DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2025 (17), 132 - 153, DOI: 10.33683/ddm.25.17.6 OPEN ACCESS

La moltiplicazione di *numeri rotti*: un'esperienza didattica sulle frazioni ispirata al Liber Abbaci di Fibonacci

The multiplication of *broken numbers*: an educational experience on fractions inspired by Fibonacci's Liber Abbaci

Silvia Cerasaro• e **Silvia Salvatori°**
•Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" e Liceo Statale "L. Pietrobono", Alatri (FR) – Italia
°Istituto Comprensivo "San Nilo", Grattaferrata (RM) – Italia

cerasaro@axp.mat.uniroma2.it, silvia.salvatori@icsanilo.edu.it

Sunto / In questo articolo si racconta un'esperienza didattica svolta presso una scuola secondaria di primo grado sull'uso della storia nella didattica della matematica. In particolare, si descrivono le attività presentate agli studenti della classe seconda in merito alla moltiplicazione tra quelli che Leonardo Pisano Fibonacci denomina nel Liber Abbaci *numeri rotti*, e che altro non sono che moderne frazioni. Le attività presentate sono finalizzate alla comprensione autonoma da parte degli studenti della regola della moltiplicazione tra frazioni; per fare questo, si sono costruite attività laboratoriali che prevedono l'utilizzo di diversi artefatti: la fonte storica, il *vocabolario dei rotti*, aste frazionarie, e altro ancora.

Parole chiave: frazione; moltiplicazione; storia delle matematiche; Liber Abbaci.

Abstract / This article describes a teaching experience carried out in a lower secondary school about the use of history in mathematics teaching. In particular, it describes the activities presented to 7th grade students regarding the multiplication of those that Leonardo Pisano Fibonacci calls *broken numbers* in the Liber Abbaci, and which are nothing but modern fractions. The activities presented are aimed at the autonomous understanding by the students of the rule of multiplication of fractions; to this purpose, laboratory activities were built that involve the use of various artifacts: the historical source, the *vocabulary of broken numbers*, fractional rods, and more.

Keywords: fraction; multiplication; history of mathematics; Liber Abbaci.

1 Introduzione

L'esperienza didattica qui presentata nasce da una serie di fortunati incontri, la cui storia viene raccontata come introduzione di questo articolo. Il primo incontro è avvenuto quando la prima autrice, da insegnante della scuola secondaria di primo grado,[1] appassionata di storia delle matematiche fin dagli studi universitari, è venuta a contatto con il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, detto Fibonacci. Tale contatto è avvenuto grazie a un progetto di ricerca curato dai proff. Franco Ghione e Laura Catastini finalizzato alla prima traduzione dal latino all'italiano di questo importante trattato di aritmetica, la cui prima edizione risale al 1202, ampliata e sistemata nel 1228 (Catastini & Ghione, 2023). La prima autrice ha in seguito avviato una collaborazione con Progetto Fibonacci[2] ideando esempi di attività didattiche ispirate all'aritmetica del Liber Abbaci: avendo avuto un positivo riscontro da parte degli alunni in merito agli apprendimenti, alla motivazione e all'interesse durante lo svolgimento delle attività laboratoriali, ha deciso di intraprendere una ricerca più approfondita sulla didattica delle frazioni con l'uso della stessa fonte storica. L'aritmetica dei *numeri rotti* è dunque divenuta oggetto di approfondimento di diversi studi condotti dalla prima autrice come dottoranda presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", nonché oggetto di alcuni corsi di formazione organizzati dall'Ateneo. In uno di tali corsi è avvenuto un altro importante incontro, questa volta tra le due autrici nei ruoli di formatrice e corsista: da questa collaborazione è nata la volontà di sperimentare un percorso sull'aritmetica dei *numeri rotti* in una classe di scuola secondaria di primo grado.
In particolare, in questo articolo vengono mostrate una serie di attività laboratoriali proposte in una classe seconda, finalizzate alla comprensione della moltiplicazione tra due frazioni, il cui risultato è individuato come rapporto tra il prodotto dei numeratori e quello dei denominatori: in simboli, cioè, la consueta uguaglianza $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.
L'apprendimento delle frazioni e delle operazioni tra frazioni coinvolge aspetti didatticamente molto delicati e fonte di difficoltà per gli studenti (Campolucci et al., 2011; Castelnuovo, 1952), che rischiano di portare a un apprendimento meccanico di procedimenti e formule per eseguire operazioni, con ricadute negative in termini di acquisizione profonda dei significati in gioco. Per questo motivo è importante effettuare scelte didattiche ricche, grazie alle quali lo studente possa esplorare i concetti matematici da diversi punti di vista. Queste considerazioni hanno condotto alla progettazione del percorso descritto nei prossimi paragrafi, risultato dall'integrazione di elementi provenienti dalla storia delle matematiche e dall'uso di artefatti concreti e digitali.

2 L'uso della storia nella didattica della matematica

Sviluppare una pianificazione didattica che abbia come perno l'utilizzo della storia delle matematiche significa prendere sul serio l'idea che essa possa favorire, sostenere, e rendere sensato l'apprendimento della disciplina da parte degli studenti. Questa convinzione, d'altra parte, è ben espressa anche nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012, p. 7), in cui si legge che «lo studio dei contesti storici, sociali, culturali nei quali si sono sviluppate le conoscenze è condizione di una loro piena comprensione».

1. La scuola secondaria di primo grado italiana corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.
2. Progetto Fibonacci è un gruppo di studiosi che operano "volontariato intellettuale". La loro attività è raccolta in un sito, www.progettofibonacci.it, autogestito e autofinanziato, dove è riportata la prima traduzione in assoluto dal latino in italiano del Liber Abbaci di Leonardo Pisano Fibonacci, realizzata dal gruppo stesso. Gli aderenti al progetto studiano il contenuto storico-matematico del trattato medievale con lo scopo di ideare attività didattiche che utilizzino la storia nella didattica della matematica finalizzata alla diffusione della cultura.

Non solo come cornice narrativa, dunque, ma come strumento per una più efficace introduzione dei concetti matematici: la storia e le fonti storiche sono considerate come un artefatto utile a introdurre o a veicolare in maniera diversa un concetto già conosciuto, permettendo di valutarne l'evoluzione, rielaborandolo e adeguandolo in base ai nuovi elementi emersi, sia matematici sia culturali.
In effetti, esistono diversi studi e ricerche in cui si discute l'uso della storia delle matematiche nella didattica. Le riflessioni su questo tema partono addirittura dal 1899, quando Poincaré scrive che alcuni concetti matematici definiti primitivi e essenziali (come sono ad esempio le frazioni) possono essere studiati attraverso la storia per comprenderne il significato iniziale. Spostandoci nella contemporaneità, vale la pena citare Barbin (1997) la quale, attraverso le sue esperienze con l'uso della storia per l'apprendimento della matematica, conclude come tale uso possa causare uno *choc culturel* che genera inizialmente disorientamento negli studenti, favorendo in seguito un *remplacement* dei concetti trattati, rivisti e sistemati tenendo in considerazione i nuovi apprendimenti. Esempi di usi della storia nella didattica della matematica sono presentati in Demattè e Furinghetti (2022) e in Radford (2022) che illustrano gli utilizzi in chiave didattica di trattati d'abaco e testi medievali.
Per il presente contributo un ulteriore riferimento è costituito dal lavoro di Bartolini Bussi e colleghi (2014) che rileva come ancora oggi, in alcuni paesi asiatici, la frazione venga scritta a partire dal denominatore, per poi scrivere il numeratore. Osservando che ciò avveniva già nella descrizione di *numero rotto* di Leonardo Fibonacci, Bartolini Bussi e colleghi (2014) sottolineano come l'uso della storia nella didattica possa facilitare riflessioni epistemologiche sui significati matematici coinvolti e sulla loro presentazione agli studenti.[3] Tali riflessioni epistemologiche sottolineano la valenza educativa del dialogo, a vantaggio dell'apprendimento discorsivo, come affermato da Sfard (2015). Nel suo studio Sfard mostra come il concetto di frazione possa essere presentato agli studenti attraverso la storia che ne testimonia l'evoluzione, dal rapporto euclideo al numero razionale dei trattati d'abaco medievali, suggerendo che il significato matematico attribuito a questo concetto vada di pari passo con lo sviluppo del pensiero dello studente.
Se utilizzata in modo ragionato e in funzione dell'apprendimento, quindi, la storia delle matematiche può essere un valido supporto alla didattica: da un lato infatti permette di comprendere che la matematica è frutto di un processo in continua evoluzione, e non un "prodotto finito"; dall'altro permette di riflettere sugli oggetti matematici già incontrati, mettendoli in discussione e operando una loro sistemazione via via più articolata e profonda.
Inoltre, l'uso della storia nella didattica della matematica prova l'esistenza di possibilità matematiche diverse da quelle di cui oggi si dispone, oltre che arricchire a livello educativo: essere consapevoli dell'esistenza di modalità diverse di fare matematica contribuisce alla comprensione del concetto di alterità e il conseguente senso del rispetto del differente (Radford, 2023). In quest'ottica, l'uso della storia può essere considerata anche un'opportunità per il raggiungimento degli obiettivi previsti dall'insegnamento dell'educazione civica, in linea con l'obiettivo di una "matematica umana" ben espressa in questo estratto di D'Amore e Sbaragli (2017):

> «A parte le difficoltà che hanno molti studenti per costruire cognitivamente nella loro mente gli oggetti matematici in modo corretto, siamo anche interessati ad un fatto solo apparentemente secondario: che gli studenti, finito il loro iter scolastico, abbiano della matematica un ricordo ricco, denso, non solo formale ma anche umano, perché, secondo noi, la matematica è un umanesimo».
>
> (D'Amore & Sbaragli, 2017, p. 10)

3. Uno degli intervistati nella ricerca, perplesso, afferma che non si possono considerare le parti da prendere in una suddivisione senza sapere in quanti parti è suddivisa, come per dire che prima va letto il denominatore e solo dopo il numeratore.

