

Classe cooperativa e apprendimento matematico individualizzato con il piano di lavoro

Cooperative class and individualized mathematical learning through the work schedule

Rita Di Ianni^{*} e Antonio Pellicori[°]

^{*}Scuola primaria “M. K. Gandhi”, Pontedera (PI) – Italia

[°]Liceo artistico “F. Russoli”, Cascina (PI) – Italia

✉ r.dianni@gmail.com, antoniopellicori@gmail.com

Sunto / L'articolo racconta l'esperienza dell'introduzione del piano di lavoro matematico in due classi quinte della scuola primaria, con riflessioni di contesto e di metodo. Al centro di pratiche condivise da un gruppo di insegnanti di scuola primaria, il piano di lavoro costituisce una formula promettente di laboratorio matematico, in cui autonomia, apprendimento individualizzato e dimensione pratica e cooperativa si incontrano. Il racconto parte dalla descrizione dello strumento del piano di lavoro e procede con l'introduzione per gradi di questa pratica in classe e la sua articolazione negli spazi e tempi, cui fa seguito l'illustrazione del percorso della classe attraverso alcune esperienze significative collegate al problem solving. Si prende in considerazione, infine, l'evoluzione nel tempo degli atteggiamenti dei bambini verso la matematica, con alcune riflessioni in chiusura sulle possibilità d'uso dello strumento anche dopo la scuola primaria.

Parole chiave: piano di lavoro; strumenti; apprendimento cooperativo; apprendimento individualizzato; problem solving.

Abstract / This paper discusses a didactical experience with the (mathematical) work schedule developed in two fifth-grade classes of primary school in Italy, also introducing contextual and methodological reflections. The potential of the work schedule for developing a real mathematics laboratory in primary school is discussed: the mathematics laboratory is the context where autonomy, individualized learning, and practical and cooperative dimensions converge. The paper first introduces the specific tool of the work schedule, then shows its gradual introduction in the classroom and the full organization of the work schedule in terms of space and time, describing some significant experiences related to problem solving activities. The evolution of children's attitudes towards mathematics involved in the didactical path is also discussed, with a final reference to the perspectives of this practice in secondary school.

Keywords: work schedule; tools; cooperative learning; individualized learning; problem solving.

1 Introduzione

L'esperienza qui presentata si è svolta in due classi quinte di scuola primaria¹ a cui la docente (tra gli autori dell'articolo)² è stata assegnata per la prima volta l'anno precedente, e in cui è stata introdotta, attraverso un percorso graduale, la pratica del *piano di lavoro matematico*. È importante a questo proposito fare subito riferimento a un contesto di attività e di condivisione di pratiche che va ben oltre il lavoro in classe di un singolo docente, e ne costituisce la base imprescindibile.

Parlare di piano di lavoro significa infatti in questo caso parlare innanzitutto di uno scambio vivo di pratiche tra gruppi di insegnanti di scuola primaria che si ispirano in vario modo a quei principi di scuola democratica che sono stati al centro di un vasto movimento educativo lungo decenni in Italia e non solo. L'esperienza qui riportata in particolare si situa nell'attività intensa del gruppo territoriale del Movimento di Cooperazione Educativa di Pisa, e ha avuto un ulteriore sviluppo nella nascita di un gruppo di lavoro autonomo e nella creazione di una piattaforma online di scambio di strumenti, chiamata "Lo strumentario per il piano di lavoro",³ alla quale collaborano maestre e maestri di tutta Italia. Il piano di lavoro, nella sua idea di fondo, è una forma di organizzazione del lavoro cooperativo in classe. In alcuni tempi stabiliti della settimana ogni bambino sceglie di lavorare di volta in volta su un obiettivo da raggiungere, impiegando, individualmente o insieme ad altri, gli strumenti relativi a ciascun obiettivo messi a disposizione dall'insegnante; quando il bambino si sente pronto, chiede di conseguire il *brevetto* relativo a quell'obiettivo, abilità o competenza, il tutto in un contesto in cui, come si vedrà, il percorso di ognuno è compreso e vissuto collettivamente come parte di quello della classe. Si tratta in realtà di un'organizzazione complessa, che richiede esperienza e può essere introdotta solo attraverso un percorso progressivo che, anche nella storia personale delle maestre e dei maestri, è fatto di tentativi ed esperimenti. Per questo pensiamo sia significativo illustrare in questo lavoro, per così dire, le virtù dello "strumento", e mostrarle nel vivo di un'esperienza pure parziale e imperfetta.

È evidente che il piano di lavoro è fortemente ispirato e difficilmente scollegabile da una specifica visione di fondo del ruolo della scuola e dell'apprendimento. Il piano di lavoro, infatti, nasce com'è noto da un'intuizione feconda di Célestin Freinet (2002), il creatore e promotore di quella scuola popolare che ha avuto un impatto notevole sulla storia educativa in Italia, costituendo uno dei riferimenti privilegiati nella ricca storia del rinnovamento dell'insegnamento scolastico nel dopoguerra, in parallelo con cambiamenti epocali della sensibilità sociale, politica e culturale. Ne è nato un movimento internazionale ancora ben vivo, che ha continuato a proporre le "tecniche Freinet" in contesti nuovi, accogliendo il contributo rivoluzionario e le pratiche e le esperienze diffuse di tanti altri maestri e maestre, in un circuito di scambio libero da vincoli di letteralità e di ortodossia. Chi scrive non intende proporre qualcosa come un "metodo" o una "classe Freinet", ma si riallaccia piuttosto alla ricchezza molteplice di quelle esperienze, che nel tempo si sono approfondite, sono mutate, hanno anche cambiato il proprio punto di vista. L'ispirazione profonda della scuola democratica, che muove gli autori del presente contributo e tanti docenti impegnati, è tale innanzitutto perché politeistica, policentrica e continuamente in evoluzione attraverso il contributo di tutti e tutte.

Un'altra osservazione preliminare riguarda l'aspetto *matematico* del piano di lavoro. Qui strumenti e pratiche si ispirano a un ventaglio ampio di studi e acquisizioni degli ultimi decenni, con un approccio da un lato aperto, come vedremo, ad accogliere fonti molteplici ed eterogenee, con i loro strumenti specifici che si rivelino utili, e dall'altro decisamente ancorato ad alcuni punti fermi nella considerazione

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

2. Il presente lavoro è il racconto dell'esperienza didattica condotta dalla docente di scuola primaria, tra gli autori dell'articolo. La sua elaborazione è il risultato della riflessione e del contributo condiviso dei due autori, il secondo dei quali è insegnante nella scuola secondaria di secondo grado.

3. Sito web: <https://www.pianodilavoro.org/>, con ricco materiale introduttivo sul piano di lavoro.

attuale della ricerca sull'apprendimento matematico. Non secondario in questo quadro è anche l'apporto per molti versi decisivo che le neuroscienze sono state in grado di dare alla nostra comprensione dell'apprendimento matematico e della natura delle difficoltà incontrate dai bambini.⁴ Non è obiettivo di chi scrive discutere nel dettaglio questi aspetti teorici, ma alcuni contributi e riflessioni essenziali che hanno nutrito nel tempo il lavoro emergeranno nel racconto, con qualche riferimento in bibliografia.

2 Il piano di lavoro: uno sguardo d'insieme

Col piano di lavoro, una volta entrati "a regime", la classe funziona, in alcuni tempi stabiliti della settimana, come un laboratorio artigianale, simile alle botteghe di un tempo: gruppi di lavoro con materiali a disposizione, singoli bambini⁵ intenti ad approfondire un argomento e coppie al lavoro. Ogni bambino si dedica ai suoi obiettivi con un set di materiali predisposti per lo scopo, e può decidere di lavorare approfondendo l'argomento da lui scelto, lavorare da solo o con un compagno, dedicarsi a un brevetto legato ai numeri, alla geometria, alle misure, al *problem solving* o ad altro. A livello generale l'impianto del piano di lavoro presenta dunque alcune componenti essenziali:

- una scelta di obiettivi che ogni bambino sa di dover raggiungere durante l'anno;
- la predisposizione di un ventaglio di strumenti dedicati ad ogni obiettivo, che ogni bambino può scegliere di sperimentare da solo o con altri. L'aula, come si vedrà, traduce nell'organizzazione degli spazi questo *setting* operativo;
- gli strumenti possono essere autocorrettivi, a sviluppo aperto e di natura ludica: nel primo caso possiedono una modalità di controllo immediata, che consente al bambino di verificare l'abilità raggiunta, cioè se è in grado di fare o no qualcosa;
- la scheda riepilogativa individuale, che consente a ogni bambino di programmare e verificare il percorso del proprio lavoro, ossia il vero e proprio "piano di lavoro";
- un sistema di brevetti: ogni bambino, quando si sente pronto e ha voglia, può fare richiesta di conseguire il brevetto relativo a un obiettivo. Di lì a breve proverà a conseguire il brevetto in classe, in quello che assume l'importanza di un momento collettivo.

A monte e a valle del laboratorio artigianale sta in effetti la dimensione cooperativa e di gruppo del progetto. L'idea del piano di lavoro è collegata in vario modo all'assemblea di classe e a momenti decisionali condivisi, oltre all'attività laboratoriale. Ciò che tuttavia caratterizza la pratica anche nel suo nucleo più essenziale, che racconteremo qui, è un'esperienza nuova e a suo modo inedita e sorprendente per il bambino: fare esperienza di sé e lavorare sulle proprie competenze in modo autonomo e diretto, in una dimensione in cui ha importanza capire cosa si sa fare e procedere con i propri tempi, riducendo le ansie da prestazione, e in un clima di gioco e di collaborazione continuamente supportato da maestre e maestri. Per vedere questa realtà viva del piano di lavoro è necessario, perciò, entrare nel racconto dettagliato dell'esperienza di classe.

2.1 Le ragioni di un inizio: quale matematica?

Introdurre il piano di lavoro in due classi quinte, che non avevano avuto questo tipo di esperienza nel loro cammino matematico, ha suscitato inizialmente un po' di incertezza nella docente riguardo all'op-

4. A questo tema è dedicata la tesi di laurea di uno dei due autori (Di Ianni, 2020). Riferimenti imprescindibili in questo campo sono i contributi di Dehaene (1992, 2010) e in Italia di Lucangeli (si vedano, ad esempio, Lucangeli, 2019; Lucangeli et al., 2007).

