

Dare senso alle risposte degli studenti: la conoscenza interpretativa nella formazione insegnanti¹

Disponibile anche
in inglese

Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions

Maria Mellone*, Carlos Miguel Ribeiro* e Arne Jakobsen*

*Università di Napoli Federico II – Italia

*UNICAMP – Brasile

*Università di Stavanger – Norvegia

Sunto / In questo lavoro, facendo riferimento al quadro della Conoscenza Matematica per l'Insegnamento (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) parleremo di conoscenza interpretativa, ossia quella particolare conoscenza coinvolta nei processi di interpretazione degli insegnanti. Al fine di indagare e chiarirne le caratteristiche e dimensioni, abbiamo costruito un'attività in cui si richiede di interpretare alcune risposte date dagli alunni ad un problema riguardante i numeri razionali. Abbiamo proposto questa attività ad un gruppo di maestri in formazione e, utilizzando il costrutto MKT, abbiamo rilevato che, nell'interpretazione delle risposte degli alunni, un ruolo importante è giocato dai domini della Conoscenza Comune e Specializzata dei Contenuti (CCK e SCK).

Parole chiave: formazione dei futuri insegnanti; conoscenza interpretativa; osservazione; numeri razionali; rappresentazioni; composizione operativa.

Abstract / In this work, referring to the framework of the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) we will talk about interpretative knowledge, that is the particular knowledge involved in the processes of teacher interpretation. In order to investigate this particular knowledge and clarify its characteristics and dimensions, we have designed a questionnaire to which we asked a group of future teachers to interpret some productions given by the pupils to a problem concerning rational numbers. Using the MKT construct, we have found that, in the interpretation and evaluation by future teachers of the answers productions by pupils, an important role is given by the domains of the Common and Specialized Knowledge of Contents (CCK and SCK).

Keywords: prospective teachers training; interpretative knowledge; noticing; rational number; operational composition.

1 Premessa

Al giorno d'oggi un aspetto importante dell'insegnamento della matematica è la promozione della riflessione degli studenti sull'efficacia dei ragionamenti e delle rappresentazioni (proprie e altrui) scelte per risolvere un problema. Questo compito richiede, tra le altre cose, la capacità degli insegnanti di dare senso e di fornire opportuni feedback ai processi di soluzione degli studenti e di supportarli nello sviluppo della loro conoscenza matematica a partire da tali processi. È ampiamente

1. Liberamente tradotto da Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013b). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th PME* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Germany: PME.

riconosciuto come questa abilità differisca da quelle associate a una visione tradizionale dell'insegnamento della matematica, concepita come trasmissione di una mera serie di definizioni. Ad esempio, Ball (1993) sostiene che nella "riforma" dell'insegnamento della matematica, gli studenti dovrebbero essere guardati come pensatori creativi e imprevedibili e, per dare senso e supportare lo sviluppo del pensiero matematico di pensatori così imprevedibili, è necessaria una preziosa e flessibile sensibilità matematica da parte degli insegnanti. Queste caratteristiche peculiari della conoscenza matematica necessarie per l'insegnamento sono sapientemente catturate e inquadrare dal costrutto della Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball, Thames & Phelps, 2008).

In particolare, la conoscenza che i docenti di matematica hanno degli argomenti di insegnamento dovrebbe permettere loro di dare senso e capire le risposte degli studenti – soprattutto quando queste si differenziano da ragionamenti standard, cioè quelli più usuali e utilizzati dagli insegnanti stessi. Tale comprensione delle risposte degli studenti da un lato permette all'insegnante di valutare se una soluzione può essere considerata matematicamente valida e generalizzabile ad altre situazioni; dall'altro, lavorare sulle soluzioni date (anche quelle sbagliate) consente un'esplorazione matematicamente valida e significativa dei processi cognitivi messi in atto dagli studenti (per una prospettiva particolare si veda Borasi, 1994). Per questo motivo, la conoscenza degli insegnanti dovrebbe anche includere una vasta gamma di strategie e rappresentazioni per la soluzione dei problemi.

Nel presente articolo riportiamo un lavoro specifico sviluppato per identificare particolari caratteristiche e dimensioni coinvolte nella MKT di futuri insegnanti di scuola elementare mentre interpretano e danno senso alle produzioni degli studenti. Tenendo presente questa prospettiva, abbiamo progettato una particolare attività volta a indagare, e allo stesso tempo promuovere, la conoscenza dei futuri docenti coinvolta in questo lavoro interpretativo. Questa scelta è stata dettata dalla consapevolezza di quanto esso rappresenti uno degli elementi chiave nel contribuire a sviluppare quelle conoscenze matematiche che i futuri insegnanti dovranno poi utilizzare nella loro pratica in aula (si veda ad esempio Rowland, 2008). Per questa ragione questo tipo di attività può essere definito come attività di apprendimento professionale (Professional Learning Task, PLTs), ossia un'attività che simula un tipo di attività con cui gli insegnanti in formazione dovranno poi realmente cimentarsi nella loro vita professionale (Smith, 2001).