3 Il Liber Abbaci e i *numeri rotti* di Fibonacci

Il Liber Abbaci di Fibonacci tratta l'aritmetica che fa uso di quelle che sono denominate "figure indiane", ovvero i simboli che ancora oggi utilizziamo per scrivere i numeri, dallo 0 al 9, alla base del nostro sistema numerico decimale e posizionale. In questo trattato, il cui titolo è tradotto come *Libro del calcolo*, Leonardo Pisano descrive con accuratezza gli algoritmi che permettono di fare i conti senza l'uso dell'abaco romano (Cerasaro, 2020), mostrando molti esempi e applicazioni, soprattutto in ambito commerciale ed economico. Nelle spiegazioni relative agli aspetti algoritmici presenti nel Liber Abbaci, si evince una trattazione dell'aritmetica mediante l'uso della geometria, come accadeva anche per l'aritmetica greca. Tale relazione è esplicitata dallo stesso Fibonacci nel prologo del testo:

> «E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri; modo che è assunto per molte argomentazioni e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche».
>
> (Boncompagni, 1857, p. 1, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Se si prosegue la lettura del prologo, Leonardo Pisano sembra suggerire anche la modalità per la trattazione degli argomenti presentati (sorprendentemente in linea con alcuni moderni approcci didattici e neuroscientifici) tenendo in considerazione la manipolazione per il conseguimento dell'apprendimento:

> «Così chi volesse conoscere bene la pratica di questa scienza dovrà applicarsi con uso continuo ed esercizio giornaliero nella pratica di essa, perché se la conoscenza si muta in abitudine attraverso la pratica, la memoria e l'intelligenza concordano a tal punto con le mani e i segni che quasi in un unico impulso e anelito, in uno stesso istante, si accordano naturalmente su tutto; e allora quando il discepolo avrà conseguito un abito mentale, a poco a poco potrà pervenire facilmente alla perfezione di questa».
>
> (Boncompagni, 1857, p. 1, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

A partire dal capitolo V del Liber Abbaci, Fibonacci introduce il concetto di frazione: dopo aver descritto l'operazione di divisione tra due numeri interi a e b, scrive il risultato della divisione come somma della parte intera e parte "frazionaria". Il risultato della divisione $a : b$ sarà $q + \frac{r}{b}$, dove q ed r rappresentano rispettivamente il quoziente e il resto. Nel paragrafo V.2 introduce i termini "denominato" e "denominante", da cui derivano i nostri attuali "denominatore" e "numeratore":

> «Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato e quello superiore è chiamato denominante».
>
> (Boncompagni, 1857, p. 24, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Queste frazioni, denominate da Fibonacci *numeri rotti*, sono l'oggetto matematico su cui è impostato il percorso qui presentato. Nel linguaggio attuale si tratta di frazioni del tipo $\frac{r}{b} < 1$, (con r e b interi positivi), che noi oggi chiamiamo "proprie".[4] Fibonacci non dà una vera e propria definizione esplicita di *numero rotto*, adottando in tutto il Liber Abbaci anche altre denominazioni quali *minuto* e *fratto* (parla dunque di *ruptus*, *minutus*, *fractus*).
Dalle descrizioni matematiche presenti nei numerosi esempi che Fibonacci utilizza per spiegare un nuovo concetto matematico, si evince che il *numero rotto* si ottiene rompendo l'unità in tante parti uguali tra loro, quante quelle riportate nel denominatore, e considerando tante di esse quante scritte nel numeratore (Catastini & Ghione, 2023). Si noti a latere che Leonardo Pisano utilizza il termine "parte" come presentato da Euclide nel settimo libro degli Elementi, quando scrive che «un numero è parte di un altro se lo misura»;[5] tenendo in considerazione tale definizione, rompere l'intero in tante parti uguali significa dire che ogni parte misura lo stesso numero di volte l'intero considerato.

4 Gli artefatti utilizzati nell'esperienza sui *numeri rotti*

In questo paragrafo sono descritti gli artefatti[6] utilizzati nelle attività laboratoriali sulla moltiplicazione tra *numeri rotti*, cercando al contempo di metterne in luce le implicazioni didattiche. Questi artefatti sono suddivisi per tipologia: da un lato gli artefatti legati all'uso della storia, qui detti "artefatti storici" (par. 4.1), attraverso i quali viene facilitata la riflessione epistemologica sui significati matematici trattati; dall'altro lato gli artefatti qui chiamati "manipolativi e digitali", che coinvolgono l'uso di alcuni oggetti come le aste frazionarie e il *moltiplicatore di rotti* (par. 4.2) oppure il software GeoGebra, con i quali si cercherà di affrontare gli aspetti procedurali che conducono alla comprensione della moltiplicazione tra frazioni.

4.1 Gli artefatti storici

La fonte storica che ha fatto da sfondo a tutto il percorso è il Liber Abbaci (Figura 1), libro che gli studenti hanno consultato nelle biblioteche digitali presenti sul web, facendo riferimento alla traduzione dal latino all'italiano dal sito del Progetto Fibonacci; esso è stato considerato uno strumento per favorire l'apprendimento di contenuti sia matematici sia di tipo culturale e interdisciplinare.

4. In parti successive del Liber Abbaci, Leonardo Pisano chiama *numero rotto* anche un numero non intero maggiore di 1, inteso come somma di un intero con un *numero rotto*. Nel corso di questo articolo si denoterà tale numero come "numero misto", ricondotto a quella che oggi viene definita come "frazione impropria". La classificazione delle frazioni nel periodo medievale era diversa da quella odierna. Moyon e Spiesser (2015) hanno classificato le frazioni descritte da Fibonacci, distinguendole in 5 "generi", riconducibili alle attuali frazioni proprie. La distinzione che spesso si usa oggi tra frazioni proprie, improprie e apparenti si delineò solo più tardi, nel 1600 circa, come si può leggere nelle descrizioni riportate da Clavio (Castellano, 1678).
5. Def. VII.3 degli *Elementi*.
6. Il termine "artefatto" indica in generale un oggetto, materiale o simbolico, che può diventare uno strumento: «per un dato individuo, l'artefatto inizialmente non ha un valore strumentale. Diventa uno strumento attraverso un processo, chiamato genesi strumentale, che coinvolge la costruzione di schemi personali o, più generalmente, l'appropriazione di schemi sociali preesistenti» (Artigue, 2002, p. 250). Si è scelto in questo contributo di non approfondire il quadro teorico relativo a questo costrutto e di dare più peso all'importanza dell'uso della storia.

Figura 1. Incipit del Liber Abbaci, Biblioteca Nazionale centrale, Firenze, Conv. Soppr. C. 1. 2616, ff. 1r-214-r, versione digitale sul sito del Museo Galileo.

La fonte storica si presenta come un mediatore interattivo, utile a creare degli oggetti matematici concreti sui quali può essere costruito un discorso. Già nell'estetica delle pagine è possibile notare il cambiamento che ha subìto la disciplina nel tempo: sono presenti decorazioni floreali e capilettera nelle pagine scritte in latino con linguaggio naturale, senza l'uso di simboli algebrici, con numeri interi, frazioni e tabelle scritti in rosso, per metterli in evidenza rispetto al testo stesso, in quanto simboli che si collegano direttamente ai contenuti matematici. Queste differenze contribuiscono a rendere lo studente consapevole che ciò che abbiamo non è sempre esistito, e che la matematica non è un prodotto finito, ma un'attività intellettuale in continuo cambiamento. Inoltre, la lettura della fonte storica può essere accompagnata da discussioni e riflessioni su quanto letto, partendo da concetti già conosciuti (Guillemette & Radford, 2022): ciascuno studente potrà avanzare ipotesi ed esprimere la propria opinione, formalizzando, attraverso una verbalizzazione scritta sul proprio quaderno, quanto ha osservato e appreso dalla discussione fatta affinché si possano tenere in considerazione gli apprendimenti pregressi, per consolidarli o integrarli. Per progettare le attività da proporre agli studenti, si può tenere conto delle narrazioni riguardanti gli aspetti matematici presenti sulla fonte storica.
Un altro artefatto utilizzato in classe e direttamente collegato con la fonte storica è il *vocabolario dei rotti*: costruito insieme da alunni e insegnante in concomitanza con la lettura della fonte storica, il vocabolario contiene termini ed espressioni linguistiche ispirati sia alla traduzione dal latino all'italiano dei termini presenti nel Liber Abbaci, sia all'italiano volgare di alcuni trattati di aritmetica successivi (consultati attraverso le versioni digitalizzate presenti nel web) chiaramente ispirati all'opera di Fibonacci. Questa scelta è stata effettuata con la consapevolezza delle difficoltà degli studenti riguardo all'uso del linguaggio specifico, che non risulta essere sempre associato all'azione matematica compiuta. La finalità è quella di incentivare la manipolazione di un linguaggio simbolico, dopo averlo

concordato convenzionalmente (Coppola et al., 2021), discusso e condiviso con il gruppo classe per interpretarlo affinché si costruiscano dinamicamente i significati matematici legati ai numeri razionali. L'utilizzo del *vocabolario dei rotti* può contribuire a creare una cornice in cui la matematica in classe viene drammatizzata, creando anche un'atmosfera di condivisione di uno strumento all'interno della comunità basato su significati matematici "più vicini" a quelli descritti.