5. Il genere maschile sarà usato da qui in poi per designare persone, indipendentemente dal genere.

portunità o meno di introdurre questa pratica. Come si vedrà, si tratta di un processo favorito dalla risposta positiva ad alcuni tentativi più circoscritti, ma che trova innanzitutto una solida base nelle Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012; di seguito, abbreviate in Indicazioni Nazionali). Le Indicazioni Nazionali insistono programmaticamente sulla didattica laboratoriale come modalità privilegiata d'insegnamento nella scuola primaria, sia nell'impostazione generale del documento che nello specifico della trattazione dell'insegnamento della matematica.⁶ Esse recepiscono a loro volta una concezione mutata del ruolo culturale della matematica e delle sue modalità di apprendimento, per la quale ciò che conta non è solo acquisire alcune conoscenze "strumentali" specifiche, ma soprattutto imparare a padroneggiare strutture aperte e più ampie di ragionamento e argomentazione: la matematica ci mette in contatto col mondo, e ci aiuta a problematizzarlo. L'ambiente del laboratorio matematico, con le sue caratteristiche di apprendimento pratico e di attitudine al confronto e alla costruzione condivisa delle conoscenze, è in questo quadro il luogo ideale per sviluppare le competenze matematiche.⁷

Nel solco di queste acquisizioni, la concezione del "laboratorio" che ha costituito un punto di riferimento per questa esperienza didattica è quella di uno spazio strutturato ma aperto, in cui si sperimenta il ragionamento matematico con tempi personali e si realizza la *strutturazione del sé*. «Lasciate ai ragazzi il tempo di perdere tempo» recita una famosa frase di Emma Castelnuovo: era proprio un invito a stimolare l'esperienza della matematica e dei suoi "strani" oggetti senza fretta o ritmi imposti, attraverso la curiosità e il piacere di sperimentare il proprio ragionamento, e supportando un approccio libero in particolare dall'ansia dell'errore (Castelnuovo, 2008).⁸ *Libertà* qui significa infatti innanzitutto prendersi il tempo di "sostare" presso questi costrutti, ragionarci insieme da più punti di vista, e valorizzare gli errori come linee di ragionamento a loro modo valide e significative.⁹

Come questo articolo si propone di mostrare, il piano di lavoro matematico può essere una pratica particolarmente adatta a lavorare in questa dimensione laboratoriale. Ed è in questo contesto e sulla base di queste istanze che il piano di lavoro è stato introdotto nelle due classi quinte in cui si è svolta l'esperienza didattica.

2.2 Primi passi verso il piano di lavoro matematico: gli strumenti

Come anticipato, le due classi quinte non avevano esperienza di laboratorio matematico. Si trattava di due classi dai numeri piuttosto ridotti (15 e 13 bambini rispettivamente), ma in entrambe si presentavano sia casi di disabilità di tipo cognitivo, sia un'incidenza rilevante di disturbi specifici dell'apprendimento, che coinvolgevano problemi di discalculia. Questo ha fatto sì che il lavoro in classe sia stato sempre un lavoro di equipe, in cui l'insegnante di matematica era affiancata da due di sostegno. L'osservazione di una classe abituata a fare matematica "sul libro di testo" mostra subito alcune caratteristiche tipiche: la dipendenza dall'insegnante e la mancanza di autonomia del bambino, l'esaltazione delle differenze di rendimento (proprio per la sua caratteristica monodimensionale: il libro è uguale per tutti e non è flessibile) e una generale tendenza dei bambini a rispondere meccanicamente alle richieste operative del libro. È emblematica in questo senso l'affermazione di un'allieva dopo il passaggio al piano di lavoro: «Maestra, io prima pensavo di aver capito tutto, poi mi sono resa conto che non era così!».

6. Tali riferimenti si trovano esplicitamente in MIUR (2012, p. 27 e p. 49). Il secondo di questi due passaggi chiave associa significativamente al laboratorio anche la dimensione del *gioco*.

7. Si vedano i contributi pubblicati come "Matematica per il cittadino", a cura di Anichini et al. (2003). Per una discussione approfondita delle questioni accennate qui, si veda il fondamentale lavoro di Di Martino e Zan (2019).

8. L'esperienza della "Officina matematica di Emma Castelnuovo" a Casa Laboratorio Cenci, sotto la guida di Nicoletta Lanciano e Franco Lorenzoni, ha costituito un riferimento essenziale per l'educazione matematica per i due autori, mostrando il ruolo chiave del *laboratorio adulto* come pratica di formazione attiva per insegnanti ed educatori.

9. Resoconti inimitabili, ai limiti dell'antropologia, di una dimensione di apprendimento di questo tipo (in un ambito non esclusivamente matematico), sono quelli di Franco Lorenzoni (si veda, ad esempio, Lorenzoni, 2014).

Come sbloccare questa routine e introdurre una modalità operativa differente? La risposta (delle classi) è stata forte e chiara: con l'introduzione della dimensione del *gioco*. I primi giorni di osservazione e di attività in classe evidenziavano una difficoltà diffusa con i grandi numeri e in generale con le operazioni aritmetiche quando i numeri diventano più grandi o con la virgola. Sono stati introdotti subito alcuni "strumenti", portatori di una cornice diversa di attività. In Figura 1 viene mostrato il primo: "Macchie di caffè".¹⁰

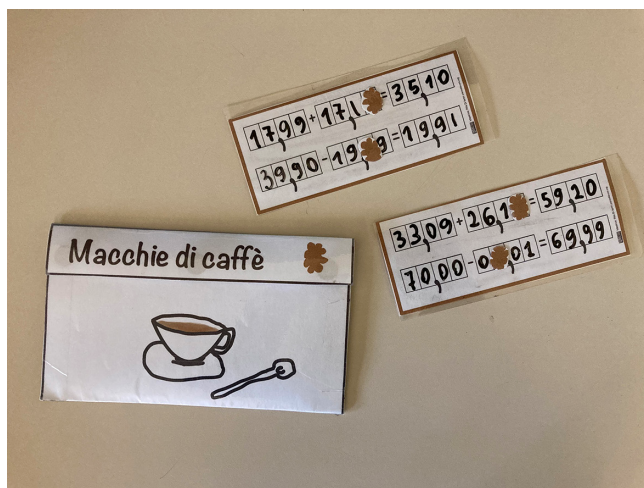


Figura 1. Strumento "Macchie di caffè" al livello cinque.

Si gioca a coppie: ognuno ha una schedina da compilare con un'addizione e una sottrazione, e ha a disposizione una "macchia di caffè" per coprire una cifra per ogni operazione, che l'avversario dovrà cercare di individuare. Le schedine hanno più livelli di difficoltà (cinque) e si gioca a punti (uno per ogni cifra individuata). Ciascuno deve cercare di elaborare una proposta sfidante per l'avversario, il che implica non solo introdurre un'operazione corretta, ma riflettere sulle difficoltà che si incontrano e sulle opportunità di indurre gli altri in errore: è una riflessione concreta sui *processi*. Un secondo gioco incentrato sulle operazioni aritmetiche (Figura 2) può illustrare bene come questo tipo di strumenti si riveli utile a valorizzare le diverse strategie dei bambini (Figura 3): le "Carte fantasmino".¹¹

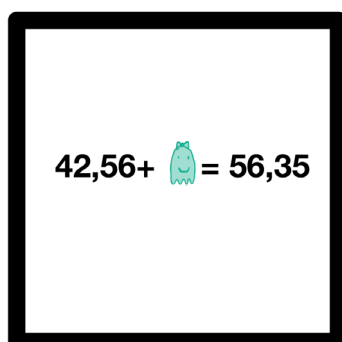


Figura 2. Una carta fantasmino lato fronte.

10. Pubblicato sul sito "Lo strumentario per il piano di lavoro", cui si rimanda per tutti i dettagli dello strumento: <https://www.pianodilavoro.org/2022/05/03/macchie-di-caffe/>. La rielaborazione dello strumento qui proposta prende le mosse da alcuni spunti del fondamentale riferimento di Navarra (2022).

11. Per dettagli e materiale: <https://www.pianodilavoro.org/2022/10/28/carte-fantasmino-2-0/>.

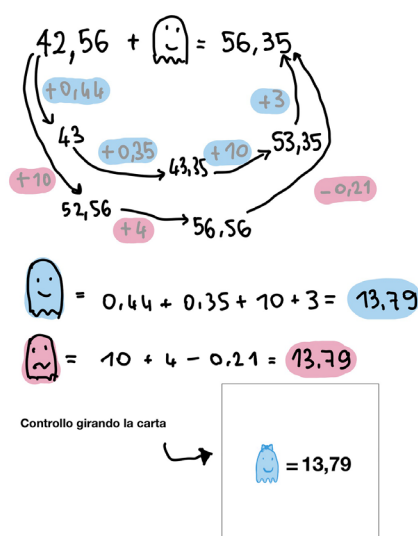


Figura 3. Due possibili percorsi di soluzione della carta in Figura 2.

Anche questo strumento è molto semplice: su ogni carta è riportata un'operazione aritmetica con un numero coperto da un "fantasmino", cui bisogna riuscire a risalire (soluzione sul retro). La cosa importante è che nel gioco i bambini devono disegnare la strada che hanno intrapreso, con i singoli passi, per avvicinarsi al numero desiderato, e possibilmente indicarne più di una (come nell'esempio in Figura 3). I bambini vengono così invitati a visualizzare ed esplicitare processi e percorsi mentali, favorendo la messa a punto di strategie di calcolo mentale. In concreto accadeva che i bambini adottassero strategie diverse a seconda delle proprie abilità e difficoltà.

Possiamo osservare alcuni vantaggi in due strumenti di questo tipo:

- I bambini elaborano ognuno la propria strategia di calcolo e di gioco (che sono anche invitati a verbalizzare e a confrontare in momenti collettivi).
- Gli strumenti sono autocorrettivi:¹² in generale in molti di essi i bambini trovano già la soluzione sul retro della carta. Questo significa mettere l'accento, nell'attività, non sul prodotto, ma sui processi (stimolando anche la responsabilità: andare diretti al risultato priva di senso tutta l'attività).
- I bambini si trovano di fronte a un'attività sfidante, e cercano il proprio partner, il livello di scheda o anche la strategia con cui si divertono e riescono effettivamente a giocare. *Tutti* trovano il livello adatto a loro, anche i bambini con tratti di disabilità cognitiva o difficoltà specifiche di apprendimento. E nel piano di lavoro, quando gli strumenti sono tanti, questo guida anche la scelta del bambino tra le attività e gli obiettivi da rafforzare.

