

La geometria ricorrente: un percorso didattico sul processo ricorsivo in geometria

Recurrent geometry: a learning path on the recursive process in geometry

Giovanna Rinchiusa e Maria Alessandra Vaccaro

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo – Italia

✉ giovanna.rinchiusa@unipa.it, marialessandra.vaccaro@unipa.it

Sunto / L'esperienza didattica qui descritta è stata svolta in una classe terza di un liceo scientifico italiano, con lo scopo di stimolare l'attivazione di congetture e dell'argomentazione verso il pensiero dimostrativo, tramite l'utilizzo del software GeoGebra. Per fare questo, si è scelto di lavorare sulla geometria ricorrente, ideata dal matematico francese Gaston de Longchamps, in stretta relazione con il processo ricorsivo e il principio di induzione. In questo lavoro si mostra come tale percorso abbia favorito l'apprendimento di concetti della geometria euclidea e sviluppato dal punto di vista didattico le capacità argomentative degli alunni. Per valutare il raggiungimento degli obiettivi è stata effettuata un'analisi qualitativa delle produzioni degli studenti.

Parole chiave: congettura; argomentazione; configurazioni geometriche; processo ricorsivo; mediazione semiotica.

Abstract / The learning path described here was carried out with eleventh grade students attending an Italian scientific upper secondary school, with the aim of stimulating the activation of conjectures and argumentation towards demonstrative thinking, using the dynamic geometry software GeoGebra. To this end, we chose to work on recurrent geometry, developed by the French mathematician Gaston de Longchamps, which is closely related to the recursive process and the mathematical induction. In this paper we show how such a course can promote the learning of Euclidean geometry topics and educationally develop students' argumentation skills. A qualitative analysis of the students' productions was carried out to evaluate the achievement of our goals.

Keywords: conjecture; argumentation; geometric configurations; recursive process; semiotic mediation.

1 Introduzione

La ricerca in didattica della matematica indaga da diversi anni come l'uso di artefatti di geometria dinamica possa favorire la capacità degli studenti di formulare congetture in geometria. Questo contributo si inserisce in quest'ottica: descriveremo un'esperienza didattica il cui obiettivo principale è stato di incentivare, attraverso l'uso di GeoGebra, la capacità degli studenti di esplorare proprietà e di enunciare e validare congetture nell'ambito della geometria ricorrente. Si è scelto questo argomento perché si è pensato che il carattere proprio della geometria ricorrente potesse spingere gli alunni alla ricerca di caratteristiche comuni alle configurazioni esaminate ad ogni passo della catena e potesse indurli a formulare congetture e produrre argomentazioni a supporto di esse. Inoltre, la scelta di tale tematica ci è sembrata appropriata vista la carenza di percorsi didattici incentrati sul processo ricorsivo in geometria nella scuola secondaria di secondo grado.¹ Non da ultimo, realizzare un percorso didattico in laboratorio facendo uso di un software di geometria dinamica permette di proporre un metodo alternativo all'insegnamento tradizionale della geometria.

Nel par. 2 forniremo alcune coordinate teoriche utili per inquadrare i temi della congettura dal punto di vista del modello di Toulmin e l'uso degli artefatti cognitivi nella didattica. Proseguiremo poi con il par. 3, nel quale presenteremo i problemi di geometria ricorrente che hanno rappresentato il cuore disciplinare del percorso didattico. Nel par. 4 esplicheremo le scelte metodologiche e didattiche operate, mentre nel par. 5 descriveremo nel dettaglio le fasi del percorso. Infine, nel par. 6 proporremo l'analisi di alcune interviste realizzate a fine percorso, per poi avviarci alle conclusioni esposte nel par. 7.

2 Quadro teorico

2.1 Congetturare in matematica grazie all'uso di artefatti

Il quadro teorico di riferimento scelto per progettare ed analizzare i risultati dell'esperienza si basa su due nuclei teorici: il modello di Toulmin (Blum et al., 2016; Pedemonte & Balacheff, 2016; Toulmin, 1958) per la produzione e l'analisi di argomentazioni, di cui la congettura è parte integrante; la prospettiva Vygostkiana relativa all'utilizzo degli artefatti cognitivi come elemento principale dell'apprendimento (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, 2009; Vygotsky, 1981).

Il modello di Toulmin² (1958) è uno schema metodologico efficace nell'analisi delle argomentazioni degli studenti. In base a tale modello, i vari passi di cui si compone un'argomentazione volta a sostenere un enunciato, vengono descritti attraverso l'esplicitazione di tre elementi: dati (*data*), conclusione (*claim*) e garanzia (*warrant*). I dati sono le ipotesi, la conclusione è in buona sostanza la tesi dell'enunciato, la garanzia è un principio generale che mediante l'inferenza consente di passare dai dati alla conclusione, ovvero di stabilire un legame tra essi. L'uso del modello di Toulmin permette di mostrare le competenze necessarie a produrre e dimostrare una congettura:

«Tali competenze riguardano aspetti specifici relativi all'argomentazione, ed in particolare la relazione tra un'argomentazione volta a convincersi della correttezza delle affermazioni che via via emergono nella ricerca della congettura, e una dimostrazione, ovvero una argomentazione accettabile nel contesto matematico».

(Mariotti, 2022, p. 65)

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Cantone Ticino.

2. Il modello è stato ideato nel 1958 dal filosofo britannico Stephen Edelstone Toulmin (1922-2009).

La congettura è un'ipotesi che nasce da osservazioni o intuizioni e che, benché appaia plausibile, non è stata ancora dimostrata in modo formale. A sostegno di una congettura vi è un'argomentazione, che ne supporta la credibilità, ma non è detto che ne fornisca una prova rigorosa mediante un processo logico deduttivo. L'attività dimostrativa in senso più proprio si realizza infatti mettendo in atto una serie di concatenazioni logiche che, organizzate a partire da conoscenze pregresse, portano alla conferma della congettura prodotta. In generale, il passaggio dalla formulazione di una congettura e delle argomentazioni che l'accompagnano alla sua validazione in termini ipotetico deduttivi è tutt'altro che semplice: in questo senso, diversi studi hanno messo in evidenza le possibili difficoltà e rotture cognitive nel passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione (si vedano, ad esempio, Balacheff, 2001; Duval, 1998). Uno dei problemi più frequenti che incontrano in classe sia gli insegnanti che i discenti (a livello di scuola primaria e secondaria di primo grado,³ ma secondo noi anche nella scuola secondaria di secondo grado), infatti, è il complesso rapporto tra dimostrazione e argomentazione, «ovvero tra una dimostrazione e un discorso che esprime un perché producendo una motivazione convincente» (Mariotti, 2022, p. 6).

In tale contesto gli artefatti, oggetti prodotti dall'uomo che hanno come fine il raggiungimento di uno scopo, assumono un ruolo significativo. In particolare, l'ingresso nelle scuole degli artefatti digitali ha favorito la diffusione di studi inerenti all'analisi del contesto in cui la classe opera e al relativo comportamento degli alunni. All'interno di questo quadro, occupa un ruolo centrale il termine mediazione di cui riportiamo la definizione data da Hasan:

«il sostantivo mediazione deriva dal verbo mediare, che si riferisce ad un processo con una complessa struttura semantica [...] Queste complesse relazioni semantiche non sono evidenti in ogni uso grammaticale del verbo, ma sommerse sotto la superficie e possono essere riportate alla luce tramite associazioni paradigmatiche, per esempio le loro relazioni sistemiche».

(Hasan, 2005, p. 136)

Dunque, il termine si riferisce a tutte quelle azioni didatticamente mirate che l'insegnante mette in atto per condurre gli alunni verso lo svolgimento di un compito, ovvero verso la costruzione della conoscenza da parte dell'allievo.

«L'insegnante eserciterà il suo ruolo di mediazione sia in modo diretto, attraverso l'introduzione degli strumenti matematici necessari in relazione alle diverse situazioni didattiche, sia in modo indiretto, utilizzando le produzioni individuali degli alunni (da confrontare e discutere in classe) e attraverso la valorizzazione dei contributi degli alunni durante la discussione in classe e il lavoro di gruppo».

(Anichini et al., 2003, p. 33)

Gli strumenti tecnici utilizzati dall'insegnante prendono il nome di mediatori didattici. Spesso questo è il ruolo degli artefatti, che secondo la prospettiva di Vygotsky hanno una potenzialità espressiva; tale caratteristica li rende strumenti di mediazione semiotica. In altre parole, l'insegnante agendo come mediatore usa l'artefatto per mediare il sapere matematico: «così un artefatto sarà chiamato strumento di mediazione semiotica quando sarà usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente» (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 285).

