolo è maggiore del secondo. Questa regola intuitiva “più A – più B” potrebbe spiegare alcune delle interpretazioni errate dei grafici statistici. Nella fase 1, la maggior parte dei partecipanti si è comportata secondo la regola intuitiva “più A – più B”, indipendentemente dalla presenza o meno dei valori sull'asse delle ordinate nei grafici. Infatti, la maggior parte dei partecipanti ha considerato:

- eccessive le spese che erano rappresentate nei punti in cui la linea aveva una pendenza maggiore;
- il miglior venditore quello le cui vendite erano rappresentate dalla colonna più alta.

A questo proposito, Tversky (1997) sottolinea che le persone, quando leggono un grafico, tendono a dare più importanza alla dimensione verticale che a quella orizzontale e a vedere “alto” come “più” o “migliore”. La dimensione verticale, infatti, è più significativa nell'interazione con il mondo (ad esempio, la gravità agisce verticalmente, le persone crescono verticalmente). Questo potrebbe spiegare perché certe rappresentazioni sembrano essere più difficili da interpretare per gli studenti rispetto ad altre. Da questo punto di vista, la presente ricerca può contribuire alla ricerca internazionale sulle regole intuitive (Fischbein, 2005; Stavy et al., 2006; Tirosh & Stavy, 1999). Infatti, i dati analizzati in questo lavoro sembrano mostrare che tali regole possono coinvolgere anche aspetti legati alla statistica e alla lettura e interpretazione dei grafici.

In tal senso, questo lavoro apre una direzione di ricerca sugli aspetti percettivi legati alla lettura dei grafici statistici: comprendere più a fondo come e perché la lettura di un grafico può essere fuorviante potrebbe fornire elementi chiave per la progettazione di interventi educativi volti a sviluppare la sensibilità didattica degli insegnanti sullo sviluppo della capacità di rappresentazione degli studenti. Tuttavia, questo studio ha riguardato soltanto un numero limitato di futuri insegnanti. Da questo punto di vista, sono necessarie ulteriori ricerche che possano coinvolgere anche studenti e insegnanti in servizio, per analizzare il processo di interpretazione di una rappresentazione grafica. Sarà interessante anche allargare l'indagine ad altri ambiti della matematica, o alla modellazione matematica, per i quali l'interpretazione di grafici specifici presenta complessità simili.

Bibliografia

- Ali, N., & Peebles, D. (2013). The effect of gestalt laws of perceptual organization on the comprehension of three-variable bar and line graphs. *Human factors*, 55(1), 183–203.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.
- Balchin, W. G. V., & Coleman, A. M. (1966). Graphicacy should be the fourth ace in the pack. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 3(1), 23–28. <https://doi.org/10.3138/C7Q0-MM01-6161-7315>

- Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.) (2017). *International handbook of research in statistics education (1st ed.)*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7>
- Bruno, A., & Espinel, M. C. (2009). Construction and evaluation of histograms in teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 40(4), 473–493. <https://doi.org/10.1080/00207390902759584>
- Cairo, A. (2015). Graphics Lies, Misleading Visuals. In D. Bihanic (Ed.), *New Challenges for Data Design* (pp. 103–116). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-6596-5_5
- Chabris, C. F., & Kosslyn, S. M. (2005). Representational correspondence as a basic principle of diagram design. In S.-O. Torgan & T. Keller (Eds.), *Knowledge and information visualization: Searching for synergies* (pp. 36–57). Springer.
- Cooper, L. L. (2018). Assessing students' understanding of variability in graphical representations that share the common attribute of bars. *Journal of Statistics Education*, 26(2), 110–124. <https://doi.org/10.1080/10691898.2018.1473060>
- Cooper, L. L., & Shore, F. S. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*, 18(2), 18. <https://doi.org/10.1080/10691898.2010.11889487>
- Derouet, C., & Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions? *ZDM – Mathematics Education*, 48(6), 757–773. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0769-9>
- Eshleman, J. W. (2002). A Review of Edward R. Tufte's "The Visual Display of Quantitative Information". *Journal of Precision Teaching And Celeration*, 18(2), 88–94.
- Fischbein, E. (2005). *Intuition in science and mathematics: An educational approach (Vol. 5)*. Springer Science & Business Media.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124–158.
- Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., & Krüger, L. (1989). *The empire of chance: How probability changed science and everyday life*. Cambridge University Press.
- Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 427–437.
- Hartmann, G. W., & Crosswhite, F. J. (1966). Classics in Mathematics Education: Gestalt Psychology and Mathematical Insight. *The Mathematics Teacher*, 59(7), 656–661.
- Huff, D. (1993). *How to lie with statistics*. WW Norton & Company.
- Kaplan, J. J., Gabrosek, J. G., Curtiss, P., & Malone, C. (2014). Investigating student understanding of histograms. *Journal of Statistics Education*, 22(2), 1–30.
- Kosslyn, S. M. (2006). *Graph design for the eye and mind*. Oxford University Press.

- Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65–99.
- Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2013). On the misinterpretation of histograms and box plots. *Educational Psychology*, 33(2), 155–174.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- Parks, J., & Yeh, D. D. (2021). How To Lie with Statistics and Figures. *Surgical infections*, 22(6), 611–619.
- Pastore, M., Lionetti, F., & Altoè, G. (2017). When one shape does not fit all: A commentary essay on the use of graphs in psychological research. *Frontiers in Psychology*, 8, 1666. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01666>
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205–235). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stavy, R., Babai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Lin, F. L., & McRobbie, C. (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(3), 417–436.
- Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353–387.
- Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive Rules: A way to Explain and Predict Students' Reasoning. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of Mathematical Knowledge* (pp. 51–66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1584-3_3
- Tufte, E. R. (2001). *The Visual Display of Quantitative Information* (2nd ed.). Graphics Press. (Prima edizione pubblicata nel 1983).
- Tversky, B. (1997). Cognitive principles of graphic displays. *AAAI fall symposium on reasoning with diagrammatic representations II* (pp. 8–10). AAAI Press.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1998). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37(2), 145–168. <https://doi.org/10.1023/A:1003594832397>
- Weissgerber, T. L., Milic, N. M., Winham, S. J., & Garovic, V. D. (2015). Beyond bar and line graphs: Time for a new data presentation paradigm. *PLoS biology*, 13(4), e1002128. <https://doi.org/10.1371/journal.pbio.1002128>
- Zacks, J., & Tversky, B. (1999). Bars and lines: A study of graphic communication. *Memory & Cognition*, 27, 1073–1079.