DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 98 - 115, DOI: 10.33683/ddm.23.14.5

OPEN ACCESS

I numerali nell'antica Cina: un laboratorio alla scoperta dei sistemi di numerazione

Numerals in the ancient China: a laboratory to discover number systems

Anna Maria Brunero
Scuola primaria "Federico Sclopis" dell'Istituto Comprensivo "Pacchiotti – Via Revel", Torino – Italia

✉ brunero.annamaria@gmail.com

Sunto / Stimolare l'esplorazione dei contenuti matematici è un'attività quanto mai affascinante e allo stesso modo complessa per i docenti della scuola primaria. Questa sperimentazione svolta in una classe quarta concerne un possibile percorso in continuità verticale, trattandosi del riadattamento di una attività sperimentata nella scuola secondaria di primo grado, focalizzando l'attenzione sul laboratorio di matematica come base per l'esplorazione dei contenuti da parte degli alunni. Attraverso strategie di valutazione formativa e per mezzo della discussione matematica, gli allievi si sono confrontati con il sistema di numerazione cinese, mettendo in gioco non solo competenze in ambito matematico, ma in un'ottica di interdisciplinarità, anche in ambito storico. Partendo, infatti, dall'esplorazione del triangolo di Tartaglia-Pascal, contenuto in un antico libro di testo di matematica cinese, gli allievi hanno potuto sviluppare competenze matematiche nel campo dei numeri in linea con un'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole.

Parole chiave: didattica laboratoriale; sistemi di numerazione; educazione multiculturale; discussione matematica; argomentazione.

Abstract / Stimulating the exploration of mathematical contents is a very fascinating and complex activity for primary school teachers. This teaching experiment carried out in a fourth-grade class relates to a possible path in vertical continuity, since it is the adaptation of an activity experienced in the lower secondary school, with a focus on the mathematics laboratory, as a basis for students' exploration of contents. Through formative assessment strategies and mathematical discussion, the pupils were confronted with the Chinese numeral system, putting into play their skills in mathematics as well as in the history field, in an interdisciplinary perspective. Starting, in fact, from the exploration of the Tartaglia-Pascal triangle, contained in an ancient Chinese mathematics textbook, the students were able to develop mathematical skills in the field of numbers in line with an active and conscious citizenship education.

Keywords: laboratory teaching; number systems; multicultural education; mathematical discussion; argumentation.

1 Introduzione

Nella società dell'immediatezza che ci circonda è fondamentale per gli insegnanti non dimenticare che la costruzione del pensiero, soprattutto matematico, è un processo che richiede tempi lunghi, e che tale sviluppo, sia delle capacità che delle abilità di ogni singolo alunno, è graduale e quasi mai lineare.
È indispensabile essere consapevoli della forte influenza della società che ci circonda, perché l'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole e lo sviluppo della nostra società è strettamente collegato con l'insegnamento della matematica e la sua didattica, come è possibile leggere all'interno del documento relativo a Indicazioni nazionali e nuovi scenari (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2018) e come evidenziato dall'idea della "matematica per il cittadino" (MIUR et al., 2003).
L'esigenza, inoltre, di ottenere risultati nell'immediato, non ci permette spesso di ricordare quanto espresso dalle Indicazioni nazionali, ovvero che «La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese» (MIUR, 2012, p. 49).
È proprio per far fronte a questa esigenza che, nell'esperienza didattica qui presentata, si è deciso di proporre agli allievi un percorso a più riprese all'interno dell'ambito numeri. Per poterlo fare in modo significativo è stato strettamente necessario progettare un ambiente di apprendimento che potesse favorire l'esplorazione autonoma degli alunni e la scoperta, anche nell'ottica di definire una proposta didattica in linea con una progettazione curricolare d'istituto di continuità verticale, come sottolineato all'interno del documento relativo a Indicazioni nazionali e nuovi scenari (MIUR, 2018).
Proprio per queste ragioni, nel progetto sperimentato con la classe, la scoperta e l'esplorazione dei contenuti matematici sono avvenuti in modo significativo autonomamente dai singoli alunni, all'interno di un laboratorio di matematica inteso come

> «[...] momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

A partire da queste premesse nasce l'idea di progettare delle attività che possano ripercorrere concetti matematici già affrontati con gli alunni in precedenza, in un'ottica di scoperta e libera esplorazione, per permettere la progressiva appropriazione dei contenuti.
In particolar modo grazie alla partecipazione al progetto di formazione "Scuola primaria con potenziamento in matematica" promosso dal Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione dell'Università degli Studi di Torino, si è colta l'opportunità di scoprire e approfondire una sperimentazione effettuata in una classe prima di scuola secondaria di primo grado[1] di Torino, che è stata scelta ed adattata, anche in un'ottica di continuità verticale, per alunni del secondo ciclo della scuola primaria,[2] nello specifico per la classe quarta.
Il percorso da cui si è presa ispirazione è descritto nell'articolo intitolato "Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo Fangcheng: un percorso di trasposizione culturale nella scuola secondaria di primo grado" di Casi e Pizzarelli (2020). Proprio perché ideato per un ordine scolastico differente, tale percorso prevede un'articolazione più approfondita del campo dei numeri, in particolar modo sugli algoritmi di addizione e sottrazione e l'avvio all'utilizzo di metodi pre-algebrici fondati sul concetto di uguaglianza e sui principi di equivalenza.
In un'ottica di ricorsività dell'apprendimento di contenuti matematici, si è scelto di adattare la parte iniziale

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

della sperimentazione, focalizzando l’attenzione sulla scoperta di un differente sistema di numerazione.
Il progetto qui proposto consiste così nella scoperta da parte degli alunni di quarta primaria di alcuni simboli numerici usati nell’antica Cina, attraverso l’esplorazione di un’immagine rappresentante il cosiddetto “triangolo di Tartaglia-Pascal”, contenuta in un antico libro di testo di matematica cinese.