Nell'insegnamento della geometria sono sempre più utilizzati i software di geometria dinamica, artefatti digitali nei quali si ha il passaggio dallo spazio grafico e dagli strumenti di disegno usuali (il foglio,

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

la matita, la riga, il compasso) a uno spazio grafico virtuale e ai comandi grafici in esso disponibili. Così

«lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere “fatti geometrici” e può essere avviato a un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all’interno di una teoria più o meno ben precisata, perché una certa proprietà osservata vale».

(Anichini et al., 2003, pp. 28–29)

Nel presente lavoro poniamo l’attenzione sull’artefatto digitale GeoGebra (Accomazzo, 2013; Brigaglia et al., 2021), che è uno dei software di geometria dinamica più diffusi in ambito scolastico ed è disponibile gratuitamente. Il potenziale didattico di GeoGebra è dato in particolare dalla modalità di trascinamento che, tramite l’uso del cursore, permette di muovere gli elementi di una figura nello spazio virtuale e di ottenere altre figure della stessa famiglia della prima. Grazie alla dinamicità del software non siamo più di fronte all’unica copia prodotta dal disegno statico tradizionale, ma possiamo visualizzare un ampio spettro di rappresentazioni della stessa figura. Un’altra importante caratteristica di GeoGebra è la possibilità di costruire e salvare le Macro, ovvero nuovi strumenti che permettono di ripetere una serie, anche molto complessa, di operazioni mediante un semplice comando. Come verrà delineato nei paragrafi successivi, nell’attività da noi proposta, le Macro sono molto utili per analizzare cosa accade nei passi successivi della sequenza di configurazioni, visto che questi dipendono l’uno dall’altro in modo iterativo.

In questo contributo si vuole evidenziare come un software di geometria dinamica possa aiutare gli alunni a colmare eventuali lacune pregresse e, permettendo loro di esplorare, formulare e validare congetture, realizzi un intreccio fra l’aspetto pratico-esplorativo e quello teorico. Tale intreccio è spesso da ristrutturare: infatti, quando si propone agli allievi di lavorare con un software di geometria dinamica, essi pensano che poter costruire e visualizzare le proprietà caratteristiche di una configurazione sia la prova stessa della loro validità e quindi non sentono la necessità di darne una dimostrazione. L’impostazione del percorso segue un approccio di tipo laboratoriale, in accordo con le Indicazioni Nazionali per i licei (Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca [MIUR], 2010) in cui viene consigliato «l’uso costante del laboratorio per l’insegnamento delle discipline scientifiche» (p. 7). Per lavorare in quest’ottica, abbiamo fatto nostra la seguente descrizione di laboratorio riferito in modo specifico alla matematica:

«il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L’ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti».

(Anichini et al., 2003, p. 28)

La metafora della bottega d’arte del Rinascimento descrive pienamente uno dei principali obiettivi del laboratorio di matematica, l’*apprendistato cognitivo*: «l’esperto modella e struttura l’attività del principiante, che osserva l’esperto e confronta e valuta il suo operato rispetto alle proprie attività intellettuali» (Anichini et al., 2003, p. 33).

2.2 Induzione e ricorsione

Come anticipato, l’esperienza didattica verte sull’argomento induzione e ricorsione. All’interno delle Indicazioni Nazionali per i licei, infatti, tra i gruppi di concetti e metodi che gli alunni devono saper

dominare al termine del percorso, vi è un esplicito riferimento al principio di induzione:

«una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico».

(MIUR, 2010, p. 22)

Il principio di induzione è un processo che permette di dimostrare una proprietà riconducibile ai numeri naturali se sono soddisfatte le seguenti due condizioni: la proprietà vale per un dato numero naturale inteso come primo elemento dell'insieme che la verifica (base dell'induzione), e supposta vera la proprietà per un numero naturale n , lo è anche per il suo successivo $n + 1$ (passo induttivo). La dimostrazione per induzione, ovvero la tecnica dimostrativa che si basa sul principio di induzione, spesso risulta un argomento ostico per gli alunni. La causa principale di difficoltà riguarda il fatto che l'asserzione che deve essere provata diventa essa stessa ipotesi nel passo induttivo e ciò può generare confusione. L'idea chiave alla base del principio di induzione è rappresentata da una sorta di reazione a catena, tipica anche di un processo ricorsivo, ovvero un processo nella cui definizione richiama sé stesso. La stretta relazione fra l'induzione matematica e la ricorsione è stata oggetto di studio in diversi articoli di didattica della matematica (Leron & Zazkis, 1986; Nannini & Telloni, 2022). A tal proposito, utilizzando l'espressione di Leron e Zazkis (1986, p. 28) la ricorsione può essere considerata come una «versione esecutiva dell'induzione». Pensando al processo ricorsivo come una possibile chiave di volta per una più facile comprensione dell'induzione, abbiamo ritenuto interessante progettare e realizzare un percorso didattico incentrato proprio sulla ricorsione, anche ai fini delle possibili ricadute didattiche nella pratica dei docenti. Come emerge dai *Principles and standards for school mathematics* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), da *Matematica 2003* (Anichini et al., 2003) e dalle Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010),⁴ nella scuola secondaria di secondo grado il concetto di ricorsione si incontra trattando il principio di induzione, le successioni numeriche e le funzioni definite per ricorrenza, ma non vi è traccia del processo ricorsivo in ambito geometrico. Per tale motivo abbiamo focalizzato la nostra attenzione verso la cosiddetta "geometria ricorrente", così denominata dal matematico francese Gaston de Longchamps (1842-1906) nel suo lavoro *La géométrie récurrente* del 1883, pubblicato nel *Journal de Mathématiques Élémentaires*. Egli, partendo da alcuni punti notevoli del triangolo, quali il circocentro, l'ortocentro e il baricentro, e da oggetti legati sempre alla geometria del triangolo, quali il cerchio dei nove punti e la retta di Simson-Wallace, diede vita ad alcune serie di teoremi che dipendono l'uno dall'altro in modo iterativo (de Longchamps, 1883). Tra le catene ideate da de Longchamps abbiamo proposto in una classe terza di un liceo scientifico quella associata al circocentro, le cui configurazioni risultano a nostro parere le più intuitive per gli alunni poiché coinvolgono solo semplici teoremi di geometria piana. Nel paragrafo che segue illustreremo brevemente i teoremi affrontati poi in classe.

3 Geometria ricorrente: la catena sul circocentro

La catena sul circocentro è una delle serie di configurazioni di geometria ricorrente ideate da Gaston de Longchamps, che, partendo dal concetto geometrico di circocentro, e quindi dalla circonferenza

4. Più nello specifico, si tratta delle seguenti pagine all'interno dei lavori qui citati: NCTM (2000, pp. 38, 59, 296); Anichini et al. (2003, pp. 75, 94, 246, 387, 406) e MIUR (2010, pp. 337, 340, 364, 367).

circoscritta ad un triangolo, dimostra una sequenza di teoremi che dipendono l'uno dall'altro in modo ricorsivo. I vari passi della suddetta catena sono riportati qui di seguito e illustrati in Figura 1 e in Figura 2.

- Se da quattro rette nel piano, 1, 2, 3 e 4, che si intersecano a due a due, se ne esclude una alla volta, si ottengono quattro insiemi di tre rette ciascuno. Ogni insieme di tre rette determina un triangolo e quindi una circonferenza circoscritta: si hanno dunque quattro triangoli e quattro circonferenze circoscritte. Indicando con O_{ijk} il circocentro del triangolo formato dalle rette i, j e k , ovvero il centro della circonferenza circoscritta a tale triangolo, si hanno i quattro punti O_{123} , O_{124} , O_{134} e O_{234} . Si dimostra che:

1. le quattro circonferenze si incontrano in un punto P ;
2. i quattro circocentri O_{123} , O_{124} , O_{134} e O_{234} appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro è denotato con O_{1234} .

Si vuole evidenziare che anche il punto P appartiene alla circonferenza per i punti O_{123} , O_{124} , O_{134} e O_{234} (Figura 1).

