

Due esperienze didattiche di early-algebra con il DIST-M: dalla costruzione del problema all'implementazione in aula

Two early-algebra teaching experiences with DIST-M: from problem construction to classroom implementation

Maria Aceto*, Maria Lodina De Santis°, Angela Donatiello**, Giuseppina Lemmi°, Simona Manzoni***, Concetta Rosaria Montervino°, Luca Picariello**, Valeria Scaramuzzino**** e Giovanna Vadalà°°°°

*IC "Rita Levi Montalcini" di Lucignano (AR) – Italia

°IC "Gabriele Rossetti" di Vasto (CH) – Italia

**Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno – Italia

°°IC Perugia 6 – "Mario Grecchi" di Castel del Piano (PG) – Italia

***IC "Giovanni XXIII" di Almenno San Salvatore (BG) – Italia

°°°IC "Alfieri – Garibaldi" di Foggia – Italia

****IC "Curinga" di Curinga (CZ) – Italia

°°°°IC "B. Telesio" di Reggio Calabria – Italia

✉ m.aceto@icluignano.edu.it, marialodina.desantis@icrossettivasto.edu.it, adonatiello@unisa.it, giuseppinalemmi@yahoo.it, simona.manzoni@icalmennosansalvatore.edu.it, crmontervino@gmail.com, lpicariello@unisa.it, valeria.scaramuzzino63@gmail.com, prof.gio.mat@gmail.com

Sunto / La possibilità di approcciare al discorso algebrico mediante attività che mettano in luce diverse rappresentazioni permette agli studenti lo sviluppo del pensiero relazionale. Le esperienze presentate sono relative alla progettazione di attività a carattere fortemente immersivo che hanno coinvolto studenti di scuole secondarie di primo grado nello sviluppo della competenza argomentativa e del formalismo simbolico in ambito di teoria dei numeri. L'approccio narrativo e immersivo è stato possibile grazie all'uso del dispositivo didattico del DIST-M, mentre l'utilizzo di sistemi semiotici visuali ha favorito la formazione di un concetto in una prospettiva vygotkijana.

Parole chiave: argomentazione; pensiero relazionale; problemi-storia; rappresentazioni semiotiche; *early algebra*.

Abstract / The possibility of approaching algebraic discourse through activities that highlight different representations enables students to develop relational thinking. The experiences presented relate to the design of highly immersive activities that involved secondary school students (grades 6 and 8) in the development of argumentative competence and symbolic formalism in the field of number theory. The narrative and immersive approach was made possible through the use of the DIST-M methodology, while the use of Visual Semiotic Systems facilitated concept formation in a Vygotskian perspective.

Keywords: argumentation; relational thinking; story-problem; semiotic representations; early algebra.

1 Introduzione

I lavori che vengono qui presentati nascono nell'ambito dei percorsi formativi sulla didattica digitale, voluti dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) e dalla Fondazione "I Lincei per la Scuola", in cui docenti di scuola secondaria di primo grado,¹ accompagnati da tutor-ricercatori, hanno co-progettato alcuni percorsi narrativi per lo sviluppo della competenza argomentativa e del formalismo simbolico in ambito di teoria dei numeri. In questo lavoro si presentano due percorsi attivati nella scuola secondaria di primo grado, al fine di avviare e sviluppare negli studenti coinvolti la competenza argomentativa.² Nel contesto della scuola italiana, lo sviluppo delle capacità argomentative e del *problem solving* risultano infatti essere obiettivi da perseguire fin dal primo ciclo d'istruzione;³ infatti, nelle Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012) si legge che

«caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana. [...] Stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive».

(MIUR, 2012, p. 49)

Per favorire tale processo, si è scelto di operare con problemi-storia, ossia problemi scritti in forma verbale nei quali la domanda è calata in una situazione narrativa familiare al lettore ed autentica, ossia che supera il rischio della cosiddetta *frattura narrativa*, individuata da Zan (2012a) come uno degli ostacoli che impediscono la comprensione del testo di un problema. Lo stesso Radford (2022) chiarisce che i problemi-storia, a differenza delle altre tipologie di problemi che vengono spesso proposti in ambito scolastico, includono un contesto esperienziale e narrativo in cui gli agenti partecipano in modo attivo.

Nelle attività illustrate nel presente lavoro, l'approccio narrativo e immersivo è stato possibile grazie all'uso del dispositivo didattico del DIST-M (Albano et al., 2022), il cui quadro teorico si basa sulla teoria dell'*expansive learning* e che considera colui che apprende come un agente coinvolto nella costruzione e implementazione di un oggetto e di un concetto sostanzialmente nuovo, più ampio e complesso (Engeström & Sannino, 2010). L'approccio espansivo, sviluppato sul paradigma vygoskijano e basato sulla teoria dell'attività di Leont'ev, descrive dunque l'apprendimento che emerge all'interno di gruppi che vogliono introdurre cambiamenti nel loro sistema d'attività, immaginando scenari collocabili nella zona di sviluppo prossimale del gruppo (Engeström, 2015).

In linea con le Indicazioni Nazionali, il lavoro di sperimentazione avviato con i gruppi classe ha coinvolto gli studenti in processi esplorativi in ambito di teoria elementare dei numeri, in contesto cooperativo, mediante l'utilizzo di diversi sistemi semiotici. Anche se su piani differenti, gli studenti si confrontano continuamente con la necessità di utilizzare rappresentazioni semiotiche diverse, di elaborarle e di effettuare conversioni da un sistema semiotico ad un altro. Nell'ottica di Duval (2006), il processo di conversione dei sistemi semiotici svolge un ruolo fondamentale da un punto di vista cognitivo, in quanto favorisce la comprensione profonda dei concetti. Nel primo ciclo d'istruzione, anziché ricorrere-

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

2. La documentazione e i materiali utili per replicare l'attività saranno disponibili sul sito web de "I Lincei per la Scuola" <https://www.linceiscuola.it/>.

3. Il primo ciclo d'istruzione in Italia dura otto anni e corrisponde a tutti gli anni di scuola elementare e ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

re a sistemi semiotici formali e astratti, si preferisce favorire piuttosto l'uso di sistemi semiotici visuali, in particolare concreti ed iconici, che permettono, secondo Radford (2022), di rendere in modalità *embodied* l'idea metaforica di "cosa" utilizzata nel XIV secolo dai maestri d'abaco italiani, per la rappresentazione del concetto di incognita e variabile. Nell'ambito della scuola secondaria di primo grado i sistemi semiotici visuali avrebbero dunque il compito di favorire lo sviluppo di congetture e l'avvio verso forme di generalizzazione più astratta, come richiesto dalle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012). Si legge infatti che:

«Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni...) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema».

(MIUR, 2012, p. 49)

2 Inquadramento teorico

2.1 Le storie nella didattica

A partire da queste premesse nasce l'idea di progettare delle attività a carattere fortemente immersivo, che coinvolgano gli studenti di scuole secondarie di primo grado nello sviluppo della competenza argomentativa e del formalismo simbolico in ambito di teoria dei numeri.

In letteratura, il concetto di competenza argomentativa (Niss & Højgaard, 2011, 2019) si riferisce all'approccio pedagogico che promuove la costruzione attiva della comprensione matematica attraverso l'interazione e la discussione tra gli studenti. In questo contesto, un approccio didattico orientato all'argomentazione non si limita alla semplice enunciazione di soluzioni corrette, ma sottolinea l'importanza di spiegare, giustificare e confrontare i propri ragionamenti matematici. Gli studenti sono incoraggiati a esporre le proprie idee, a confrontarle con quelle dei loro compagni e a sviluppare una comprensione più approfondita dei concetti matematici attraverso la discussione e la riflessione critica. L'obiettivo è promuovere una comprensione più completa e duratura della matematica, piuttosto che un semplice apprendimento meccanico di procedure. Nella pratica didattica, si verifica troppo spesso che i processi di comprensione degli studenti rimangano celati dietro al compromesso della ricerca di risposte corrette da parte del docente. Alcune teorie del successo, ad esempio quelle basate sull'incontrollabilità (Di Martino, 2017) non favoriscono, infatti, lo sviluppo dei processi argomentativi. Anche l'aritmetica è spesso esplorata dagli studenti fin dai primi anni di scuola con modalità prettamente procedurali, orientate al prodotto, contribuendo così a creare un'abitudine all'apprendimento riproduttivo che sviluppano negli studenti una visione della matematica come disciplina in cui non sia richiesto prendere decisioni strategiche (Di Martino, 2017). L'uso di problemi non autentici, poi, di cui sono spesso ricchi i libri di testo, non favorisce la costruzione profonda dei significati matematici, ma lascia immaginare i problemi come questioni in cui esista una sola strada risolutiva. I problemi scritti in forma di testo sintetico, molto utilizzati nella pratica didattica, inducono di frequente nello studente una lettura selettiva degli elementi del problema al fine di individuare direttamente i dati numerici da manipolare per arrivare alla risposta (Zan, 2011, 2012a). Essi, infatti, seguono «scorciatoie cognitive [...] a causa della loro struttura stereotipata» (Zan, 2012a, p. 110). Con l'obiettivo di evitare un approccio puramente procedurale al *problem solving* e per stimolare la costruzione attiva di un nuovo

concetto matematico, in letteratura si trova il riferimento ai cosiddetti *problemi-storia* (Radford, 2022; Zan, 2011, 2012a, 2012b), considerati come una sottocategoria dei problemi scritti in forma testuale e nei quali la domanda è calata in una situazione familiare al lettore che spesso prende il nome di contesto (Zan, 2011). È necessario che tale contesto sia fortemente esperienziale e con una narrazione che coinvolga direttamente gli studenti come agenti attivi dell'intero processo.