2 Quadro teorico

L’introduzione della storia all’interno della didattica della matematica possiede una lunga letteratura relativa alle sue diverse potenzialità (Furinghetti & Radford, 2002; Radford, 2003; Radford et al., 2000) e ripercorre tematiche anche legate alla linguistica e all’educazione multiculturale (Barton, 2020). Persegue anche quanto prescritto nelle Indicazioni nazionali dove, all’interno della sezione Storia, è possibile leggere nel paragrafo riguardante gli intrecci disciplinari: «la storia si apre all’utilizzo di metodi, conoscenze, visioni, concettualizzazioni di altre discipline» (MIUR, 2012, p. 42).
In particolar modo l’utilizzo della storia per costruire oggetti matematici è riconosciuto come molto efficace nei diversi ordini scolastici (Furinghetti, 1997). Questa efficacia si fonda sull’idea di spaesamento (*depaysement*) discussa in Barbin (1994), che si ritrova molto bene all’interno del progetto presentato alla classe. L’idea di mettere in discussione le proprie conoscenze dovendosi confrontare con qualcosa di diverso e nuovo, appartenente a un passato anche molto remoto, suscita necessariamente l’idea di spaesamento e permette l’interazione con contenuti matematici.
Per favorire ulteriormente questo senso di spaesamento è opportuno l’utilizzo di fonti originali, riconosciuto anche come molto efficace per la costruzione di oggetti matematici per mezzo della storia (Fauvel & Van Maaren, 2000).
L’esplorazione delle proprie conoscenze e delle proprie abilità di fronte a contenuti matematici già acquisiti, ma presentati in forma differente, in un’ottica storica e interculturale, permette di utilizzare lo strumento della discussione matematica (Bartolini Bussi & Boni, 1995) in modo ancor più efficace.
A questo riguardo, risulta molto significativa la metafora proposta dal gruppo di ricerca di Bartolini Bussi e Boni (1995) che descrive la discussione matematica come una «polifonia di voci articolate su un oggetto matematico che costituisce uno dei motivi dell’attività di insegnamento-apprendimento» (p. 227), da cui emerge la scelta del termine *voci* per indicare le diverse forme di discorso o pensiero di un soggetto, ovvero i diversi punti di vista. L’esplorazione dei diversi punti di vista diventa una risorsa primaria di costruzione di saperi non solo per l’insegnante rispetto alla classe, ma anche da parte degli alunni stessi.
Non è però possibile analizzare questa strategia metodologica senza farne emergere due aspetti cruciali: il primo relativo al *contratto didattico* (Brousseau, 1990) presente all’interno del gruppo classe, che delinea in modo significativo l’andamento di una discussione matematica, per quanto riguarda le norme sociali e socio-matematiche di cui parlano Yackel e Cobb (1996); il secondo relativo al ruolo che ricopre la figura dell’insegnante. Per quanto riguarda, infatti, questo secondo aspetto, centrale è l’orchestrazione di una discussione matematica condotta dall’insegnante, che rappresenta la «voce del sapere matematico» (Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 228).
Come descritto da Furinghetti (2003), la conoscenza del metodo storico permette agli insegnanti di percepire aspetti epistemologici e ontologici dei concetti matematici e suggerisce un metodo didattico orientato all’esplorazione e alla discussione in classe. In questo modo la costruzione di significati avviene in modo particolarmente attento alla dimensione sociale del processo di apprendimento e insegnamento.
Questa prospettiva legata alla costruzione collettiva di significati è propria anche del laboratorio di matematica e si struttura da una parte con l’uso di strumenti nelle varie attività, dall’altra con le interazioni tra le persone che si sviluppano durante l’esercizio di tali attività, attraverso lo strumento meto-

dologico della discussione matematica (MIUR et al., 2003), opportunamente gestito dall'insegnante.
La dimensione sociale, inoltre, riguarda anche gli aspetti legati all'ambito dell'argomentazione, competenza che assume un ruolo centrale nelle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012). In particolar modo, all'interno del progetto qui presentato, la scoperta e l'esplorazione dei contenuti matematici attraverso alcuni artefatti, come il testo antico o le bacchette, viene favorita per mezzo delle argomentazioni prodotte dagli alunni, all'interno del contesto classe.
A questo riguardo Krummheuer (1995) propone uno studio dell'etnografia dell'argomentazione e utilizzando lo schema di Toulmin (1975), che definisce un'argomentazione come un discorso che a partire da dati porta a delle conclusioni, amplia i significati di conclusione, dati e garanzia definendoli come elementi interattivamente costituiti dai partecipanti. In questo modo l'argomentazione, intesa come una serie di proposizioni connesse fra di loro in uno specifico modo, ha significato solamente all'interno dell'interazione da cui si crea; per questa ragione le diverse proposizioni non possono essere predeterminate da un soggetto, come l'insegnante, ma sono negoziate da tutti i partecipanti grazie alle diverse interazioni.
In letteratura (si veda, ad esempio, Levenson & Barkai, 2013) sono state identificate diverse tipologie di funzioni legate alla spiegazione, in relazione al processo di apprendimento e insegnamento della matematica. Quella che viene privilegiata all'interno di questo progetto, alla luce della quale è necessario analizzare gli interventi degli alunni e degli insegnanti durante le attività, è la funzione *descrittiva* del processo di pensiero messo in atto o delle modalità con cui è stato perseguito l'obiettivo comune di rispondere a una consegna data e risponde alla domanda «Come sei riuscito a risolvere il problema?».
Come sostengono Yackel (2001) e Krummheuer (2000), questa tipologia di spiegazioni con funzione *descrittiva* possono avere un format narrativo dal momento che sono strettamente connesse con il processo comunicativo di spiegare che cosa è stato svolto, passaggio per passaggio, per poter risolvere il problema.
Si evince a questo punto quanto le competenze argomentative siano connesse con la competenza di problem solving dal momento che, come analizza Di Martino (2017), per poter fronteggiare una consegna e valutare la risoluzione di un problema occorrono delle informazioni riguardanti i processi attivati, per mezzo della spiegazione su come si è risolto, e delle giustificazioni delle scelte fatte, per poterlo risolvere in quel determinato modo.
Allo stesso modo anche Pedemonte (2007) afferma che durante il processo di problem solving si sviluppa solitamente un'attività argomentativa per produrre una congettura o giungere alla soluzione. Proprio perché l'argomentazione implica assumersi delle responsabilità facendo delle scelte, l'attenzione sarà focalizzata sui processi di pensiero attivati e non solamente sui prodotti finali.
Risulta così che le competenze argomentative e di problem solving sono competenze fortemente intrecciate fra loro, complesse e anche trasversali, che coinvolgono diverse discipline e l'individuo nella sua formazione globale.

3 Metodologia e obiettivi dell'esperienza didattica

Per poter favorire l'esplorazione e la scoperta autonoma degli alunni è necessario mettere gli studenti nella situazione favorevole per sviluppare le loro idee e anche la loro creatività matematica. Per questa ragione il progetto è stato delineato come un laboratorio di matematica in cui le attività, proprio perché strutturate con laboratori e con lavori individuali e a gruppi, sono divenute ad alto contenuto argomentativo, viste le reali necessità di convincere l'altro gruppo sostenendo le proprie argomentazioni.
Si è scelta come cardine la metodologia del "*learning together and alone*", definita dagli autori Johnson