4.2 Gli artefatti manipolativi e digitali

Figura 2. La scatola delle aste per la costruzione dei *numeri rotti* e misti.

Questa categoria di artefatti comprende artefatti manipolativi e artefatti digitali. Fanno parte della prima tipologia le *aste dei numeri rotti* (Figura 2), ovvero strisce di carta plastificata di lunghezza variabile: l'intero è rappresentato da una striscia di carta lunga 12 cm e larga 1 cm; le frazioni di tipo $\frac{1}{n}$, per n = 2, …, 12, sono rappresentate da strisce di carta plastificata lunghe, rispettivamente, 12 : n cm e larghe 1 cm. L'uso di aste corrispondenti a frazioni con denominatore fino a 12 è finalizzato alla manipolazione di pochi oggetti per intuire visivamente regole da confermare, in un momento successivo, con ragionamenti astratti. Considerare come un'unità frazionaria l'asta ottenuta dividendo l'asta unitaria in un determinato numero di parti di ugual lunghezza[7] può ricordare il senso "misura" della frazione, costruita secondo la classificazione di Kieren (1980): questo permette di associare la frazione al concetto di numero posizionato sulla retta orientata dei numeri. La scelta del numero 12 è strategica perché consente di avere frazioni con denominatore 12 e numeratore uno dei diversi divisori di 12, e questo crea maggiori possibilità di lavoro con frazioni equivalenti. Tra l'altro, la scelta di utilizzare numeri con molti divisori è condivisa anche da Leonardo Pisano, che li utilizza in diversi contesti in svariati esempi riportati nel trattato.

Un altro artefatto manipolativo utilizzato è il moltiplicatore di *numeri rotti*, un semplice strumento a forma quadrangolare che ha al suo interno due guide su cui vengono inserite le aste lunghe un intero o le sue frazioni, poste ai lati di una superficie quadrangolare equivalente al quadrato unitario (Figura 3). Inizialmente ideato in legno, è stato poi sostituito da un'altra versione in carta plastificata per facilità di realizzazione e di reperibilità del materiale.

7. La larghezza dell'asta è trascurabile nell'utilizzo del materiale, in quanto è la stessa per tutte. Lo studente focalizzerà l'attenzione solo sull'unico aspetto variabile, ovvero la lunghezza.

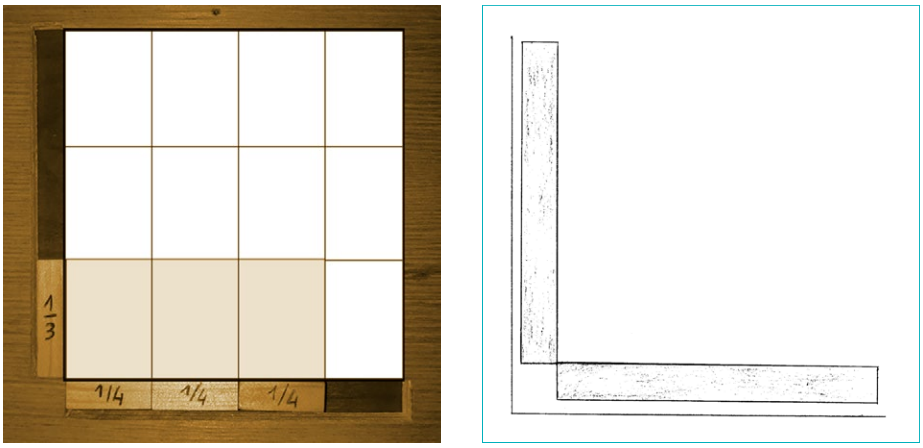


Figura 3. Il moltiplicatore di *numeri rotti* nelle due versioni.

Il moltiplicatore di *numeri rotti* è stato riprodotto in forma digitale tramite il software GeoGebra che, messo a disposizione degli studenti, ha costituito il moltiplicatore digitale, l'artefatto digitale utilizzato nelle attività presentate.

5 Attività preliminari e struttura del percorso

Il percorso legato alla moltiplicazione di *numeri rotti* è stato preceduto da numerose attività preliminari (Cerasaro, 2020), sempre legate ai *numeri rotti*, e che hanno coinvolto diversi degli artefatti descritti nel paragrafo precedente. Gli studenti hanno letto la traduzione del paragrafo V.2 del Liber Abbaci dal sito del Progetto Fibonacci, familiarizzando con il linguaggio naturale usato da Fibonacci per descrivere procedimenti matematici. Hanno manipolato le aste utilizzando, contemporaneamente, le espressioni concordate nel *vocabolario dei rotti*: hanno parlato di *denominante* e *denominato* per indicare il numeratore e denominatore della frazione; hanno ridotto in numeri *simiglianti*, cioè hanno trovato la frazione unitaria il cui denominatore è il minimo comune multiplo dei denominatori, attraverso la manipolazione delle aste dei *numeri rotti*; hanno *schisato* una frazione, ossia l'hanno ridotta ai minimi termini, associando all'onomatopea della parola *schisare* il gesto di una matita che traccia rapidamente numeratore e denominatore, riscrivendo la frazione in modo diverso. Gli studenti hanno poi effettuato la *riduzione ai numeri rotti più piccoli*, ovvero sono state ricercate le frazioni ridotte ai minimi termini, e sono stati *confrontati i numeri rotti* attraverso un metodo euristico basato sull'osservazione,[8] "tradotto" in seguito in procedura matematica. È stato costruito il numero misto, corrispondente alle attuali frazioni del tipo $\frac{a}{b} > 1$, affiancando alle aste dell'intero (tante quante il quoziente q di $a : b$, essendo $a = b \times q + r$) quella del *numero rotto* $\left(\frac{r}{b}\right)$; sono stati addizionati e sottratti *numeri rotti* e misti, passando dalla riduzione ai *numeri rotti* più piccoli attraverso la sostituzione delle aste considerate con quelle più piccole idonee. Il percorso si è concluso con una ricerca sul proprio libro di testo dei vocaboli usualmente utilizzati per lo studio dei significati matematici trattati relativi alle frazioni: frazioni proprie e improprie, frazioni equivalenti, la riduzione al minimo comun denominatore e la semplificazione di una frazione ai minimi termini; ciò che è stato ritrovato ha por-

8. Il confronto tra *numeri rotti* basato sull'osservazione consiste nel confrontare la somma delle lunghezze delle aste che costituiscono il *numero rotto*.

tato ciascuno studente a reinterpretare attivamente all'interno del gruppo classe i significati attribuiti mediante il linguaggio convenzionale usato (Radford et al., 2005). Inoltre, il percorso matematico è stato preceduto da una introduzione, curata dalla docente di lettere, del periodo in cui il Liber Abbaci è stato scritto, il tredicesimo secolo, percorrendo un interessante itinerario riguardante i testi che potevano essere reperiti nelle biblioteche europee e quelle del mondo islamico: gli studenti hanno svolto una ricerca in base ai suggerimenti dati dall'insegnante, realizzando una presentazione multimediale per un'esposizione su quanto appreso. Questo percorso ha suscitato molta curiosità negli studenti, motivandoli nella consultazione della fonte storica, nata in un ambiente culturale profondamente ispirato alla cultura islamica; inoltre, la ricerca ha permesso di contestualizzare storicamente il percorso didattico presentato, per trasmettere il senso dell'evoluzione della matematica nel tempo.
Dopo queste attività introduttive, si è proceduto a realizzare il percorso incentrato in modo specifico sulla moltiplicazione tra *numeri rotti*, di cui ora viene fornita la struttura. Esso si compone di differenti attività, riportate nella **Tabella 1**, il cui ordine è coerente con l'ordine di presentazione in classe e con gli esempi che Fibonacci descrive nel Liber Abbaci.