Zan (2011) individua in Bruner (1986, 1991) le caratteristiche che una storia deve avere affinché, in un problema, gli elementi della storia (personaggi, luoghi, oggetti) non risultino irrilevanti per la risoluzione del problema stesso e la domanda nasca in maniera naturale dalla storia. In particolare, tra gli altri emerge che in una storia non devono mancare un personaggio, un obiettivo che il personaggio vuole portare a termine, un'azione da compiere per raggiungere l'obiettivo, uno strumento utile a compiere quell'azione e una situazione specifica nella quale l'azione prende luogo (*normatività*). Questi elementi devono essere calati in una dimensione temporale (*sequenzialità*) e interconnessi intorno ad un ostacolo che renda complesso ai personaggi il raggiungimento dell'obiettivo.

Rispettare queste proprietà quando si costruisce un problema-storia assicura che il contesto narrativo sia ben strutturato e previene l'emergere di *fratture narrative*, ossia di quegli ostacoli che impediscono l'utilizzo del processo narrativo (Zan, 2012a) nella fase di comprensione di un problema. Più precisamente, in un problema le fratture narrative nascono quando la domanda non fa riferimento alla storia: questo fa sì che il legame tra gli elementi della narrazione si rompa rendendo inutile, per il lettore, comprenderli. Nella maggior parte dei casi, infatti, le fratture narrative nascono proprio tra domanda e contesto; pertanto, «maggiore è il collegamento fra la domanda e la storia narrata nel contesto, più la comprensione della storia favorirà la comprensione della domanda e in definitiva del problema» (Zan, 2012b, p. 438). In quest'ottica, Zan ha sviluppato il modello Contesto e Domanda (C&D) (Zan, 2012a, 2012b) per la costruzione di problemi-storia che tengano conto di quanto discusso sopra, visualizzabile in Figura 1. Tramite tale modello è possibile formulare un problema il cui testo rispetti tutte le proprietà di una *buona storia* e in cui, al contempo, la domanda nasca in maniera naturale dal problema.

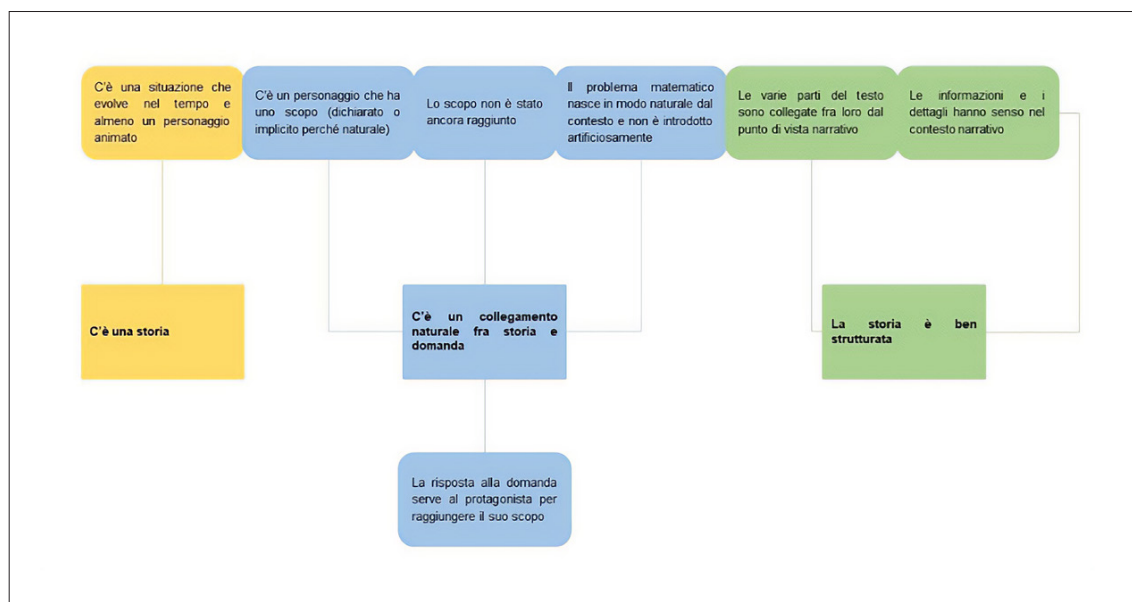


Figura 1. Il modello Contesto e Domanda (C&D) (Zan, 2012b, p. 454).

Ciò che emerge, in particolare osservando il secondo blocco, è che affinché la domanda nasca in maniera naturale dal contesto, la risposta deve essere necessaria al raggiungimento dello scopo del protagonista.

2.2 Early algebra

All'interno di questo lavoro, gli scopi matematici a cui tendono tutti i protagonisti delle storie riguardano la scoperta di semplici proprietà di teoria dei numeri, lo sviluppo di un approccio relazionale al simbolo di uguaglianza, la costruzione del concetto di consecutivo, l'approccio alle equazioni, la genesi del processo dimostrativo per induzione e un primo approccio al concetto di sommatoria.

La possibilità di approcciare al discorso algebrico mediante attività che mettano in luce diverse rappresentazioni e il carattere relazionale delle proprietà dei numeri, permette agli studenti lo sviluppo di quel *pensiero relazionale* che Navarra (2019) pone a fondamento del pensiero pre-algebrico. In ottica relazionale l'attenzione è, infatti, puntata non tanto sugli enti in gioco, quanto più sul tipo di relazione esistente tra essi e sul riconoscimento di analogie e generalizzazioni nelle strutture aritmetiche e algebriche in esame: l'esempio emblematico lo si ritrova nel significato dell'uguale non più visto in ottica procedurale con il focus sul risultato, bensì in ottica relazionale, che favorisce la costruzione di significato matematico mettendo in luce il processo. A differenza del pensiero procedurale, orientato al numero, il pensiero relazionale è orientato alla struttura e si focalizza sulle quantità in quanto tali, non sul particolare valore che esse assumono. Pensare in modo relazionale significa dunque pensare in termini di relazioni di uguaglianza con l'uso di rappresentazioni non simboliche, ad esempio sotto forma di scatole e biglie. Spesso infatti gli studenti incontrano maggiore difficoltà nel passare dalla rappresentazione puramente verbale a quella strettamente simbolico-astratta. In tal caso il passaggio per un modello grafico di tipo analogico, che evidenzia anche il graduale salto dal discreto al continuo, svolge un ruolo di modellizzazione intermedia nella costruzione di un nuovo concetto matematico (Lemmo & Maffia, 2021). In quest'ottica, l'utilizzo di un Sistema Semiotico Concreto (CSS) e di un Sistema Semiotico Iconico (ISS) in un contesto narrativo di un problema-storia, favorisce la formazione di un concetto in una prospettiva storico-culturale di stampo vygotskijano (Radford, 2022). Ricordiamo che la genesi di un concetto da un punto di vista vygotskijano è strettamente interconnessa al concetto di attività che, nella teoria dell'oggettivazione di Radford, è intesa come sistema dinamico in evoluzione dialettica. Per Radford, infatti, l'attività è il sistema che insegnante e studenti producono insieme nel confrontarsi con un problema matematico comune e include le relazioni etiche, i processi discorsivi e intellettuali e i flussi emozionali generati nell'attività collettiva e unificata di insegnamento-apprendimento (Radford, 2022). In questo ambito rientrano sia i problemi di rappresentazione e trattamento con i mucchi (Castellini, 2016; Lemmo & Maffia, 2021), sia l'approccio al principio di induzione sviluppato in ambiente ArAl (Cusi & Malara, 2008; Telloni & Malara, 2021). Una delle questioni principali riguarda la distinzione del significato procedurale dal significato relazionale del simbolo di *uguale*. Numerosi studi mostrano che studenti di scuola primaria⁴ e di scuola secondaria di primo grado vedono il segno di uguale solo in modo operativo, come stimolo ad una risposta o come espressione di un'azione, privandolo del forte senso relazionale che lo caratterizza, ossia come espressione di un'equivalenza (Giberti & Maffia, 2021; Radford, 2022).