La caratteristica iniziale della situazione-gioco (per esempio, nelle sfide con le macchie di caffè) è inoltre quella di spiazzare il giocatore, perché non si sa esattamente quale strumento operativo e quale strategia usare, e il bambino è chiamato a fare leva sul proprio bagaglio di abilità e competenze. Quella dello "strumento" è un'esperienza molto diversa dalla quotidianità del libro, che ad ogni pagina detta una regolina e chiede di applicarla. "Macchie di caffè" e "Carte fantasmino", introdotti nei primi giorni di scuola, sono stati pertanto anche strumenti osservativi molto utili per valutare le competenze matematiche effettive delle due classi all'inizio dell'anno.

È bene sottolineare da subito un altro aspetto cruciale: lo "strumento" non funziona da solo, ma

12. Anche nel primo gioco infatti l'indicazione è che i bambini possono a posteriori usare la calcolatrice per controllare il risultato e assegnare il punto.

serve a entrare in un *frame* differente di attività, in una cornice nuova,¹³ in cui si situa l'attività matematica. In altri termini la stessa microattività in senso stretto (come quelle contenute negli esempi di carte mostrati) assume un significato e una portata cognitiva del tutto diversi a seconda del contesto *pragmatico* (Che cosa stiamo facendo? Che situazione è?) in cui si situa. I bambini come gli adulti hanno una capacità estremamente sottile e raffinata di cogliere e distinguere queste cornici o strutture.¹⁴ È proprio la capacità di costruire questi contesti complessi ma ben definiti di attività che caratterizza la mediazione didattica forse nel suo senso più affascinante, e il piano di lavoro non è che un esempio di macroattività di questo tipo. Ciò vuol dire anche che la trasferibilità di questa esperienza dipende in modo essenziale dalla capacità dei docenti di ricreare situazioni complesse, attingendo a tutte le risorse personali, ambientali, culturali, d'immaginazione loro e della classe: non si tratta mai solo di applicare una "tecnica".

Il momento dell'introduzione degli strumenti è dunque molto prezioso e delicato, perché qui si gioca la possibilità di far intravedere e apprezzare ai bambini una modalità differente di approccio alla matematica. Fin dal primo giorno di scuola si è cercato di lavorare in classe sul piano del gioco, dell'errore interessante, del porre domande sfidanti che spiazzano e non hanno una soluzione unica, apprezzando insieme che ci sono tante strade possibili.¹⁵

L'esempio di altri due strumenti può illustrare bene il tipo di attività introdotte nel piano di lavoro. Partiamo da "Le carte geometriche" (Figura 4), che hanno avuto grande successo nelle due classi.¹⁶

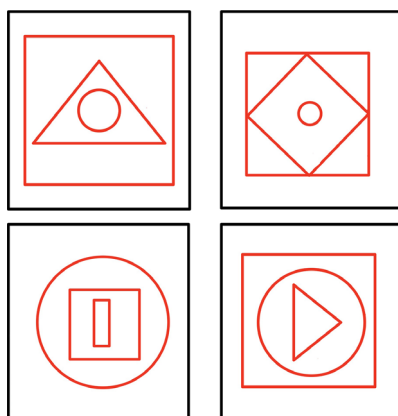


Figura 4. Quattro tessere dello strumento "Le carte geometriche".

Lo strumento è costituito da un mazzo di carte stampate e plastificate,¹⁷ con combinazioni di figure geometriche, anche queste con gradi diversi di complessità. Il gioco, inizialmente pensato a coppie, consiste nel mettersi schiena contro schiena: un bambino ha la carta in mano e cerca di descrivere

13. Per un'impostazione generale, dalla grande portata antropologica, si veda Goffman (1974).

14. "Frame" e "framework", nella terminologia di Goffman (1974). Questi contesti sono estremamente malleabili, possono essere trasformati e riformulati, per così dire messi in una chiave diversa, come fanno per esempio il gioco o la finzione rispetto alla realtà: si veda lo storico saggio di Gregory Bateson (1976) sul gioco, che è il punto di partenza delle analisi di Goffman.

15. Tra gli strumenti impiegati all'inizio dell'anno per monitorare l'atteggiamento verso la matematica è stato impiegato anche il tema autobiografico ("Io e la matematica") e la richiesta di associare la matematica a un animale (ispirati alle proposte di Di Martino e Zan, 2019). Come si vedrà più sotto, la ripetizione dell'attività a fine anno, confrontando con i bambini quanto scritto in precedenza, ha consentito alla docente e a loro di apprezzare il percorso compiuto. Un bambino a inizio dell'anno aveva scritto: «Per me la matematica è noiosa come un maiale», e a fine anno è tornato su quella impressione: «Non è vero maestra, la matematica è divertente, ma io non lo sapevo».

16. Per materiale ed esposizione più dettagliata: <https://www.pianodilavoro.org/2023/03/27/le-carte-geometriche-2/>.

17. Tutti gli strumenti proposti sul sito "Lo strumentario per il piano di lavoro" sono realizzati e riproducibili con strumenti molto semplici, di uso scolastico.

all'altro quello che vede, perché lo riproduca disegnando. Una volta finito, si confronta il disegno con la carta, e se le cose non tornano si riflette sul perché. Il gioco è piaciuto moltissimo ai bambini, il che ha dato seguito ad alcune varianti in classe: "contro la maestra", in cui un bambino o un gruppo estraeva una carta dal mazzo e diceva alla docente cosa disegnare (la docente si divertiva, a sua volta, a far emergere le conseguenze più assurde delle loro indicazioni), e "tutti insieme", in cui un bambino prendeva una carta e la descriveva a tutta la classe che disegnava sul quaderno, e si confrontavano poi tutti insieme i risultati. Lo strumento, divertente spesso fino all'ilarità generale, si è prestato tantissimo a lavorare e riflettere sull'uso del linguaggio descrittivo e sulla decodifica del linguaggio verbale. Si ripresenta inoltre la caratteristica di lavorare sui processi, e di trasformare l'errore in un momento non solo divertente ma anche vissuto come funzionale al processo di comprensione.

Uno strumento analogo ma con finalità differenti è quello che ha preso in classe il nome di "Figure pericolose".¹⁸ L'ispirazione per la creazione del gioco è venuta dall'esperienza di uno dei laboratori del convegno CARME 2023 a Pistoia.¹⁹

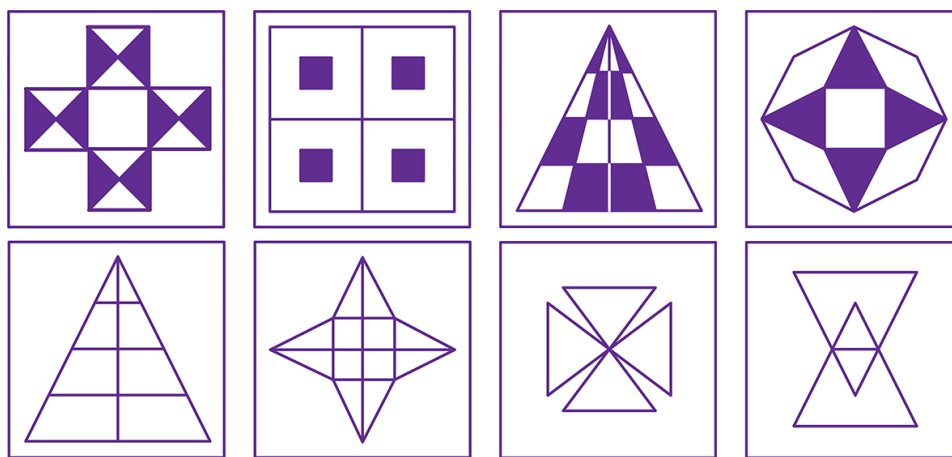


Figura 5. Otto tessere dello strumento "Figure pericolose".

Anche qui si tratta di un set di carte, in ognuna delle quali è riportato un disegno geometrico su sfondo bianco. Per cominciare una delle figure è stata proiettata alla lavagna multimediale interattiva, lasciando che dal gruppo classe nascessero le osservazioni su ciò che i bambini vedevano; poi la docente ha guidato la discussione con l'ottica di rafforzare i commenti legati alle relazioni tra le parti disegnate; infine si è lasciato ai bambini del tempo per riprodurre il disegno sul quaderno. Stavolta l'obiettivo era focalizzarsi sulle *relazioni* fra le parti delle figure, attraverso la capacità di riprodurle correttamente.²⁰ Il gioco è poi entrato nel piano di lavoro: la richiesta era quella di lavorare in coppia, osservare bene la figura e provare a ricreare il disegno sul proprio quaderno. Quali capacità bisogna mettere in gioco per ricreare un certo disegno geometrico? Quali domande possiamo farci prima di iniziare a disegnare? Anche qui osservazioni e strategie possibili sono molteplici.

Giocando, i bambini scoprono che più dei dati, delle informazioni o delle rilevazioni di misure, sono fondamentali le relazioni tra le varie parti della figura. È evidente che i disegni possono essere replicati

18. Per materiale e dettagli: <https://www.pianodilavoro.org/2023/05/29/figure-pericolose/>.

19. Per CARME (Center for Advanced Research in Mathematics Education) 2023 consultare il sito: <https://www.carme.center/ricerca-in-pratica2023/>. Il laboratorio a cui ci riferiamo nel testo era a cura di Antonella Castellini.

20. L'insistenza sul ruolo dell'osservazione nell'apprendimento matematico è uno degli insegnamenti centrali di Emma Castelnuovo, come si può leggere ad esempio, in Castelnuovo (2008, p. 151): «Osservare le affinità [...] Si tratta di osservare cose mai osservate, che stanno là. Si è sempre osservato poco e oggi si osserva ancora meno. Invece a scuola, se ben condotti, si può imparare ad osservare e ad arrivare a fare delle scoperte, partendo da osservazioni attente». Sulla dimensione antropologica dell'educazione come "pratica di attenzione" si veda Ingold (2019).

in una vasta gamma di dimensioni, che siano più grandi o più piccole poco importa (come illustrato nella Figura 6), ma è la proporzione tra le varie parti che diventa cruciale nel determinare se la riproduzione è accurata o meno.