Attività	Finalità didattiche	Artefatti e materiali utilizzati
1. La frazione tra divisione e moltiplicazione.	Legare il concetto di frazione ai concetti di divisione e moltiplicazione.	*Vocabolario dei rotti*; descrizione di *numero rotto* tratta dal Liber Abbaci.
2. Si inizia a moltiplicare.	Moltiplicare frazioni unitarie per numeri interi; moltiplicare una frazione con la sua inversa.	Tabella di moltiplicazione a doppia entrata.
3. Moltiplicazione tra due *numeri rotti* unitari.	Comprendere la regola della moltiplicazione tra frazioni unitarie.	*Vocabolario dei rotti*; Liber Abbaci.
4. Il quadrato unitario.	Introdurre il passaggio dall'asta unitaria al quadrato unitario.	Asta unitaria, quadrato unitario; scheda per la costruzione del quadrato con GeoGebra.
5. Il moltiplicatore di *numeri rotti*.	Comprendere il funzionamento geometrico dello strumento "Moltiplicatore di *numeri rotti*"; generalizzare la regola della moltiplicazione tra frazioni unitarie alla moltiplicazione tra frazioni proprie.	*Vocabolario dei rotti*; moltiplicatore di *numeri rotti*; quadrato unitario; aste delle frazioni.
6. Il moltiplicatore digitale.	Rinforzare gli obiettivi dell'attività 5.	File GeoGebra.
7. Moltiplicazione tra un *numero rotto* e un numero misto.	Applicare il procedimento geometrico del moltiplicatore tra *numeri rotti* dell'attività 5 alla moltiplicazione di una frazione propria per un numero misto.	*Vocabolario dei rotti*; aste delle frazioni; file GeoGebra.
8. Moltiplicazione tra due numeri misti.	Applicare il procedimento geometrico del moltiplicatore tra *numeri rotti* dell'attività 5 alla moltiplicazione tra due numeri misti; formulare una regola generale per la moltiplicazione tra due frazioni.	*Vocabolario dei rotti*; Liber Abbaci.
9. "*Schisare*" nella moltiplicazione tra *numeri rotti*.	Comprendere la procedura di semplificazione nella moltiplicazione tra frazioni.	*Vocabolario dei rotti*; Liber Abbaci.

Tabella 1. Sintesi delle attività proposte nel percorso sulla moltiplicazione tra *numeri rotti*.

6 Descrizione delle attività svolte

In questo paragrafo viene descritto il percorso realizzato così come schematizzato in **Tabella 1**.

6.1 La frazione tra divisione e moltiplicazione

L'attività inizia con una riflessione proposta dall'insegnante sulla possibilità di vedere una frazione come il quoziente di una divisione non svolta, equivalente al multiplo di una frazione unitaria ($\frac{m}{n}$ è sia $m : n$ sia $m \times \frac{1}{n}$). Questo serve per mostrare la presenza implicita della moltiplicazione, operazione su cui si sta ponendo l'attenzione in questa serie di attività proposte.
Si presenta agli studenti la seguente descrizione di Fibonacci (già citata e commentata nel **par. 3**):

> «Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato e quello superiore è chiamato denominante».
>
> (Boncompagni, 1857, p. 24, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Gli studenti leggono con attenzione le parole del matematico relativamente alla costruzione di frazione come multiplo di una frazione unitaria, cioè deducono che $\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$, aiutandosi con la manipolazione delle aste.
Sottolineando il significato attribuito alla lineetta che separa il numeratore dal denominatore, equivalente al simbolo della divisione, l'insegnante chiede di rappresentare con le aste la frazione $\frac{3}{2}$ intesa come 3 : 2. Molti sono perplessi, mentre qualche studente prende 3 aste unitarie dalla scatola del materiale e le pone una dietro l'altra (**Figura 4**): ponendo l'indice esattamente nel punto medio della linea di aste ottenuta, afferma che proprio in quel punto c'è 3 : 2. Anche i compagni riescono a seguire, provando a fare la stessa cosa con la frazione $\frac{5}{2}$, prendendo 5 aste unitarie e affermando che il punto che individua la metà è il punto medio di un segmento, visto in geometria. A seguito di questa affermazione, altri studenti realizzano $\frac{5}{4}$ con 5 aste unitarie, affermando di applicare due volte di seguito la costruzione del punto medio, ossia facendo la metà della metà. A questo punto, l'insegnante chiede di rappresentare con le aste, come già sanno fare, le frazioni considerate, rispettivamente, nelle tre situazioni emerse. Per cui, nel primo caso, si allineano 3 aste da $\frac{1}{2}$, nel secondo 5 aste da $\frac{1}{2}$, nel terzo 5 aste da $\frac{1}{4}$: avendole sistemate sotto la costruzione già effettuata con le aste unitarie, notano che le ultime arrivano esattamente nei punti che avevano indicato, affermando che le lunghezze considerate sono le stesse. Alla richiesta di una spiegazione più argomentata, emerge che le due operazioni svolte portano allo stesso risultato, per cui $\frac{m}{n}$ è sia $m : n$ sia $m \times \frac{1}{n}$.

Figura 4. La frazione $\frac{3}{2}$ rappresentata come 3 : 2 e come $3 \times \frac{1}{2}$.

Con il materiale a disposizione e guidati dalle domande poste dall'insegnante, gli studenti comprendono che la frazione, nel contesto del Liber Abbaci, rappresenta una divisione e ha un legame implicito anche con la moltiplicazione: infatti, la moltiplicazione di un *numero rotto* unitario per un numero intero m è la somma ripetuta di m aste unitarie $\frac{1}{n}$. Le riflessioni effettuate con i compagni e con l'insegnante sono istituzionalizzate sui loro quaderni (**Figura 5**).

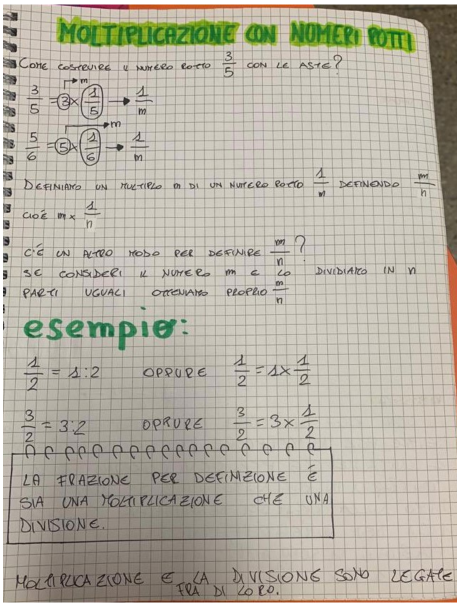


Figura 5. Il quaderno di uno studente che sintetizza quanto discusso in classe.

6.2 Si inizia a moltiplicare

Viene presentata agli studenti una particolare tabella per le frazioni, avente per prima riga gli interi $n = 1, \ldots, 12$ e per prima colonna le frazioni unitarie $\frac{1}{n}$. Si compila la tabella moltiplicando riga per colonna, in quanto dall'attività precedente è stato compreso che una frazione si può esprimere come un multiplo dell'unità frazionaria (**Figura 6**): gli alunni osservano che $n \times \frac{1}{n} = 1$.

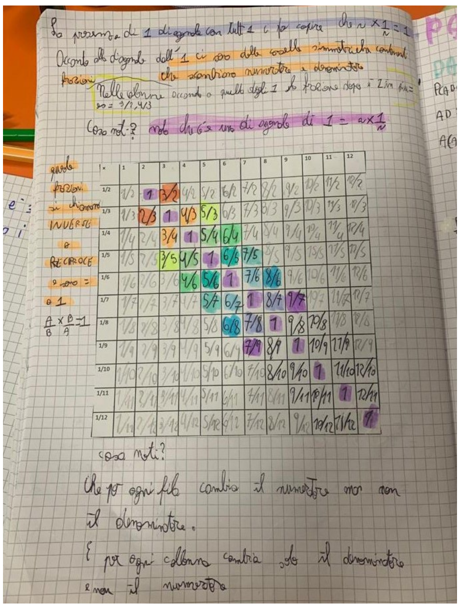


Figura 6. La tavola pitagorica delle frazioni dal quaderno di un'alunna.

Si nota che in alcune caselle, simmetriche rispetto alla diagonale con tutti 1, si trovano le frazioni $\frac{n}{m}$ e $\frac{m}{n}$. Viene richiesto di prendere in considerazione una coppia di frazioni di questo tipo: uno studente, ad esempio, considera $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ e scrive $\frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{2}$; analogamente, $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$. L'insegnante gli chiede di moltiplicarle, così scrive $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$: ricordando quanto già scritto e applicando la proprietà commutativa (moltiplicando cioè 2 e $\frac{1}{2}$, 3 e $\frac{1}{3}$), arriva a vedere che il loro prodotto è 1. Anche gli altri studenti provano a fare lo stesso con altre coppie di frazioni dello stesso tipo, arrivando a descrivere le frazioni inverse attraverso una trasposizione sulle operazioni inverse già conosciuta per i numeri interi. Gli studenti formalizzano sui loro quaderni i loro apprendimenti (**Figura 7**).

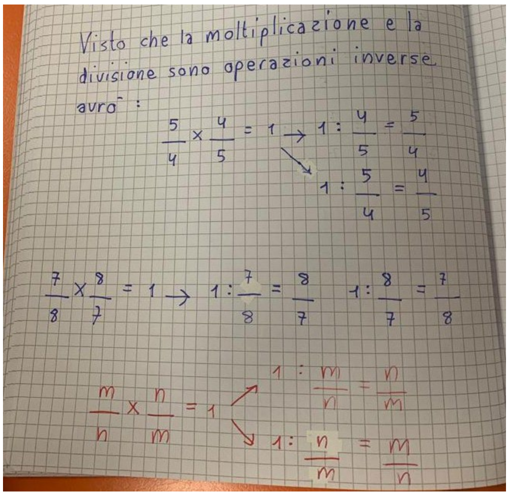


Figura 7. Attività svolte per arrivare a definire l'inversa di una frazione.