In questo articolo tratteremo un'attività, strutturata attraverso una sequenza di quesiti, organizzata intorno alla richiesta di dare senso ad alcune produzioni di alunni relative a un problema che coinvolge i numeri razionali. L'attività è stata ideata al fine di consentire l'esplorazione di varie rappresentazioni equivalenti di una stessa quantità (di cioccolato) utilizzando sia il registro grafico che quello aritmetico. La scelta di tale diversità permette di esplorare le connessioni tra i simboli e i loro referenti semantici, lavorando sull'idea di *composizione operativa del numero* (Subramaniam & Banerjee, 2011).

Nei paragrafi successivi presenteremo prima il quadro di riferimento teorico del lavoro, successivamente la struttura dell'attività progettata e le produzioni degli alunni scelte da interpretare, infine alcuni risultati ottenuti da un'analisi delle risposte fornite da un gruppo di futuri maestri italiani.

2 Quadro teorico

La conoscenza dell'insegnante e, in senso più ampio le sue convinzioni sulla disciplina e sulle dinamiche del processo di insegnamento-apprendimento, svolgono un ruolo chiave nella sua pratica. La nozione di diversi tipi di conoscenza di Shulman (1986) ha fortemente influenzato la ricerca nell'insegnamento della matematica. Shulman sviluppa un quadro generale per classificare sia i domini che le categorie di conoscenza degli insegnanti, indipendentemente dall'argomento. In particolare, dalle sette categorie definite, solo tre di esse sono correlate, in qualche modo, agli argomenti da insegnare: (a) conoscenza del contenuto, (b) conoscenza del contenuto pedagogico (PCK) e (c) conoscenza curricolare. A partire da questo primo modello sono stati sviluppati diverse articolazioni e approfondimenti. Tra i diversi costrutti riguardanti le conoscenze degli insegnanti di matematica, la MKT, (Ball et al., 2008, Figura 1) coglie, a nostro avviso, efficacemente le particolari caratteristiche della conoscenza matematica necessaria per l'insegnamento.

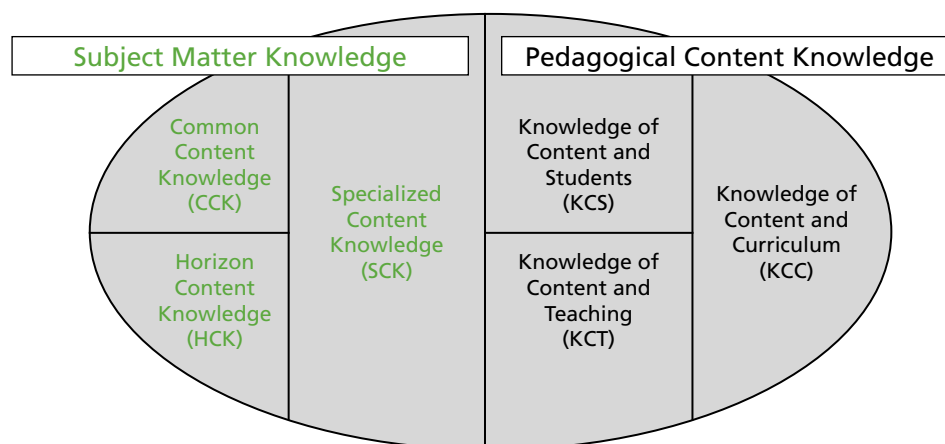


Figura 1
Costrutto della
Mathematical Knowledge
for Teaching (MKT).

Il lavoro di Ball e colleghi (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008) è particolarmente rilevante in questo senso: i ricercatori riconoscono e definiscono tre tipi di conoscenza del contenuto pedagogico (PCK – parte destra del modello in Figura 1): conoscenza dei contenuti e degli studenti, conoscenza del contenuto e insegnamento, e conoscenza del curriculum. Inoltre, nel framework del MKT viene introdotta una nuova dimensione di conoscenza, che fa riferimento allo specifico argomento matematico, la Subject Matter Knowledge (SMK – parte sinistra del modello in Figura 1) – complementare e non riducibile al PCK. Tale SMK comporta le specificità delle conoscenze matematiche, riferite ad un particolare argomento matematico, richieste all'insegnante per sviluppare la sua pratica d'aula in modo da supportare gli studenti nello sviluppo della loro comprensione e conoscenza di quello specifico argomento matematico (ad esempio, consentendo loro di capire cosa fanno e perché). Tali specificità integrano le conoscenze matematiche che altri professionisti (come l'ingegnere, l'economista, il programmatore ecc.) pure utilizzano nel loro lavoro (quella ad esempio che viene utilizzata per risolvere correttamente un problema matematico, e che in questo modello viene denominata con Common Content Knowledge – CCK) con aspetti della conoscenza matematica richiesti solo

nell'insegnamento (ad esempio, identificare e comprendere risposte errate, Specialized Content Knowledge – SCK) e sulla consapevolezza di come gli argomenti matematici sono correlati tra loro (Horizon Content Knowledge – HCK).