e Johnson (2002). Il fondamento di questa metodologia risulta essere la convinzione che l'essenza di un gruppo risieda nell'interdipendenza dinamica tra i suoi membri, che viene creata da obiettivi comuni e viene continuamente modificata, e che essa rappresenti una via efficace per l'apprendimento significativo.
Nello specifico, nella prima fase del progetto, è stato definito come obiettivo comune di ogni gruppo della classe quello di svolgere il ruolo dello storico e rintracciare all'interno del materiale dato tutto ciò che fosse possibile individuare come *matematico*.
Per rendere efficace la costruzione dei significati matematici, è stato molto importante garantire particolare attenzione ad alcuni aspetti riguardanti la gestione dei gruppi e dei ruoli che si possono creare al loro interno e l'apprendimento di norme generali di comunicazione (Webb, 2009).
All'interno del progetto è stata, inoltre, ampiamente utilizzata la discussione matematica, strumento didattico molto valido per la costruzione di significati, particolarmente attenta alla dimensione sociale del processo di apprendimento e insegnamento. Essa si basa su processi a lungo termine, come gli atteggiamenti di uno studente nei confronti di una disciplina, aspetti estremamente importanti per gli insegnanti, perché permettono di mettere in luce eventuali criticità nascoste, riguardanti contenuti magari già affrontati in precedenza che spesso si possono considerare come prerequisiti.
All'interno del progetto qui presentato, lo scopo didattico è stato quello di incoraggiare e favorire ogni allievo ad esprimere il proprio senso personale attribuito all'attività matematica proposta, attraverso il processo definito *dialettica cognitiva* (Bartolini Bussi & Boni, 1995), che permette di lavorare su quella che Vygotskij chiama *zona di sviluppo prossimale*, dal momento che l'attività collettiva, orchestrata dall'insegnante, produce, in quasi tutti gli allievi, una prestazione che non può essere considerata autonoma (Bartolini Bussi & Boni, 1995).
All'interno del progetto didattico sono state, inoltre, utilizzate strategie di valutazione formativa, riguardanti quelle attività di classe durante le quali le evidenze dell'apprendimento degli studenti vengono raccolte e usate, dagli insegnanti e dagli allievi stessi, per adattare i processi di insegnamento-apprendimento al fine di rispondere ai bisogni formativi degli studenti, giorno dopo giorno, istante per istante (Wiliam & Thompson, 2007).
Come previsto anche la normativa in materia di valutazione e dalle relative linee guida (si veda l'ordinanza ministeriale 172/2020, MIUR, 2020), valutare in modo formativo le competenze che un allievo sta acquisendo significa raccogliere dati per stabilire a che punto è nel suo percorso di apprendimento, interpretarli in vista degli obiettivi che l'allievo deve raggiungere, al fine di utilizzarli per mettere in atto strategie efficaci ad accompagnarlo dal punto in cui si trova verso gli obiettivi da raggiungere (Wiliam & Thompson, 2007).
Protagonisti del processo di valutazione formativa sono quindi state le due docenti (quella di sostegno e la scrivente), gli allievi come singoli e gli allievi tra pari, coinvolti in un'interazione che produce feedback reciproci, che sono stati interpretati e utilizzati dalle insegnanti per migliorare l'insegnamento e dagli studenti per progredire nel loro apprendimento.
Dal punto di vista delle competenze disciplinari in gioco, il progetto ha perseguito i seguenti traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria (MIUR, 2012):

> «L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali […].
> Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
> Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

Più nello specifico, il progetto ha perseguito gli obiettivi di apprendimento previsti al termine della classe quinta della scuola primaria riportati qui di seguito.

«*Numeri* […]

- Eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale o scritto. […]
- Conoscere sistemi di notazione dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra.
  […]
  Relazioni, dati e previsioni
- Rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni. […]
- Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure».

(MIUR, 2012, pp. 50-51)

4 Descrizione del progetto

Come anticipato, l'esperienza didattica nasce come adattamento per alunni del secondo ciclo della scuola primaria di una sperimentazione effettuata in una scuola secondaria di primo grado di Torino. Nello specifico la proposta didattica è stata realizzata con una classe quarta primaria, composta da 21 alunni di cui uno con sostegno, dell'Istituto Francesco Faà di Bruno, sito nel quartiere San Donato di Torino.
La scelta è stata quella di adattare la prima parte della sperimentazione effettuata nella scuola secondaria di primo grado (Casi & Pizzarelli, 2020), riguardante il campo dei numeri e i sistemi di numerazione dell'antica Cina.
In particolare, è stato ripreso un argomento già precedentemente trattato in classe seconda e terza, ovvero quello dell'analisi del nostro sistema di numerazione posizionale e decimale, in un'ottica di ricorsività degli apprendimenti e costruzione del pensiero matematico, attraverso la storia della matematica e il confronto con un'altra cultura.
Il riferimento alla cultura cinese ha differenti ragioni: in primis riguarda aspetti di tipo matematico, dato che la scrittura dei numerali cinesi è estremamente intuitiva, poiché il simbolo fornisce un'immagine concreta del numero che rappresenta, e poiché si tratta di un sistema di numerazione di tipo decimale e posizionale, facilmente confrontabile con il nostro. Un'altra ragione è di tipo materiale, dal momento che prevede l'utilizzo di semplici bacchette, facilmente reperibili e utilizzabili in aula. Infine, per ragioni di interculturalità, vista la presenza nel gruppo classe di un alunno di origine cinese, la cui cultura è stata spesso oggetto di curiosità da parte dei compagni nel corso degli anni.
La proposta è stata suddivisa in due fasi principali, stabilite senza limiti di tempo, durante il primo quadrimestre dell'anno scolastico 2021/2022. Gli spazi utilizzati sono stati quelli dell'aula, con l'uso come supporto sia della LIM sia di materiali concreti, come bacchette di legno e schede per documentare l'attività.

4.1 Fase 1: «Come gli storici: un antico manufatto da decifrare»

Come precedentemente descritto all'interno del par. 3, dopo aver diviso la classe in gruppi eterogenei di 3/4 partecipanti, la prima fase si è concentrata sulla creazione dell'interdipendenza dinamica tra i diversi gruppi con la delineazione di un obiettivo comune, significativo e stimolante.
È stata così consegnata a ogni membro del gruppo la scheda presente in Figura 1 (si veda la metà superiore della scheda in Allegato 1), dove viene espressa come consegna quella di scoprire tutti gli elementi riconducibili all'ambito matematico presenti nell'immagine contenuta in un antico libro di testo di matematica cinese, il "Prezioso specchio dei quattro elementi" (1303), ritrovato dagli storici.