6.3 Moltiplicazione tra due *numeri rotti* unitari

Si propone la lettura del seguente passo:

> «Se vorrai moltiplicare $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, moltiplica l'1 che è sopra il 3 per l'1 che è sopra il 4, farà 1; dividilo per 3 e per il 4 che sono sotto le linee […], farà […] un dodicesimo […] e che tu intenda tutto questo ugualmente per tutti i *rotti*; perché sempre la moltiplicazione di un *rotto* per un qualunque *rotto* fa quanto la ricezione di uno di essi dall'altro: perché quando si moltiplica 1 per $\frac{1}{4}$, allora sempre risulta $\frac{1}{4}$, quindi quando si moltiplica la terza [parte] per la quarta si ha sempre un terzo di un quarto, e così dalla moltiplicazione di un terzo per un quarto risulta un dodicesimo».
>
> (Boncompagni, 1857, p. 59, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Dalle prime parole del brano gli studenti deducono che $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n \times m}$, concludendo che la moltiplicazione tra le frazioni unitarie ha al numeratore 1 (nel testo Fibonacci suggerisce di moltiplicare 1 per 1) e al denominatore il prodotto dei denominatori. Dopo aver svolto molte operazioni tra frazioni unitarie, seguendo il suggerimento letto nel Liber Abbaci, gli studenti osservano anche che moltiplicare due frazioni unitarie significa dividere la prima frazione per un intero, che è l'inverso della seconda frazione unitaria considerata, in linea con quanto appreso nell'attività precedente. Dunque, comprendono la seguente uguaglianza $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n} : m$. Si chiede di verbalizzare quanto appena effettuato, dopo aver ripercorso con l'insegnante lo svolgimento dell'attività proposta.

6.4 Il quadrato unitario

La lettura sulla moltiplicazione tra due frazioni unitarie è stata posta come attività stimolo per chiedere come procedere per ricavare il prodotto di due *numeri rotti* non unitari.

In tutte le attività preliminari, gli alunni hanno usato le aste, che rappresentano frazioni dell'asta unitaria. Ora si vuole considerare il prodotto tra numeri come l'area di un rettangolo che ha per lunghezza dei lati i due fattori, sfruttando la geometria per la comprensione di concetti legati all'aritmetica. Occorre passare, in questo momento, a un'unità frazionaria che faccia riferimento all'area di una superficie e non alla lunghezza di un segmento. Per fare questo, si passa dall'asta unitaria al quadrato unitario. La moltiplicazione tra *numeri rotti* risulta essere rappresentata, quindi, da una parte del quadrato che ha per lato l'asta unitaria. Si chiede agli allievi come si può fare, secondo loro, per costruire con le aste il prodotto tra due *numeri rotti* unitari, partendo dal prodotto di $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, come letto nel brano di Fibonacci. In **Figura 8** vengono mostrate le risposte di due alunni: in una si nota l'intuizione di una nuova necessità per effettuare l'operazione; nell'altra, invece, si riscontra un'evidente contrarietà.

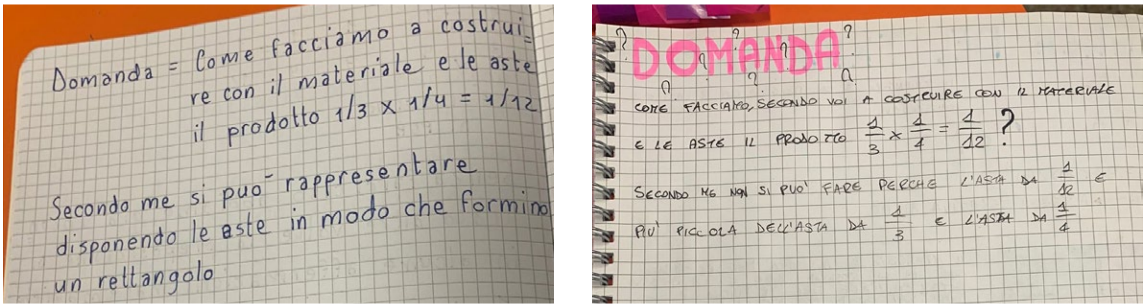


Figura 8. Risposte di due studenti alla domanda-stimolo riguardo al prodotto tra *numeri rotti*.

Per favorire l'apprendimento del passaggio dall'asta al quadrato unitario, presupposto per la comprensione della moltiplicazione tra frazioni, si coinvolge il docente di tecnologia, il quale pianifica un laboratorio per costruire, con squadrette e compasso, un quadrato a partire da un segmento dato, parafrasando la costruzione euclidea della prop. I.46 degli *Elementi* (**Figura 9**).

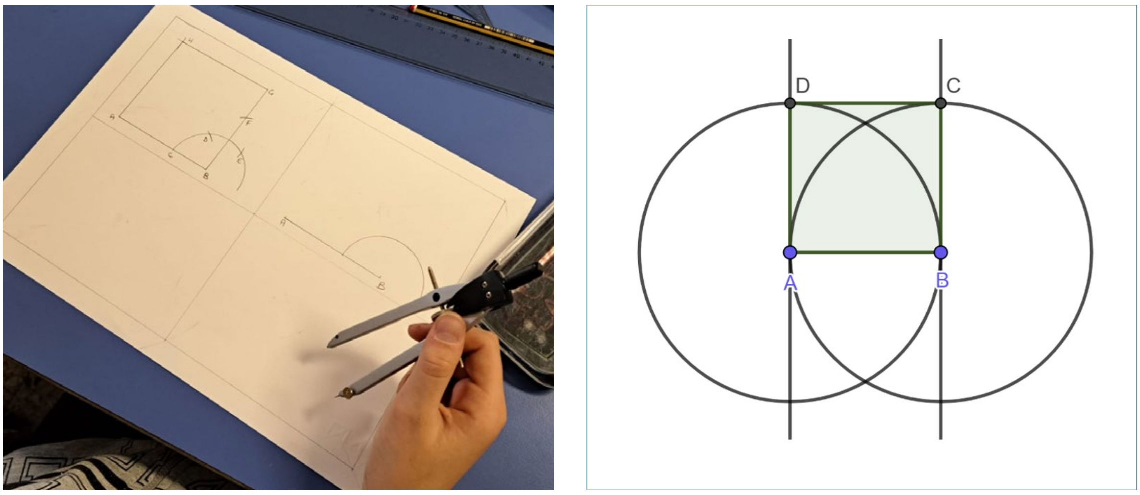


Figura 9. Costruzione euclidea del quadrato unitario realizzato con squadrette e compasso, e con GeoGebra.

La stessa costruzione viene realizzata attraverso il software GeoGebra, con la guida dell'insegnante, che mostra agli studenti come usare gli opportuni comandi, le cui istruzioni sono riportate in maniera dettagliata in una scheda che gli studenti possono consultare a casa per ripetere quanto svolto in classe.

Dunque, dopo la costruzione del quadrato unitario, avente il lato lungo quanto l'asta unitaria, gli studenti si avvicinano a questo nuovo artefatto, di cui comprenderanno le modalità d'uso per effettuare una moltiplicazione.

6.5 Il moltiplicatore di *numeri rotti*

La docente presenta agli studenti una sorta di lista dell'occorrente per procedere alla comprensione del "funzionamento" del moltiplicatore di *numeri rotti*. Gli alunni hanno a disposizione, oltre al moltiplicatore di *numeri rotti*, il quadrato unitario e le aste, alcune graffette, le squadre e la matita (**Figura 10**).

Figura 10. I materiali a disposizione per comprendere come usare il moltiplicatore di *numeri rotti*.

Si richiede di capire come usare il moltiplicatore di *numeri rotti* eseguendo, ad esempio, la moltiplicazione che Leonardo Pisano descrive nel Liber Abbaci, cioè $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$.
Alcuni studenti aprono la loro scatola dei *numeri rotti* e prendono le aste unitarie usate da Fibonacci, e fissano il quadrato unitario al moltiplicatore con le graffette e anche le aste considerate, ricordando di dover svolgere la stessa operazione descritta da Fibonacci: c'è chi ipotizza che il prodotto sia un rettangolo, ma non è ancora chiaro come "trovare" questo prodotto sul moltiplicatore di *numeri rotti*, il cui funzionamento è ancora ignoto, tanto che si osservano differenti ipotesi d'uso del materiale dato (**Figura 11**).

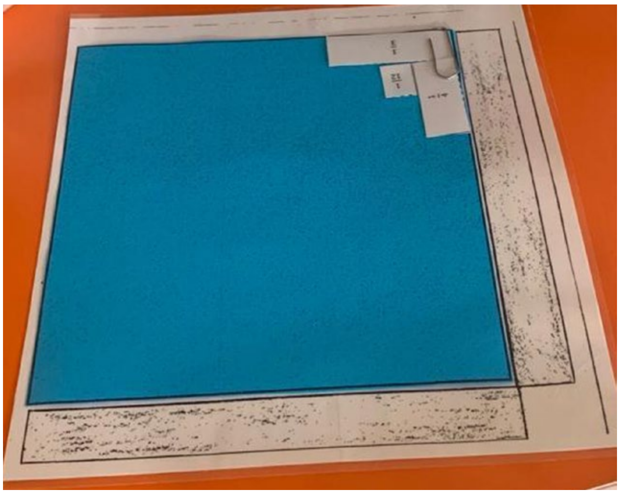


Figura 11. Tentativo di uso del moltiplicatore di *numeri rotti*.