Uno dei compiti dell'insegnante riguarda il dare senso alle soluzioni degli studenti e aiutarli nell'apprendimento della matematica a partire dai loro processi risolutivi. I contenuti coinvolti in tale conoscenza, che chiameremo *conoscenza interpretativa*, possiedono una natura peculiare e specifica, e ciò motiva anche il nostro uso del MKT per indagare su questa particolare conoscenza dei futuri insegnanti. Nel nostro studio sulla conoscenza interpretativa ci concentriamo principalmente sui sottodomini della CCK e SCK. Infatti, nel valutare e dare senso alle soluzioni degli studenti a un problema relativo ad un determinato argomento matematico, la CCK relativa a quell'argomento matematico, usata sia nell'insegnamento che in altre professioni, è ovviamente fondamentale. Ma allo stesso tempo il lavoro interpretativo ha bisogno anche di un altro tipo di conoscenza. Infatti, oltre al saper risolvere un determinato problema, è essenziale che gli insegnanti abbiano anche delle conoscenze che consentano loro di comprendere il ragionamento matematico dietro a calcoli, definizioni e processi di risoluzione dei problemi. Inoltre gli insegnanti dovrebbero possedere un ricco e ampio bagaglio di esempi, strategie e rappresentazioni possibili che consenta loro di dare senso non solo a soluzioni simili alle loro, ma anche a risposte, a ragionamenti e a strategie non standard. Per questo motivo noi crediamo che la conoscenza interpretativa sia legata alla SCK e intrecciata alla capacità di osservazione dell'insegnante, ovvero la capacità di aumentare la quantità e allo stesso tempo raffinare la qualità degli aspetti osservati nei processi educativi degli studenti (Mason, 2001). Ciò implica la capacità degli insegnanti di operare scelte professionalmente consapevoli in momenti inattesi (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005) e di rispondere alle situazioni che emergono in classe, in modo da fornire agli studenti efficaci esperienze di apprendimento.

La nostra preferenza per il costrutto della MKT rispetto ad altri deriva anche dalla natura, dal focus e dagli obiettivi del lavoro che stiamo sviluppando. Infatti, il contenuto dei sottodomini della MKT è considerato un punto di partenza prezioso per la progettazione di compiti per la preparazione matematica degli insegnanti. Nella nostra prospettiva, considerando l'importanza di un approccio basato sulla pratica al fine di sviluppare la SCK, assumiamo anche come essenziale che i futuri insegnanti sperimentino lo stesso tipo di situazioni che incontreranno sia nel tirocinio che nella loro vita professionale di insegnanti. In questo lavoro presentiamo un tipo di attività, in particolare quella di interpretazione dei processi di risolutivi degli alunni, con cui gli insegnanti in formazione dovranno poi realmente cimentarsi nella loro vita professionale (Smith, 2001).

L'attività che presentiamo, in particolare, riguarda la conoscenza interpretativa degli insegnanti in un problema di scuola elementare che coinvolge la divisione e le frazioni. Le frazioni sono tra i concetti matematici più complessi che i bambini incontrano negli anni di istruzione primaria (Newstead & Murray, 1998). D'altra parte la rilevanza dell'uso delle frazioni in molti altri specifici domini matematici (ad esempio misura, probabilità ecc.) lo rende un argomento cruciale e strategico. Secondo Kieren (1995), le difficoltà degli studenti con le frazioni possono essere ricondotte al fatto che, da un lato le frazioni essendo rappresentazioni di numeri razionali vanno collegate ad altre rappresentazioni dello stesso ente matematico (ad esempio allineamenti decimali ecc.), inoltre le frazioni hanno diversi significati (ad esempio distribuzione, misura, operatore, rapporto tra grandezze). Questa complessità, e le

ben note difficoltà degli studenti, motivano fortemente l'importanza di migliorare la formazione degli insegnanti riguardo questo specifico argomento matematico (per un'altra interessante esperienza di ricerca sull'argomento si veda anche Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla & Sbaragli, 2006).

3 Metodologia di ricerca

Il nostro campione è composto da futuri insegnanti elementari che frequentano i corsi di didattica della matematica all'università di cui noi autori siamo i docenti. Abbiamo quindi progettato un'attività sotto forma di questionario aperto e lo abbiamo tradotto nelle tre lingue italiano, portoghese e norvegese. L'attività mira ad accedere alla conoscenza interpretativa dei futuri insegnanti in un problema che coinvolge le frazioni. Sebbene i dati siano stati raccolti in parallelo, l'intenzione non era quella di fare uno studio comparativo, ma piuttosto di utilizzare la diversità dei contesti come elemento che contribuisce a una comprensione più ricca della conoscenza dei futuri insegnanti sull'argomento in questione. In ogni caso, in questo studio ci concentriamo solo sulle risposte fornite nei questionari dai 108 futuri insegnanti italiani.