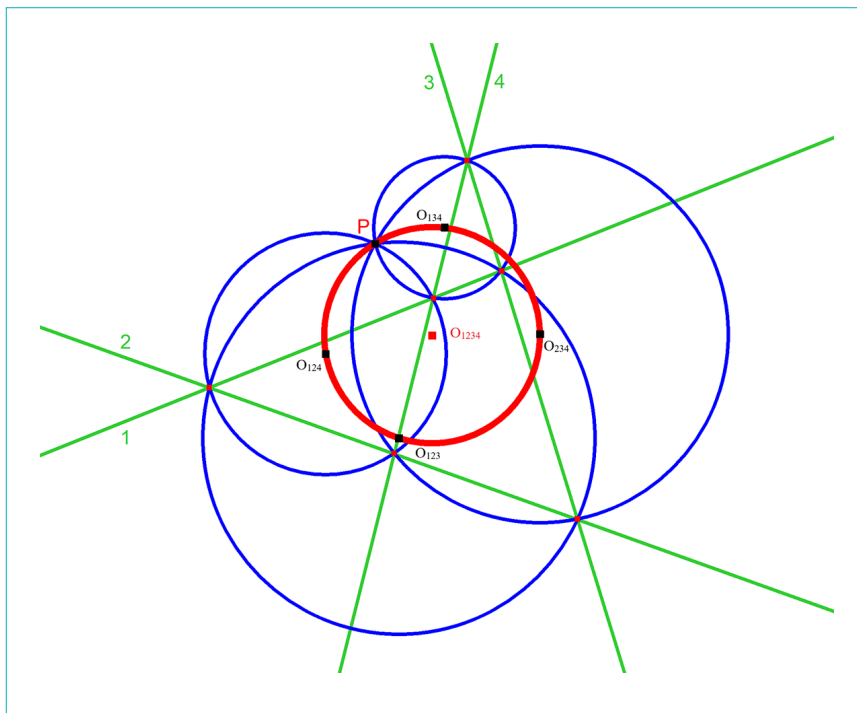


Figura 1. Configurazione con quattro rette.

- Se da cinque rette nel piano, 1, 2, 3, 4 e 5, che si intersecano a due a due, se ne esclude una alla volta, si ottengono cinque insiemi di quattro rette ciascuno. Secondo quanto descritto nel passo precedente, da ognuno di tali insiemi si determinano una circonferenza e un punto, il suo centro. Quindi si hanno in totale cinque circonferenze e cinque punti indicati con O_{1234} , O_{1235} , O_{1245} , O_{1345} e O_{2345} . De Longchamps ha provato che:

1. le cinque circonferenze determinate si incontrano in un punto P ;
2. i cinque punti O_{1234} , O_{1235} , O_{1245} , O_{1345} e O_{2345} appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro denotiamo con O_{12345} .

Notiamo che, contrariamente a quanto osservato nel passo precedente, il punto P non appartiene alla circonferenza per i punti O_{1234} , O_{1235} , O_{1245} , O_{1345} e O_{2345} (Figura 2).

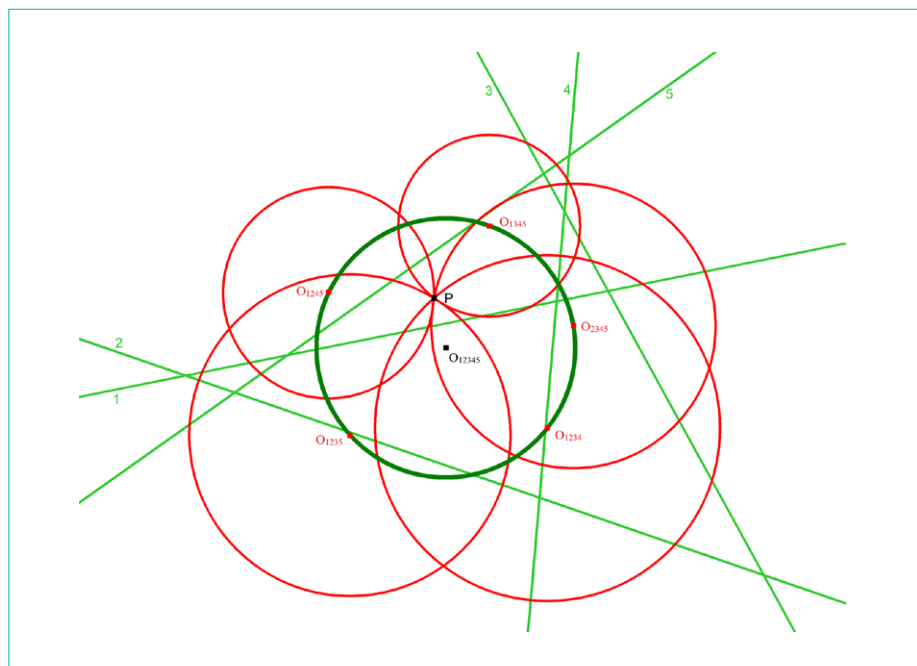


Figura 2. Configurazione con cinque rette.

Tale ragionamento è stato generalizzato da de Longchamps nel modo seguente:

- Se da n rette nel piano, $1, 2, 3, \dots, n$, che si intersecano a due a due, se ne esclude una alla volta, si ottengono n insiemi di $n - 1$ rette ciascuno e da ognuno di questi insiemi una circonferenza e un punto, il suo centro, definiti per ricorrenza. Allora si ha che:
 1. le n circonferenze determinate si incontrano tutte in uno stesso punto P ;
 2. i centri di tali circonferenze appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro viene denotato con $O_{123\dots n}$.
- Si vuole sottolineare che tale circonferenza non contiene il punto P , proprietà soddisfatta soltanto nel caso $n = 4$.

4 Scelte metodologiche e didattiche

L'esperienza oggetto di questo contributo è incentrata sulla costruzione di configurazioni geometriche che, come mostrato nel lavoro di de Longchamps, dipendono l'una dall'altra in modo iterativo. Come anticipato, il percorso è rivolto ad alunni delle classi terze di un liceo scientifico. Si presuppone che questi, avendo studiato la geometria euclidea del piano durante il primo biennio, abbiano già una certa dimestichezza con le relative definizioni e proprietà elementari. I prerequisiti richiesti sono gli elementi di base della geometria piana, in particolare: i punti notevoli del triangolo, i criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli, la somma degli angoli interni di un poligono, la relazione tra angoli alla circonferenza e angoli al centro che insistono sullo stesso arco, la congruenza di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco e la condizione di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza.

Con riferimento al curriculum Matematica 2003 (Anichini et al., 2003) riportiamo di seguito le cono-

scienze e le abilità formative che si vogliono far acquisire durante il percorso:

- proprietà fondamentali della circonferenza, proprietà angolari;
- poligoni inscrittibili in una circonferenza;
- individuare e riconoscere proprietà di figure del piano;
- analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini;
- realizzare costruzioni geometriche elementari mediante software di geometria;
- applicare in semplici casi il principio di induzione;
- esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà;
- verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione;
- produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni;
- confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri.

Tali conoscenze e abilità sono perfettamente coerenti con i risultati di apprendimento delle aree logico-argomentativa e scientifica, matematica e tecnologica, e con gli obiettivi specifici di apprendimento riportati nelle Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010).⁵

Al fine di favorire un approccio graduale e sistematico al pensiero teorico, si è pensato di utilizzare lo strumento metodologico della *discussione matematica*, opportunamente gestito dall'insegnante-mediatore. Infatti

«in essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo, in quanto ha presenti gli obiettivi generali e specifici dell'attività proposta».

(Anichini et al., 2003, p. 32)

Il percorso è stato organizzato in cinque fasi:

1. *Verifica dei prerequisiti e introduzione dei concetti utili per la comprensione di quanto proposto in seguito.*

Come prima attività si prevede un ripasso dei prerequisiti, ovvero gli argomenti di base della geometria piana sopra elencati. Successivamente si vuole stimolare una discussione sulla definizione di una circonferenza per i punti di intersezione di tre rette del piano che si intersecano a due a due e sulla formalizzazione della relativa dimostrazione.

2. *Introduzione del principio di induzione.*

Ci si propone di introdurre il principio di induzione come processo dimostrativo mediante il quale si possono provare numerosi problemi di aritmetica elementare, quali determinare la somma dei primi n numeri dispari e la somma dei primi n numeri pari. In un secondo momento si cercherà di utilizzare il principio di induzione anche per dimostrare alcune proprietà geometriche, quali determinare la somma degli angoli interni di un poligono di n lati.