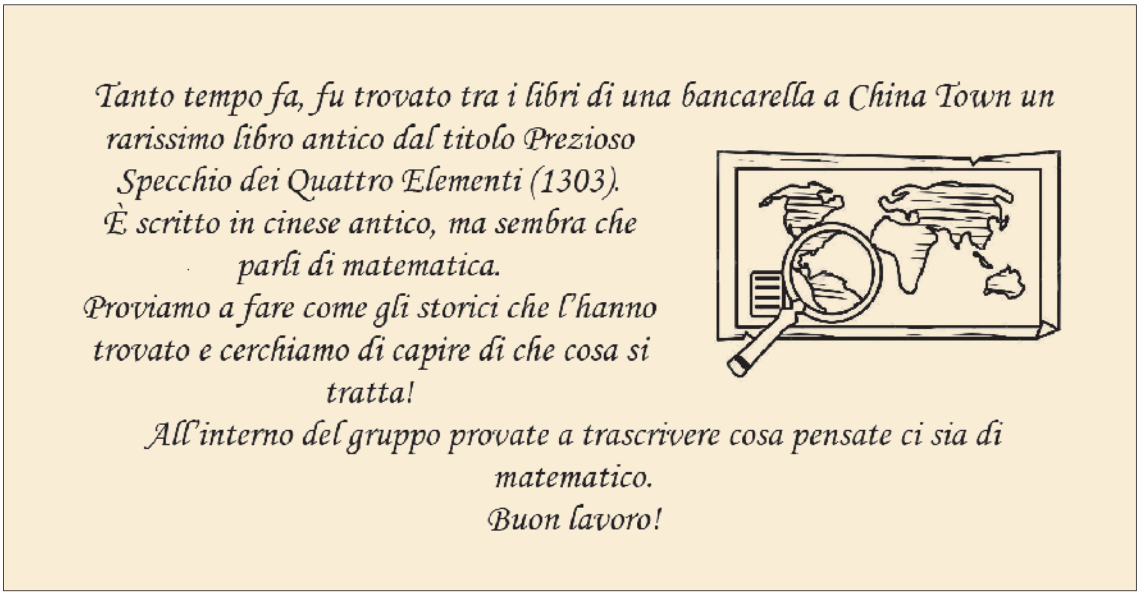
Tanto tempo fa, fu trovato tra i libri di una bancarella a China Town un rarissimo libro antico dal titolo Prezioso Specchio dei Quattro Elementi (1303).
È scritto in cinese antico, ma sembra che parli di matematica.
Proviamo a fare come gli storici che l'hanno trovato e cerchiamo di capire di che cosa si tratta!
All'interno del gruppo provate a trascrivere cosa pensate ci sia di matematico.
Buon lavoro!

Figura 1. Scheda consegna Fase 1 (Allegato 1).

Già durante l'anno precedente e soprattutto durante il primo periodo di attività dell'anno 2021-2022, erano state proposte alla classe attività simili, in cui era necessario provare a immedesimarsi nei panni di uno storico, ma solamente con obiettivi legati alla disciplina storica, mai in ambito matematico.
La classe quarta rappresenta un momento particolarmente produttivo per poter affrontare questa tipologia di attività, perché prevede in ambito storico lo studio e l'analisi dei principali quadri di civiltà, con relazioni e confronti con il presente. Lo studio di una civiltà prevede proprio l'analisi dei costumi e dei modi di vivere di culture anche molto differenti, come in questo caso quella cinese.
L'immagine consegnata agli alunni (Figura 2, Allegato 2) raffigura il triangolo dei coefficienti binomiali presentato all'interno dell'importante trattato cinese "Prezioso specchio dei quattro elementi" di Zhu Shijie, risalente al 1303.

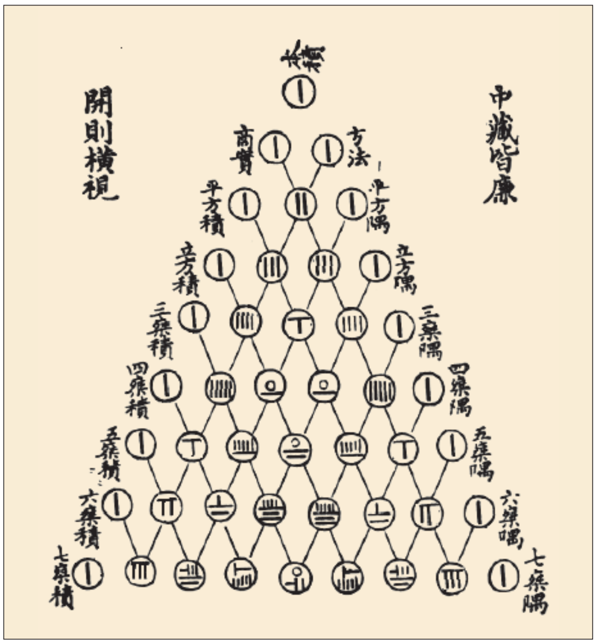

Figura 2. Scheda raffigurante il triangolo dei coefficienti binomiali adattato per l'attività (Allegato 2).

Rispetto all'immagine originale, come predisposto nella sperimentazione di Casi e Pizzarelli (2020), i segni all'interno dei cerchi sono stati ruotati per permettere la coerenza con lo schema del triangolo di Tartaglia-Pascal, nel quale i numeri presenti nella riga *n*-esima sono dati dalla somma dei due numeri ad esso adiacenti nella riga (n-1)-esima, con n = 0, …, 8.
Mantenere questa regolarità è estremamente importante per questa tipologia di attività perché è proprio ciò che si richiede agli alunni di identificare e definire, anche se in parte si sacrifica l'autenticità della raffigurazione iniziale.
Una volta compresa la consegna, anche attraverso la guida dell'insegnante, si è dato quindi il via ai lavori nei diversi gruppi, consegnando ad ogni allievo anche l'immagine del triangolo senza i segni all'interno dei cerchi (**Figura 3**, Allegato 3).

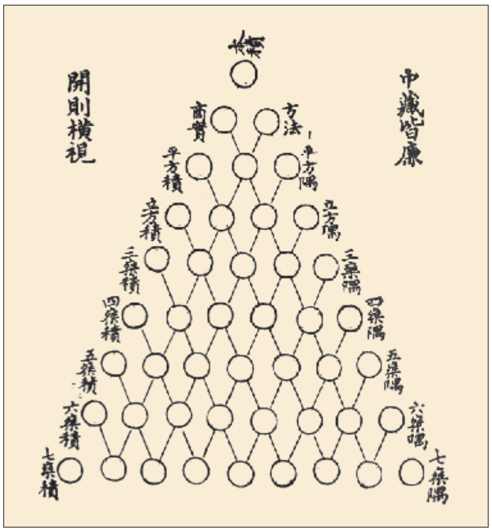

Figura 3. Scheda raffigurante il triangolo dei coefficienti binomiali senza segni (Allegato 3).

Dal confronto fra le due schede, in particolar modo osservando il triangolo senza segni nei cerchi, ci si aspettava che emergesse in modo chiaro che l'obiettivo fosse quello di identificare e decifrare che cosa potessero rappresentare quei simboli e per quale ragione fossero disposti in questo modo.
Durante questa fase, le insegnanti hanno osservato e supportato il lavoro nei gruppi intervenendo con domande-stimolo che potessero affiancare gli alunni nella identificazione dei diversi segni e della relazione additiva fra le diverse righe del triangolo.
Al termine del lavoro a gruppi, è stato richiesto a ogni portavoce di leggere e descrivere quanto svolto nel proprio gruppo, segnando alla lavagna, attraverso la tecnica del brainstorming, le parole e le idee emerse. A questo punto è stata orchestrata una discussione matematica circa le diverse ipotesi avanzate dagli alunni, completando insieme alla classe il triangolo.
Durante questa prima fase dell'attività, l'obiettivo è stato quello di garantire la partecipazione di tutti gli alunni in classe, favorendo l'esplorazione e la scoperta di regolarità dell'artefatto e soprattutto motivando gli alunni più in difficoltà, cercando di ricordare loro l'importanza del ruolo dello storico con un obiettivo comune da raggiungere.
Le possibili difficoltà, infatti, che possono emergere in questa fase riguardano principalmente due ambiti: quello motivazionale e quello matematico. I gruppi dove le regolarità sono state identificate con più difficoltà, e magari hanno richiesto più tempo rispetto ad altri, sembrano aver risentito di difficoltà di tipo motivazionale; le difficoltà matematiche, invece, hanno coinvolto l'identificazione del sistema di numerazione come di tipo posizionale, per cui il valore delle stanghette cambia in base alla posizione, aspetto che si discosta dalla rappresentazione concreta.