3.1 Struttura dell'attività

Nel processo di insegnamento-apprendimento le attività proposte hanno, o almeno dovrebbero avere, un'importanza primaria in quanto modalità principale di costruzione e sviluppo delle abilità, delle conoscenze e delle competenze degli studenti. Ovviamente il modo in cui tali capacità e conoscenze sono percepite e sviluppate dipende dai diversi tipi di discenti (ad esempio studenti, futuri insegnanti); queste differenze dovrebbero influenzare la natura e il focus delle attività proposte. In questo senso, le attività per la formazione degli insegnanti sono percepite in modo diverso dalle attività per i loro studenti. Pertanto, nella strutturazione dei compiti volti a sviluppare le conoscenze degli insegnanti, è necessario tenere conto delle specificità di tale conoscenza e, come abbiamo detto, il quadro della MKT può essere una guida in tal senso. Concentrandosi sulle attività per la formazione degli insegnanti, il nostro approccio considera come elemento fondamentale il collegamento con aspetti della pratica degli insegnanti, intrecciati con la possibilità di permettere loro di avere esperienze simili a quelle che si troveranno ad affrontare con i propri studenti. Ciò significa consentire ai futuri insegnanti di sentirsi coinvolti in un'attività matematica con una duplice visione, sia come insegnanti che come discenti. L'idea è di creare dei contesti di lavoro in cui gli insegnanti in formazione da un lato possano sperimentare le stesse situazioni di piacere, difficoltà e divertimento degli studenti, senza preoccuparsi della componente didattica, ma allo stesso tempo possano migliorare la loro abilità di osservazione e ascolto (Mason, 2001; Davis, 1997) e sviluppare le conoscenze e le competenze matematiche necessarie per il lavoro di insegnamento. In questo senso, crediamo che i compiti per gli insegnanti costruiti sulla richiesta iniziale di risolvere un problema matematico da soli, e in seguito di dare senso a opportune produzioni di alunni allo stesso problema, può essere da un lato una ricca attività di esplorazione matematica che poi diventa anche un'attività di apprendimento professionale (Smith, 2001).

Con questa idea stiamo lavorando ad un ampio progetto di ricerca incentrato sulla progettazione di attività volte a migliorare la conoscenza e la competenza interpretativa degli insegnanti. Qui, come abbiamo detto, ne presentiamo uno riguardante i numeri razionali. Per la progettazione di questa attività ci siamo concentrati sulle relazioni complesse tra le varie rappresentazioni dello stesso numero razionale (pittorica, aritmetica, attraverso il linguaggio naturale), ma anche su diversi modi di esprimere la stessa quantità sommando diverse frazioni. Infatti siamo convinti che lavorare su diverse rappresentazioni dello stesso numero razionale sia uno dei modi per costruire una conoscenza flessibile e significativa di tali oggetti matematici. Come sottolineato da Subramaniam e Banerjee (2011):

«l'espressione rivela come il numero o la quantità che viene rappresentata è costruita, usando le abituali operazioni sui numeri, da altri numeri e quantità. Questa interpretazione incarna una reificazione più esplicita delle operazioni e ha un maggiore potenziale per creare connessioni tra i simboli e i loro riferenti semantici. L'idea della composizione operativa di un numero che suggeriamo è una delle idee chiave che segna il passaggio dall'aritmetica all'algebra».
(pag. 100, traduzione dell'autore)

L'attività si struttura attorno al seguente problema:

La maestra Maria vuole esplorare con i suoi alunni alcune nozioni associate al concetto e alla natura delle frazioni, con questa intenzione prepara un insieme di problemi tra cui quello seguente:
Se dividiamo 5 barrette di cioccolata equamente tra 6 bambini, quanta cioccolata riceverà ogni bambino?
1. Prova anche tu a risolvere il quesito fornendo un'interpretazione grafica della risposta.

Per consentire e stimolare le riflessioni dei docenti in formazione, la prima richiesta dell'attività è di risolvere il problema da soli, e solo successivamente è stato chiesto di interpretare alcune produzioni di alunni riferite allo stesso problema con le seguenti richieste:

2. Indica quali procedimenti ritieni matematicamente corretti e quali incorretti. In entrambi i casi spiega il perché della tua valutazione.
3. Per ciascuna delle risposte spiega cosa proporresti all'allievo come *feedback*.

Queste richieste hanno un duplice scopo: da un lato, coinvolgere i futuri insegnanti in qualcosa che incontreranno nella loro pratica, e cioè valutare e interpretare i processi di risoluzione degli alunni e, dall'altro, lavorare sulle loro convinzioni e conoscenze sia matematiche che pedagogiche, proponendogli delle soluzioni da interpretare opportunamente scelte.

3.2 Le produzioni degli alunni da interpretare

Di seguito presentiamo, spieghiamo e discutiamo la scelta riguardo le produzioni che abbiamo chiesto di interpretare, mostrando il collegamento tra le rappresentazioni grafiche e quelle aritmetiche. La scelta delle soluzioni dei bambini proposte è stata fatta al fine di riflettere sull'equivalenza di diverse rappresentazioni frazionarie e decimali di una stessa quantità, sulle operazioni con le frazioni e sul ruolo dell'intero. Nella risposta di Mariana (Figura 2) le cinque barrette di cioccolato sono rappresentate da rettangoli già divisi ciascuno a metà, ottenendo dunque dieci parti uguali (5 equivale a $\frac{10}{2}$). La prima quantità cerchiata mostra la possibilità di distribuire tra i 6 bambini 6 parti di barrette ($\frac{6}{2}$), lasciandone fuori, in questa prima distribuzione, quattro ($\frac{4}{2}$). Attraverso una freccia, le quattro parti rimaste fuori dalla prima distribuzione, vengono ulteriormente divise a metà, ottenendo così otto parti uguali ($\frac{4}{2}$ equivale a $\frac{8}{4}$), sei delle quali ($\frac{6}{4}$) vengono distribuite tra i 6 bambini, lasciandone fuori, in questa seconda distribuzione, due ($\frac{2}{4}$). Attraverso un'altra freccia, ciascuno dei due pezzi viene diviso in tre parti uguali, ottenendo in questo modo 6 pezzettini ancora più piccoli ($\frac{6}{12}$) che è possibile distribuire tra i 6 bambini. In un riquadro in basso infine vengono disegnate le parti che andranno ad ogni bambino. Sebbene la divisione sia corretta, non è presente alcuna rappresentazione numerica della quantità ottenuta, che è data solo in termini grafici, ma che avrebbe una sua rappresentazione in forma numerica del tipo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$.