3. *Il processo ricorsivo. Esplorazione con GeoGebra.*

L'obiettivo di tale fase è condurre gli alunni a riflettere sui possibili scenari che si presentano quando si incrementa di una unità il numero delle rette, ovvero considerando quattro rette che si intersecano a due a due. La finalità è che considerino le quattro rette di partenza in gruppi da tre escludendo una retta alla volta, in modo tale da far entrare in gioco il processo ricorsivo. Infatti, avendo già provato che è possibile costruire una circonferenza partendo da tre rette, gli alunni sono in grado di applicare, con l'ausilio di GeoGebra, il ragionamento per tutti e quattro i gruppi, ottenendo quattro circonferenze.⁶

5. Si vedano nello specifico la p. 7 e le pp. 338–341 di tale documento.

6. È possibile interagire con la configurazione cliccando sul seguente link: <https://www.geogebra.org/m/evjrnkkg>.

4. *Dall'argomentazione alla dimostrazione.*

La prima attività di questa fase consiste nell'indagare quale relazione sussiste tra le quattro circonferenze e i relativi centri ponendo sotto forma di intervista alla classe, suddivisa in gruppi, le seguenti domande stimolo:

- i. Quanti triangoli si generano da quattro rette che si intersecano a due a due?
- ii. Quante circonferenze?
- iii. Che caratteristica hanno tali circonferenze?
- iv. E i loro centri?

A questo punto si prevede una fase di interazione fra gli alunni di ciascun gruppo: essi potranno produrre delle congetture e confrontarsi fra loro al fine di rispondere alle domande stimolo poste, argomentando anche sulle dovute motivazioni. Ci si aspetta che dall'esplorazione della configurazione ottenuta osservino che le quattro circonferenze si intersecano tutte in uno stesso punto e che, determinati i loro centri, riescano ad individuare la circonferenza per tre di tali centri e verificare che anche il quarto appartiene alla circonferenza trovata.⁷

Successivamente ci si propone di ragionare sull'esigenza di determinare una giustificazione formale di quanto rilevato graficamente mediante il software (primo passo della catena). Per giungere ad una dimostrazione all'interno di un processo logico-deduttivo si può procedere in diversi modi, a seconda del contesto classe o del gruppo di studenti che partecipano al percorso. Di fronte ad alunni abituati al processo dimostrativo gli si può chiedere di trovare individualmente o in piccoli gruppi una possibile dimostrazione, o i primi passi della stessa. Nel caso in cui non riescano a giungere a conclusioni accettabili, nel senso di Mariotti (2000), oppure se non hanno familiarità con le dimostrazioni, si procede discutendo insieme a loro sui vari passi che portano alla relativa formalizzazione.

5. *Generalizzazione dei teoremi trattati.*

La prima attività di tale fase consiste nel chiedere agli alunni cosa accade quando si incrementa ancora di una unità il numero delle rette, ovvero quando si considerano cinque rette che si intersecano a due a due. A questo punto sarà evidente se hanno compreso appieno il processo ricorsivo. Infatti, ci aspettiamo che, ripetendo il ragionamento del passo precedente, riescano a individuare cinque gruppi di quattro rette ciascuno e a determinare cinque circonferenze con le proprietà succitate.⁸ Per aiutarli nella costruzione della nuova configurazione si prevede di dedicare del tempo all'introduzione e definizione delle Macro necessarie, che possono essere utilizzate anche per realizzare configurazioni con un maggior numero di rette. In tal modo si vuole guidare gli alunni verso la generalizzazione dei passi della catena studiata.

Per poter valutare il raggiungimento degli obiettivi del percorso si utilizzeranno le registrazioni delle discussioni in classe, le produzioni degli alunni in itinere e le interviste, avvenute a distanza di alcune settimane dalla conclusione delle attività, sia degli allievi sia dei rispettivi insegnanti di matematica.

5 Descrizione del percorso

Il percorso didattico di geometria ricorrente è stato svolto in una classe terza del liceo scientifico statale "Stanislao Cannizzaro" di Palermo durante le ore curriculari. Da un incontro preliminare con l'insegnante di matematica è emerso che anche gli alunni più preparati presentavano diffuse lacune in

7. Sia la costruzione che la relativa Macro sono disponibili al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/xxxxe9jg>.

8. La relativa costruzione è disponibile al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/u4btwwsc>.

geometria avendo acquisito gli obiettivi di apprendimento del primo biennio soltanto parzialmente. Si è pensato che in un tale contesto il reiterare le costruzioni, come richiesto da un percorso incentrato sulla ricorsione, potesse contribuire a favorire l'apprendimento degli argomenti di geometria euclidea. La durata del percorso è stata di quindici ore suddivise in sei incontri, uno a settimana dalla fine di marzo all'inizio di maggio 2023. Entrambe le autrici erano presenti in classe, una ha rivestito il ruolo di insegnante-mediatore proponendo e conducendo le attività, mentre l'altra si è occupata di registrare le produzioni degli alunni.

5.1 Primo e secondo incontro: prerequisiti ed elementi di geometria piana

Durante il primo incontro della durata di due ore è stata presentata per somme linee l'attività didattica con un'introduzione all'ambiente di geometria dinamica GeoGebra. La maggior parte degli alunni ha dichiarato di non saper usare il software, pur conoscendone l'esistenza. Al fine di far familiarizzare gli allievi con GeoGebra è stato proposto di realizzare sul proprio foglio di lavoro virtuale alcune costruzioni elementari, quali il punto medio e l'asse di un segmento, la bisettrice di un angolo e la circonferenza per tre punti, anche se nel software risultano già definiti. Inoltre, mediante una discussione di gruppo stimolata dall'insegnante-mediatore, è stata svolta un'indagine preliminare sulle conoscenze relative alla geometria del triangolo, in particolare sui punti notevoli, sui criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli. Considerato che in relazione ai punti notevoli sono state rilevate parecchie difficoltà – gli alunni hanno mostrato una certa padronanza solo del concetto di ortocentro – tale argomento è stato ripreso nel complesso.

Nel corso del secondo incontro, durato un'ora e trenta minuti, sono state introdotte alcune proprietà di geometria piana utili per la trattazione degli argomenti oggetto del percorso. In particolare, si è posta l'attenzione sulla somma degli angoli interni di un poligono, sulla relazione tra angolo al centro e angolo alla circonferenza, sulla congruenza di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco e sulla condizione di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza.

5.2 Terzo incontro: il processo ricorsivo e la costruzione della configurazione con quattro rette

La prima parte del terzo incontro, durato in tutto due ore e trenta minuti, è stata dedicata all'introduzione del processo ricorsivo. È stato definito il principio di induzione, che è stato utilizzato insieme agli alunni per determinare la somma dei primi n numeri dispari, la somma dei primi n numeri pari e la somma degli angoli interni di un poligono. Successivamente, riprendendo la proprietà secondo cui tre rette nel piano che si intersecano a due a due determinano un triangolo e quindi una circonferenza che lo circoscrive, si è spostata l'attenzione al caso in cui si incrementa di una unità il numero delle rette iniziali, ovvero si considerano quattro rette. A tal proposito sono state poste dall'insegnante-mediatore le domande stimolo i-iv illustrate al punto 4 del par. 4. La classe, suddivisa in sei gruppi,⁹ ciascuno formato da quattro o cinque allievi, ha avviato con l'ausilio di GeoGebra una fase di esplorazione e di formulazione di congetture. Dopo alcuni minuti di interazione e dibattito fra i componenti di ogni gruppo sono state registrate le interviste in cui gli alunni hanno esplicitato a voce ciò su cui hanno riflettuto precedentemente. Riportiamo le risposte a nostro parere più interessanti secondo quanto sarà esplicitato in seguito.

Intervista gruppo 1:

P.: «Abbiamo incominciato a fare l'intersezione fra le varie rette, come ci aveva detto la professoressa. Abbiamo individuato che i triangoli... che sono quattro. Poi successivamente abbiamo appunto detto... [Chiede a un compagno di continuare]».

9. La suddivisione in gruppi è avvenuta in modo casuale.

V.: «Allora dai punti che avevamo trovato tra l'intersezione fra le rette abbiamo trovato poi le circonferenze e trovando i punti di queste circonferenze abbiamo scoperto che...»

Intervistatore: «Quante circonferenze?»