Ci sono studenti che fissano le aste dei fattori con le graffette sulle sagome, cioè una da $\frac{1}{3}$ su un lato e una da $\frac{1}{4}$ dall'altro, mentre altri pongono sulle sagome del moltiplicatore tre aste da $\frac{1}{3}$ da una parte, quattro da $\frac{1}{4}$ dall'altra (**Figura 12**).

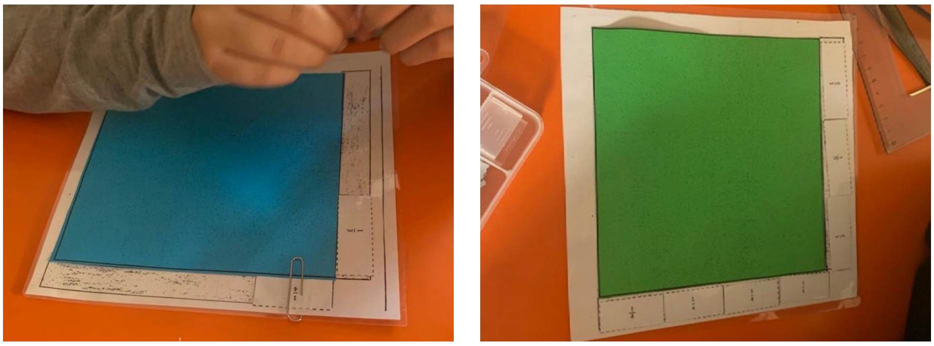


Figura 12. Uso differente delle aste nelle sagome del moltiplicatore.

Nel notare diversi modi di usare le aste sul moltiplicatore di *numeri rotti*, e nel tentativo di spiegarne le modalità di utilizzo, gli studenti si mostrano spaesati, non sapendo come continuare. L'insegnante chiede se le aste abbiano un posto specifico nelle sagome scure: gli studenti rispondono negativamente, forse ricordando la proprietà commutativa della moltiplicazione. Poi si chiede quale sia il ruolo del quadrato unitario, e gli studenti affermano che ha per lato l'asta. A questo punto viene rivolta la domanda-stimolo: «Il prodotto dei due fattori darà come risultato un quadrato o un rettangolo?». Conoscendo il ruolo del quadrato unitario, alcuni alunni rispondono che sarà un quadrato solo se si farà 1 × 1, senza pensare al risultato di un *numero rotto* per sé stesso. Alla richiesta di riflettere sul ruolo del materiale a disposizione, nessuno considera le squadrette, che invece sono state elencate dall'insegnante nella lista dell'occorrente per spiegare il funzionamento dello strumento. Alla domanda posta riguardo il loro ruolo, un alunno risponde che dovrebbero servire a disegnare il rettangolo prodotto. Questa risposta sblocca la situazione, facilitando le attività pratiche dei ragazzi. In continuità con le due diverse situazioni che si sono create precedentemente, c'è chi disegna i lati paralleli alle aste per individuare il rettangolo, chi invece suddivide il quadrato unitario tracciando tante linee verticali quante il numero delle aste sulla striscia orizzontale, e tante in orizzontale quante il numero delle aste presenti sulla striscia in verticale (**Figura 13**).

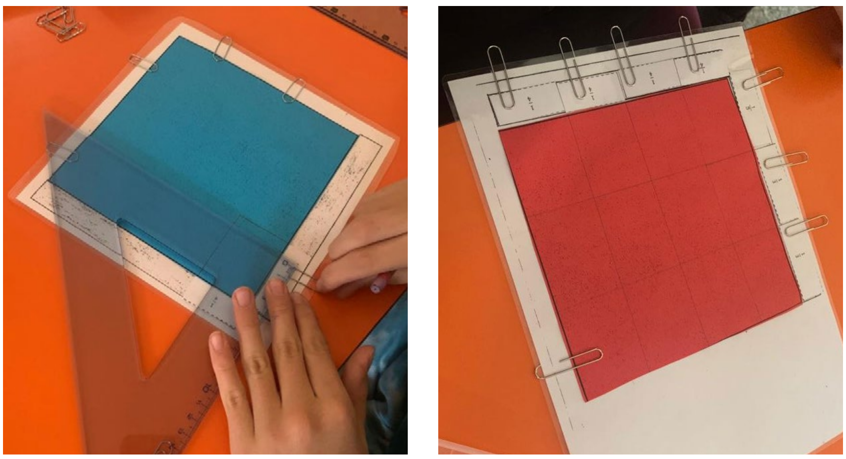


Figura 13. Uso delle squadre nel moltiplicatore di *numeri rotti*.

Giunti a questo punto, le soluzioni diverse presentate trovano il loro punto d'incontro: all'interno di ciascun gruppo gli studenti cominciano a discutere se sia giusta una o l'altra mentre l'insegnante si occupa di chi chiede spiegazioni o chi mostra qualche perplessità sul da farsi. Qualcuno nota che il rettangolo che ha per lati le aste è interno alla griglia disegnata nel quadrato unitario (**Figura 14**) e ne rappresenta proprio $\frac{1}{12}$.

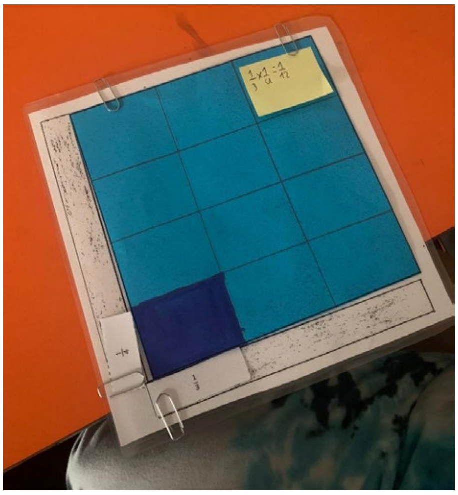


Figura 14. La moltiplicazione richiesta con il moltiplicatore di *numeri rotti*.

Si chiede di svolgere altre operazioni (**Figura 15**), con la raccomandazione di scrivere numericamente la moltiplicazione effettuata e di spiegare, attraverso una verbalizzazione scritta, quanto stanno svolgendo: lo scopo è di attivare strategie metacognitive su quanto appreso, ripercorrendo le azioni compiute con il moltiplicatore, usando un linguaggio adeguato ed enunciando formulazioni appropriate.

Figura 15. Una moltiplicazione con il moltiplicatore di *numeri rotti*.

L'insegnante assegna le operazioni da svolgere sia come compito da effettuare a casa, sia in classe nella lezione successiva, e incentiva una sistemazione dei saperi raggiunti mediante la compilazione delle istruzioni d'uso del moltiplicatore di *numeri rotti* (**Figura 16**).

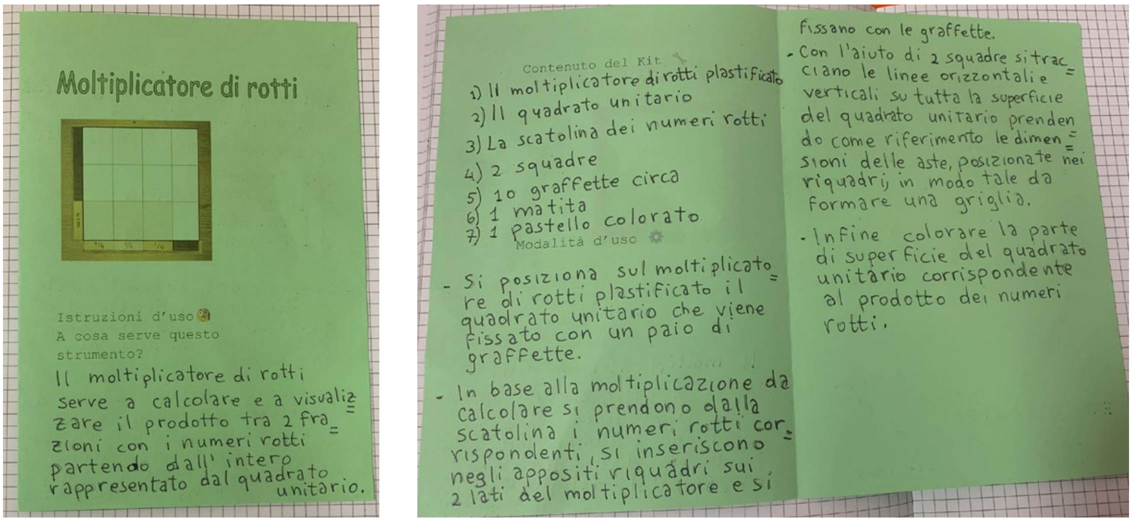


Figura 16. Le istruzioni d'uso del moltiplicatore di *numeri rotti*.

6.6 Il moltiplicatore digitale

Il funzionamento del moltiplicatore di *numeri rotti* è ripercorso attraverso un file GeoGebra[9] appositamente programmato per gli studenti: il moltiplicatore digitale (Figura 17).