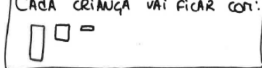
Mariana	Madalena										
 CADA CRIANÇA VAI FICAR COM: 	Cada ☺ fica com : <table> <tr> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>0,3 (3)</td> </tr> <tr> <td>=</td> <td>=</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{12}$</td> <td>0,8 (3)</td> </tr> </table>	$\frac{1}{2}$	0,5	+	+	$\frac{1}{4}$	0,3 (3)	=	=	$\frac{1}{12}$	0,8 (3)
$\frac{1}{2}$	0,5										
+	+										
$\frac{1}{4}$	0,3 (3)										
=	=										
$\frac{1}{12}$	0,8 (3)										
"Ogni bambino avrà".	"Ogni ☺ avrà".										

Figura 2
La risposta di Mariana

Figura 3
La risposta di Madalena

Nel secondo protocollo (Figura 3), Madalena rappresenta la quantità di cioccolato per ogni bambino utilizzando diverse rappresentazioni. Infatti la quantità di cioccolato che avrà ogni bambino alla fine della suddivisione viene rappresentata sia graficamente che numericamente, scrivendo i numeri sia in forma frazionaria ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$) che decimale (0,5+0,3). Ci sono diversi aspetti che ci hanno portato a ritenere questa risposta interessante da interpretare. In questo protocollo riconosciamo la complessa relazione tra la rappresentazione frazionaria e decimale del numero, oltre alla difficoltà di gestire rappresentazioni decimali infinite, come quella dei numeri decimali periodici $0,3\bar{3}$ e $0,8\bar{3}$ (da notare la diversa rappresentazione della periodicità della cifra in Portogallo). Inoltre, in questa soluzione è presente solo la risposta della quantità finale ottenuta da ogni bambino senza riferimento alla procedura di suddivisione, diventa quindi interessante, dal punto di vista interpretativo, immaginarla.

Nella produzione di Sofia (Figura 4) riconosciamo cinque rettangoli che rappresentano le cinque barrette di cioccolato, divise in sei pezzi ognuna. Sofia ha poi evidenziato 6 gruppi da 5 pezzi ciascuno riempiendoli con motivi diversi. Come risposta finale Sofia scrive, "Ogni bambino avrà i $\frac{5}{6}$ di ogni barretta" che, se fosse vero, significherebbe che ogni bambino otterrebbe $\frac{25}{6}$ di barretta (questo stesso errore si verifica anche nella produzione di Inês (Figura 5). Sebbene la risposta data non sia corretta, la suddivisione in termini grafici è coerente e consente di esplorare in modo significativo varie rappresentazioni non canoniche di uno stesso numero, e la proprietà commutativa: $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, che corrispondono alle suddivisioni indicate dai 6 motivi di riempimento.