Radford (2022) riporta numerosi studi in cui si evince che le difficoltà incontrate dagli studenti di secondaria di primo grado in relazione al simbolo di uguale sono dovute alla scrittura numerico simbolica che racchiude un alto livello di astrazione e induce dunque ad un uso prettamente computazionale del simbolo di uguale. Inoltre, l'utilizzo di un unico termine per indicare l'uguale crea misconcezioni. Interessante, in questo senso, ricordare che in epoca medioevale i matematici arabi erano soliti utilizzare due termini diversi per indicare l'uguale: "mithl" ossia "simile, dello stesso tipo" e "adala", ossia "ben bilanciato". L'uso di termini distinti permetteva una distinzione concettuale tra i diversi aspetti del concetto di uguaglianza, favorendo la comprensione del significato relazionale di uguaglianza tra le due parti di un'equazione, contro una visione propriamente computazionale che vede l'uguale solo come operatore (Radford, 2022).

Un'altra difficoltà emergente in studenti di secondaria di primo grado è il concetto di *consecutivo*.

4. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

Come suggerisce Navarra (2019), tale difficoltà risiede nell'abitudine a concepire la somma tra numeri solo come operatore che deve necessariamente produrre un risultato, senza la consapevolezza del concetto di scrittura matematica *non canonica* come rappresentazione del numero stesso. L'utilizzo di sistemi semiotici visuali (CSS e ISS) in classi di secondaria di primo grado può favorire il graduale passaggio verso la costruzione della scrittura relazionale di numero consecutivo, fondamentale anche per l'introduzione dei primi problemi con le equazioni.

L'approccio alle equazioni di I grado avviene solitamente nella scuola secondaria di primo grado mediante i cosiddetti problemi con i segmenti che però nascondono l'insidia del continuo e non favoriscono necessariamente la comprensione relazionale del concetto di incognita. Il *mucchio* può invece essere percepito dagli studenti come un contenitore "opaco" di un numero incognito di elementi discreti, utile a gestire relazioni tra numeri naturali. Il passaggio al continuo potrebbe poi avvenire in un secondo momento mediante la sostituzione dei mucchi con liquidi o sabbia (Castellini, 2016; Lemmo & Maffia, 2021). La rappresentazione che fa uso di contenitori opachi per le incognite e di palline per le quantità numeriche note richiama un'idea di rappresentazione che supporta lo sviluppo del pensiero relazionale mediante il soddisfacimento di alcuni requisiti (Lenz, 2022; Polotskaia & Savard, 2021):

- la rappresentazione può presentare sia le quantità note sia quelle incognite;
- la rappresentazione mostra il ruolo di ciascun elemento all'interno della relazione;
- la rappresentazione supporta l'analisi visiva e la scoperta di nuove informazioni.

Inoltre, gli studi sulle difficoltà incontrate dagli studenti nell'approccio al principio di induzione hanno portato all'introduzione di nuove pratiche didattiche che tengano conto delle possibili misconcezioni che possono nascere in quest'ambito. In quest'ottica si è scelto di costruire un problema-storia che tenga conto di questi risultati e che, in particolare, si focalizzi sul problema didattico di far comprendere agli studenti il passo di induzione, considerato uno degli aspetti più delicati del principio di induzione (Cusi & Malara, 2008). Muovendosi in questa direzione, il principio di induzione è stato introdotto agli studenti seguendo quanto suggerito da Cusi e Malara (2008) e Telloni e Malara (2021) attraverso *micro-dimostrazioni* (Cusi & Malara, 2008) delle singole implicazioni $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ per determinati valori di k . Per farlo, è stato chiesto agli studenti di dimostrare ricorsivamente la proposizione $P(k + 1)$ a partire dalla proposizione $P(k)$ al fine di permettere loro di individuare una *struttura di transizione* (Avital & Libeskind, 1978), ossia un insieme di inferenze che si ripetono, ripresentandosi ad ogni passaggio.

All'interno del processo risolutivo viene anche introdotto l'utilizzo del simbolismo matematico. Gli studi sul linguaggio e sul formalismo matematico in diversi contesti scolastici hanno evidenziato che tra gli aspetti fondamentali per lo sviluppo e l'acquisizione di simboli vi sono la creazione condivisa e la negoziazione di significato all'interno della comunità (Coppola et al., 2014). In quest'ottica, attraverso i problemi-storia, si è cercato di mettere gli studenti in una situazione tale da rendere necessaria l'introduzione di un simbolo che possa aiutare a condensare la somma di un determinato numero di addendi per avviarli ad un primo approccio al concetto di sommatoria.

3 Metodologia

Come modello metodologico, il lavoro si è concentrato sul dispositivo didattico del *Digital Interactive Storytelling in Mathematics* (DIST-M)⁵ il cui quadro teorico si basa sulla teoria dell'*expansive learning*

5. Progetto PRIN – Bando 2015 – Prot. 20155NPRA5 accessibile al link <https://sites.google.com/unisa.it/dist-m/il-progetto/publicazioni>.

(Engeström & Sannino, 2010). I soggetti che apprendono sono coinvolti nella costruzione cooperativa di un oggetto e di un concetto sostanzialmente nuovo e l'apprendimento che emerge all'interno dei gruppi è collocabile nella zona di sviluppo prossimale del gruppo stesso (Engeström, 2015).

Nel DIST-M gli studenti sono condotti all'interno di un problema-storia a fumetti suddivisa in episodi, mediante l'impersonificazione delle funzioni cognitive agenti nella mente di un matematico (Boss, Promoter, Peste, Blogger) e l'interazione su piattaforma dedicata con account legati ai singoli personaggi. I ruoli cognitivi sono definiti come segue (Albano et al., 2021):

- *Promoter* è colui o colei che si fa carico dell'esplorazione necessaria per procedere nel percorso risolutivo e che in caso di blocco cerca aiuto tra le risorse o chiedendo consigli a un esperto;
- *Boss* è colui o colei incaricato di seguire l'organizzazione del percorso risolutivo scegliendo quali strategie adottare per il raggiungimento dell'obiettivo. Ha inoltre una funzione affettiva nel tenere sotto controllo il coinvolgimento di tutto il gruppo durante tutte le fasi del percorso, anche in caso di scoramento;
- *Blogger* è colui o colei incaricato della riorganizzazione del processo risolutivo e dei risultati ottenuti al fine di comunicarli e condividerli con la comunità matematica;
- *Peste* rappresenta il pensiero critico e è colui o colei responsabile della validazione del processo risolutivo mettendo in dubbio le congetture avanzate dal gruppo e richiedendo il controllo della validità dei risultati ottenuti;
- *Guru* è colui o colei che rappresenta l'esperto a cui rivolgersi in caso di difficoltà durante la risoluzione del problema e è capace di fornire le conoscenze e le risorse esterne necessarie per superare l'impasse.

Gli studenti, divisi in gruppi, interpretano i ruoli su due diversi livelli, Attori e Osservatori, che si inter-scambiano nel passaggio da un episodio del DIST-M ad un altro. In ogni episodio c'è un solo Gruppo Attori che è impegnato nella risoluzione del *task*, mentre gli altri gruppi osservano in modo critico il ruolo che è stato assegnato a ciascuno studente.

In ottica vygotkiana l'attività di costruzione dei concetti è stata resa possibile dal lavoro in piccoli gruppi e dalla creazione di uno spazio sociale di interazione e comunicazione, in cui l'interazione tra pari e con il docente non è vista in termini di negoziazione di un significato condiviso, quanto piuttosto nella cooperazione reale di tutti i soggetti in gioco per la produzione collettiva di idee (Radford, 2022). Gli strumenti di dialogo predisposti in piattaforma prevedono l'interazione degli studenti su chat dedicate, in particolare una per il gruppo di Attori, una per i gruppi di Osservatori e una tra Guru e Promoter.

La piattaforma utilizzata per l'implementazione, costruita in ambiente Moodle, ha richiesto un forte lavoro di guida e supporto da parte dei tutor-ricercatori, in quanto strumento digitale nuovo per le docenti coinvolte. Ogni episodio è stato implementato come risorsa Libro di Moodle contenente i fumetti costruiti tramite software esterni e suddivisi in sottocapitoli. Alla fine di ognuno di essi è richiesta un'azione concreta immersiva degli studenti da svolgersi con l'uso di applicazioni accessibili attraverso pulsanti interattivi. Le interazioni degli studenti sono state previste solo all'interno della piattaforma, in particolare nelle chat Gruppo Attori, Gruppo Osservatori e nella chat dedicata all'interazione Promoter e Guru. Agli studenti era richiesto di non parlare a voce con i compagni e la consegna delle password di accesso alla piattaforma è avvenuta in modalità secretata e con cambi password previsti nelle sessioni successive, in modo tale da non permettere agli studenti di tenere traccia degli accessi o di riconoscere i compagni nei ruoli giocati.

La sperimentazione si è svolta in 8 classi di scuola secondaria di primo grado, 4 di classe prima e 4 di classe terza di 7 diverse regioni italiane del Sud, Centro e Nord Italia, mediante la costruzione e l'implementazione di due diversi problemi-storia.