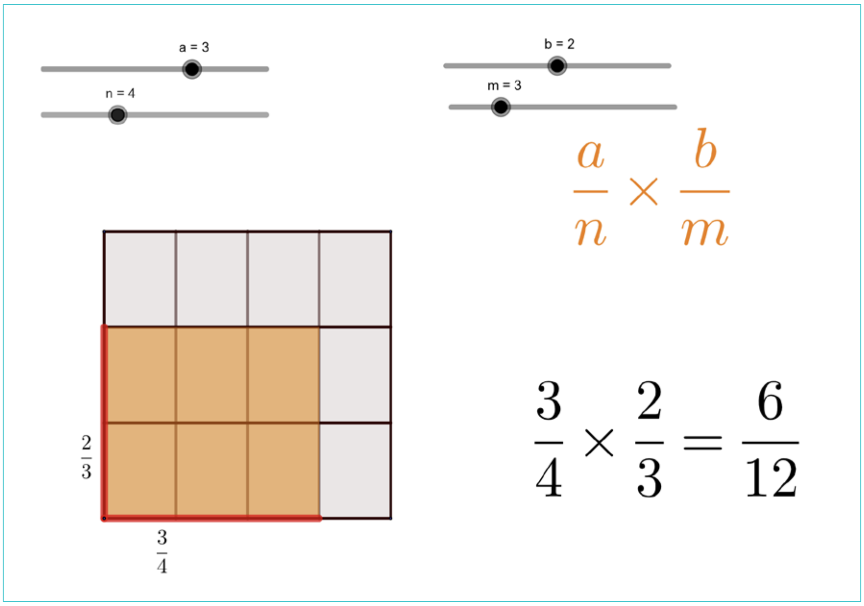


Figura 17. Il moltiplicatore digitale per *numeri rotti*.

Muovendo gli slider è possibile costruire le aste dei fattori, variando i numeratori e i denominatori delle frazioni di cui si vuole calcolare il prodotto. Se l'attività con il moltiplicatore fisico permette di concentrare l'attenzione sull'aspetto procedurale della moltiplicazione tra frazioni proprie, il moltiplicatore digitale opera per rinforzare questo risultato dal punto di vista visivo, poiché può intervenire su una numerosità di casi che ne enfatizzano l'aspetto riproduttivo.

9. È possibile visionare il file del moltiplicatore digitale al seguente link: https://www.geogebra.org/m/zgsv3ezn.

Impostando un numero sufficiente di prodotti attraverso il moltiplicatore digitale, viene sottolineato che il prodotto tra due *numeri rotti* ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori. Tale risultato viene poi formalizzato riportando per iscritto sul proprio quaderno quanto compreso.

6.7 Moltiplicazione tra un *numero rotto* e un numero misto e tra due numeri misti

Un procedimento geometrico analogo a quello utilizzato nell'attività precedente permette di affrontare la moltiplicazione tra un *numero rotto* e un numero misto e tra due numeri misti, senza usare uno strumento specifico ma solo una rappresentazione grafica di un rettangolo che ha per lati le aste delle frazioni utilizzate (Figura 18). In particolare, gli studenti verificano che per moltiplicare un *numero rotto* con uno misto o due misti occorre applicare la proprietà distributiva, prerequisito indispensabile per la trattazione della moltiplicazione di un monomio per un polinomio e tra polinomi in algebra, verificata anche attraverso un software specifico, il moltiplicatore digitale tra numeri misti.[10]

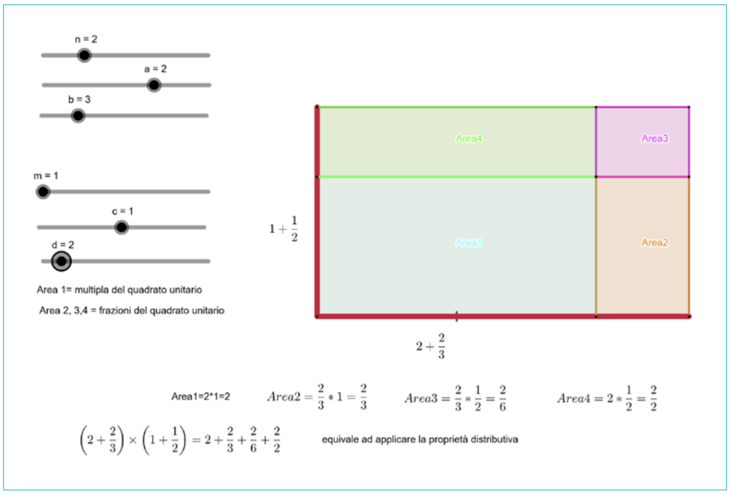


Figura 18. Il moltiplicatore digitale tra numeri misti.

Inoltre, attraverso la consultazione della fonte storica a loro disposizione (par. VI.1.1 del Liber Abbaci, riportato di seguito), gli alunni possono constatare che per effettuare una moltiplicazione tra un *numero rotto* e un misto, o tra due misti, è possibile trasformare i numeri misti in frazioni improprie ed estendere a questo tipo di moltiplicazione il risultato scoperto attraverso l'uso del moltiplicatore tra *numeri rotti*:

> «E ancora quando vorrai moltiplicare qualunque numero di qualunque posizione [con un numero qualunque di cifre] che contiene uno o più *rotti* per un qualunque numero con uno o più *rotti*, scrivi il numero maggiore con il suo *rotto*, o *rotti*, sotto il numero minore con i suoi pezzetti, cioè numero sotto numero e pezzetti sotto pezzetti. E prendi il numero superiore con i suoi pezzetti. E da lì fai pezzetti uguali a quelli [che sono] con lo stesso numero. E similmente farai i suoi pezzetti dal numero inferiore. E moltiplicherai i pezzetti fatti del numero superiore per quelli fatti del numero inferiore. E dividerai il risultato per i pezzetti di entrambi i numeri sotto un'unica linea di frazione, cioè unita insieme, e avrai le moltiplicazioni di qualunque numero per i pezzetti».
>
> (Boncompagni, 1857, p. 47, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

10. È possibile visionare il file del moltiplicatore digitale al seguente link: https://www.geogebra.org/classic/jgrz23q2.

6.8 "*Schisare*" nella moltiplicazione tra *numeri rotti*

Nell'ultima attività si presenta agli studenti il seguente brano, tratto dal Liber Abbaci, par. VI.1.7, in cui si discute in merito al prodotto $\frac{25}{2} \times \frac{118}{5}$:

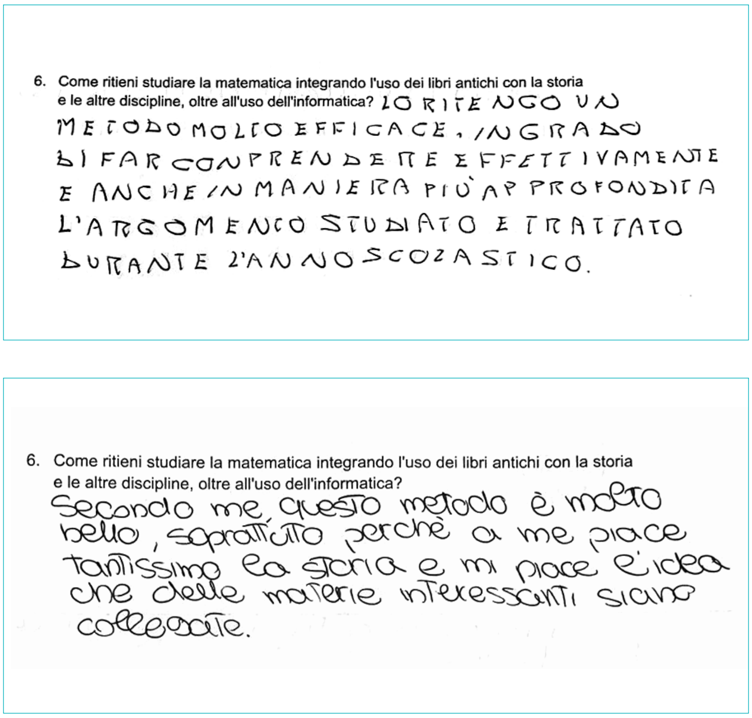
> «Ebbene puoi trovare il risultato della detta moltiplicazione in altro modo, cioè prima di moltiplicare 25 per 118, dividi 25 per il 5 sotto la linea di frazione; poiché si può dividere interamente, farà 5, che terrai da parte; e dividi 118 per il 2 che è sotto la linea di frazione; poiché la loro metà è intera, farà 59, che devi moltiplicare per il 5 che era stato tenuto da parte era la quinta parte di 25, risulterà 295, che è il totale della detta moltiplicazione, come si è trovato più sopra: e questa semplificazione è molto da considerare, perché con essa si evita la fatica del moltiplicare e del dividere: infatti è più faticoso moltiplicare 25 per 118 che 5 per 59; per la moltiplicazione di questi, cioè di 5 per 59, non c'è bisogno di dividere per alcun *rotto*. Per cui dovendo moltiplicare un numero qualsiasi per un numero qualsiasi, e dovendo dividere il loro totale per un numero, o numeri qualsiasi, per il quale, o per i quali tu possa interamente dividere uno di quei numeri, cercherai sempre di dividere quelli che potrai dividere interamente, prima di moltiplicarli: poi moltiplicherai a vicenda il resto dei numeri, e dividerai per il *rotto*, o per i *rotti* che resteranno da questa semplificazione che avremo cura di mostrare nel seguito».
>
> (Boncompagni, 1857, p. 48, traduzione a cura di Progetto Fibonacci)

Grazie alle parole di Leonardo Pisano, gli alunni discutono tra loro sulla comprensione del testo e con l'insegnante sull'operazione dello *schisare*, cioè del semplificare i fattori comuni al numeratore e al denominatore prima della moltiplicazione dei *numeri rotti*.