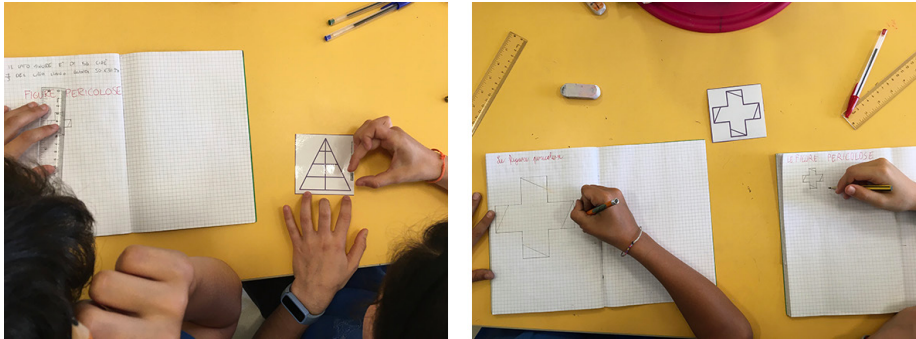


Figura 6. Bambini che lavorano con lo strumento “Figure pericolose”.

Come si potrà vedere meglio nel corso dell’articolo, la natura degli strumenti impiegati è estremamente varia e versatile: la regola è piuttosto l’eterogeneità. Gli strumenti hanno poi una loro *storia* nella classe: sono accolti, modificati, rielaborati insieme ai bambini, al punto che si può ben dire che la direzione presa dalla didattica in classe è sempre frutto dell’esito di questi incontri.

2.3 L’introduzione del piano di lavoro

L’attività con gli strumenti, accolta con curiosità ed entusiasmo dalle due classi, ha costituito la nostra introduzione alla situazione del piano di lavoro. Dopo qualche tempo, è stato chiesto infatti alle classi di fare un passo in più, tanto riflessivo quanto organizzativo: riconsiderare cioè i giochi-strumenti fino a quel momento impiegati in classe, e disporli dentro le aree tematiche riportate su grandi cartelloni (Figura 7).

Piano di lavoro matematico

NUMERI

Espressioni	Calcoli	Multipli e divisori	Numeri negativi
Numeri romani etc.	Frazioni e percentuali	Confronto decimali	

SPAZIO E FIGURE

Descrivere e denominare figure geometriche	Figure ruotate o traslate
Angoli	Perimetro e area

Piano di lavoro matematico

MISURE

Lunghezza, capacità, massa, tempo, angoli	Peso lordo, netto, tara
Spesa, ricavo, guadagno	

PROBLEMI

RELAZIONI DATI E PREVISIONI

Tabelle e dati	Frequenza e media aritmetica
----------------	------------------------------

Figura 7. I cartelloni con le aree tematiche.

Anche questo è un momento generativo nel percorso della classe, perché occasione di dibattito e di osservazioni varie tutti insieme. La cosa più interessante che è emersa qui nell'interazione con le due classi è che quando uno strumento è particolarmente riuscito e stimolante, «tende a coprire più caselle diverse».

Con questo passaggio è stato di fatto introdotto il piano di lavoro nella sua formula più elementare: si comincia infatti a dedicare dei tempi specifici della settimana al lavoro con gli strumenti, e viene proposta ai bambini una prima forma di pianificazione personale della propria attività. All'inizio, con pochi strumenti a disposizione, si è chiesto ai bambini di pianificare il lavoro della settimana a seconda degli obiettivi (corrispondenti alle caselle del tabellone) che sentivano di dover approfondire, e di farlo attraverso una prima scheda che chiedeva loro: «Su cosa dovrei esercitarmi?», e consentiva di registrare e valutare le attività svolte («Com'è andata?»). Ai bambini è stato chiesto di scegliere il compagno o la compagna con cui lavorare e, a fine sessione, di scrivere un *feedback* sul lavoro svolto. Vengono presentate la scheda in **Figura 8** e alcune valutazioni in **Figura 9**.

Il mio piano di lavoro pomeridiano

NOME:	Su cosa dovrei esercitarmi?	
DATA:		
	Approfondimento	

TEMPI e CON CHI?	STRUMENTO SCELTO	COME È ANDATA?
1° tempo/1 settimana		
2° tempo/1 settimana		
3° tempo/1 settimana		
4° tempo/1 settimana		

Figura 8. Scheda iniziale del piano di lavoro.

CELTO	COME È ANDATA?
ENO	SECONDO ME È ANDATA MOLTO BENE MI È SERVITO PERCHÉ HO FATTO DA TROIA ALLA FIA 2 MILIORE AMICA E MI SONO ESERCITATA
HA	NEL SECONDO TEMPO HO FATTO I CALCOLI A MENTE E SONO MOLTO FELICE PERCHÉ SECONDO ME MI È SERVITO MOLTO
VI	IN REALTÀ UN PO' MALUCCIO PERCHÉ ERA ANDAVA VELOCISSIMO IO INVECE MOLTO LENTA E QUINDI HO FATTO SOLO DUE MI DEVO ANDARE ALLENARE
PRESSIONI S	È ANDATA AB BASTANZA BENE ABBIAMO FATTO UN BUON LAVORO E MI SONO DIVERTITO PERCHÉ ABBIAMO INCLUSO TUTTI E NESSUNO NON HA PARTECIPATO.

Figura 9. Valutazioni di un'alunna.

Chiedere ai bambini di scrivere «Com'è andata?» non solo apre le porte della riflessione spontanea sulla propria attività, ma diventa facilmente occasione di riflessione insieme, sia in gruppo confrontando le varie esperienze, sia in scambi con la maestra mentre il resto del gruppo è al lavoro. Questi momenti sono importanti perché aiutano a inquadrare le esperienze matematiche in modo nuovo: si realizza che è normale manifestare le proprie difficoltà e individuare le vie che si sono rivelate infruttuose, che questo capita a tutti ed è il modo con cui si arriva a trovare le strade che funzionano. In questo primo *setting* come in seguito, l'insegnante poteva chiedere di lavorare con qualcuno in particolare per recuperare una lezione persa o per supportarne il lavoro. I tempi dedicati al piano di lavoro generalmente erano dati da due pomeriggi di scuola a settimana, e così sarebbe stato anche dopo, ma con una differenza importante: in questa prima fase, il pomeriggio era suddiviso in quattro

tempi di lavoro uguali di circa venti minuti l'uno, e l'indicazione era di cambiare in ogni tempo strumento e compagno. Questo per abituare i bambini alla gestione del tempo e delle situazioni di lavoro in funzione dei loro obiettivi: un accompagnamento alla seconda fase, in cui sarebbe stata data loro piena libertà di scelta dei tempi e dei modi di lavoro.

I bambini avevano a disposizione il quadro generale degli obiettivi, riassunto nel tabellone già visto (Figura 7), che riportava i materiali a disposizione della classe suddivisi per argomenti, e ogni volta che la maestra portava a scuola un nuovo strumento, esso veniva illustrato alla classe. Spesso, collettivamente, veniva inventato e inserito sul cartellone un nome, chiedendosi tutti insieme: «Dove lo collochiamo? A quale scopo servirà?». I materiali venivano inseriti man mano nel piano di lavoro matematico dopo che l'argomento veniva affrontato in classe attraverso un laboratorio o una lezione.

2.4 Il piano di lavoro articolato

Durante le vacanze di Natale la docente ha lavorato alla strutturazione completa del piano di lavoro matematico attraverso l'organizzazione degli obiettivi, tenendo le Indicazioni Nazionali come riferimento di base. Gli strumenti matematici a disposizione sono stati suddivisi tra *12 obiettivi* che l'insegnante aveva intenzione di raggiungere con le due classi entro la fine dell'anno. Gli obiettivi erano a loro volta suddivisi in alcune macroaree (in grassetto), dettagliate di seguito.

Numeri

1. Lavorare con i grandi numeri, eseguire le operazioni con sicurezza, ricorrere al calcolo mentale e stimare un risultato.
2. Saper fare divisioni con resto fra numeri naturali.²¹
3. Operare con le frazioni, riconoscere le frazioni equivalenti.
4. Utilizzare le percentuali.
5. Usare i numeri decimali: leggere, scrivere, confrontare numeri decimali ed eseguire operazioni.

Geometria

6. Descrivere, denominare e classificare le figure geometriche, riprodurle con strumenti adatti e ridurle in scala.
7. Determinare il perimetro di una figura.
8. Determinare l'area di una figura.

Misure

9. Usare le principali unità di misura e passare dall'una all'altra.

Problem solving

10. Risolvere problemi-esercizio.
11. Risolvere problemi "grattacapo".

Dati e tabelle

12. Rappresentare relazioni e dati, leggere tabelle e grafici e ricavare informazioni.

Ogni obiettivo corrispondeva a un brevetto da raggiungere. Per ogni brevetto la docente aveva preparato un set di strumenti e materiali che i bambini avrebbero potuto utilizzare per esercitarsi. Molti di questi strumenti erano già stati introdotti in classe, altri sono stati adattati o creati *ad hoc* (Figura 10).

²¹ La docente ha voluto introdurre un brevetto specifico su questa operazione che non era stata capita in profondità dalla classe.

Con questo lavoro preparatorio era dunque pronta la *Scheda personale* del piano di lavoro di ogni bambino (Figura 11).



Figura 10. Diverse attività svolte in contemporanea durante un pomeriggio di piano di lavoro.

NOME:

Il mio piano di lavoro di MATEMATICA

	OBBIETTIVO	APPUNTI PERSONALI	APPUNTI MAESTRA	A CHE PUNTO SONO?	PUNTO	BREVETTO
NUMERI	Grandi numeri					
	Divisioni					
	Frazioni					
	Percentuali					
	Decimali					
GEOMETRIA	Figure geometriche					
	Perimetro					
	Area					
MISURE						
PROBLEM SOLVING semplice						
PROBLEM SOLVING grattacapo						
DATI E TABELLE						
Brevetto capolavoro						

Figura 11. Scheda personale del piano di lavoro.