Figura 4
La risposta di Sofia

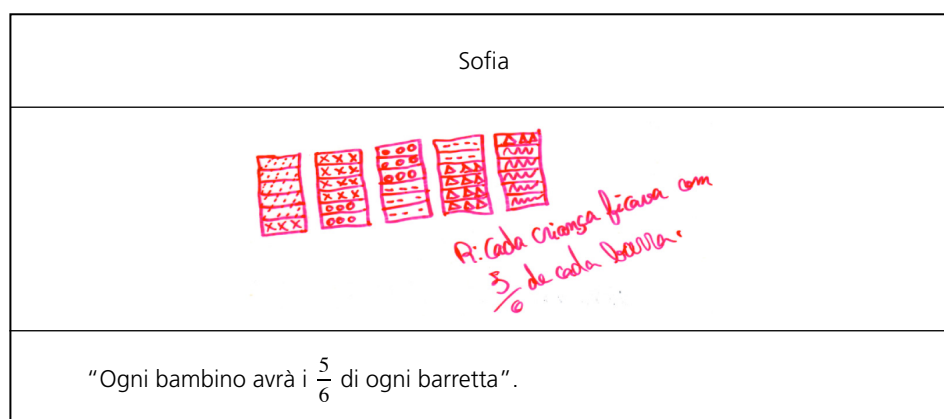
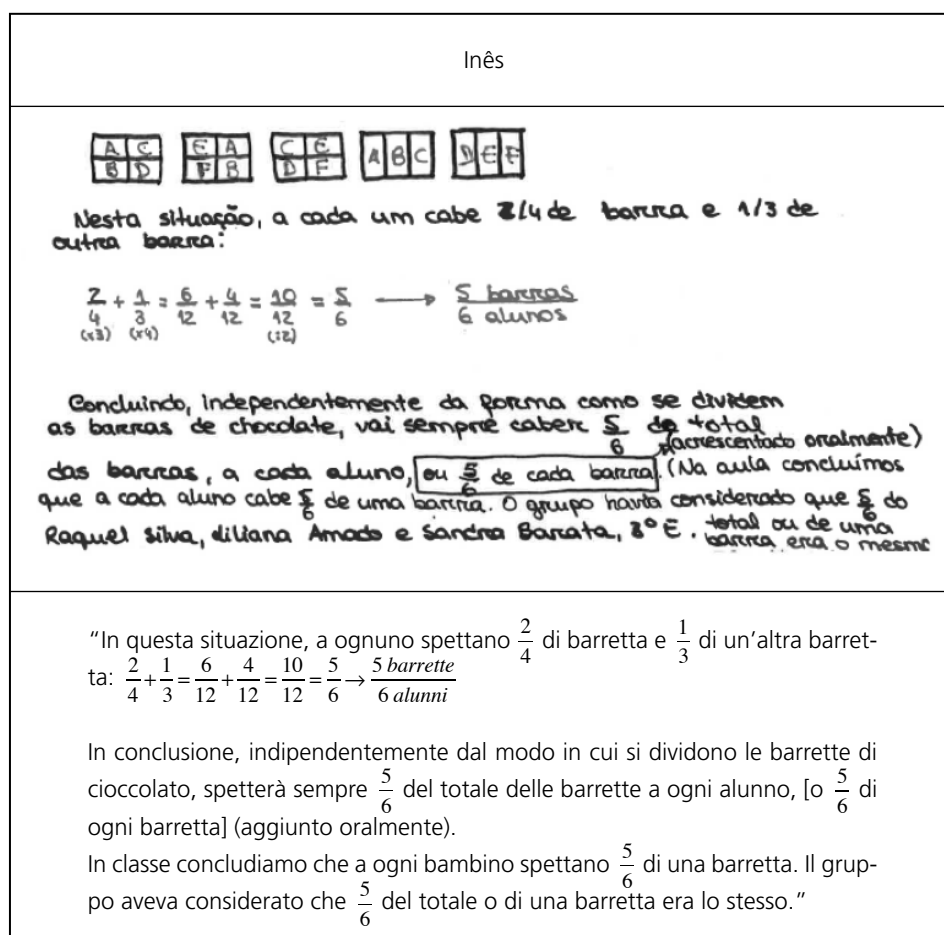


Figura 5
La risposta di Inês



Infine la soluzione di Inês (Figura 5) permette una riflessione da parte dei docenti in formazione su alcune questioni aggiuntive rispetto a quelle delle soluzioni precedenti. Le barrette di cioccolato sono rappresentate da 5 rettangoli, di cui i primi 3 sono suddivisi in 4 parti, gli ultimi 2 in 3 parti. Inoltre Inês, a differenza di Sofia che usa dei motivi di riempimento, usa le prime 6 lettere dell'alfabeto per indicare i 6 bambini a cui distribuire le parti di barretta. Sebbene la risposta numerica e pittorica finale sia corretta, esistono diverse incongruenze tra ciò che è rappresentato dal disegno, ciò che è scritto in linguaggio matematico e ciò che è integrato dal linguaggio naturale. Per la rappresentazione pittorica, l'espressione corrispondente alla cioccolata di ogni bambino sarebbe $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$. In altre parole anche in questo caso l'interpretazione di questa soluzione coinvolge un'esplorazione della composizione operazionale del numero attraverso le diverse espressioni equivalenti: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$. La strategia aritmetica per trovare il denominatore comune può essere utilizzata come punto di partenza per discutere con i futuri insegnanti il significato di questo procedimento per la somma di frazioni. Infine, la soluzione espressa in linguaggio naturale risulta non corretta ed evidenzia la questione complessa del ruolo dell'intero, che è uno dei punti centrali nelle difficoltà con le frazioni.

4 Risultati e discussione

Inizialmente presenteremo e discuteremo le risposte dei futuri insegnanti al problema delle suddivisioni delle barrette di cioccolato e poi analizzeremo i loro commenti e le riflessioni nella fase di interpretazione delle risposte degli alunni.

Nella prima parte dell'attività, cioè quando dovevano rispondere individualmente al problema, la maggioranza dei futuri insegnanti (55 su 108) ha presentato una soluzione utilizzando solo numeri naturali. Queste soluzioni corrispondono a una suddivisione grafica di ciascuna barretta in sei pezzi. Hanno concluso che ogni bambino avrebbe ottenuto cinque pezzi. In Figura 6 abbiamo riportato una di queste soluzioni a titolo esemplificativo.

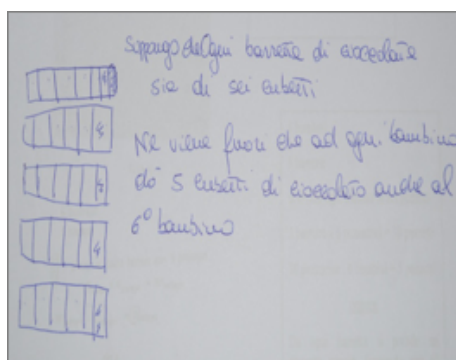


Figura 6
Soluzione di un docente
in formazione

"Suppongo che ogni barretta di cioccolato sia di sei cubetti. Ne viene fuori che ad ogni bambino dò 5 cubetti di cioccolato anche al sesto bambino".