V.: «Quattro circonferenze... e trovando i centri di queste circonferenze abbiamo scoperto che con il centro di ogni circonferenza si formava un poligono che aveva gli angoli opposti supplementari».

Intervistatore: «Che poligono?»

V.: «Un poligono che era... un quadrilatero».

Intervistatore: «Che caratteristica comune hanno le circonferenze?»

V.: «Che si intersecano tutte tra di loro».

Intervista gruppo 2:

G.: «Abbiamo disegnato quattro circonferenze passanti per quattro triangoli e i centri di queste quattro circonferenze formano poi un quadrilatero che a sua volta può essere inscritto in una circonferenza».

Intervistatore: «[Ripropono la terza domanda a cui gli allievi non hanno risposto] Che caratteristica hanno le circonferenze che avete costruito?»

I.: «Sono tutte per un punto, si intersecano, no? Cioè sono tutte...»

C.: «Passanti per un punto».

Intervista gruppo 4:

E.: «Allora la prima domanda, quanti triangoli si formano, si formano quattro triangoli. Alla seconda domanda, quante circonferenze si formano, si formano a loro volta quattro circonferenze. Le caratteristiche di queste circonferenze sarebbero che hanno tutte un punto in comune e i loro centri, i centri di queste circonferenze formano a loro volta un quadrilatero in cui la somma degli angoli opposti è 180° ».

Intervistatore: «Quindi? [Nessuna risposta da parte degli alunni] Se la somma degli angoli opposti è 180° ... [Ancora nessuna risposta] Qual è stata l'ultima cosa che avete fatto? [Riferendosi alla costruzione visibile nello schermo]».

E.: «La circonfer... Ah! Quindi si può formare una circonferenza che prende i quattro punti [riferendosi ai vertici del poligono] del nostro poligono per il teorema di inscrivibilità».

M.: «Più... [Si interrompe]».

Intervistatore: «Più? [Volendo spronare M.] Cosa stavi dicendo?»

M.: «[Completando quanto dichiarato da E.] Che prende i quattro punti delle circonferenze più il punto in comune fra loro».

Dai contributi degli alunni si evince che essi non hanno avuto difficoltà a rispondere alle prime due domande proposte e a osservare, mediante l'apposito strumento di GeoGebra, che i centri delle quattro circonferenze costituiscono i vertici di un quadrilatero con gli angoli opposti supplementari. Inoltre, il criterio di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza, trattato durante la lezione precedente, per almeno uno dei gruppi costituisce la garanzia (secondo il modello di Toulmin) che consente loro di individuare facilmente l'esistenza della circonferenza passante per i quattro circocentri relativi alla configurazione in esame. Contrariamente alle nostre aspettative, gli alunni dei primi due gruppi non hanno evidenziato autonomamente che le quattro circonferenze circoscritte ai quattro triangoli si intersecano in uno stesso punto, invece i membri del quarto gruppo non solo hanno rilevato tale fatto, ma hanno anche sottolineato che la circonferenza per i quattro circocentri passa pure per il suddetto punto di intersezione. Durante i primi tre incontri GeoGebra ha rivestito una funzione di primaria importanza divenendo mediatore nel processo di creazione di contenuti matematici. Infatti, permettendo agli studenti di

esplorare autonomamente le costruzioni realizzate, essi hanno potuto interagire con gli oggetti delle configurazioni e riconoscerne le proprietà caratteristiche.

5.3 Quarto e quinto incontro: dimostrazione del primo passo della catena

Dopo aver effettuato un riepilogo dei risultati ottenuti nella lezione precedente, la prima parte del quarto incontro, della durata di tre ore, si è incentrata sulla definizione della Macro relativa alla circonferenza passante per i circocentri associati alla configurazione con quattro rette. Successivamente si è posta l'attenzione sull'esigenza di fornire una dimostrazione dei risultati congetturati durante la fase esplorativa con GeoGebra. Poiché la classe durante il primo biennio non era stata abituata al processo dimostrativo, si è ritenuto opportuno avviare una discussione guidata, mediante domande mirate, per condurli a dimostrare che le quattro circonferenze circoscritte ai triangoli individuati da quattro rette si incontrano in uno stesso punto. Tra le varie dimostrazioni presenti in letteratura, ai fini didattici abbiamo scelto quella di Pickering (1806) che si compone di due parti: nella prima parte si prova che il punto P , comune a due circonferenze, appartiene a una terza circonferenza usando la condizione di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza; nella seconda parte, in maniera del tutto analoga alla prima, si dimostra che il punto P appartiene anche alla quarta circonferenza.¹⁰ Vogliamo evidenziare che nel provare la seconda parte, ripercorrendo lo stesso ragionamento effettuato in precedenza e giustificando in modo chiaro ogni passaggio, gli alunni si sono mostrati più reattivi e autonomi piuttosto che nella dimostrazione della prima, in cui sono apparsi più vincolati alla guida dell'insegnante-mediatore.

Durante il quinto incontro, durato anch'esso tre ore, mediante una discussione guidata gli allievi sono stati avviati a dimostrare, seguendo l'idea di de Longchamps, che i circocentri dei quattro triangoli appartengono a una stessa circonferenza.¹¹ Per realizzare ciò, abbiamo suddiviso la dimostrazione in alcuni passi intermedi, ottenendo in tal modo una concatenazione di più argomentazioni, in cui la conclusione di un passaggio parziale diviene la garanzia per il successivo fino al raggiungimento della tesi. Come primo passo l'insegnante-mediatore ha chiesto alla classe di porre l'attenzione alle due coppie di triangoli BDE , $O_1O_3O_4$ e AEF , $O_1O_2O_3$ (Figura 3)¹² e la grande maggioranza degli alunni ha rilevato in modo autonomo la similitudine dei triangoli di ciascuna coppia, avendo utilizzato come garanzia il primo criterio di similitudine, ovvero la congruenza degli angoli corrispondenti verificata mediante l'apposito strumento di GeoGebra.

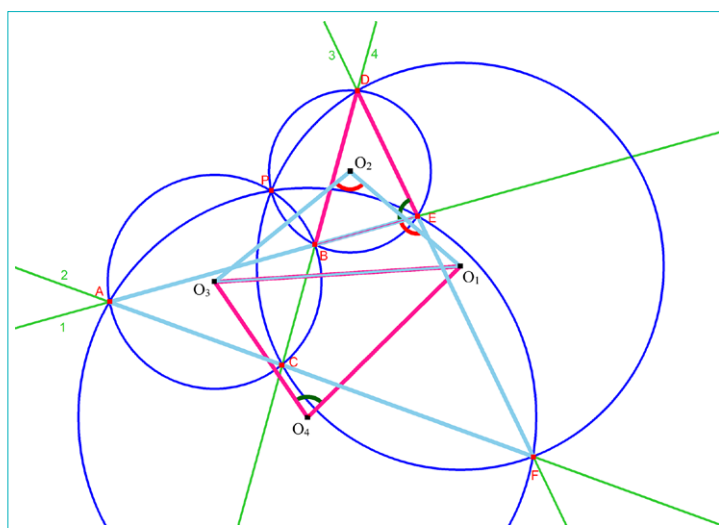


Figura 3. Configurazione della dimostrazione di de Longchamps.

10. Per la dimostrazione completa si rimanda al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/radbkhj6>.

11. Per la dimostrazione in dettaglio si rimanda al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/ajyfyh74>.

12. Per facilitare la notazione O_i denota il circocentro del triangolo ottenuto escludendo la retta i . Ad esempio, con O_1 indichiamo il circocentro del triangolo individuato dalle rette 2, 3 e 4.

In seguito, un alunno si è accorto che il quadrilatero di vertici i circocentri O_1, O_2, O_3 e O_4 ha due angoli opposti supplementari affermando, seppur con un linguaggio non del tutto appropriato, che:

G.: «I due angoli [riferendosi a $\hat{B}\hat{E}\hat{D}$ e $\hat{A}\hat{E}\hat{F}$] proiettati sulla retta formano un angolo di 180° perché D, E ed F appartengono alla stessa retta... e quindi di conseguenza essendo gli stessi angoli [riferendosi agli angoli $\hat{O}_4 = \hat{B}\hat{E}\hat{D}$ e $\hat{O}_2 = \hat{A}\hat{E}\hat{F}$] la loro somma è di 180° ».