Come si vede in **Figura 11**, la scheda introduce appieno la dimensione della programmazione individuale, in cui ogni bambino fissa la sua situazione cercando di trovare termini descrittivi e si dà degli obiettivi, che sono immediatamente espressi *in termini di ciò che riesce a fare*. A ogni obiettivo corrisponde infatti un set di strumenti da imparare a padroneggiare, come in un laboratorio artigianale. L'apprendimento è dunque qui *tradotto il più possibile in termini pratici*.²²

Tutto ciò è reso perspicuo e intuitivo attraverso l'organizzazione della classe e dei materiali. Il nuovo *setting* del piano di lavoro sviluppato si presenta infatti così: sul tavolone grande della classe ci sono dodici targhette, con su scritti gli obiettivi matematici, e sotto ogni targhetta sono collocati i relativi strumenti. I bambini lavorano in formazioni varie e l'insegnante si muove tra loro (non ha una sede propria), osservando e supportando il lavoro di tutti, oppure dedicandosi a un singolo bambino o a un gruppo ristretto per un lavoro specifico. All'inizio di ogni nuova sessione si consegna ai bambini la scheda personale del piano di lavoro (**Figura 11**), che viene ritirata alla fine. Nel foglio il bambino può inserire gli strumenti usati per lavorare a un certo obiettivo e valutare il proprio livello raggiunto, colorando l'immagine di una batteria elettrica divisa in quattro tacche; c'è poi uno spazio per inserire il timbro del brevetto superato. Alla fine di ogni sessione del nuovo piano di lavoro è stato inoltre introdotto un momento di riflessione comune: dieci minuti per chiudere l'attività, in cui ciascuno aveva modo di dire com'era andata, e anche la maestra dava il suo *feedback* e le sue impressioni.

Eccoci dunque all'organizzazione pienamente articolata del piano di lavoro matematico. L'idea di impiegare una scheda personale, gestire il profilo autonomo della propria attività, in cui inserire gli obiettivi di volta in volta più sfidanti, è molto attraente per i bambini: si tratta anche del fascino esercitato dal trovarsi a fare qualcosa di estremamente concreto e padroneggiabile, e insieme di avere la responsabilità del proprio percorso, e di aggiornarlo ogni volta.²³

2.5 Strategie ed esperienze nel piano di lavoro

L'attività matematica delle due classi era costituita a grandi linee da due momenti distinti: uno nel quale argomenti e attività venivano introdotti dalla maestra con il gruppo classe, e l'altro costituito dal piano di lavoro. Benché il primo venisse affrontato di preferenza con un approccio laboratoriale, si può osservare come il piano di lavoro sia compatibile con approcci diversi e misti (laboratoriale, frontale, persino dal libro), e sia una pratica favorevole, per maestre e maestri, per iniziare a sperimentare e a formarsi gradualmente un bagaglio operativo.²⁴ Tra i due momenti è tuttavia necessaria una circolarità proprio nell'atteggiamento verso la matematica: come si è visto, sono essenziali valorizzazione e confronto di tutte le vie del ragionamento dei bambini, attenzione ai processi, ruolo positivo dell'errore.

Il piano di lavoro, una volta entrato nel vivo, si rivela subito una formula molto funzionale nello stimolare la pianificazione e le strategie più diverse per affrontare sia i singoli strumenti che l'insieme degli obiettivi. Si lascia qui la parola ad alcuni bambini, ai quali è stato chiesto dopo un po' di tempo di descrivere la strada che avevano intrapreso per affrontare gli obiettivi del piano di lavoro.

22. Il carattere profondamente intuitivo e attraente di questa impostazione è forse il dato antropologico profondo, anche indipendente da altre sue assunzioni, che Freinet ha intuito nel piano di lavoro. Qualcosa che ha a che fare col fondo cooperativo e insieme concreto dell'attività umana, di qualunque natura essa sia.

23. Difficile dire dove si situi esattamente questa attività, tra "gioco" e "lavoro": è chiaro che qui siamo in una sorta di *frame* intermedio e complesso, in cui piacere pratico-concreto e piacere intellettuale felicemente convergono. Si veda a questo proposito la formulazione efficace di Winnicott sulla natura *gioco*: «Per controllare ciò che è all'esterno bisogna *fare cose*, non semplicemente pensarle o desiderarle [...]. Giocare è fare» (Winnicott, 2005, p. 62, traduzione degli autori).

24. Questo è uno dei motivi per i quali il progetto del sito "Lo strumentario per il piano di lavoro" ha avuto molta fortuna: è un modo pratico e immediato per cominciare a provare a entrare in un'ottica differente, senza per questo essere sganciati da presupposti teorici che invece come premesse dogmatiche rischiano di trasformarsi in retorica. Dove, se non nel pratico, si può trovare la verità dell'intuizione? Vale per gli adulti come per i bambini.

Ecco qualche frase estrapolata dalle loro risposte:

- «Il mio percorso è: prima fare quelle che mi tornano meglio, le più facili per me e infine le più difficili. Le più difficili sono tutta la geometria, il *problem solving* grattacapo, le frazioni e i decimali».
- «Io ho deciso di assaggiare un po' tutto per capire il grado di difficoltà, ora mi sto concentrando su alcune cose ma penso di averci un percorso in mente: vorrei prendere il brevetto dei numeri decimali visto che nel primo quadrimestre ci abbiamo lavorato molto, anche se a dire il vero mi sembra abbastanza lungo e anche difficile».
- «Io nel piano di lavoro ho iniziato da subito facendo le cose che mi piacciono di più in matematica come i numeri decimali che è il primo brevetto che ho preso. Volevo passare prima quelli che facevo con facilità».
- «Mi sono fermata a lungo sul *problem solving* più semplice ma poi ho preso il brevetto. Ora vorrei puntare su cose più facili così non dovrò più pensarci».
- «Io ho elaborato una tecnica per prenderli [i brevetti], arrivo a $\frac{3}{4}$ su tutte le batterie poi li prendo tutti all'ultimo».

Molto interessante è stata poi la riflessione che è scaturita in classe dopo aver stimolato la riflessione sui diversi approcci: alcuni hanno raccontato di aver provato ogni strumento, testando vari argomenti; altri sono partiti da temi conosciuti e semplici, mentre alcuni hanno affrontato un argomento alla volta e sono passati al successivo solo dopo aver ottenuto un brevetto. C'erano coloro che amavano lavorare rigorosamente da soli e altri che preferivano il lavoro di gruppo, alcuni si erano affezionati a un compagno, mentre altri lasciavano che fossero i compagni a scegliere. E una volta preso il brevetto si diventa "tutor" di quell'argomento: la classe può rivolgere le questioni più complicate al tutor di riferimento.

Quest'ultimo accorgimento si è mostrato utile nel favorire il senso di autoefficacia e una percezione della competenza matematica come qualcosa di diffuso e variegato, non esclusivo di "quelli bravi" o "portati per la matematica". Davide (nome di fantasia) per esempio si è applicato per un mese intero soltanto sull'aspetto geometrico. Diceva infatti di odiare l'aritmetica e aveva problemi nel calcolo, e in qualche modo si sentiva sempre indietro nella situazione della lezione tradizionale. Ha deciso di affrontare subito il brevetto del perimetro, riuscendo a ottenerlo con grande impegno e dedizione (nel fine settimana chiedeva per casa compiti di matematica sull'argomento), ed è diventato il primo e indiscusso tutor di un argomento nuovo per la classe: forse per la prima volta ha sentito di riuscire in matematica e si è confrontato davvero con sé stesso. L'insegnante segue questi percorsi con attenzione e curiosità: osserva, interagisce, supporta, muovendosi tra bambini e situazioni. Ma le è chiesto anche uno sforzo importante di attesa e di fiducia, perché è proprio lo spazio della *libertà* di scegliere, provare, correggere il tiro o riformulare il proprio obiettivo che offre quella possibilità di strutturazione di sé che è tipica del piano di lavoro. La dimensione pratica dell'attività ha infatti il vantaggio di tradursi immediatamente in valutazione, senza un giudizio esterno ma attraverso il confronto con i pari e con i materiali a disposizione. I bambini sono messi nelle condizioni di tastare sé stessi e le proprie attitudini, vedere come vengono fuori i propri errori e riflettere sulle strategie più funzionali. Questa riflessione è poi sempre sollecitata nei momenti di gruppo in classe.

L'esperienza mostra che i bambini tendono a dedicarsi al materiale più sfidante, né troppo facile né al momento proibitivo per loro: trovano con facilità la propria "via" tra gli strumenti, mettendoli da parte quando ormai li padroneggiano e passando ad altro, esattamente come accade nel coinvolgimento proprio del gioco. Si può anche osservare come il fatto di muoversi fra diversi strumenti e obiettivi comporti un vantaggio secondario di non poca importanza: mentre quando si segue il libro di testo si tende a procedere per argomenti ed esercizi, passando poi oltre e dimenticandoli, il piano di lavoro tende per così dire a tenere in gioco tutte le competenze, perché ci si muove tra più obiettivi e materiali, e anche quando si è raggiunto il brevetto si resta a disposizione degli altri.

Gli strumenti a loro volta sono costruiti per consentire una gradazione di livelli e un impiego o adattamento

personale. In questa esperienza, il piano di lavoro si è dimostrato in effetti come un ambiente didattico particolarmente capace di rispondere a molte di quelle istanze che vanno sotto il nome di *inclusione*. La dimensione fortemente personalizzata e insieme di gruppo, in cui ognuno persegue i suoi obiettivi e le sue sfide, si è rivelata ideale per coinvolgere in modo naturale, senza forzature, i bambini con difficoltà cognitive. Anche loro vogliono divertirsi come gli altri, con strumenti e adattamenti pensati per loro. Ed è una pratica, fatto forse meno immediato, molto felice anche nella sua capacità di stimolare il contributo più indovinato e creativo da parte degli insegnanti di sostegno, anche quando capita che non abbiano esperienza di questo tipo di didattica. Il piano di lavoro ha infatti la virtù di indirizzare subito gli insegnanti, in modo chiaro e diretto, a formulare obiettivi e a definire strumenti adeguati al bambino. È il caso di dire che la sua dimensione immediatamente pratica e concreta aiuta e mette tutti in grado di dare il meglio di sé. È anche importante rilevare come faccia parte dello spirito del piano di lavoro, e anche del suo *background* culturale, che esso si presti a configurazioni varie, che vanno al di là della dimensione della classe, per coinvolgere gruppi più ampi (le classi aperte). Nell'esperienza più particolare e limitata qui raccontata, è capitato spesso che le due classi quinte si trovassero a fare il piano di lavoro insieme il pomeriggio: esperienza a dir poco elettrizzante e stimolante per i bambini.