Dopo una prima fase di co-progettazione e co-costruzione dei problemi matematici e dei proble-

mi-storia, dello sviluppo degli *storyboard* e della realizzazione digitale dei fumetti, avvenuta in cooperazione tra le docenti coinvolte e i tutor-ricercatori, è seguita la fase di sperimentazione vera e propria in classe. Essa ha preso l'avvio al termine dell'anno scolastico 2022/23 e si è conclusa durante il primo periodo dell'anno scolastico 2023/24. Le attività si sono svolte durante l'orario curricolare nei laboratori di informatica delle singole scuole o, in caso di *notebook* portatili disponibili al di fuori del laboratorio, direttamente nelle classi.

3.1 Scelta del problema

Nella scuola secondaria di primo grado si osserva talvolta che per i ragazzi le difficoltà maggiori nascono dal risolvere alcune tipologie di problemi nei quali gli elementi essenziali non sono i numeri ma le *relazioni tra i numeri*. In questo filone si collocano, infatti, tutti gli studi sull'*early algebra* (Kieran, 2018; Lenz, 2022; Navarra, 2019).

«In una situazione problematica, un dato assoluto è generalmente ben identificato dagli studenti (Pierino possiede tot mele; il perimetro del triangolo è pari a...; ...) mentre invece il dato relazionale (il doppio; la metà; il successivo; ...) sfugge spesso alla loro attenzione».

(Lemmo & Maffia, 2021, p. 54)

Partendo da queste considerazioni, si è deciso di porre l'attenzione sulla necessità di individuare due problemi matematici in grado di consentire una costruzione collettiva di significati, di riflettere sui diversi modi di rappresentare un numero, di fornire strumenti utili per saper spiegare a sé stessi e agli altri il concetto costruito e la strategia adottata, tramite un uso sapiente delle trasformazioni semiotiche (Fandiño Pinilla, 2015).

La scelta del problema è stata preceduta da un'analisi a priori per cercare di individuare le problematiche più rilevanti legate ad un apprendimento spesso orientato verso l'operatività piuttosto che improntato alla costruzione dei concetti. Di norma, per gli studenti risulta difficile fornire spiegazioni, giustificazioni o anche solo motivare le proprie scelte. Inoltre, essi si confrontano raramente con situazioni sfidanti, in cui venga richiesto loro di congetturare, formalizzare e dimostrare. L'utilizzo dei registri semiotici è solitamente limitato al formalismo classico senza essere spesso accompagnato dalla costruzione di significato. A tal fine, per entrambi gli anni di scuola secondaria di primo grado si è pensato di proporre agli studenti un risultato elementare di teoria dei numeri che favorisse lo sviluppo della competenza argomentativa. In particolare, per le classi prime di scuola secondaria di primo grado è stata scelta la proprietà per la quale *la somma di tre numeri naturali consecutivi è un multiplo di tre*, mentre per le classi terze di scuola secondaria di primo grado si è scelto di lavorare con la proprietà per cui *la somma dei primi n numeri dispari equivale a n^2* . Le due proprietà sono state proposte agli studenti per favorire inoltre un primo approccio alla rappresentazione algebrica dei numeri e al trattamento algebrico. In entrambi i casi si è agevolato il passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio matematico e viceversa, attraverso l'utilizzo di sistemi semiotici visuali (CSS e ISS) (Radford, 2022). Dall'analisi a priori è emerso inoltre che tra le problematiche di interesse vi è la costruzione del concetto di multiplo, connesso con quello di divisibilità, ancora non completamente consolidato negli studenti di scuola secondaria di primo grado, così come quello di incognita, la cui costruzione è stata facilitata attraverso l'uso di un modello didattico basato sul concetto di mucchio discreto di elementi (Castellini, 2016; Lemmo & Maffia, 2021), nel nostro caso secchielli e castagne. Per quanto riguarda le classi terze, la necessità di far produrre una dimostrazione ha fornito l'occasione per introdurre il principio di induzione mediante l'*early algebra*, tramite l'utilizzo dei processi di *pre-induzione* o *induzione naïf* (Cusi & Malara, 2008; Telsoni & Malara, 2021).

3.2 Costruzione dello *storyboard* e dei fumetti

Nell'ottica del modello C&D, il problema matematico è diventato narrazione. Si è infatti costruita una storia che potesse consentire agli studenti di immedesimarsi facilmente nei diversi personaggi. A tal fine, nella creazione dello *storyboard* si è cercato di costruire un problema il più possibile vicino alle dinamiche relazionali degli studenti, immaginando i personaggi come un gruppo di amici, avvicinandosi al loro modo di essere e di interagire tra pari e cercando di vedere con i loro occhi. I problemi-storia costruiti hanno le caratteristiche di quello che Di Martino (2017) definisce un "bel problema", ossia un problema sfidante, per il quale non si conoscano a priori le conoscenze che verranno utilizzate per la risoluzione, nel quale sia possibile effettuare delle attività di tipo esplorativo e in cui le strategie possibili per la risoluzione siano molteplici.

Per la costruzione dei fumetti, avvenuta in modalità collaborativa tra docenti e tutor-ricercatori, è stata scelta la piattaforma *Pixton* per le classi prime e la piattaforma *StoryboardThat* per le classi terze. Sono state curate attentamente le ambientazioni, le espressioni facciali, l'abbigliamento e i dettagli visivi, al fine di rendere sempre più immersiva l'esperienza nella trama della storia. Si è lavorato per rendere il linguaggio visivo del fumetto accessibile e stimolante. La sua universalità ha permesso di veicolare il racconto matematico attraverso più canali comunicativi (grafico, linguistico ed emotivo). I dialoghi sono stati realizzati dalle insegnanti delle classi coinvolte e dunque i termini utilizzati sono quelli a cui le classi erano già abituate. A volte possono sembrare linguisticamente complessi, ma sono contestualizzati all'interno delle varie classi.

3.3 *Storyboard* classi prime

Per le classi prime si è pensato di ambientare la storia in un campo scout nel quale si trovano 5 personaggi ben definiti per caratteristiche e ruoli. Il gruppo scout, infatti, è formato da Gabriele, Andrea, Alice e Anna. Gabriele è il Reporter (con funzione di Blogger), amante della natura, molto riflessivo, ama scrivere e raccontare tutto ciò che gli accade. Andrea è la Pulce (con funzione di Peste), scettico e curioso, non si accontenta mai delle spiegazioni che gli vengono date, dubita di tutto e tutti e per questo pone continuamente domande. Alice è la Sherlock (con funzione di Promoter), è appassionata di serie crime e mystery, ogni volta che incontra un mistero da risolvere non si ferma e cerca sempre nuove strade. Essendo il capo-pattuglia, si confronta spesso con Camilla, il capo-scout. Anna è l'Hermione (con funzione di Boss), una ragazza con un carattere molto deciso; è la più organizzata del gruppo, prende in mano ogni situazione e guida i compagni verso l'obiettivo. La trama si sviluppa attraverso enigmi matematici, coinvolgendo il gruppo in un'avventura di collaborazione sotto la guida di Camilla, la docente – Guru, che, oltre ad interagire in chat con il Promoter, fornisce al gruppo *app* e strumenti digitali che favoriscano l'attivazione di tutti i processi cognitivi in gioco. Il gruppo deve affrontare una prova di orienteering e per far ciò deve recuperare le bussole all'interno di un vecchio baule chiuso con un lucchetto a combinazione numerica. I ragazzi notano sul baule alcuni numeri intagliati (Figura 2) e propongono di usarli per trovare la combinazione che alla fine consentirà di aprire il baule e prendere le bussole. Per fare ciò gli scout dovranno ragionare tra loro in modo da rispondere ai quesiti che vengono proposti attraverso i diversi episodi del fumetto. Il primo episodio permette ai ragazzi di esplorare una serie di tre numeri consecutivi per scoprire se tra essi esistano relazioni.