Come si evince dall'intervento dell'alunno G., egli prova che gli angoli $\hat{B}\hat{E}\hat{D}$ e $\hat{A}\hat{E}\hat{F}$ sono supplementari usando come garanzia l'allineamento dei punti D, E ed F . Tale conclusione ($\hat{B}\hat{E}\hat{D}$ e $\hat{A}\hat{E}\hat{F}$ supplementari) diviene garanzia per affermare che gli angoli $\hat{O}_2 = \hat{A}\hat{E}\hat{F}$ e $\hat{O}_4 = \hat{B}\hat{E}\hat{D}$ sono supplementari. Per completare la dimostrazione, ovvero per provare che il quadrilatero $O_1O_2O_3O_4$ è inscrittibile in una circonferenza, dal dibattito in classe emerge l'idea di utilizzare nuovamente il criterio di inscrittibilità di un quadrilatero in una circonferenza. Analizzando il comportamento degli studenti nell'ottica di Toulmin, si evince che la maggior parte di essi ha sviluppato argomentazioni corrette, ma soltanto l'alunno G. è riuscito a raggiungere la tesi fornendo una giustificazione accettabile in ambito matematico.

Durante la discussione guidata avviata nel corso del quarto e quinto incontro per dimostrare il primo passo della catena di de Longchamps, abbiamo osservato un miglioramento, seppur lieve, nelle capacità argomentative degli studenti. Questi, infatti, all'inizio del percorso mostravano parecchie difficoltà anche nel fornire le motivazioni di alcuni semplici passaggi. Anche in questo contesto si vuole evidenziare il ruolo fondamentale rivestito da GeoGebra, strumento di mediazione semiotica che funge da ponte tra la fase esplorativa nella quale sono state prodotte delle congetture e quella dimostrativa nella quale sono state validate.

Alla fine del quinto incontro, gli alunni sono stati esortati a ragionare su cosa accade quando si incrementa ancora di un'unità il numero di rette della configurazione iniziale, ovvero passando da quattro a cinque rette del piano che si intersecano a due a due. Dopo aver costruito la nuova configurazione con cinque rette mediante la Macro definita in precedenza, si è dato il via a una nuova fase esplorativa che è durata fino alla fine della lezione.

5.4 Sesto incontro: passi successivi della catena

Nel corso dell'ultimo incontro, durato tre ore, sono state poste delle nuove domande stimolo, similari alle precedenti, sulla configurazione con cinque rette; inoltre gli alunni sono stati invitati a riflettere sulle eventuali differenze tra le due configurazioni. Analogamente a quanto fatto in precedenza sono stati registrati gli interventi dei vari gruppi. Riportiamo di seguito i contributi di coloro che, applicando il processo ricorsivo, hanno effettuato la costruzione della configurazione relativa a cinque rette in modo pressoché automatico.

Intervista gruppo 1:

L.: «Allora abbiamo trovato queste cinque circonferenze con la macro fatta in precedenza, abbiamo notato che queste cinque circonferenze si incontrano in un punto che abbiamo denominato P . E poi... unendo i centri di queste circonferenze abbiamo... trovato, diciamo, un poligono, e questo poligono può essere inscritto dentro, diciamo, un'altra circonferenza».

Intervistatore: «Il fatto che le circonferenze si intersecano in un punto l'avevamo già trovato con quattro rette. Il fatto che i centri appartengono ad una stessa circonferenza l'avevamo già determinato anche con quattro rette. Rispetto alla configurazione con quattro rette c'è una differenza oppure no?»

P.: «All'inizio delle quattro rette era un quadrilatero, mentre adesso è un pentagono».

Intervistatore: «Sì, ovviamente questo sì, è una differenza, ma non era questo quello a cui io facevo riferimento».

V.: «Forse che la circonferenza che... inscritta [sic circoscrive] il poligono non passa invece per il punto P ».

Intervistatore: «Che era il punto?»

V.: «Punto di intersezione di tutte le altre circonferenze».

Intervista gruppo 2:

G.: «Abbiamo notato che i centri delle cinque circonferenze formano un poligono di cinque lati irregolare e che per i vertici di questo poligono passa un'ulteriore circonferenza e inoltre le cinque circonferenze si incontrano tutte in un unico punto».

Intervistatore: «Notate qualche differenza tra questa costruzione con cinque rette e quella con quattro rette?»

G.: «Praticamente ci sono più circonferenze perché si formano più triangoli con le intersezioni, ma una differenza particolare no».

Dalle interviste è emerso che tutti i gruppi, usando la Macro senza difficoltà, hanno visualizzato con GeoGebra che le cinque circonferenze, determinate mediante il processo ricorsivo, si intersecano in uno stesso punto e che i centri delle cinque circonferenze appartengono tutti a un'altra circonferenza. D'altronde la differenza tra la configurazione con quattro rette e quella con cinque rette a cui si riferisce l'intervistatore è stata determinata da un solo gruppo. In particolare, il primo ha anche osservato che il punto di intersezione delle cinque circonferenze non appartiene alla circonferenza determinata dalle cinque rette, contrariamente a quanto avviene nella configurazione con quattro rette.¹³

Nella parte conclusiva dell'incontro gli alunni hanno definito la Macro relativa alla circonferenza associata alla configurazione con cinque rette e l'hanno applicata ripetutamente alla successiva configurazione con sei rette. Mediante una fase esplorativa con GeoGebra hanno notato che la nuova configurazione è del tutto analoga alla precedente: le sei circonferenze determinate si intersecano in uno stesso punto e i loro centri sono concidici. In tal modo, avendo osservato che aumentando il numero delle rette rimangono invariate sia la relazione tra le circonferenze determinate mediante ricorsione che quella tra i relativi centri, gli alunni hanno potuto evincere la generalizzazione della catena in esame.

6 Interviste finali

In questo paragrafo presentiamo i risultati delle interviste conclusive, effettuate a circa tre settimane di distanza dall'ultimo incontro: nella prima parte verranno discusse le risposte date dagli studenti a sei domande; nella seconda invece si riporteranno stralci dell'intervista all'insegnante della classe coinvolta. Tali interviste vanno a indagare l'apprezzamento degli studenti dell'esperienza sia dal punto di vista dei contenuti trattati sia dal punto di vista dell'utilizzo di GeoGebra; servono inoltre come spunto per valutare la consapevolezza sul lascito formativo e disciplinare del percorso.

Di seguito riportiamo le domande poste agli alunni.

1. Hai trovato interessante il percorso sulla geometria ricorrente?
2. Durante l'attività hai incontrato difficoltà? Se sì, come hai cercato di superarle?

¹³. È possibile che le risposte fornite dall'alunno V. del gruppo 1 siano legate a un "effetto Topaze": l'intervistatore con il suo intervento potrebbe aver indotto l'alunno a ragionare per fornire una risposta diversa.

3. Riguardo all'utilizzo di GeoGebra, pensi che sia effettivamente un valido strumento nell'affrontare argomenti di geometria?
4. Sapresti illustrare come funziona il principio di induzione di cui abbiamo parlato durante la nostra attività?
5. Secondo te c'è una qualche connessione tra tale principio e le nostre configurazioni realizzate con GeoGebra?
6. Pensi che sarebbe per te utile partecipare in futuro ad altri corsi di questo tipo?

Prima domanda: «Hai trovato interessante il percorso sulla geometria ricorrente?». Riguardo questa domanda, la totalità degli allievi intervistati ha risposto in modo positivo. Trascriviamo qui di seguito alcune delle risposte registrate.

- V.: «Oltre ad aver imparato appunto molte delle regole geometriche che non conoscevo prima per altri motivi, ho imparato anche ad utilizzare GeoGebra che mi è servito perché comunque io oggi lo uso, quando magari la professoressa lascia degli esercizi riguardanti le rette, le parabole, io oggi lo uso e se lo so usare è grazie al corso perché prima non avevo idea di come si usasse GeoGebra».
- S.: «Allora a me è piaciuto perché secondo me è un approccio diverso per una materia che noi spesso trascuriamo, cioè in particolare la geometria noi non l'avevamo studiata bene, e secondo me studiarla in laboratorio ha suscitato maggiore interesse un po' in tutti noi, perché l'abbiamo sempre un pochino messa da parte, quindi l'ho trovato interessante per questo».
- G.: «Assolutamente sì, l'ho trovato sia interessante perché comunque abbiamo utilizzato anche i computer che non abbiamo la possibilità di utilizzare spesso a scuola soprattutto nell'ambito della geometria, e l'ho trovato anche utile per il mio futuro, perché oltre ad approfondire le conoscenze di geometria, ho riscontrato magari delle tecniche di studio che possono essere utili per l'università, magari, dove l'apprendimento si sposta dai libri sul digitale».