2.6 I brevetti

Il momento del brevetto si può presentare, come si è visto, anche molto presto. Quando un bambino ha affrontato tutte le sfide proposte nell'obiettivo e si sente sicuro, completa le tacche della batteria nella sua scheda e richiede alla maestra il relativo brevetto: negli incontri successivi si svolge in classe la "prova", che consiste nel mostrare di saper fare quello su cui ci si è esercitati con gli strumenti, e può essere di tipologia molto varia. Alcuni brevetti erano scritti: ad esempio, il brevetto delle divisioni consisteva nel farne quattro (due a una cifra, le altre a due cifre, alcune con il resto e altre senza resto), e veniva superato solo se tutte e quattro erano esatte; in altri casi, come quello dei decimali, molti esercizi si susseguivano, ed era ammesso qualche errore. Altri, tipicamente quelli meno legati ad abilità "strumentali", erano orali: per esempio il brevetto del *problem solving* semplice si svolgeva sul divanetto della classe attraverso un colloquio con la maestra e con altri compagni coinvolti. C'era anche spazio per i cosiddetti "brevetti capolavoro": si trattava in questo caso di un particolare talento, di una ricerca matematica, o della presentazione di uno strumento matematico autocostruito che un bambino desiderava condividere con la classe e mettere a disposizione degli altri.

Quando tutta la classe raggiungeva un obiettivo si festeggiava. Il clima emotivo intorno al brevetto è diverso dalla valutazione classica, perché l'accento è sul *saper fare* qualcosa e sul carattere condiviso da tutti i bambini della competenza matematica. Anche il non passarlo rientrava il più possibile in una routine di apprendimento. Che i brevetti non venissero superati accadeva spesso, perché un bambino aveva sottovalutato la difficoltà o si era sopravvalutato, perché non aveva capito la portata del lavoro da fare o anche perché alcuni brevetti risultavano particolarmente ostici per difficoltà specifiche di apprendimento. Non superare il brevetto non aveva il significato di un fallimento, ma era un'esperienza che chiariva su cosa bisognava ancora lavorare.²⁵ In altri casi invece, se la difficoltà si rivelava eccessiva per un bambino, quello che contava era piuttosto il percorso di lavoro, e si propendeva per un adattamento del brevetto finale in funzione delle abilità raggiunte dal bambino, per non lasciarlo in una situazione di frustrazione. È chiaro che il ventaglio delle possibilità e degli accorgimenti richiesti per far fronte a situazioni di difficoltà o di impasse è molto ampio, e dipende dall'osservazione di tutto il percorso del bambino dentro e fuori il piano di lavoro.²⁶ Accompagnare

25. Di Martino e Gregorio (2019) rilevano in un articolo recente l'importanza di sperimentare l'insuccesso a scuola, in un contesto protetto in cui elaborare le proprie emozioni negative di fronte alla matematica.

26. La questione della valutazione è molto complessa; illuminanti queste osservazioni di Di Martino e Zan (2019, p. 101): «[...] sottolineiamo come le scelte didattiche dovrebbero nascere da considerazioni di *significatività* (e non di valutabilità degli studenti) e come le competenze più significative siano per loro natura più difficili da valutare: in particolare, la valutazione necessita di tempi lunghi e strumenti diversificati e deve abbandonare il mito dell'oggettività».

i bambini nel loro percorso personale è sempre un compito delicato per gli insegnanti, che richiede creatività, esperienza, attitudine all'ascolto e all'osservazione dei processi: non ci sono formule didattiche prestabilite.

Si può infine osservare come nello sviluppo del piano di lavoro l'insegnante debba in una certa misura affidarsi, perché non si ha un controllo sul percorso di ogni bambino: spesso non si hanno nemmeno in mano i prodotti o i risultati del lavoro, visto che non necessariamente si produce qualcosa di scritto. Tuttavia accade che, lentamente, ciò che emerge e si fa tangibile siano i *processi*. I bambini abbandonano i giochi che non sono più sfidanti per loro, non guardano all'errore come a un fallimento e sono portati a esplicitare i propri processi di pensiero con i pari e in gruppo. Possiamo apprezzare questa evoluzione attraverso un esempio trasversale: il percorso fino al brevetto chiamato "*problem solving grattacapo*".

2.7 Il brevetto "*problem solving grattacapo*"

Il piano di lavoro presentava tipologie molto diverse di strumenti e brevetti: da alcuni, come quello delle divisioni, che richiedevano una preparazione fatta più di classici esercizi, a quello del *problem solving*, che era il risultato di un percorso più articolato. Il cosiddetto "*problem solving grattacapo*" costituiva anzi l'ultima tappa dei brevetti, perché poteva abbracciare tutti gli argomenti affrontati e richiedeva competenze più ampie e generali.

Il *problem solving* era infatti declinato in due brevetti distinti. Quello "semplice" metteva di fronte a problemi più standard, in cui i costrutti matematici da impiegare sono relativamente chiari e prevedibili, e sarebbero da definire più propriamente esercizi. In quello "grattacapo" invece emergeva la dimensione autentica di *problema*: quella cioè in cui non si ha idea di quali procedure siano richieste e si devono mobilitare tanto le proprie risorse e conoscenze quanto capacità e strategie più ampie di comprensione e di soluzione. Il lavoro di Di Martino e Zan (2019, 2020), incentrato sul ruolo dei "buoni problemi" nell'educazione matematica, ha costituito un punto di riferimento tanto teorico quanto pratico: con le due quinte abbiamo aderito infatti durante l'anno al progetto "Problemi al centro" condotto dai due studiosi dell'Università di Pisa appena citati, e così le classi si sono ritrovate spesso ad affrontare problemi veri e propri, stimolanti e di qualità, che avevamo battezzato "grattacapo".

La situazione nuova costituita da questi problemi è stata affrontata innanzitutto in momenti laboratoriali di gruppo, in cui le congetture, le associazioni, i ragionamenti di tutti venivano vagliati e valutati insieme, e proprio l'*argomentazione* assumeva un ruolo centrale.²⁷ Non avevamo una strada sicura e ben tracciata per risolverli, e spesso il ragionamento prendeva strade lunghe, e necessitava di molto tempo per dipanarsi. Presto "Problemi al centro" è diventato un'attività laboratoriale della classe, spesso fatta in piccoli gruppetti, e con una collocazione precisa nei tempi settimanali della classe.

La caratteristica dei problemi così intesi è quella di porre domande non artificiali, ma reali e sensate, e di richiedere comprensione, ragionamenti e argomentazioni che vanno oltre l'ambito della procedura strettamente matematica. Un esempio trasversale di un'attività di questo tipo, che è diventato uno degli strumenti proposti sotto l'obiettivo 11 relativo ai problemi "grattacapo", è quella che ha preso il nome di "Stimiamo il mondo",²⁸ (Figura 12) dall'albo illustrato di Giffon e Boston (2018) a cui è ispirata.

27. La situazione funziona, e i problemi sono veramente generativi, quando il ragionamento e l'argomentazione matematici si mostrano in *continuità* con quelli più generali che impieghiamo nella nostra vita, e non come un ambito separato e per così dire idiomatizzato.

28. Per materiale e dettagli: <https://www.pianodilavoro.org/2023/05/03/stimiamo-il-mondo/>.

Di tutta l'acqua presente sulla Terra quanta percentuale appartiene ai mari e agli oceani? Quanta ai fiumi e laghi? Quanta è congelata nelle calotte polari?	Quanto può crescere al mese in lunghezza un'unghia della mano? Fai una stima! Ps: puoi aiutarti con un righello.
Cerca la risposta a pagina 20	Cerca la risposta a pagina 12
La gestazione dell'essere umano, si sa, è di 9 mesi. Quanto quella del maiale? E di un elefante?	Qual è l'animale più forte del mondo?
Cerca la risposta a pagina 84	Cerca la risposta a pagina 77
Stima le misure di un campo da calcio di serie A.	Tra un elefante e una nuvola chi pesa di più secondo te?
Cerca la risposta a pagina 61	Cerca la risposta a pagina 19

Figura 12. Alcune carte dello strumento "Stimiamo il mondo".

Il gioco consiste in una serie di schede come quelle riportate in Figura 12, con domande che sollecitano un'attività di valutazione e di stima (per le risposte esatte si rimandava alla pagina dell'albo tenuto a disposizione in classe). In classe abbiamo cominciato a giocareci dividendoci in gruppi: ogni gruppo riceveva tre carte-domande, e aveva a disposizione mezz'ora per ragionare (Figura 13). Dopo questo tempo, si entrava nella fase del dibattito, in cui le stime argomentate venivano presentate al resto della classe: ogni squadra riceveva un punto se il suo ragionamento si mostrava coerente, ben argomentato e convincente anche per il pubblico, il quale a sua volta poteva aggiungere riflessioni e commenti. Il fine del gioco non era fornire la risposta esatta (quasi sempre impossibile da indovinare), ma trovare una strategia per *avvicinarsi* il più possibile alla risposta, facendo congetture, argomentando, utilizzando preconoscenze e dati attinti dalle fonti più disparate.²⁹



Figura 13. Bambini intenti a discutere le tre domande del gioco "Stimiamo il mondo".

29. Alcune domande che possono apparire banali, come per esempio: «Qual è l'animale più forte del mondo?» (Figura 12), hanno stimolato uno tra i dibattiti più interessanti, perché dopo le risposte più ovvie (come «l'elefante»), si sono insinuate considerazioni più raffinate, del tipo: in proporzione al proprio peso o grandezza una formica è capace di sollevare un peso molto più grande ecc. Ma è impossibile offrire qui un'analisi dettagliata delle linee di ragionamento che potevano scaturire da questi e altri problemi.

Queste pratiche euristiche e argomentative, una volta apprezzate in gruppo, si sono poi trasferite nel piano di lavoro, dove sono state affrontate nel percorso più autonomo dei bambini. Sono state assemblate così delle schede chiamate “grattacapo”, divise in due tipi, a seconda delle fonti da cui erano attinte: “schede grattacapo MaMa” (dal progetto *MaMa – Matematica per la scuola elementare*)³⁰ e “schede grattacapo INVALSI” (dalle prove standardizzate dell’Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione).³¹ Il sito MaMa è stato una fonte inesauribile di materiale prezioso (Figura 14); tra gli item INVALSI ne sono stati selezionati alcuni valutati come significativi e stimolanti per le classi coinvolte, togliendo spesso le risposte chiuse proposte.



Figura 14. Il raccogliore delle schede MaMa a disposizione della classe.

È stato chiesto ai bambini di argomentare le loro risposte in un unico quaderno personale che abbiamo chiamato “quaderno grattacapo”: questo consentiva all’insegnante di avere una fotografia dei loro sviluppi argomentativi nel tempo. Le schede grattacapo erano numerate, e in ogni quaderno era riprodotta una griglia su cui poter segnare il numero delle schede già affrontate (Figura 15).