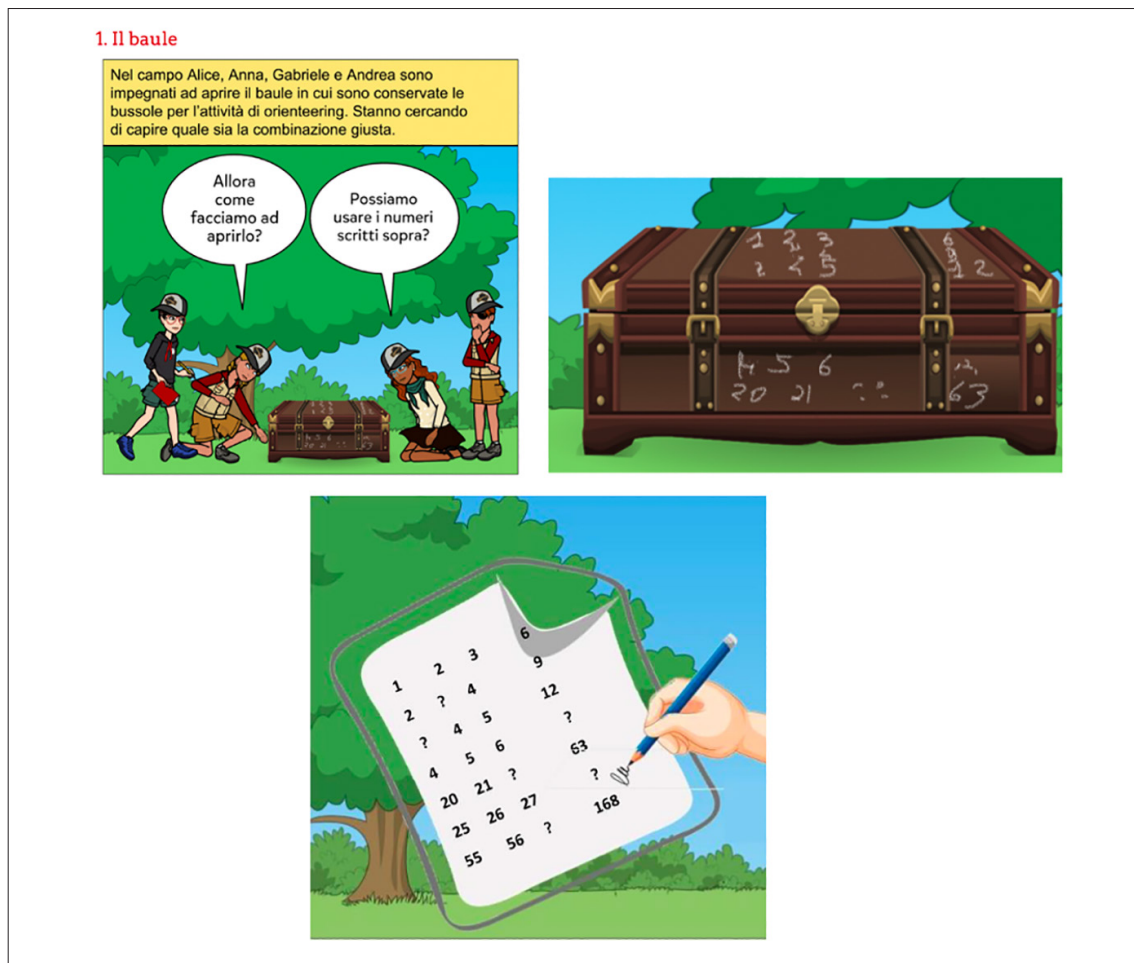


Figura 2. Fase di esplorazione su una sequenza ignota di numeri.

Il secondo episodio è stato strutturato in modo da aiutare i ragazzi ad esprimere a parole una congettura già in parte sviluppata al termine della fase esplorativa del primo episodio, ossia che la somma di tre numeri consecutivi qualsiasi è sempre un multiplo di tre. Il fumetto in questo caso è stato progettato al fine di far emergere la generalità dell'enunciato, ossia che la proprietà vale qualunque sia la sequenza di numeri naturali consecutivi scelti a prescindere dal valore del primo numero della sequenza (Figura 3).

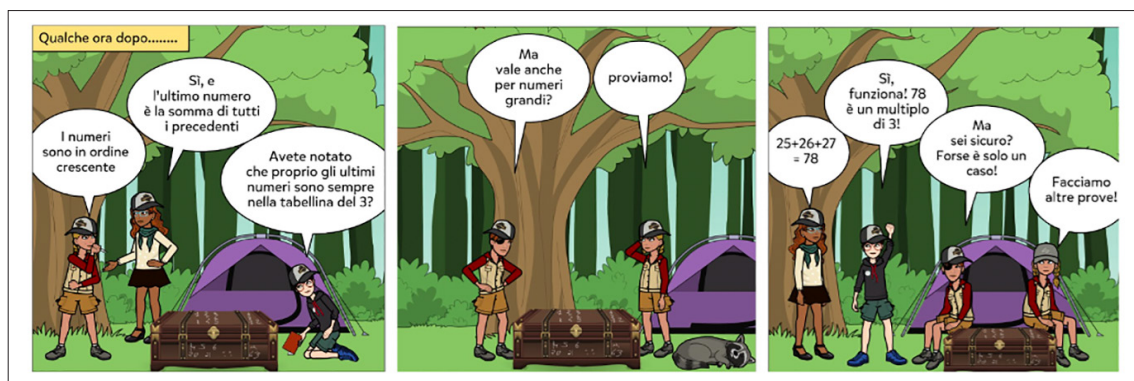


Figura 3. Striscia di fumetti che veicola la generalità della sequenza scelta.

Per far sì che l'attenzione venisse rivolta alla generazione di un enunciato espresso "a parole" è stata anche predisposta un'app che facilitasse tale processo, mediante un puzzle di parole (Figura 4).

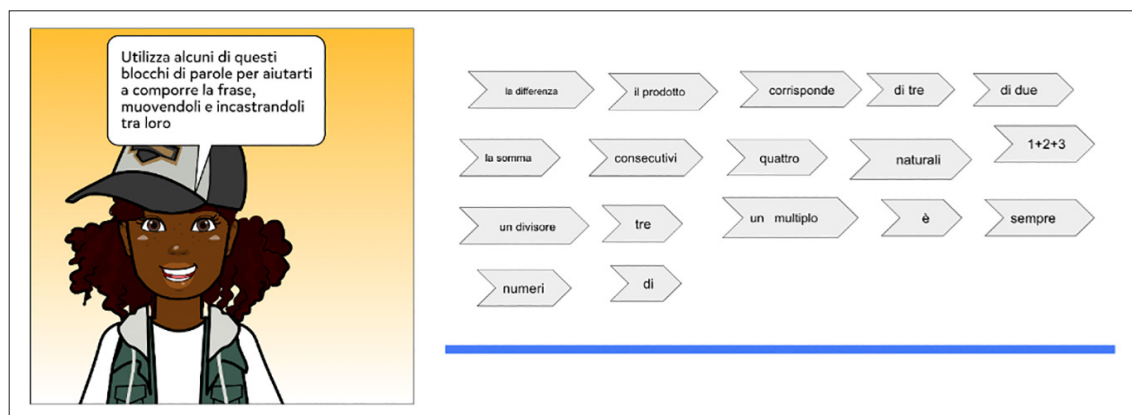


Figura 4. Puzzle di parole proposto come app per la scrittura dell'enunciato.

Nell'episodio successivo si deve giungere a formalizzare e dimostrare la congettura proposta; per consentire ciò, si sono forniti agli studenti sistemi semiotici visuali, concreti ed iconici (CSS e ISS), al fine di aiutare gli studenti a rappresentare simbolicamente tre numeri consecutivi e il multiplo di tre che ne rappresenta la somma (Figura 5), mentre le castagne rappresentano numeri naturali, pertanto quantità discrete numerabili, nel secchiello gli studenti ritrovano il senso di "mucchio" come contenitore che permette di "misurare" una quantità totale in termini di un'altra quantità incognita (Lemmo & Maffia, 2021).



Figura 5. Secchielli come mucchio e castagne come interi positivi. Fumetti ispirati alla Fig.5 del lavoro di Castellini (2016), richiamato in Figura 1 e Figura 2 del lavoro di Lemmo e Maffia (2021).

Infine, nell'ultimo episodio è stata progettata una sequenza di fumetti che potesse permettere agli studenti un primo confronto con il concetto di equazione. L'enfasi è stata infatti posta sul simbolo di uguale, qui raffigurato da due legnetti, quale elemento chiave del pensiero relazionale pre-algebrico

(Navarra, 2019) e sul concetto di incognita-mucchio (cfr. par 2.2), qui raffigurato nuovamente da un secchiello (Figura 6).



Figura 6. Trattamento algebrico in sistemi semiotici visuali. Fumetti ispirati alla Fig.5 del lavoro di Castellini (2016), richiamato in Figura 1 e Figura 2 del lavoro di Lemmo e Maffia (2021).

Gli studenti sono dunque chiamati a risolvere una semplice equazione, sperando per la prima volta un trattamento algebrico in sistemi semiotici visuali con il metodo dei mucchi come mostrato nelle Figure 6 e 7.



Figura 7. Sistemi semiotici visuali, concreti ed iconici, per risolvere equazioni algebriche con i mucchi.

3.4 Storyboard classi terze

Per le classi terze si è pensato ad una situazione che fosse non solo vicina agli studenti ma in cui, inoltre, i personaggi potessero sentirsi coinvolti. In tal modo, è venuto naturale ambientare la storia durante una vacanza su un'isola organizzata da un gruppo di amici. Il gruppo di protagonisti, quindi, è formato da Mattia (con funzione di Peste), un ragazzino riflessivo che fa spesso domande a traboc-

chetto mettendo in discussione le affermazioni degli altri; Margherita (con funzione di Boss) tenace e decisa, amichevole con tutti e che coordina e organizza il lavoro; Claudia (con funzione di Blogger) che sogna di diventare una grande giornalista, ama schematizzare quanto si discute e prendere appunti; Alessandro (con funzione Promoter) il più piccolo del gruppo, ma sempre intraprendente, curioso e pronto a coinvolgere i suoi amici in nuove sfide. La figura del Guru viene interpretata da Anna, la sorella di Alessandro, presenza abituale nel gruppo dei ragazzi. In questo senso, il canale comunicativo preferenziale con il Promoter che contraddistingue il ruolo del Guru è stato giustificato con la relazione di parentela che lega i due personaggi. Durante una passeggiata pomeridiana i ragazzi trovano uno strano messaggio nascosto in una bottiglia che il mare aveva trasportato sulla spiaggia da un'isola lontana. Attraverso l'utilizzo dei numeri figurati, i protagonisti, decifrando il messaggio contenuto nella bottiglia, scoprono che questo indica una serie di somme di numeri dispari il cui risultato è rappresentato sotto forma di quadrati (Figura 8).