Questo tipo di risposta appare rilevante se consideriamo che il testo che accompagna il problema recita esplicitamente: "La maestra Maria vuole esplorare con i suoi alunni alcune nozioni associate al concetto e alla natura delle frazioni". Nonostante ciò, più della metà dei futuri insegnanti ha scelto di usare solo numeri naturali nella loro risposta, rivelando una mancanza di familiarità con la nozione matematica di frazione. In altre risposte, alcuni hanno utilizzato le frazioni combinando il ragionamento sulla distribuzione dei pezzi con l'espressione dei pezzi in termini di frazioni. Tra coloro che hanno utilizzato le frazioni per rispondere al problema (46 su 108), abbiamo trovato alcuni usi inappropriati. Le tipiche risposte sbagliate in termini di frazioni sono "ogni bambino ottiene $\frac{5}{6}$ di ogni barretta" (11 su 46), oppure "ogni bambino ottiene $\frac{1}{6}$ di una barretta" (3 su 46) rivelando difficoltà nel comprendere il ruolo dell'intero. Risultati simili sono stati ottenuti in uno studio precedente (Ribeiro & Jakobsen, 2012).

Abbiamo anche trovato risposte che utilizzavano decimali (8 su 108). La risposta decimale più frequente è stata: 0,83. Questa prima analisi quantitativa sulle soluzioni degli insegnanti è utile per inquadrare il nostro particolare campione, caratterizzato dunque da una CCK debole sulle frazioni.

A conferma di ciò, possiamo osservare che nella seconda fase di valutazione e interpretazione delle risposte degli alunni, un numero davvero esiguo di futuri insegnanti (4 su 108) è stato in grado di rilevare l'inesattezza matematica dell'espressione "ogni bambino avrà $\frac{5}{6}$ di ogni barretta". L'osservazione principale per quanto riguarda l'analisi qualitativa che abbiamo svolto sul lavoro di interpretazione dei futuri insegnanti alle soluzioni degli alunni, è che la maggior parte di loro trova serie difficoltà nell'interpretare le soluzioni diverse dal proprio procedimento, in accordo con quanto espresso da Kuhlemann (2013). Ecco alcuni commenti sulle soluzioni presentate: "La soluzione di Sofia appare disordinata, tutti questi segni confondono l'idea", "Inês si complica la vita inutilmente", "Mariana segue un percorso più intricato". Ciò che è interessante notare è che se da una parte gli insegnanti non sono in grado di rilevare l'inadeguatezza matematica dell'espressione "ogni bambino ottiene $\frac{5}{6}$ di ogni barretta", essi sono tuttavia pronti a disapprovare una suddivisione delle barrette che, ad un occhio matematico più attento, permette di individuare due diverse somme di frazioni per trovare la giusta quantità di cioccolato che ogni bambino riceve. Commenti come questi rivelano una grande difficoltà nell'uscire dal proprio "spazio di soluzioni", uno spazio evidentemente costituito da un singolo elemento, rendendo così impossibile l'apprezzamento e la comprensione di strategie diverse dalle proprie. Se nei commenti precedenti questa propensione negativa verso una varietà di approcci è solo sfumata, in alcuni commenti si dice esplicitamente che una risposta corretta dovrebbe essere necessariamente simile alla loro, come nel commento seguente:

«Considero SOFIA corretta (le lettere maiuscole sono nel testo originale): per dirla meglio, intendo che traduce il mio PENSIERO nella soluzione del problema (...) Considero la soluzione di Mariana matematicamente inadeguata a livello di comprensione. Intendo che non è comprensibile su vasta scala, e inizialmente neanche a me. A priori sicuramente non la giudicherei errata, probabilmente la salterei per analizzarla in un secondo momento».

L'affermazione "intendo dire che traduce il mio PENSIERO" rileva un atteggiamento non propenso ad interpretare soluzioni degli studenti diverse dai propri percorsi di

ragionamento. Naturalmente questo sembra un atteggiamento umano molto naturale e, in una certa misura lo potremmo accettare da chi lavora in contesti diversi dall'insegnamento, mentre un docente come professionista del suo lavoro, ha bisogno di superare tale criticità, sviluppando una particolare sensibilità e intuizione – abilità legate alla SCK. In questo senso crediamo che i futuri insegnanti debbano lavorare per diventare capaci di interpretare le soluzioni dei bambini. D'altra parte, si potrebbe pensare che questo tipo di atteggiamento più aperto al ragionamento altrui si sviluppi nel tempo, con la pratica e l'esperienza. Tuttavia, alcune evidenze mostrano che questo non è completamente vero:

«Sono un insegnante da dieci anni e penso che queste soluzioni siano molto confuse. Cerco sempre di rendere le immagini visive il più chiare possibile e cerco di guidare i miei studenti a fare lo stesso. In questo caso i ragionamenti sono molto disordinati e portano a confusione».