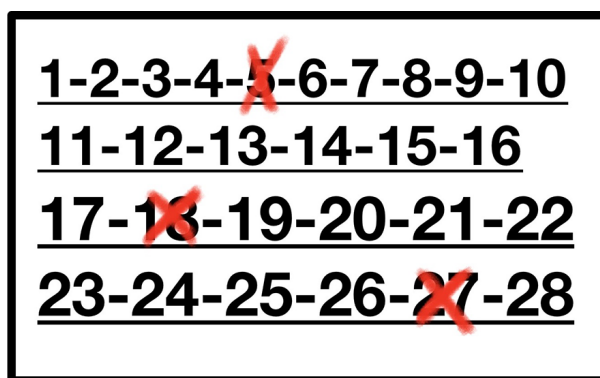


Figura 15. Griglia presente in ogni quaderno grattacapo.

³⁰ Giochi, problemi, schede modificabili di qualità (Sbaragli et al., 2021), anche con una veste grafica estremamente curata e accattivante, sono scaricabili gratuitamente dal sito: <https://mama.edu.ti.ch/>; si veda l'impostazione del progetto nelle Linee guida (Sbaragli, 2021) scaricabili dal sito.

³¹ I testi e l'analisi degli item proposti nelle prove standardizzate di matematica (e non solo) sono consultabili sul sito: <https://www.gestinv.it/>.

Lavorando al piano di lavoro sul *problem solving* i bambini potevano leggere, discutere a coppie e poi scrivere le risposte sul quaderno. La richiesta era di ragionare sui perché da dare, di collaborare per arrivare a una risposta che convincesse entrambi e argomentare. Il momento della discussione era condiviso, mentre quello della scrittura era individuale.

Data questa impostazione, che poteva contare su ottimi materiali di base per il lavoro dei bambini, più difficile si presentava il compito di impostare il brevetto. Eseguire un problema già affrontato aveva poco senso, affrontarne uno dato dall'insegnante ai singoli non risultava in linea con lo spirito cooperativo che aveva animato fin lì il *problem solving*: era insomma un bel grattacapo educativo anche per la docente. Lo spunto per risolverlo è venuto dalla giornata del "Pi Greco Day", promossa dalla scuola con una formula particolare: per la festa della matematica le classi erano infatti chiamate a costruire un gioco matematico da usare con una classe gemellata della scuola. Le classi quinte coinvolte in questa esperienza didattica si sono scelte a vicenda e ne è nato il gioco dei brevetti grattacapo: i bambini si sono dedicati per giorni a ideare e formulare quiz matematici da proporre per sfidare l'altra classe. Le tipologie di quiz creati sono state tante, alcuni esempi sono forniti in Figura 16.

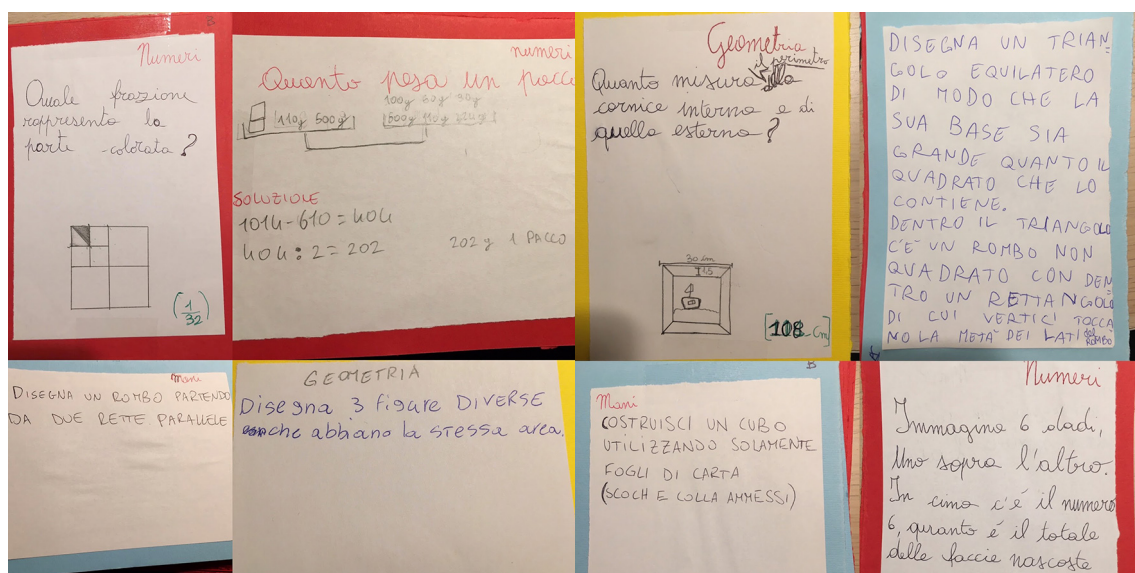


Figura 16. Alcuni esempi di quiz creati dalle classi.

Così durante la giornata del "Pi Greco Day" le due squadre-classi si sono sfidate a turno per tutta la mattina e parte del pomeriggio. Ogni classe sviluppava collettivamente le idee per risolvere un problema ed esponeva poi la propria risposta alla classe sfidante. Lo stile e le strategie delle soluzioni erano differenti. Una delle due classi, per esempio, amava ragionare per assurdo e cercare i casi limite, per cui il problema «Disegna 3 figure diverse che abbiano la stessa area» è stato interpretato alla lettera: non si parlava di poligoni e così i bambini non hanno perso tempo a cercare aree e perimetri, ma hanno semplicemente contato (pochi) quadretti e segmenti, creando figure diverse. Allo stesso modo la richiesta «Disegna un rombo partendo da due rette parallele» ha trovato un degno finale proponendo un semplice quadrato. Nei giorni a seguire le domande costruite per il gioco del "Pi Greco Day" sono diventate le carte per il nuovo gioco del piano di lavoro matematico: i problemi affrontati quel giorno erano solo una parte dei problemi costruiti da tutti, e durante l'anno i bambini stessi, quando volevano, continuavano a proporre problemi grattacapo da inserire.

Da questa esperienza è venuta la soluzione del brevetto "*problem solving* grattacapo": una sfida analoga tra due coppie di bambini. Una volta ottenuti tutti gli altri brevetti, e avuto modo di eserci-

tarsi con le schede grattacapo MaMa e INVALSI, era possibile richiedere il brevetto *problem solving* finale. Bisognava però aspettare che anche un altro compagno facesse richiesta per poter formare una squadra e affrontare altri due compagni proponendo loro alcuni dei quiz ideati dalla classe. La coppia sceglieva infatti quali problemi sottoporre ai compagni avversari e la correzione era affidata alla squadra che aveva proposto la sfida.

2.8 Valutazione e autovalutazione finale

La cosa sorprendente, arrivati alla fine dell'anno, è stata che la scheda del piano di lavoro rappresentava già a grandi linee quella che sarebbe stata la pagella di matematica dei bambini. Alcuni obiettivi erano stati pienamente raggiunti, su altri i bambini avevano lavorato ma non era stato ancora raggiunto il pieno risultato, e la batteria colorata dei brevetti era a $3/4$, $2/4$ o $1/4$ di "carica": i livelli ministeriali indicati per la valutazione relativa a ogni obiettivo (avanzato, intermedio, base o in via di sviluppo) dalle più recenti Linee guida (MIUR, 2020) avevano così una chiara connessione con la valutazione che i bambini stessi si erano costruiti durante l'anno.

Cosa ancora più importante, quella pagina era una fotografia fedele delle abilità del momento presente, risultanti dalla storia (autonomamente registrata) dell'attività personale (Figura 17). Se Davide (che abbiamo incontrato sopra) ha avuto modo di dedicarsi al perimetro e ad altri brevetti lasciando dei vuoti su altri obiettivi, con il tempo e soprattutto col suo impegno potrà arrivare a colorare tutti gli obiettivi che si pone: questo, grazie al piano di lavoro, lo ha capito con tutto sé stesso.

NOME: ALESSIA Il mio piano di lavoro di MATEMATICA - II semestre

OBIETTIVO	STRUMENTI	ESERCIZI DA LIBRI	A CHE PUNTO SONO?	BREVETTO
NUMERI Decimali	GRANDI SANTI SCHEDA FANTASMINI	PAG 27 1,2,3 58,59		
Frazioni	CARTE FRAZIONI			
Percentuali	SCHEDA CON SILVIA	35 qd.		
Divisioni	CARTE CANADESI	28-29-30 31-32-33 Q.01		
GEOMETRIA Figure geometriche	FIGURE PERICOLOSE CARTE GEO 1 e 2 RIDUZIONI INScala			
Perimetro	1-11 16-22 12-15			
Area	1-5 6-11 12-16			
MISURE	STIMIAMO IL MONDO			
PROBLEM SOLVING	1-20 21-26 27-35			
PROBLEM SOLVING grattacapo	GIOCO DEI BREVETTI MATA			
DATI E TABELLE	SCHEDA TUTTE	PAG 47-50 86		
RECUPERO				

Figura 17. Come si presenta una scheda del piano di lavoro durante l'anno.

E in ultimo, ciò che si è visto crescere con il tempo nei bambini è un atteggiamento positivo verso la matematica. Erano entusiasti di lavorare con il piano di lavoro, e lo scrivevano spesso nelle riflessioni e nei temi autobiografici proposti, come si può leggere qui di seguito e rintracciare nella Figura 18:

- «Quando arriva l'ora di matematica sono curiosa di cosa facciamo di bello».
- «La matematica era già la mia materia preferita ma ora lo è ancor di più».
- «Mi piace quando si fa il piano di lavoro».
- «All'inizio dell'anno pensavo che la matematica fosse bruttissima ma te maestra mi hai fatto cambiare idea».
- «Quando arriva l'ora di matematica mi sento felice e la mia mente si chiede chissà cosa si farà oggi».
- «Quando arriva l'ora di matematica mi sento gioia, energia, felicità».

LA MATEMATICA ERA GIÀ LA MIA MATERIA PREFERITA MA ORA LO È ANCORA DI PIÙ! 🌟
MI PIACE QUANDO TUTTO! MI PIACE TUTTO! 🌟
QUANDO ARRIVA L'ORA DI MATEMATICA MI SENTO 🌟!