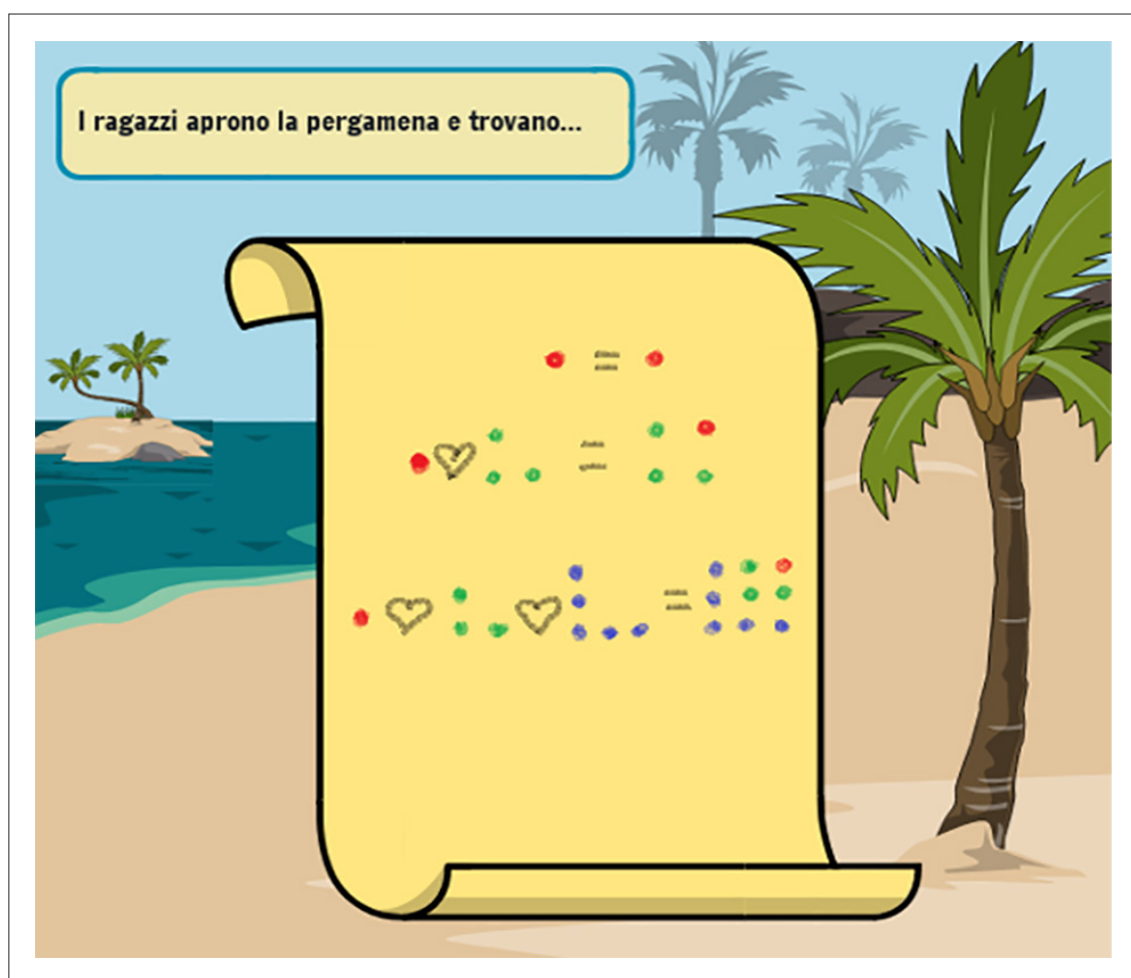


Figura 8. Messaggio cifrato con l'utilizzo dei numeri figurati come sistema semiotico iconico.

Negli episodi successivi, utilizzando una *Jamboard*, i ragazzi sono portati a congetturare la relazione che lega le somme di numeri dispari e il quadrato del numero di addendi nel caso generale e a dimostrarne l'enunciato attraverso una prima introduzione alla dimostrazione per induzione.

Sotto la guida del Guru, durante questa fase i ragazzi svolgono i passi $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ per determinati valori di k cercando di dimostrare, dopo aver verificato la base di induzione, che $P(k + 1)$ segue da

$P(k)$, come nell'esempio rappresentato in Figura 9. In riferimento all'esempio in figura, agli studenti è stato chiesto di svolgere singolarmente i passi di induzione dal passo $P(1)$ al passo $P(6)$, tentando di dimostrare la proposizione a partire dal risultato ottenuto nel passo precedente. Dopo aver svolto il passo $P(6)$ viene chiesto loro di dimostrare il passo $P(11)$.



Figura 9. Alcuni passi della dimostrazione per induzione e la generalizzazione finale.

Lo scopo è quello di permettere loro di individuare, nello svolgimento dei passi di induzione, una struttura comune ad ogni passo, in linea con gli studi svolti sul principio di induzione (Avital & Libeskind, 1978; Cusi & Malara, 2008; Telsoni & Malara, 2021).

Con l'intento di far emergere il simbolo matematico da un bisogno sociale e far sì che questo rappresenti un preciso e concordato aspetto matematico, nell'ultimo episodio i ragazzi, intuendo che il loro interlocutore non utilizza il loro stesso linguaggio, si trovano a dover rappresentare la proprietà nel caso di dodici addendi e comunicarla al mittente del messaggio trovato sulla spiaggia. In questo modo si intende introdurre gli studenti ad un primo approccio al concetto di sommatoria attraverso un processo di negoziazione, costruzione e condivisione (Coppola et al., 2014) tra i membri del gruppo (Figura 10).



Figura 10. La scelta dei simboli per rappresentare la proprietà.

4 Prime osservazioni dalle sperimentazioni in aula

Durante l'implementazione in aula è stata esperita la scoperta come attività collettiva, in cui gli studenti hanno cooperato per la ricerca di una risposta condivisa. L'obiettivo di individuazione di una strategia risolutiva, soprattutto nel primo episodio a carattere fortemente esplorativo, ha consentito agli studenti di mettersi in gioco in modo attivo. Ciò nonostante, è da rilevare come, per alcuni studenti, i tempi di concentrazione siano risultati più lunghi rispetto ai tempi medi di attenzione in classe. Lo strumento digitale ha in parte nascosto alcune difficoltà, in quanto gli studenti più interattivi non hanno riconosciuto in chat la presenza di compagni con fragilità a differenza di quel che avviene solitamente nelle usuali attività d'aula.

Si è inoltre riscontrata, in un primo momento, la difficoltà da parte degli studenti a riconoscere la differenza tra i ruoli di Attori e quelli di Osservatori e anche quella di mantenere uno specifico ruolo

all'interno dello stesso episodio. Alcuni studenti dei gruppi Osservatori, infatti, tendevano ad utilizzare gli strumenti dedicati all'esplorazione del gruppo Attori, interferendo in parte con lo svolgimento del problema.

Gli studenti talvolta si sono confrontati verbalmente con i compagni più vicini, non riuscendo a mantenere sempre l'interazione tutta sul piano digitale. La chat, infatti, è stata in alcuni casi utilizzata maggiormente nella fase finale dell'episodio, ossia nel momento di ricerca di un accordo nel gruppo prima dell'invio della risposta al Guru.

La difficoltà a lavorare solo su piattaforma digitale si è resa evidente anche nella scelta, da parte di alcuni studenti, di utilizzare inizialmente un foglio di carta a supporto del ragionamento esplorativo, anziché gli strumenti offerti dalla piattaforma digitale Moodle (Figura 11).

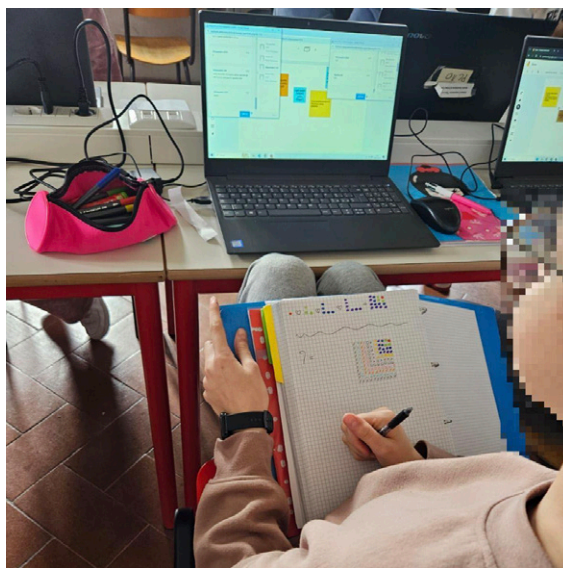


Figura 11. Fase esplorativa esperita su supporto cartaceo, anziché digitale.