4.2 Fase 2: «Quali erano i numeri nell'antica Cina?»

La seconda fase del progetto si apre con la ripresa dell'attività precedente attraverso delle apposite slide alla LIM, dove viene presentata l'immagine del triangolo dei coefficienti binomiali completo, senza segni (**Figura 4**).

Figura 4. Triangolo dei coefficienti binomiali completo.

Rientrati nel mondo dell'antica Cina e ripresa l'ambientazione storica, a ogni gruppo sempre formato da 3/4 membri è stata consegnata la scheda di **Figura 5** (si veda la metà inferiore della scheda nell'Allegato 1), in cui si richiede di identificare i numerali dell'antica Cina da 1 a 20.

Ora che siete riusciti a decifrare questi strani simboli che rappresentano i numeri dell'antica Cina, provate a scrivere tutti i numeri in ordine da 1 a 20, compilando questa tabella.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Provate nel vostro gruppo a spiegare il meccanismo che avete utilizzato

Figura 5. Scheda consegna Fase 2 (Allegato 1).

Per compilare parte della tabella è sufficiente trascrivere alcuni numeri già presenti nel triangolo dei coefficienti binomiali precedentemente presentato, ovvero i numeri da 1 a 8, il 15 e il 20.
Entro il 10, quindi, l'unico numero non presente è il 9, che può essere ricavato per analogia, osservando la costruzione dei numeri da 6 a 8, rappresentati con un'asta in orizzontale a indicare cinque unità e sotto di essa tante aste verticali quante occorre aggiungerne per completare i numeri.
I successivi numeri da dedurre erano quelli da 11 a 19 (escluso il 15 già presente nel triangolo) attra-

verso l'osservazione della costruzione proprio del numero 15, composto da una bacchetta in orizzontale in basso su cui sono presenti 5 aste in verticale. Questa rappresentazione è legata alla comprensione che il sistema di numerazione proposto è operatorio, nel senso che presuppone che la forma di rappresentazione del numero conservi l'effettiva somma dei simboli che lo compongono. Questo rappresenta il nodo cruciale dell'attività, un aspetto che può generare difficoltà poiché prevede la messa in atto di processi di generalizzazione, che richiedono una solida competenza matematica.
L'obiettivo, quindi, di questa fase è quello di confrontare sistemi di numerazione differenti nell'ottica di sviluppare negli alunni sia processi di generalizzazione sia processi metacognitivi, legati all'osservazione e alla riflessione sulla tipologia di sistemi.
Anche durante questa fase, il ruolo dell'insegnante è stato quello di osservare e accompagnare il lavoro nei gruppi, intervenendo con domande-stimolo che potessero guidare le osservazioni degli alunni. È stato anche introdotto del materiale concreto, ovvero le bacchette di legno, per favorire la manipolazione delle diverse rappresentazioni.
Al termine è stata avviata una discussione collettiva di presentazione delle osservazioni dei diversi gruppi, anche di coloro i quali non fossero riusciti per diverse ragioni a completare la tabella con alcuni numeri, motivando le proprie ragioni e le strategie utilizzate.
Per concludere questa fase, ogni alunno ha svolto singolarmente un lavoro individuale di autoanalisi dell'esperienza, con la richiesta di spiegare a parole il meccanismo che sta alla base della rappresentazione proprio dei numeri da 16 a 20.
Questo momento finale ha permesso nei giorni successivi di spostare l'attenzione sulle strategie di scomposizione dei numeri all'interno del nostro sistema di numerazione per favorire e potenziare il calcolo mentale, obiettivo fondamentale del curricolo di matematica nella scuola primaria.

5 Analisi delle attività

5.1 Fase 1: «Che strane stanghette: saranno gli antichi numeri cinesi?»

Come previsto a priori rispetto la consegna iniziale assegnata agli alunni, consegnato il secondo triangolo senza segni nei cerchi (Allegato 3) è risultato chiaro quasi immediatamente ad ogni gruppo, che di matematico ci fossero proprio quelle "stanghette" (termine usato da un gruppo) (Figura 6).

Figura 6. Piccoli storici al lavoro durante la Fase 1.

Si riporta a questo proposito una trascrizione di discussione avvenuta all'interno di un gruppo.

> Ins.: «Avete capito quindi in questo gruppo che cosa c'è di matematico in questa strana immagine?»
> L.: «Non è così strana! È una piramide».
> O.: «Non è una piramide, è un triangolo! Comunque le stanghette sono qualcosa di matematico, perché vedi qui non ci sono e qui sì».
> L.: «Alcune sui lati si ripetono pure uguali hai visto? Tipo qui sia a destra che a sinistra, tipo diagonali».
> Ins.: «Storici della IV B, in questo gruppo hanno scoperto che alcune stanghette si ripetono in modo uguale, l'avete notato anche voi?»
> M.: «Le stanghette si possono contare».
> V.: «Ma allora sono come i numeri!»
> O.: «Saranno i numeri cinesi!»

Da questa trascrizione è possibile notare che la scoperta dei numeri intesi come segni o "stanghette" è avvenuta in modo quasi istintivo nel confronto fra le due immagini.
A questo punto è stata molto interessante la discussione affrontata nel gruppo dove era presente l'alunno di origine cinese (D.) che, proprio a inizio dell'anno scolastico in corso, aveva iniziato a seguire nei fine settimana la scuola cinese.

> Ins.: «D., ma sono davvero i numeri cinesi? Noi non li conosciamo!»
> L.: «D. tu hai iniziato la scuola cinese, non hai imparato i numeri?»
> D.: «Ma a me non sembrano proprio i numeri cinesi, però qui (indicando l'ideogramma in alto) mi sembra ci sia scritto uno in cinese… Sì sì, c'è proprio scritto uno!»
> L.: «Visto che è un libro antico, magari sono i numeri antichi cinesi, tipo i nostri numeri romani».