Quando arriva l'ora di matematica sono curiosa di cosa facciamo di bello.
Quella volta che abbiamo fatto il piano di lavoro per la prima volta ero curiosa ma allo stesso tempo contenta.
Il mio rapporto con la matematica è cambiato perché prima ero spaventata dalla matematica invece ora è così divertente e gioiosa, ma impegnativa.

Prima pensavo di sapere tutto ma invece mi sbagliavo di grosso, ora so le cose meglio e mi riesce facilmente.
Per me la matematica è diventata praticamente un gioco (ed è una cosa bella!!).

imparare il che mi piace molto! In più te ci fai fare molti lavori a gruppi/coppie che secondo me facilita molto l'apprendimento di una cosa come nel piano di lavoro.

Figura 18. Alcuni passaggi tratti dai temi autobiografici "Io e la matematica".

3 In conclusione: alcune riflessioni generali

In questo racconto abbiamo cercato di mettere in luce tanti aspetti che ci sono sembrati rilevanti nell'esperienza e nella sua costruzione. È utile sviluppare in conclusione alcuni spunti di riflessione generale che sono emersi nel corso dell'esposizione e che richiedono qualche altra parola.

Una prima riflessione riguarda la scelta e l'adattamento dei *materiali* del piano di lavoro matematico. Gli esempi e gli accenni riportati sopra mostrano come il "magazzino" del piano di lavoro si presenti come un insieme di strumenti estremamente eterogenei. Idee e materiali possono attingere alle fonti più varie, come esperienze, schede, libri, fotocopie, giochi strutturati, prove INVALSI, albi illustrati e tanto altro; anche il loro impiego è molto vario e sempre frutto di aggiustamenti specifici e varianti creative. Allo stesso modo, nella realizzazione della piattaforma de "Lo strumentario per il piano di lavoro", non c'è un'istanza di originalità nell'ideazione o nell'adattamento degli strumenti,³² e tantomeno il "copyright" di un "metodo" che venga promosso.³³ Non si tratta di altro che di strumenti concretamente realizzati e impiegati in classe da maestri e maestre rispondendo a esigenze specifiche, nella fiducia che il confronto e il libero scambio sollecitino l'inventiva e la qualità. Ed è perciò un lavoro veramente *artigianale*, in cui cioè la creatività, come nella gran parte dell'attività umana, consiste nella capacità di riusare e riadattare strumenti *in contesti nuovi*: sono questi ultimi ciò che in ultima analisi conta. Il lavoro più bello e difficile dell'insegnante è *far accadere le cose*, le situazioni reali di apprendimento.

Un'altra osservazione importante e collegata riguarda un'attitudine che il piano di lavoro e il laboratorio matematico in generale portano con sé, la capacità cioè di stabilire un rapporto differente con i suoi oggetti culturali. A differenza del libro di testo come luogo monodimensionale e "altro" della matematica, l'abitudine laboratoriale mette i bambini in un rapporto diverso di appropriazione e riformulazione dei contenuti culturali: lo si è visto sopra in piccolo, per esempio, nel modo in cui le classi si sono appropriate del costrutto dei "problemi" e l'hanno trasformato in uno strumento personale, giocando e rimodulandolo secondo il proprio gusto. Ed è essenziale notare come questo sia innanzitutto il compito dell'insegnante: non muoversi esclusivamente e nemmeno prioritariamente nella galassia degli strumenti "didattici", ma di essere nutriti di autentica curiosità verso la materia e le esperienze culturali, da cui strumenti e idee scaturiscono.³⁴ Per dirlo in una formula: la didattica non è un contenuto specifico, è un ponte.

Un altro aspetto che non è stato fin qui analizzato, ma che è per noi centrale nell'idea di fondo del piano di lavoro, è la natura dell'esperienza *sociale* e *culturale* che punta a introdurre. Qui forse si tocca il significato politico (in senso lato) più profondo che sta al cuore di pratiche di questo tipo, in cui la scuola è intesa come spazio di alterità e di possibilità rispetto ad altre realtà conosciute dai bambini. Intendiamo il fatto che il piano di lavoro, concepito come si è visto, offre ai bambini uno spazio di strutturazione di sé molto diverso dall'esigenza sociale che preme dappertutto, in primo luogo nel nostro immaginario, verso la *performance*, la misurazione delle prestazioni, l'affermazione individualistica che si realizza rispetto agli altri. In modo semplice e concreto, ma decisamente sorprendente quando funziona, nel piano di lavoro e nei momenti di confronto collettivo si sperimenta uno scenario diverso: una situazione comunitaria in cui lo sviluppo di sé avviene non in competizione con gli altri

32. Tutti i materiali sul sito sono rilasciati con licenza *copyleft* Creative Commons.

33. Come non esiste un "metodo" matematico, è ancor meno plausibile che ne esista uno della didattica della matematica. Per il cui ambito, se pensiamo tanto agli strumenti quanto ai ragionamenti, può ben valere ciò che scriveva Wittgenstein (1971, p. 111): «La matematica è un *miscuglio variopinto* di tecniche di prova». Per lo stesso motivo, ci appare sostanzialmente opaca ogni pretesa a una via o a un metodo "naturale" per l'apprendimento matematico: qualsiasi accesso ai costrutti matematici, comunque li si voglia guardare nella loro essenza, è fatto di mediazioni culturali.

34. Come osservano Passoni e Lorenzoni (2019, p. 11): «è necessario ripensare alla cultura e alle competenze di noi insegnanti, e, insieme, alla capacità critica che siamo in grado di sviluppare riguardo alla cultura di cui facciamo parte e in cui siamo immersi».

ma in un rapporto di cooperazione, e ha bisogno dell'apporto del gruppo. I modi di essere sono molteplici, ed è la molteplicità e diversità degli sguardi che ci consente di vedere le cose.

Non si può ignorare del resto il fatto che proprio un'esperienza comunitaria di qualche tipo è qualcosa di sempre più raro nelle vite dei bambini fuori dalla scuola. La bellezza del piano di lavoro, collocato nella visione più ampia che abbiamo cercato di suggerire, è quella di offrire una situazione cooperativa e collettiva che *coincide* con l'opportunità individuale di indirizzare sé stessi in piena *libertà*.

In conclusione, è doverosa una considerazione sul piano di lavoro matematico *oltre* la scuola primaria. Questa è stata tradizionalmente il campo d'elezione nella storia della proposta di pratiche educative più innovative; e, per quanto il laboratorio rientri pienamente nelle strategie proposte dalle varie indicazioni per la scuola secondaria, non si può nascondere, nella nostra esperienza di insegnanti rispettivamente della scuola primaria e secondaria di secondo grado,³⁵ l'impressione di uno scarto profondo fra la pratica didattica globalmente praticabile nella scuola primaria e lo scenario che si presenta dopo. In parte ciò è dovuto a un fatto culturale, in parte alle difficoltà notevoli che si ritrovano, per esempio nella scuola secondaria di secondo grado, nel formulare una proposta didattica ispirata alla stessa sensibilità in cui le tante istanze in gioco in quell'ordine di scuola si combinino in modo coerente.

Ma se si guarda alla situazione tipica delle competenze matematiche nella scuola secondaria di secondo grado, in cui ci si trova spesso di fronte a una spaccatura critica nelle classi (in particolare negli indirizzi non scientifici) fra un insieme di ragazzi capaci di padroneggiare anche solo a un livello base il linguaggio astratto della matematica e un altro, a volte maggioritario, che non è in grado di farlo, lo strumento laboratoriale del piano di lavoro può forse costituire una prospettiva promettente. Il vantaggio di questa pratica è infatti quello di rendere possibile il lavoro su più livelli, anche ripartendo dalle competenze di base; e soprattutto si volge a quell'*autonomia* nei confronti degli oggetti culturali che spesso scompare dall'orizzonte dell'esperienza dei ragazzi.

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., Robutti, O., & Statale, L. S. (Eds.). (2003). *La matematica per il cittadino. Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. Ciclo secondario*. <https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf>

Bateson, G. (1976). *Verso un'ecologia della mente*. Adelphi.

Castelnuovo, E. (2008). *L'officina matematica. Ragionare con i materiali*. La Meridiana.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1–42.

Dehaene, S. (2010). *Il pallino della matematica*. Raffaello Cortina.

Di Ianni, R. (2020). *Neuroscienze e apprendimento. Implicazioni per l'educazione matematica*. Tesi di laurea in Scienze della Formazione Primaria, Università di Firenze.

Di Martino, P., & Gregorio, F. (2019). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 825–843. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y>

³⁵ La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

- Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2020). *Problemi per crescere. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.
- Freinet, C. (2002). *La scuola del fare*. Edizioni Junior.
- Giffon, C., & Boston, P. (2018). *Misuriamo il mondo. Confrontiamo ciò che ci circonda*. IdeeAli.
- Goffman, E. (1974). *Frame analysis. An essay on the organization of experience*. Harper & Row.
- Ingold, T. (2019). *Antropologia come educazione*. La linea.
- Lorenzoni, F. (2014). *I bambini pensano in grande. Cronaca di un'avventura pedagogica*. Sellerio.
- Lucangeli, D. (2019). *Cinque lezioni leggere sull'emozione di apprendere. Guida alla costruzione di attività creative e sfidanti per la scuola primaria e secondaria*. Erickson.
- Lucangeli, D., Iannitti, A., & Vettore, M. (2007). *Lo sviluppo dell'intelligenza numerica*. Carocci.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola d'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero speciale*. Le Monnier.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2020). *Linee guida per la formulazione dei giudizi descrittivi nella valutazione periodica e finale della scuola primaria*. <https://www.istruzione.it/valutazione-scuola-primaria/allegati/Linee%20Guida.pdf>
- Navarra, G. (2022). *Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante*. Utet Università.
- Passoni, R., & Lorenzoni, F. (2019). *Cinque passi per una scuola inclusiva. Trasformare la didattica con una formazione dal basso*. Erickson.
- Sbaragli, S. (2021). *Linee guida MaMa: matematica per la scuola elementare – Numeri e calcolo*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. <https://mama.edu.ti.ch/wp-content/uploads/2021/11/2021-Guida-MaMa-Numeri-e-calcolo.pdf>
- Sbaragli, S., Crivelli, L., Di Domenico, A., Mina, C., Panero, M., Poretti, C., & Treppiedi, M. (2021). *MaMa: matematica per la scuola elementare*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport.
- Winnicott, D. W. (2005). *Playing and Reality*. Routledge.
- Wittgenstein, L. (1971). *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*. Einaudi.