Al contrario un elemento di stimolo negli studenti è stato l'utilizzo delle *app* esterne, soprattutto per la manipolazione delle rappresentazioni iconiche. Ciò ha permesso loro di visualizzare le congetture ed i tentativi di risoluzione, sperimentando anche forme nuove di comunicazione del ragionamento matematico (Figura 12).

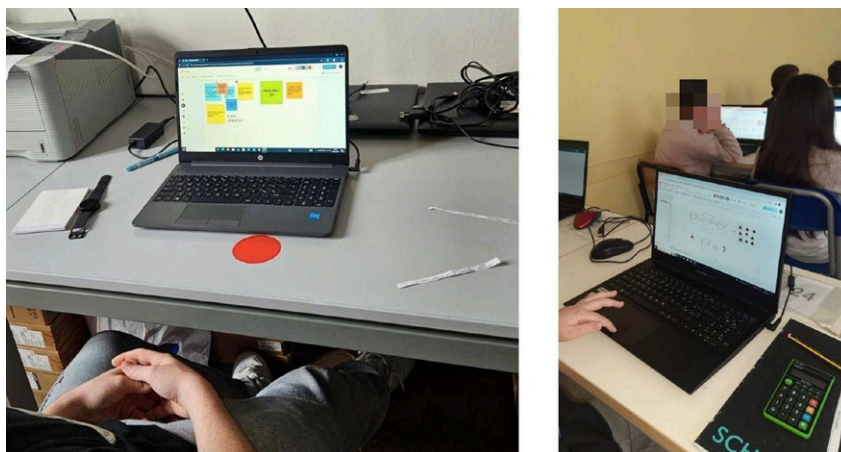


Figura 12. Uso delle *app* esterne come strumento di interazione e comunicazione sostitutivo della chat.

Inizialmente gli studenti si sono approcciati al problema con esempi numerici.

Si riporta a tal proposito un estratto di una chat Gruppo Attori delle classi prime in cui viene valutata la somma di tre numeri consecutivi, partendo da un numero casuale:

Alice: « $25+26+27=78$ è un multiplo di 3».⁶

E ancora un estratto di una chat Gruppo Attori di classe terza, in cui lo scopo viene raggiunto sviluppando l'intero calcolo:

Mattia2:⁷ «la soluzione è che partendo da 1, si aggiungono 11 numeri dispari ognuno più grandi di 2 del precedente quindi è: $+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23=144$ che è il quadrato di 12».

In quest'ultimo estratto si nota tuttavia un primo tentativo autonomo di formalizzazione del concetto di numero dispari, quando lo studente dice «ognuno più grandi di 2 del precedente».

Nonostante il modello del DIST-M preveda un'interazione privilegiata tra Promoter e Guru, in alcuni casi si è osservata la necessità di un intervento dell'insegnante anche nella chat del gruppo Attori fin dalla prima fase esplorativa.

Durante la sperimentazione del secondo episodio delle classi prime si è notato che alcuni studenti tendevano a tralasciare o a modificare la parola *consecutivo* nel puzzle di parole presentato in Figura 4, non attribuendole significato (Figura 13) ed evidenziando una difficoltà nel riuscire a posizionarla correttamente all'interno dell'enunciato della loro congettura.

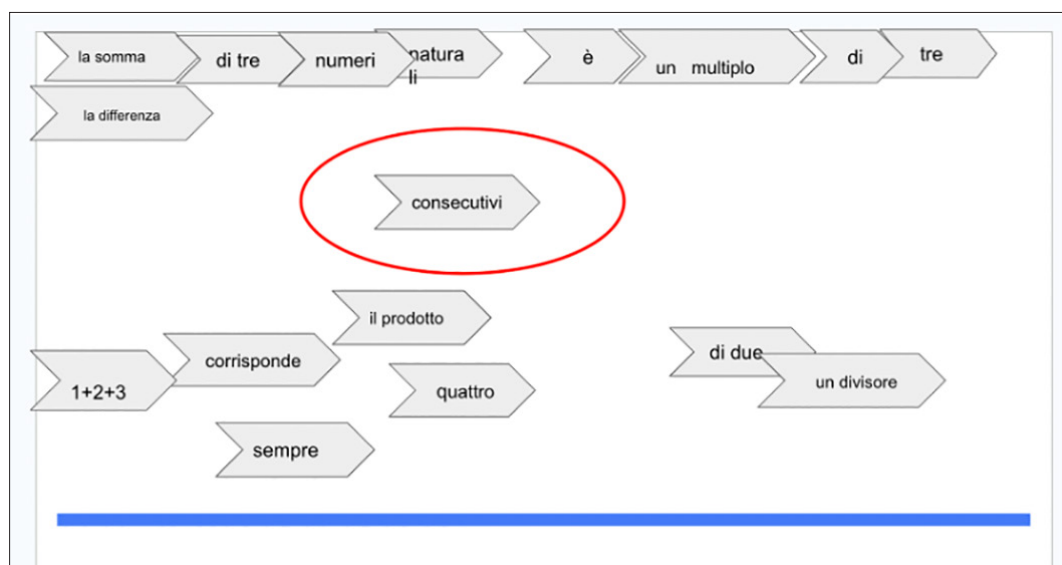


Figura 13. Puzzle di parole in cui viene evidenziata la parola "consecutivi" tralasciata dagli studenti.

Altri gruppi di studenti invece hanno sommato tre numeri in successione crescente scelti in modo casuale, non necessariamente consecutivi, cercando di garantire solo che la somma restituisse un

6. I dialoghi sono le trascrizioni fedeli delle chat online nelle quali è avvenuta l'interazione discorsiva all'interno dei gruppi. Sono stati dunque riportati le parole, i simboli, le maiuscole e le minuscole utilizzati dagli studenti.

7. Nelle diverse classi coinvolte spesso il numero di studenti non ha sempre consentito la formazione di gruppi da 4 (Promoter, Peste, Blogger, Boss). Sono stati dunque formati a volte gruppi da 5, doppiando il personaggio di Peste che compare, talvolta, con il suffisso 2 accanto al nome.

multiplo di tre. Tale comportamento è osservabile anche da un estratto di una chat Gruppo Attori delle classi prime, di cui si riporta qui la trascrizione:

Gabriele: «possiamo scrivere che tutti i numeri sono in successione, crescente, l'ultima fila di numeri se sommati tra loro sono dei multipli di 3».

Da queste osservazioni è emersa l'ipotesi che alcuni concetti, quale quello di consecutivo di un numero, che sembrava essere stato chiaramente esplicitato nel fumetto, in realtà per gli studenti è risultato poco chiaro. Per tale motivo, prima di procedere con la somministrazione di ulteriori episodi, è stata modificata la narrazione, introducendo vignette nelle quali tali concetti venivano chiariti attraverso i dialoghi dei personaggi.

Il lavoro di *design* e la costruzione dello *storyboard* è stato infatti un processo in continuo divenire che ci ha indotto a continue rimodulazioni, resesi necessarie dalle prime osservazioni fatte in aula durante la sperimentazione. La rimodulazione che ha riguardato la riscrittura e redazione dei fumetti inerenti il concetto di consecutivo è riportata in Figura 14.

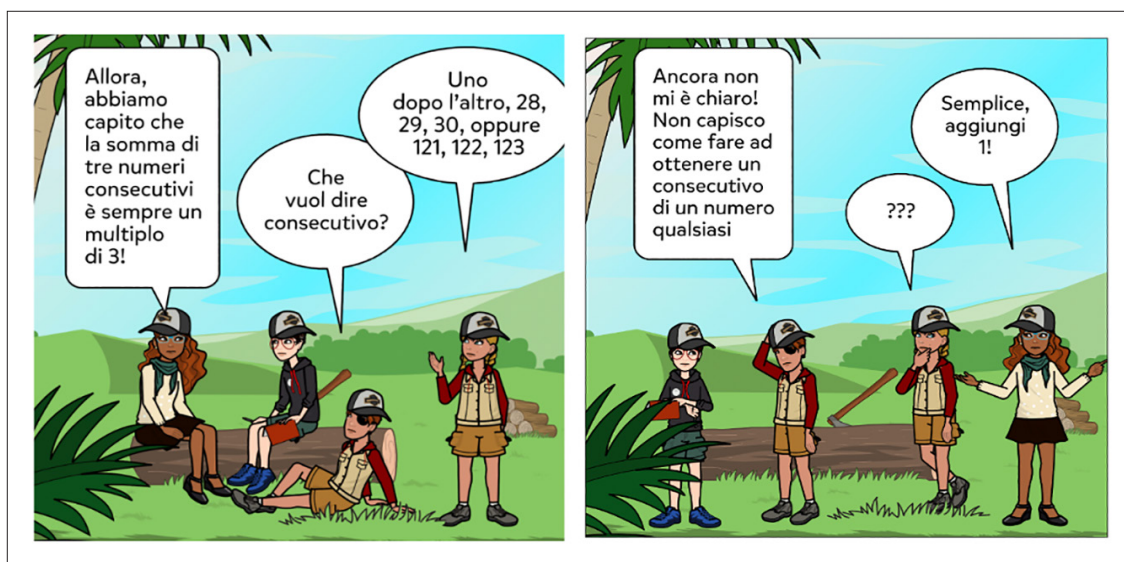


Figura 14. Fumetti rimodulati per veicolare il concetto in costruzione di consecutivo di un numero attraverso la narrazione.