La scoperta di una cultura così differente e il confronto che è nato spontaneamente in questo gruppo fra sistemi antichi di numerazione in culture differenti è stato lo spunto per la discussione con la classe.
Una volta che tutti i gruppi hanno iniziato a lavorare sull'identificazione delle cifre e dei numeri che compongono il triangolo, si è chiesto loro di spiegare per iscritto il procedimento adottato per identificare e dedurre i vari simboli.
Sicuramente in questa parte del lavoro è emerso il fatto che la classe avesse già analizzato il nostro sistema di numerazione, lavoro che fin dalla classe prima si era focalizzato sulla differenza fra numero e cifra. Questo aspetto di ricorsività dei contenuti è stato particolarmente efficace per gli alunni con più difficoltà, poiché attraverso l'esplorazione spontanea di questi simboli hanno potuto osservare e scoprire direttamente la differenza tra cifra e numero.
La richiesta di spiegare per iscritto i procedimenti attivati non è un aspetto nuovo per il gruppo classe, abituato a lavorare in gruppo e ad argomentare in matematica fin dalla classe prima, in forma orale prima e in forma scritta successivamente.
Le difficoltà emerse hanno riguardato, in alcuni gruppi, come previsto a priori, l'identificazione del valore della stanghetta posizionata in orizzontale, per cui la discussione ha richiesto maggior tempo. I segni in verticale sono effettivamente risultati più intuitivi, proprio perché la scrittura dei numerali, ossia i segni che rappresentano quantità, risalenti al I millennio a.C., faceva probabilmente riferimento alle dita della mano. I numeri 1, 2, 3, 4 e 5 si rappresentavano, infatti, affiancando rispettivamente 1, 2, 3, 4 e 5 bacchette verticali. Essendo inoltre un sistema di tipo immanente, il simbolo fornisce un'immagine concreta del numero che rappresenta.

Identificati dunque questi segni, anche come visto in confronto ai numeri romani, di cui alcuni alunni avevano esperienza anche se non ancora affrontati in classe, è emerso il rapporto additivo fra righe del triangolo.
Si riporta a questo proposito la seguente trascrizione di una discussione all'interno di un gruppo.

G.: «Se vedi questo, se è una stanghetta con quest'altra, fanno due stanghette. Vedi le linee. Poi guarda 2 + 1 fanno 3 stanghette. Poi 3 + 1 fanno 4».
V.: «Eh ma qui? Vedi 3 + 3 fanno questo [indica il simbolo ⊤ nella riga 4]».
G.: «4 + 1 fa 5. 5 + 1 viene questo [indica il simbolo ⊤ nella riga 6]».
V.: «È lo stesso di sopra!»
G.: «Ma allora diventano più grandi quando scendi».
Ins.: «Cosa diventano più grandi G.?»
G.: «I numeri aumentano, perché sono somme».
Ins.: «Se sono tutte somme come state dicendo, allora nella quarta riga 3 + 3 dà come somma questo simbolo, che è lo stesso della sesta riga? [indica il simbolo ⊤ nella riga 4 e nella riga 6]».
V.: «Guarda nella sesta è formato da 5 + 1, ma allora questo simbolo è 6!»
G.: «Scriviamolo!»

Come descritto, quindi, l'osservazione da parte degli alunni delle varie relazioni e la proprietà additiva fra righe è stata effettuata in modo autonomo, solo accompagnata se necessario da domande-stimolo dell'insegnante come guida nel percorso di apprendimento. Ritrovare relazioni e sequenze che "funzionavano", in questo modo, ha rappresentato per gli alunni un momento di estrema gioia, perché li motivava a continuare in quell'ottica il proprio lavoro.
Alcuni gruppi, in modo inatteso e non previsto a priori, prima di ragionare sui legami fra righe, si sono cimentati nella scoperta e nell'osservazione di ogni singola riga.
In particolar modo si sono fermati sull'osservazione di possibili numeri palindromi su ciascuna riga, composti da stesse cifre leggibili sia da destra verso sinistra sia viceversa. Questo aspetto è legato a una attività ludica, proposta durante la settimana precedente, in cui si richiedeva per poter completare un gioco, proprio l'osservazione di queste tipologie di numeri. È stato significativo il fatto che a ritrovare questa analogia fossero proprio i due alunni con competenze di livello più basso nell'ambito matematico, che hanno particolarmente apprezzato questo tipo di attività.
L'identificazione del simbolo 0 è avvenuta, inoltre, proprio da un'alunna (M.) che riscontra diverse difficoltà nel campo dei numeri, un'associazione che ha effettuato in modo davvero intuitivo, di cui si riporta la trascrizione.

Ins.: «Come mai M. sta osservando solo una riga dello schema e C. solo un'altra, e tu un'altra ancora?»
V.: «Abbiamo deciso di dividerci le righe maestra, così capiamo meglio».
M.: «Io infatti ho capito che questo pallino è lo 0 [indica il pallino in uno dei due simboli centrali della quinta riga]».
Ins.: «Come hai fatto a capirlo M.?»
M.: «Beh si vede maestra! È come il nostro. Se tu giri viene una stanghetta e uno 0, come 1 e 0 che formano 10».
Ins.: «Interessante M.! Ma guarda c'è un pallino anche nella riga successiva!»
V.: «Ha ragione M.! Vedi nella riga dopo, se giri come ha fatto lei, sono due stanghette e il pallino, quindi 2 e 0 che fanno 20».

Terminato il lavoro dei gruppi sulla scoperta dei numeri indicati all'interno dell'immagine, durante la discussione collettiva, l’insegnante ha segnato attraverso il metodo del brainstorming alcune parole chiave emerse dalle diverse descrizioni presentate dai gruppi (Figura 7).

Figura 7. Brainstorming durante la discussione collettiva.

Questo momento è stato efficace perché ha permesso di identificare analogie e differenze fra le strategie adottate dai diversi gruppi e ha favorito l’utilizzo dell’argomentazione a livello orale per motivare le scelte fatte nell’identificazione dei diversi simboli all’interno del triangolo, che passo dopo passo, simbolo dopo simbolo, è stato completato insieme.

5.2 Fase 2: «I numeri nell’antica Cina sono strani come i nostri!»

Questa seconda fase si è aperta con la compilazione della tabella (si veda la metà inferiore dell’Allegato 1) che è stata per alcuni numeri, come previsto, immediata e corretta. In particolare tutti i gruppi hanno rappresentato correttamente con i segni in verticale i numeri 1, 2, 3, 4 e 5 in modo intuitivo, perché legati al conteggio.
Molti alunni, anche nella fase precedente, per poter indicare e ragionare sulla posizione differente delle bacchette hanno utilizzato il proprio corpo, indicando attraverso le braccia la direzione delle “stanghette”. Per aiutare in questa fase anche gli studenti con più difficoltà sono stati così introdotti i materiali concreti, ovvero delle bacchette di legno, per poter far manipolare i segni e più facilmente riuscire nell’attività.
I numeri da 6 a 9 si rappresentavano con un’asta in orizzontale a indicare cinque unità e sotto di essa tante aste verticali quante occorre aggiungere per completare il numero. Anche per questi numeri le rappresentazioni dei diversi gruppi sono state tutte corrette.
I numeri da 1 a 8 erano inoltre presenti nel triangolo iniziale quindi per analogia è stato facilmente indicato anche il numero 9 (Figura 8).