Da tali interventi emerge che, grazie al percorso sulla geometria ricorrente, gli alunni hanno avuto l'opportunità di scoprire un diverso approccio didattico per una materia che in passato non era stata sufficientemente affrontata. In particolare, dalle risposte di V. e di G. si evince che l'aver imparato a usare l'artefatto GeoGebra può tornare utile anche in altri contesti, come ad esempio nello studio della geometria analitica.

Seconda domanda: «Durante l'attività hai incontrato difficoltà? Se sì, come hai cercato di superarle?». Le risposte a questa domanda sono state abbastanza eterogenee; ne riportiamo un paio a nostro parere considerevoli.

- M.: «Forse qualche difficoltà perché geometria non ne avevo mai fatta bene... sulle basi della geometria però ci siamo ritornati in generale perché tutta la classe credo che forse aveva qualche problema, infatti siamo tornati. Siamo partiti un po' dalle basi e quindi anche le cose che forse avremmo dovuto sapere poi le abbiamo ripassate. E poi pure se avevo problemi col programma quando chiamavo voi mi aiutavate».
- G.: «In realtà non ho incontrato grandi difficoltà... ma anche là, il fatto che fossimo insieme agli altri compagni, quindi che avessimo comunque un piccolo gruppo, tanti piccoli gruppi di lavoro, mi aiutava anche a confrontarmi e a riscontrare una validità nei risultati che ottenevo... Riguardo le difficoltà degli argomenti di teoria, delle basi più solide avrebbero aiutato anche magari a comprendere in maniera completa il corso a trecentosessanta gradi da tutti i punti di vista. Comunque, devo dire che non ho riscontrato grandi difficoltà, anche per via delle spiegazioni, dell'interazione che c'era tra gli studenti e la professoressa, perché comunque parlando tanto abbiamo avuto la possibilità di chiarire i nostri dubbi».

La maggior parte degli allievi ha riconosciuto di avere avuto delle difficoltà sui contenuti di base della geometria piana, ma ha anche dichiarato di aver avuto la possibilità di ripassare (o forse di studiare per la prima volta) alcuni argomenti che avrebbero dovuto essere noti. Inoltre, la risposta di G. evidenzia un aspetto fondamentale del lavoro di gruppo: il confronto delle idee consente loro di condividere le argomentazioni, rafforzando le congetture proposte, e migliorare in tal modo la qualità del lavoro.

Terza domanda: «Riguardo all'utilizzo di GeoGebra, pensi che sia effettivamente un valido strumento nell'affrontare argomenti di geometria?». Per quanto riguarda questa domanda gli alunni all'unanimità hanno risposto positivamente sottolineando l'utilità di strumenti di supporto didattico per la geometria. Di seguito alcune delle risposte.

- F.: «Sì, assolutamente, perché queste cose fatte alla lavagna e fatte tutte, cioè tutti che facevano questa cosa in contemporanea, sarebbe stato veramente impossibile. GeoGebra ci ha dato la possibilità, per l'appunto, di costruire delle cose nel computer che effettivamente avevano un senso, capivamo come farle e capiamo come erano costruite, era tutto fatto da noi».
- R.: «Sì, penso che sia utile, soprattutto nei prossimi anni per fisica o matematica... potrebbe esserci utile per rappresentazioni grafiche, quindi saperlo usare ci sarà utile secondo me nei prossimi anni».
- G.: «Certo sì. Assolutamente sì. Anche perché il mondo è in continua evoluzione e da questo punto di vista sarà necessario iniziare a utilizzare sempre più strumenti tecnologici che comunque garantiscono una certa precisione in più rispetto anche alla carta».

Quarta domanda: «Saresti illustrare come funziona il principio di induzione di cui abbiamo parlato durante la nostra attività?». In relazione alle risposte a questa domanda, la grande maggioranza degli alunni intervistati ha mostrato una certa difficoltà a illustrare il principio d'induzione. Soltanto un alunno, di cui trascriviamo la risposta, ha cercato di renderne l'idea.

- G.: «Allora il principio di induzione è un principio che giunge ad una soluzione generale, partendo da tanti casi specifici se non mi sbaglio... abbiamo verificato la legge per quanto riguarda la somma degli angoli interni di un poligono: prima per il triangolo, poi per un quadrato, poi per il pentagono e così via giungendo alla conclusione che se diciamo funziona per la maggior parte, per la quasi totalità di questi... se funziona per uno dovrebbe funzionare per tutti. Cioè funziona per uno e abbiamo fatto chiaramente delle prove su più poligoni, anche magari con dei numeri più alti, più particolari quindi per cercare di arrivare a tutti i casi possibili, cosa ovviamente impossibile, però, perché i numeri sono infiniti».

Da quest'intervento si evince che l'alunno G. non ha compreso (o forse non ricordava) l'utilizzo che è stato fatto in classe del principio di induzione per dimostrare la proprietà relativa alla somma degli angoli interni di un poligono. Dalla sua risposta appare evidente che egli confonde il principio di induzione con il processo di ragionamento inferenziale che, partendo da alcuni casi particolari, permette di generalizzare.

Quinta domanda: «Secondo te c'è una qualche connessione tra tale principio e le nostre configurazioni realizzate con GeoGebra?». Riguardo le risposte a questa domanda ne abbiamo registrate alcune molto interessanti.

- G.: «Per quanto riguardava le circonferenze che si formavano dalle intersezioni di più rette ci accorgevamo che indipendentemente dall'angolazione delle rette, comunque si andava a formare sempre un certo numero di circonferenze che si intersecavano in un unico punto, poi in

base anche al numero quattro, cinque, sei rette la conclusione era sempre la stessa... però le figure, le posizioni dei punti variavano proprio per via della differente angolazione delle rette. Ma diciamo la conclusione a cui dovevamo arrivare non variava».

- F.: «Credo penso sia il fatto che... noi, per esempio, abbiamo preso quattro rette e per ogni retta siamo riusciti a trovare una circonferenza, abbiamo trovato che queste circonferenze, i centri di queste circonferenze avevano una circonferenza, cioè facevano parte di una singola circonferenza e poi abbiamo creato il tool su questa cosa e quindi abbiamo dimostrato¹⁴ che valeva la stessa cosa con cinque rette».
- A.: «Abbiamo sempre aggiunto, man mano che disegnavamo di più, diverse rette, abbiamo visto come cambiava il numero delle circonferenze, però in un certo senso restava sempre uguale il procedimento, il risultato che ottenevamo».

Dai contributi si evince che gli alunni, reiterando il procedimento sviluppato per la configurazione di quattro rette e utilizzando le Macro definite, sono riusciti a produrre congetture sviluppando le loro capacità argomentative e ad individuare le caratteristiche comuni alle configurazioni man mano che aumentava il numero delle rette di partenza. Tuttavia, dalle risposte fornite è emerso che non è stato ben recepito il nesso tra il principio di induzione e l'attività sulla ricorsione su cui è stato incentrato il percorso didattico.

Sesta domanda: «Pensi che sarebbe per te utile partecipare in futuro ad altri corsi di questo tipo?». Per ciò che concerne l'ultima domanda tutti gli intervistati hanno manifestato concordemente la stessa opinione mettendo in evidenza ancora una volta il ruolo rilevante di un artefatto digitale, come si evince dalle seguenti risposte.

- G.: «Assolutamente sì, perché comunque si tratterebbe di ampliare, migliorare, perché no, anche apprendere nuove conoscenze da zero, per cui ovviamente, sia che si tratti dei corsi che poi hanno un fine, ovvero magari una gara finale o comunque che sia un corso semplice, diciamo per puro apprendimento, che come fine ha il puro apprendimento, io sono assolutamente favorevole».
- A.: «Sì, direi di sì, perché diciamo comunque queste cose che abbiamo fatto penso che siano delle cose abbastanza basiche, invece poi magari anche fare qualcosa di più complicato, più difficile, non dispiacerebbe».
- F.: «Sì, sì, assolutamente, perché secondo me è un metodo di apprendimento abbastanza importante e, che rispetto a una noiosa lezione, magari con l'ausilio di GeoGebra può darti, può aiutarti con un divertimento a un metodo di studio più apprendibile».
- R.: «Sì, sicuramente è interessante partecipare a corsi del genere durante le ore scolastiche, anche per fare qualcosa di diverso... e spezzare la monotonia della scuola, diciamo».