Anche il confronto con il concetto di incognita-mucchio per studenti di classe prima è apparso talvolta problematico, soprattutto in fase iniziale. Si legge in alcune chat:

Gabriele: «come fare ad indicare una quantità che non conosco».

Ed ancora:

Andrea2: «ragazzi, come facciamo a sapere i numeri consecutivi se non sappiamo il primo numero?»

L'approccio relazionale con l'uso di sistemi semiotici visuali CSS e ISS (Radford, 2022) quali i secchielli e le castagne, che giocano il ruolo delle scatoline e delle biglie per Lenz (2022) o dei mucchi per Castellini (2016) e Lemmo e Maffia (2021), emerge poi in alcuni estratti di interazione tra pari nel Gruppo Attori di classe prima, permettendo così la costruzione collettiva di significato.

- Gabriele: «in ogni secchiello secondo me c'è lo stesso numero di castagne».
[...]
Gabriele: «quando Anna ha detto che i secchielli sono incogniti io ho pensato subito alla lettera X».
Alice: «secondo me in ogni secchiello ci sono 2 castagne perché se sottraiamo dal totale⁸ le castagne fuori dai secchielli cioè 3 esce 6 e poi 6 diviso 3 che sono i secchielli esce 2».
[...]
Anna: «in base a quello che ha detto Alice, e all'app dobbiamo sommare le castagne sia dentro sia fuori».
[...]
Gabriele: «esatto! $2 + 3 + 4 = 9$ ».
Andrea: «questo mi ricorda qualcosa».
Gabriele: «ahhhhh vi ricordate gli episodi precedenti??»
Gabriele: «che la somma di tre numeri consecutivi fanno un multiplo di 3».

Alla luce degli studi di *early algebra* sul principio di induzione (Avital & Libeskind, 1978; Cusi & Malara, 2008; Telloni & Malara, 2021), nel seguente estratto di chat delle classi terze, scelto come paradigmatico, è possibile individuare un principio di struttura di transizione:

- Margherita: «regaaa ho capito! usando il risultato del quadrato precedente e sommandoci il numero dispari corrispondente al quadrato che si vuole trovare (per esempio voglio trovare 12×12 prendo il dodicesimo numero dispari) ottieni il risultato».

5 Bilancio dell'esperienza

L'attività ha in particolare messo in luce alcune difficoltà preventivate nell'analisi a priori e la strutturazione del percorso ci ha offerto un'occasione per riflettere sui possibili ostacoli che gli studenti avrebbero potuto incontrare durante la risoluzione del problema. Nell'ottica espansiva (cfr. par. 1), alla luce delle osservazioni fatte in aula durante l'implementazione dei primi episodi, è emersa anche l'esigenza di una rimodulazione in itinere, modificando in alcuni casi sia lo *storyboard* che i fumetti. Le *app* esterne, per quanto utili per l'esplorazione del problema mediante sistemi semiotici visuali, hanno però spostato l'interazione degli studenti dalle chat predisposte in ambiente Moodle a strumenti esterni ad esso. Questi ultimi, pensati inizialmente solo come *scaffolding* del processo esplorativo, sono diventati il mezzo di comunicazione principale in cui il processo è ricostruibile storicamente, ma il riferimento allo specifico personaggio che ha agito, si è perso nell'anonimato dell'utente. Tale problema potrebbe essere superato utilizzando uno strumento interno a Moodle con potenzialità sia esplorative che comunicative, in quanto ciò rappresenterebbe una trasposizione digitale dell'interazione cooperativa reale in cui il momento esplorativo e quello comunicativo avvengono contemporaneamente nello stesso ambiente.

L'estratto delle chat per gli studenti di classe prima suggerisce che l'uso di materiali come secchielli e castagne sembri adatto a preparare la strada per una comprensione iniziale del concetto di variabile e

8. Osservando le Figure 6 e 7 si comprende che per totale la studentessa intende le 9 castagne a destra dell'uguale.

favorisca un approccio al pensiero relazionale. Anche per gli studenti di classe terza, l'estratto presentato sembra suggerire che l'approccio di *early algebra* al principio di induzione favorisca la costruzione del concetto di passo induttivo.

Le sperimentazioni qui descritte rientrano comunque in un progetto di ricerca più ampio che prevederà in futuro un'attenta analisi dei dati raccolti relativa alle interazioni tra studenti e studenti-docente rilevabili dalle chat di Moodle.

Quella che qui presentiamo è un'esperienza progettata e svolta nei contesti su menzionati e che ogni insegnante può adattare nelle proprie classi. I dialoghi dei fumetti da noi presentati sono stati infatti realizzati dalle insegnanti delle classi coinvolte e dunque i termini utilizzati sono quelli a cui le classi erano già abituate dal consueto lavoro d'aula.

L'esperienza qui proposta apre, naturalmente, a possibilità progettuali diverse in relazione a differenti contesti e che possono far emergere difficoltà e riscontrare problematiche che noi non abbiamo rilevato.

Ringraziamenti

Abbiamo il piacere di ringraziare gli Istituti Comprensivi "Rosario Livatino" di Ficarazzi (PA); "B. Telesio" di Reggio Calabria (RC); "Curinga" di Curinga (CZ); "Alfieri – Garibaldi" di Foggia (FG); "Gabriele Rossetti" di Vasto (CH); Perugia 6 – "Mario Grecchi" di Castel del Piano (PG); "Rita Levi Montalcini" di Lucignano (AR); "Giovanni XXIII" di Almenno San Salvatore (BG) che hanno partecipato alla sperimentazione delle attività discusse in questo lavoro.

Bibliografia

- Albano, G., Coppola, C., & Dello Iacono, U. (2021). What Does 'Inside Out' Mean in Problem Solving? *For the learning of mathematics*, 41(2), 32–36. <https://www.jstor.org/stable/27091202>
- Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: Didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, 9(4), 429–438. <https://doi.org/10.1007/BF00410588>
- Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Harvard University Press.
- Bruner, J. (1991). The narrative construction of reality. *Critical inquiry*, 18(1), 1–21. <https://doi.org/10.1086/448619>
- Castellini, A. (2016). Against problem solving by segment method. *EDiMaST: Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology*, 2(2), 287–302. <https://www.edimast.it/index.php/edimast/article/view/32>
- Coppola, C., Mollo, M., & Pacelli, T. (2014). Manipolazione di un linguaggio socialmente costruito in una classe di scuola primaria: Costruzione del concetto di equivalenza. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 37(1), 7–33.
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2008). Improving awareness about the meaning of the principle of mathematical induction. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 393–398). Cinvestav-UMSNH.
- Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 23–37. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.2>

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Engeström, Y. (2015). *Learning by expanding*. Cambridge University Press.
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational research review*, 5(1), 1–24. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.12.002>
- Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Insegnare e valutare la competenza in matematica. In AA.VV. (Eds.), *Didattica per competenze* (pp. 10–14). Supplemento a *La Vita Scolastica*, 70(2). Giunti Scuola.
- Giberti, C., & Maffia, A. (2021). L'interpretazione del simbolo di uguaglianza nel primo ciclo d'istruzione. *RicercaAzione*, 13(1), 199–211. <https://doi.org/10.32076/RA13107>
- Kieran, C. (Ed.) (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer.
- Lemmo, A., & Maffia, A. (2021). Un esempio di introduzione del paradigma relazionale nella scuola media. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 10, 53–69. <https://doi.org/10.33683/ddm.21.10.3>
- Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: An interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM–Mathematics Education*, 54(6), 1181–1197. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6>
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione*. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf
- Navarra, G. (2019). Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebraica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 5, 70–94. <https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.3>
- Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University. (Titolo originale: *Kompetencer og matematiklæring Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark, number 18 in Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie* pubblicato nel 2002).
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: A view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 447–469. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09979-8>
- Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM–Mathematics Education*, 54(6), 1151–1167. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x>
- Telloni, A. I., & Malara, N. A. (2021). A constructive and metacognitive teaching path at university level on the Principle of Mathematical Induction: Focus on the students' behaviours, productions and awareness. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 19(1), 133–161. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2021.0525>

Zan, R. (2011). The crucial role of narrative thought in understanding story problem. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI – Proceedings of the MAVI-16 Conferenc* (pp. 287–305). Institute of Mathematics and Natural Sciences, Tallinn University & Vali Press.

Zan, R. (2012a). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35 A(2), 107–126.

Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: Il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35 A(5), 437–468.