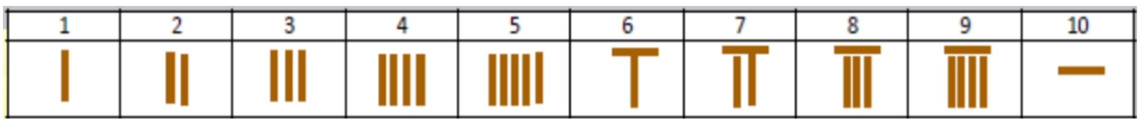

Figura 8. Numerali dell’antica Cina da 1 a 10.

La costruzione invece dei numeri da 11 a 19 era da dedurre, visto che all’interno del triangolo è presente solamente il numero 15, composto da una bacchetta in orizzontale in basso su cui sono presenti 5 aste in verticale.
Da come è stato quindi formato il 15 sono nate le diverse discussioni all’interno dei gruppi, come è possibile leggere in questa trascrizione.

T.: «Ma se 15 è fatto con una bassa e 5 verticali sopra, allora 14 ne avrà 4 in verticale, 13 ne avrà 3, 12-2 e così anche l’11 con una verticale e sotto una in là».
M.: «Quindi se la stanghetta è orizzontale sopra vuol dire 5, se invece è sotto 10. Mmm… Ci si può confondere un sacco se li scrivi male».
T.: «Beh è come i nostri numeri, se cambi posto alle cifre cambia tutto il numero!»

Il concetto di sistema di notazione dei numeri posizionale attraverso questa attività emerge in modo molto efficace e visivo, anche se rispetto la trascrizione dello schema, la stanghetta della decina nei numerali è posizionata accanto e non sotto le aste verticali, come è possibile osservare in Figura 9.

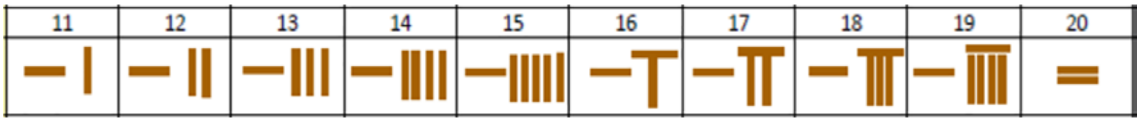

Figura 9. Numerali dell’antica Cina da 11 a 20.

Ciò che, invece, ha confuso molti gruppi è stato il concetto di sistema numerico operatorio: solamente 2 gruppi su 6 hanno completato in modo corretto la sequenza da 16 a 19. La maggior parte, infatti, ha continuato con l’aggiunta di stanghette in verticale dopo il 15, senza considerare la rappresentazione dei numeri 6, 7, 8, 9 e senza capire che la rappresentazione del numero conserva la somma dei simboli che lo compongono, quindi 10 + 6, 10 + 7 ecc.
Come previsto, questo aspetto ha rappresentato l’ostacolo principale di questa fase, poiché prevede la messa in atto di processi di generalizzazione, fondamentali per l’apprendimento della matematica, su cui si è quindi scelto di focalizzare l’attenzione.
Attraverso la discussione in plenaria, è stata stimolata l’autovalutazione di ogni gruppo e la discussione sulle diverse proposte, in particolar modo sulle disuguaglianze emerse nella rappresentazione dei simboli dei numeri 16, 17, 18 e 19. In sostanza, si può affermare che il lavoro in questa fase si è concentrato sulla metacognizione e sulla riflessione circa i ragionamenti svolti dagli alunni.
Terminato questo momento, è emersa l’esigenza di avere la certezza che ogni alunno avesse compreso questo meccanismo operatorio nella costruzione del numero, anche perché presente nel nostro sistema di notazione numerica. Per questo motivo è stato chiesto agli allievi un lavoro individuale di autoanalisi dell’esperienza, con la richiesta di spiegare a parole il meccanismo che sta alla base della rappresentazione proprio dei numeri da 16 a 20.
Riflettere in modo individuale sull’attività svolta in gruppo rappresenta un momento cruciale nel processo di apprendimento non solo per lo studente, ma anche per il docente. La classe, abituata ad argomentare per iscritto e al lavoro di autovalutazione, come già descritto precedentemente, si è organizzata in modo efficace durante il lavoro a gruppi, permettendo a tutti gli alunni, anche quelli con più difficoltà in matematica, di partecipare attivamente e quindi essere in grado al termine di lavorare individualmente, senza l’aiuto del compagno.
Gli alunni in questa fase hanno concentrato l’attenzione sulla composizione e scomposizione dei numeri nei sistemi di calcolo e hanno confrontato questo sistema di numerali cinesi con quello da loro utilizzato. Alcuni alunni, in particolare all’interno di un gruppo che ha completato in modo cor-

retto la sequenza da 16 a 19 senza difficoltà o esitazioni, hanno iniziato a interrogarsi sul sistema dei numeri romani, concetto emerso all'interno del brainstorming (Figura 7), proponendo alle insegnanti confronti sia sull'uso di simboli molto simili alle "stanghette" cinesi, sia sull'importanza della posizione dei diversi simboli «come I davanti a V che a volte può confondere».[3] Altri alunni, invece, cercando di verbalizzare il procedimento di costruzione dei numeri da 16 a 19, si sono soffermati sul nostro sistema di numerazione e in particolar modo sulla composizione e scomposizione dei numeri, iniziando a effettuare calcoli utilizzando strategie più efficaci. Osservare questo aspetto è stato estremamente rilevante per le docenti, poiché si sono potuti accompagnare gli alunni su argomenti e tematiche già affrontati con il gruppo classe negli anni precedenti, permettendo di sviluppare a più riprese la costruzione del pensiero matematico nell'ambito numerico.
Il lavoro individuale è stato così davvero un momento importante perché ha permesso di considerare l'errore come risorsa e momento da cui partire per poter focalizzare l'attenzione sulle strategie di scomposizione dei numeri per favorire e potenziare il calcolo mentale con tutta la classe.