Infine, riportiamo di seguito l'intervista effettuata dalle autrici all'insegnante della classe.

Intervistatore: «Hai notato un cambio di atteggiamento da parte degli alunni nei confronti della geometria, in senso lato della matematica?»

Insegnante: «Allora io ti devo dire di sì, ora io non so se è effettivamente legato al contesto del corso, secondo me sì o perlomeno anche alla reciproca conoscenza che ormai si è in qualche modo assodata. Però io ti devo dire che, e lo dicevo anche alla coordinatrice, che li vedo diversi nell'atteggiamento e hanno una disponibilità all'ascolto maggiore, seguono di più e

14. L'alunno F. qui usa impropriamente il termine "dimostrato".

fanno domande più interessanti, complessivamente ti dico; in effetti più partecipi. Sì, devo dire di sì, senza ombra di dubbio. Ora da cosa dipende effettivamente io non te lo so dire, però c'è questo cambio di atteggiamento. Ma anche il fatto di essere in aula informatica, e quindi vedere in qualche modo, rendere più concreto quello che stanno facendo, secondo me è servito moltissimo. Cioè, hanno visto un aspetto della matematica che forse non avevano ancora visto».

Intervistatore: «Che cosa pensi relativamente alla geometria fatta in laboratorio mediante GeoGebra?»

Insegnante: «Secondo me è eccezionale; proprio GeoGebra, secondo me, è uno strumento eccezionale, io lo uso regolarmente in seconda perché i ragazzi vedono proprio, per cui comprendono meglio. Quindi, secondo me, questo aspetto è assolutamente da sottolineare. Per me funziona, funziona tanto, funziona veramente tanto. Poi loro che non l'avevano mai fatto, secondo me hanno proprio scoperto questo aspetto».

Intervistatore: «Ritieni che il percorso sia stato utile anche per una futura progettazione di attività in ambito geometrico nella stessa classe?»

Insegnante: «Assolutamente sì. Anzi mi auguro che tu possa fare anche quello di geometria analitica nello spazio. Mi piacerebbe moltissimo l'anno prossimo proprio con loro».

7 Bilancio conclusivo

In quest'ultimo paragrafo si propone un bilancio conclusivo dell'esperienza descritta nelle pagine precedenti, basato principalmente sulle osservazioni effettuate in itinere dalle due autrici.

Il percorso sulla geometria ricorrente ha consentito agli alunni di affrontare lo studio della geometria piana secondo una differente prospettiva: da semplici osservatori sono divenuti i protagonisti delle attività. Dallo svolgimento del percorso effettuato, dalle interviste in itinere e da quelle finali abbiamo dedotto che gli allievi non solo hanno avuto la possibilità di colmare alcune lacune pregresse, ma il fatto di ripetere lo stesso procedimento nelle costruzioni delle varie configurazioni ha permesso loro di assimilare gli argomenti di base della geometria euclidea affrontati. Durante l'attività svolta in classe abbiamo osservato che la grande maggioranza degli alunni, partendo dai casi particolari esaminati e reiterando l'utilizzo delle Macro definite in piena autonomia, ha rivolto l'attenzione alle configurazioni della catena di de Longchamps con un maggior numero di rette, facendo propria la nozione di generalizzazione. Considerato che in passato la classe non aveva affrontato il processo ricorsivo neanche in ambito aritmetico, riteniamo che la definizione del concetto di ricorsione in geometria sia stata recepita. Tuttavia, dalle interviste finali è emerso che gli studenti hanno confuso il principio di induzione con l'induzione intesa come processo inferenziale. Quest'ultima è stata correttamente utilizzata dagli alunni per generalizzare le proprietà caratteristiche della catena studiata.

Dalla discussione guidata dall'insegnante-mediatore durante le varie attività è risultato che la quasi totalità degli alunni ha partecipato attivamente alla fase argomentativa. Inoltre, poiché la classe non era stata educata al processo dimostrativo, abbiamo ritenuto opportuno guidare gli studenti nel formalizzare la dimostrazione del teorema relativo alla configurazione con quattro rette. Nonostante la grande maggioranza della classe abbia contribuito efficacemente alla realizzazione di buona parte della dimostrazione, soltanto un alunno è riuscito a giungere alla tesi in modo autonomo. Esaminando nel complesso l'intero percorso abbiamo notato un moderato sviluppo delle capacità argomentative degli alunni. Sebbene durante le prime attività l'intera classe avesse mostrato difficoltà nel giustificare anche i passaggi più semplici, abbiamo rilevato un progressivo miglioramento per ciò che concerne le verbalizzazioni fornite dagli allievi con maggiore consapevolezza seguendo ragionamenti logici appropriati.

Volendo esprimere le nostre considerazioni sull'andamento generale di tale esperienza, evidenziamo che la maggior parte degli alunni ha partecipato vivacemente alle lezioni, manifestando un entusiasmo via via sempre più crescente. Anche quei pochi studenti che hanno mostrato una certa indifferenza iniziale si sono lasciati facilmente coinvolgere, hanno collaborato nei gruppi di lavoro, e, durante gli ultimi incontri, hanno fornito pure il proprio contributo personale. Sulla base di quanto espresso dagli alunni e dall'insegnante della classe e in virtù delle nostre valutazioni, riteniamo che il percorso abbia portato risultati positivi e non escludiamo l'ipotesi di poterlo replicare proponendo alcune delle altre catene di teoremi ideate da de Longchamps.

Ringraziamenti

Si ringraziano gli alunni e l'insegnante di matematica della classe III D a.s. 2022-23 del liceo scientifico statale "Stanislao Cannizzaro" di Palermo che hanno partecipato con entusiasmo al percorso didattico. Un ringraziamento speciale va al prof. Benedetto Di Paola per la sua disponibilità e per il supporto ricevuto durante la progettazione delle attività e la stesura di quest'articolo.

Questo lavoro è stato parzialmente supportato dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi" (INDAM), gruppo di ricerca GNSAGA.

Bibliografia

- Accomazzo, P., Beltramo, S., Sargenti, A., & Robutti, O. (Eds.) (2013). *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*. Ledizioni.
- Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2003). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. Ciclo secondario*. MIUR, UMI, SIS, Mathesis.
- Balacheff, N. (2001). *Imparare la prova*. Pitagora Editrice.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746–783). Routledge.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: Artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 32(3), 270–294.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M. A., Sträßer, R., & den Heuvel-Panhuizen, V. (2016). *European traditions in didactics of mathematics*. ICME-13 Monographs, Springer Open.
- Brigaglia, A., Raspanti, M. A., & Rogora, E. (2021). L'uso di un software di geometria dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 6(1), 37–67.
- de Longchamps, G. (1883). La Géométrie Récurrente. *Journal de Mathématiques Élémentaires*, 2(2), 3–10, 25–33, 49–56, 73–78, 121–126.
- Duval, R. (1998). *Argomentare, dimostrare, spiegare: Continuità o rottura cognitiva?* Pitagora Editrice.

- Hasan, R. (2005). Semiotic mediation and tree exotropic theories: Vygotsky, Halliday and Bernstein. In J. J. Webster (Ed.), *Language, society and consciousness: The collected work of Ruqaiya Hasan* (Vol. 1, pp. 130–156). Equinox eBooks Publishing.
- Leron, U., & Zazkis, R. (1986). Computational Recursion and Mathematical Induction. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 25–28.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1–3), 25–53.
- Mariotti, M. A. (2022). *Argomentare e dimostrare come problema didattico*. UTET Università.
- Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2010). *Schema di regolamento recante le Indicazioni Nazionali per i percorsi liceali* [Decreto 15 marzo 2010]. <https://www.istruzione.it/alternanza/allegati/NORMATIVA%20ASL/INDICAZIONI%20NAZIONALI%20PER%20I%20LICEI.pdf>
- Nannini, B., & Telloni, A. I. (2022). Levels of generalization in the objectification of the recursion step. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Eds.). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 235–242). PME & Universidad de Alicante.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the *ck₂*-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104–122.
- Pickering, G. (1806). First Solution, by Mr. George Pickering. *New series of the Mathematical Repository by Thomas Leybourn*, 1, 170. Royal Military College.
- Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press.
- Vygotsky, L. S. (1981). The instrumental method in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology* (pp. 144–188). M. E. Sharpe.