7 Bilancio conclusivo

Nel presente contributo si è descritto un percorso didattico finalizzato all'apprendimento della moltiplicazione tra due frazioni attraverso la storia delle matematiche. In particolare si è utilizzato il Liber Abbaci di Fibonacci come fonte storica, accompagnato dal *vocabolario dei rotti*. Ruolo rilevante ha avuto l'interazione anche con altri due artefatti: il primo, il moltiplicatore di *numeri rotti*, prevedeva la comprensione di una procedura geometrica che permettesse di intuire che il prodotto fosse una frazione del quadrato unitario, mentre il secondo, il moltiplicatore digitale, focalizzava l'attenzione su come ricavare la formula dalla scrittura della moltiplicazione, derivante, a sua volta, dalla comprensione del significato "visivo" di quanto svolto.

Al termine delle attività presentate, è stata proposta un'intervista finale sull'uso della fonte e degli artefatti: sono stati confermati i dati qualitativi emersi in altri studi (Dematté & Furinghetti, 2022; Radford, 2022), ovvero la motivazione, l'interesse alla storia, la consapevolezza di aver svolto attività interdisciplinari, il riconoscimento di elementi non matematici presenti nella fonte storica. Inoltre, è stato rilevato un positivo riscontro sull'utilizzo della metodologia adottata: infatti, alla domanda «Come ritieni studiare la matematica integrando l'uso dei libri antichi con la storia e le altre discipline, oltre all'uso dell'informatica?» gli studenti hanno comunicato pareri positivi, come è possibile constatare direttamente dalle loro parole (**Figura 19**).

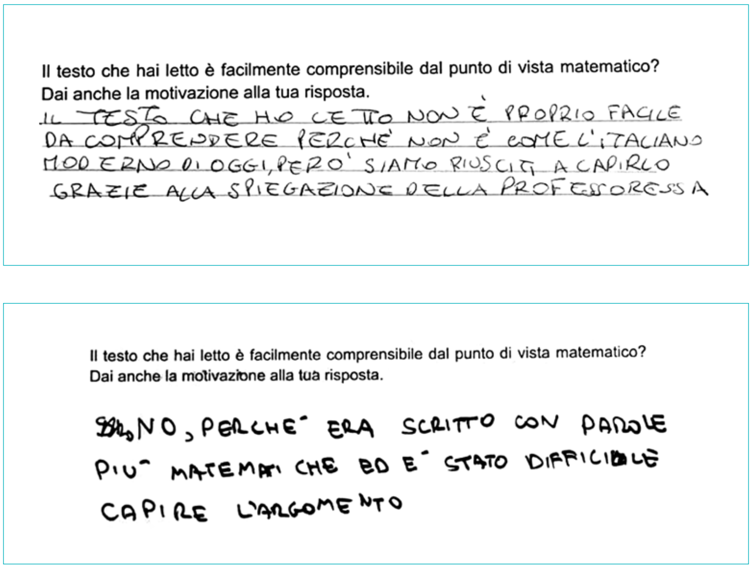


6. Come ritieni studiare la matematica integrando l'uso dei libri antichi con la storia e le altre discipline, oltre all'uso dell'informatica? LO RITENGO UN METODO MOLTO EFFICACE, IN GRADO DI FAR COMPRENDERE EFFETTIVAMENTE E ANCHE IN MANIERA PIÙ APPROFONDITA L'ARGOMENTO STUDIATO E TRATTATO DURANTE L'ANNO SCOLASTICO.

6. Come ritieni studiare la matematica integrando l'uso dei libri antichi con la storia e le altre discipline, oltre all'uso dell'informatica?
Secondo me, questo metodo è molto bello, soprattutto perchè a me piace tantissimo la storia e mi piace l'idea che delle materie interessanti siano collegate.

Figura 19. Esempi di risposte degli alunni riguardanti la metodologia utilizzata.

In alcuni casi si è anche verificato un certo spaesamento causato dal confronto con la fonte storica: dalle risposte degli studenti emerge qualche difficoltà legata a un linguaggio matematico differente da quello utilizzato sino alla trattazione di questo percorso didattico (**Figura 20**).



Il testo che hai letto è facilmente comprensibile dal punto di vista matematico?
Dai anche la motivazione alla tua risposta.
IL TESTO CHE HO LETTO NON È PROPRIO FACILE DA COMPRENDERE PERCHÉ NON È COME L'ITALIANO MODERNO DI OGGI, PERÒ SIAMO RIUSCITI A CAPIRLO GRAZIE ALLA SPIEGAZIONE DELLA PROFESSORESSA

Il testo che hai letto è facilmente comprensibile dal punto di vista matematico?
Dai anche la motivazione alla tua risposta.
NO, PERCHE' ERA SCRITTO CON PAROLE PIU' MATEMATICHE ED E' STATO DIFFICILE CAPIRE L'ARGOMENTO

Figura 20. Esempi di risposte degli alunni riguardanti il linguaggio matematico della fonte.

Questo tipo di reazione è in linea con un certo *dépaysement*, in grado di causare uno *choc culturel* (Barbin, 1997) che porta gli studenti a mettere in discussione le certezze pregresse (Sfard, 2015).

Dal punto di vista dell'insegnante che ha condotto l'esperienza, si può mettere in evidenza la generale soddisfazione rispetto alla metodologia utilizzata, tanto da scegliere di riproporla nella classe dell'anno scolastico successivo; la stessa docente è inoltre intenzionata a formarsi sull'uso della storia delle matematiche nella didattica, perché tale approccio le ha permesso di collaborare con i docenti dell'area umanistica e perché si è messa in discussione attraverso le riflessioni epistemologiche che la storia delle matematiche permette di effettuare, oltre ad aver visto una maggiore motivazione negli studenti. In ultimo, la docente si ritiene pienamente soddisfatta della profondità dell'apprendimento messo in gioco nei propri allievi, affermando che «è stato illuminante come tutto fosse radicato ormai in loro, fatto proprio come qualcosa di compreso talmente bene da non sfuggire più».

Bibliografia

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin AMQ*, *37*(1), 20–25.

Bartolini Bussi, M. G., Baccaglini-Frank, A. E., & Ramploud, A. (2014). Intercultural dialogue and the geography and history of thought. *For the Learning of Mathematics*, *34*(1), 31–33. https://www.jstor.org/stable/43894877

Boncompagni, B. (1857). *Liber Abbaci*. Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche. (Traduzione in italiano a cura del Progetto Fibonacci: https://www.progettofibonacci.it/).

Campolucci, L., Fandiño Pinilla, M. I., & Maori, D. (2011). *Frazioni.* Pitagora Editrice.

Castellano, L. (1678). *Aritmetica prattica composta del molto R. P. Christoforo Clauio … et tradotta dal latino in italiano dal sig. Lorenzo Castellano*. Steffano Curti.

Castelnuovo, E. (1952). L'insegnamento delle frazioni. *La Scuola Secondaria*, *2*, 73–80.

Catastini, L., & Ghione, F. (2023). *La matematica che trasformò il mondo: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci.* Carocci editore.

Cerasaro, S. (2020). L'aritmetica con il Liber Abaci di Fibonacci. *Periodico di matematiche*, *12-XIV*(3), 175–193.

Coppola, C., Iannaccone, A., Mollo, M., & Pacelli, T. (2021). Interazioni conversazionali, manipolazioni linguistiche e emergenza di abilità logiche in attività matematiche. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *9*, 9–31. https://doi.org/10.33683/ddm.21.9.1

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia: Dalle origini al miracolo greco*. Edizioni Dedalo.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abbacus problems. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(7), 1521–1536. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01397-9

Guillemette, D., & Radford, L. (2022). History of mathematics in the context of mathematics teachers' education: A dialogical/ethical perspective. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(7), 1493–1505. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01437-4

Kieren, T. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125–150). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.* https://www.mim.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Moyon, M., & Spiesser, M. (2015). *L'Arithmétique des fractions dans l'œuvre de Fibonacci : Fondements & usage*. Springer.

Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, *1*, 157–162. https://doi.org/10.5169/seals-1226

Radford, L. (2022). Body, matter and signs in the constitution of meaning in mathematics. In C. Houdement, C. de Hosson & C. Hache (Eds.), *Semiotic Approaches in Science Didactic* (pp. 247–282). ISTE.

Radford, L. (2023). Accogliere l'altro come problema educativo. *CEMeR – Caminhos da Educação Matemática em Revista*, *13*(2), 113–125.

Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. In E. Hargreaves & D. Scott (Eds.), *The Sage Handbook of Learning* (pp. 129–138). Sage Publications.