6 Bilancio dell'esperienza

In primo luogo, occorre dire che questo tipo di attività ha permesso all'insegnante di essere più flessibile all'interno del processo di costruzione della conoscenza. Proprio il concetto di spaesamento precedentemente descritto (Furinghetti, 2003) ha permesso di rendere l'attività estremamente inclusiva per tutto il gruppo classe, insegnanti comprese.
L'analisi di un sistema di notazione numerica differente è diventato un mezzo per analizzare le difficoltà degli studenti in una nuova prospettiva. Ha infatti messo in luce alcune difficoltà di costruzione del sistema numerico come operatorio, difficoltà che era stata riscontrata negli alunni meno competenti nel calcolo mentale e che si era già tentato di supportare ma mai con una tale efficacia. A partire proprio da questa attività, infatti, si è continuato a lavorare sul calcolo mentale durante il secondo quadrimestre, facendo spesso riferimenti al sistema dei numerali dell'antica Cina.
Come è sempre importante quando si attua una progettazione didattica, la rimodulazione in itinere è stata necessaria ed efficace. La prospettiva, prima di intraprendere il percorso, infatti, era quella di continuare il progetto con una terza fase, nella quale continuare a ragionare sul sistema dei numerali dell'antica Cina oltre il numero 20 raggiungendo sia le centinaia che le migliaia. Viste però le difficoltà, si è scelto di soffermarsi di più sul concetto di sistema operatorio e sul confronto con il nostro sistema numerico, aspetto che è risultato efficace e propedeutico per accompagnare la classe nel calcolo mentale.
Inoltre, in una società multietnica come la nostra, può risultare davvero arricchente per gli insegnanti promuovere lo sviluppo dell'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole attraverso la costruzione del pensiero matematico, intrecciando saperi e discipline, come quelle storica e matematica, in un'ottica di sviluppo di una società inclusiva.
Proprio in un'ottica inclusiva è importante anche sottolineare che l'alunna presente in classe con diagnosi di ritardo mentale medio-grave, affiancata dalla docente di sostegno, è riuscita a partecipare attivamente nella prima fase della sperimentazione, proprio perché concentrata su aspetti di osservazione di immagini ed esplorazione autonoma, guidata sia dai compagni che dai docenti. La scoperta e l'analisi del sistema di notazione, passando da quello non conosciuto a quello conosciuto,

3. Si tratta di un'osservazione interessante sui numeri romani, in linea con quanto accade per i numeri antichi cinesi, dove la stanghetta orizzontale assume valori diversi a seconda che sia sopra (= 5) o sotto (= 10) le stanghette verticali. In termini di caratteristiche, invece, si osserva che il sistema romano non è posizionale ma additivo.

ha permesso di affrontare sia aspetti della didattica della matematica, come lo sviluppo di processi di generalizzazione, sia aspetti di tipo metacognitivo, in un'ottica inclusiva. È stato altresì possibile osservare quanto sia stato stimolante focalizzare l'attenzione sul legame di interdipendenza dinamica dell'intero gruppo classe per far fronte ad obiettivi comuni, grazie all'utilizzo di artefatti veri e realmente utilizzati nell'antichità, che hanno incuriosito tutti gli alunni.
L'attenzione, inoltre, agli errori in un'ottica formativa è stato ulteriore punto di forza della progettazione didattica. L'errore è divenuto punto di partenza e non di arrivo, inteso non come qualcosa da evitare assolutamente o da nascondere. A questo proposito è importante sottolineare che il clima della classe durante i lavori di gruppo è risultato positivo, perché sono allievi abituati al confronto e al dialogo costruttivo a partire dalla classe prima. Si tratta quindi di allievi che rispettano il turno di parola nel gruppo e riescono a organizzare i ruoli, come quello di portavoce, senza quasi mai bisogno dell'intervento dell'adulto.
Da questa esperienza, come spunto per il futuro, si trae sicuramente quello di ampliare il progetto qui descritto all'interno del curricolo d'istituto, in un'ottica di continuità verticale. Seguendo questo intento, infatti, tale progettazione è stata ripresa con la classe negli anni nel primo quadrimestre della classe quinta, per ritornare in modo elicoidale sul concetto di sistema di notazione numerica e poter proseguire con i numerali dell'antica Cina fino alle migliaia. Sarebbe inoltre proficuo organizzare e progettare attività ponte con la scuola secondaria di primo grado, attraverso l'attivazione di laboratori matematici, sempre su questi contenuti, ad esempio facendo confrontare gli alunni sugli algoritmi dell'addizione e della sottrazione, attraverso l'uso delle bacchette e delle tavole da calcolo.
Per concludere, si riporta una citazione di Bill Barton su quanto la questione interculturale sia legata al nostro modo di apprendere e quindi di insegnare, come quesito aperto a possibili altre sperimentazioni in questo campo.

> «Un problema educativo più immediato riguardante i mondi matematici è la questione psicologica di quanto un individuo sia legato a una sola visione del mondo e se (o come) questo influenzi la sua comprensione di un'altra visione del mondo. [...] Il mio punto di vista è che gli allievi sono influenzati dalla propria visione del mondo più di quanto sia comunemente riconosciuto».
>
> (Barton, 2020, p. 143)

Riconoscimento
Per il progetto didattico qui presentato, l'UMI-CIIM ha insignito l'autrice del "Premio Lucia Ciarrapico per la scuola primaria" nell'edizione 2022.

Bibliografia

Barbin, É. (1994). Préface. In Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » (Ed.), *Quatrième université d'été d'histoire des mathématiques* (pp. ii–iii). IREM de Lille.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: Un approccio vygotskiano. *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *18*(3), 221–256.

Barton, B. (2020). *I linguaggi della matematica. Storie di etnomatematica ed educazione multiculturale.* UTET Università.

Brousseau, G., (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(9.3), 309–336.

Casi, R., & Pizzarelli, C. (2020). Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo Fangcheng: un percorso di trasposizione culturale nella scuola secondaria di primo grado. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, *7*, 97–122.

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, *1*, 23–37.

Fauvel, J., & Van Maaren, J. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Kluwer.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 55–61.

Furinghetti, F. (2003). Storia della matematica per insegnanti e studenti. In E. Castro Martinez (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 87–96). Universidad de Granada.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631–654). Erlbaum.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2002). Learning together and alone: Overview and metaanalysis. *Asia Pacific Journal of Education*, *22*(1), 95–105.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 22–32.

Levenson, E., & Barkai, R. (2013). Exploring the functions of explanations in mathematical activities for children ages 3-8 year old: The case of the Israeli curriculum. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2158–2167). Middle East Technical University & ERME.

Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo di istruzione* [D.M. 254/2012]. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf/1f967360-0ca6-48fb-95e9-c15d49f18831?version=1.0&t=1480418494262

Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2018). *Indicazioni nazionali e nuovi scenari.* http://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/3234ab16-1f1d-4f34-99a3-319d892a40f2

Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2020). *Valutazione periodica e finale degli apprendimenti delle alunne e degli alunni delle classi della scuola primaria* [O. M. 172/2020]. https://www.istruzione.it/valutazione-scuola-primaria/allegati/ordinanza-172_4-12-2020.pdf

Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca, Unione Matematica Italiana, & Società Italiana di Statistica. (2003). *Matematica 2003: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. La Matematica per il cittadino.* http://www.matematica.it/tomasi/lab-did/pdf/matem-2003-curricolo.pdf

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41.

Radford, L. (2003). On culture and mind. A post-vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger & V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49–79). Legas.

Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp. 162–167). Kluwer.

Toulmin, S. (1975). *Gli usi dell'argomentazione*. (Traduzione italiana di G. Bertoldi). Rosenberg & Sellier.

Webb, N. (2009). The teacher's role in promoting collaborative dialogue in the classroom. *British Journal of Educational Psychology*, *79*(1), 1–28.

Wiliam, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will make it work?. In C. A. Dwyer (Ed.), *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning* (pp. 53–82). Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25* (Vol. 1, pp. 1–9). Utrecht University.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 390–408.