In questo senso, possiamo dire che la SCK e la capacità di interpretare e dare un senso alle risposte degli studenti non si sviluppano naturalmente nel corso degli anni di esperienza lavorativa, ma richiedono un'attenzione speciale da un punto di vista educativo.

Nella domanda 3 abbiamo chiesto anche di immaginare possibili feedback da dare agli alunni, e abbiamo visto che i futuri insegnanti nel caso di risposte ritenute scorrette o confuse proponevano spesso di mostrare la propria soluzione agli alunni, come si vede nel seguente commento:

«La soluzione di Mariana non è comprensibile quindi la prima domanda sarebbe: cosa significa questa rappresentazione? Dopo aver ascoltato la sua risposta, le farei vedere la mia rappresentazione».

Inoltre è interessante notare che tra coloro che hanno rivelato un buon CCK nel problema della suddivisione delle barrette di cioccolata (dando ad esempio una risposta in termini di frazioni), alcuni percepiscono le soluzioni degli studenti, anche quelle inadeguate, come una possibilità e un buon punto di partenza per lavorare con la classe. In un certo senso alcuni di loro, come sperato, vedono le risposte sbagliate come opportunità per sviluppare la conoscenza e la consapevolezza degli alunni sulle suddivisioni e le frazioni:

«La prima cosa che farei è invitare i bambini a copiare le soluzioni di Sofia, Madalena, Mariana e Inês su un poster e cercherei di far notare somiglianze e differenze tra loro. Alcune di queste soluzioni richiedono molta attenzione da parte dell'insegnante, che deve decodificare ciò che l'alunno intende e aiutare i bambini a dare senso a soluzioni diverse».

Queste risposte rivelano intuizioni pedagogiche ricche e preziose. Possiamo osservare un certo legame tra queste proposte e l'idea di Mason di cosa significhi *notare*:

«Aumentare la sensibilità per notare le opportunità di agire, e allo stesso tempo far giungere alla mente, nel momento in cui sono rilevanti, una serie di possibili azioni appropriate».

(Mason, 2001, p. Xi, traduzione dell'autore)

5 Osservazioni conclusive e sviluppi futuri

In questo lavoro abbiamo presentato un'attività costruita su un problema matematico riguardante i numeri razionali, progettato per indagare e contemporaneamente sviluppare la conoscenza interpretativa nei futuri insegnanti elementari. Nell'articolo abbiamo presentato le produzioni degli alunni scelte per l'attività interpretativa dei futuri insegnanti, spiegandone la razionalità e il senso della scelta fatta.

Questa attività è stata utilizzata in diversi corsi di formazione in Brasile, Italia, Norvegia e Portogallo. In questo articolo abbiamo discusso alcuni risultati ottenuti implementando il compito in un gruppo di 108 futuri maestri italiani. L'analisi quantitativa delle risposte al problema della suddivisione della cioccolata ha evidenziato una scarsa CCK sulle frazioni dei futuri insegnanti. Inoltre, le attività progettate ci hanno dato l'opportunità di accedere anche ad altri sotto-domini della MKT. In particolare, nell'analisi qualitativa, le difficoltà ad uscire dal proprio "spazio di soluzioni" e apprezzare e comprendere le diverse strategie di soluzione degli alunni, hanno rivelato anche una mancanza di SCK.

Una delle possibili strade di ricerca future è di approfondire i collegamenti tra CCK e SCK (e il suo contenuto) nell'abilità di interpretazione degli insegnanti. Infine, va aggiunto che, dopo aver somministrato il questionario, abbiamo dedicato una lezione di due ore in cui attraverso una discussione collettiva abbiamo lavorato al fine di sviluppare la MKT dei futuri insegnanti e, contemporaneamente far emergere e discutere le loro convinzioni riguardo la matematica e in generale il processo di insegnamento-apprendimento. Infatti crediamo che l'attività proposta possa rappresentare un buon esempio di PLT da esplorare con i futuri insegnanti proprio per lavorare contemporaneamente sulla MKT e sulle loro convinzioni.

Bibliografia

- Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *Elementary School Journal*, 93(4), 373-397.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Borasi, R. (1994). Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.
- Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M. I., & Sbaragli, S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*, 3, 353-400.
- Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 355-376.
- Kieren, T. E. (1995). Creating Spaces for Learning Fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades* (pp. 31-66). Albany: State University of New York.

- Kuhlemann, S. (2013). Heuristic strategies prospective teachers use in analyzing students' work. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 3145-3154). Antalya, Turkey: METU and ERME.
- Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* Vol. 3 (pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.
- Mason, J. (2001). *Researching your own practice*. London: Routledge Falmer.
- Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd IGPME* Vol. 3 (pp. 295-303). Stellenbosch, South Africa.
- Ribeiro, C. M., & Jakobsen, A. (2012). Prospective teachers' mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 289-298). Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 149-163.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255-281.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Smith, M.S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Subramaniam, K., & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. In J. Cai & D. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 87-105). Springer.

Autori/Maria Mellone*, Carlos Miguel Ribeiro* e Arne Jakobsen*

*Università di Napoli Federico II – Italia

•UNICAMP – Brasile

*Università di Stavanger – Norvegia

maria.mellone@unina.it, cmribas78@gmail.com, arne.jakobsen@uis.no