

PiGame 2023: una *escape room* matematica

PiGame 2023: a mathematical escape room

Caterina Bassi, Domenico Brunetto, Nicolò Cangiotti e Francesco Nappo¹

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano – Italia

✉ caterina.bassi@polimi.it, domenico.brunetto@polimi.it, nicolo.cangiotti@polimi.it,
francesco.nappo@polimi.it

Sunto / Questo articolo presenta una recente esperienza didattica rivolta a studenti delle scuole secondarie di primo e secondo grado italiane tramite la costruzione di una *escape room* virtuale. Tale esperienza ha coinvolto oltre 50 scuole e 1500 studenti nell'occasione del Pi Day 2023, la Giornata Internazionale della Matematica. L'articolo si concentra sull'idea progettuale dei problemi matematici presentati e sulle modalità di realizzazione di un contesto virtuale che riproduce fedelmente l'esperienza di gioco *escape room*.

Parole chiave: risoluzione di problemi; analogia; metodologie emergenti; apprendimento da remoto; escape room.

Abstract / This article presents a didactic experience aimed at lower and upper secondary school students in Italy through the construction of a virtual escape room. The experience involved more than 50 schools and 1500 students on Pi Day 2023, the International Day of Mathematics. The article elaborates on the inspiration for the mathematical problems presented and on the development of a virtual context that can emulate the experience of an actual escape room game.

Keywords: problem solving; analogy; emerging methodologies; distance learning; escape room.

© 2024 Bassi Caterina, Brunetto Domenico, Cangiotti Nicolò e Nappo Francesco. Questo è un articolo Open Access, sottoposto a un processo di revisione tra pari a doppio cieco, pubblicato dal [Centro competenze didattica della matematica](#) e dal Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione del [DFA/ASP-SUPSI](#) in collaborazione con il [DECS](#). L'articolo è distribuito sotto i termini della [Licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale \(CC BY 4.0\)](#) che permette di usare, condividere e modificare l'articolo su qualsiasi mezzo a patto che l'autore e la fonte originale siano citati.

1. Gli autori hanno contribuito in egual misura all'esperienza didattica e alla stesura di questo articolo.

1 Introduzione

Ogni anno il Pi Day, la Giornata Internazionale della Matematica, è un'occasione per celebrare la disciplina della matematica. Nel rivolgerci alle scuole secondarie di primo e di secondo grado¹ di tutta Italia, abbiamo pensato a un gioco che potesse allo stesso tempo coinvolgere gli studenti e, se possibile, ispirare gli insegnanti. Il gioco, basato sull'idea di *escape room*, consisteva nella risoluzione di una serie di problemi e nell'identificazione di una chiave per uscire da una stanza (nel nostro caso metaforica) entro un'ora.² L'*escape room* è una modalità didattica che si può inquadrare all'interno dei "*serious games*", attività ludiche progettate a scopo didattico, ma non solo, di intrattenimento (Fuentes-Cabrera et al., 2020). In un *serious game*, i giocatori «coltivano la loro conoscenza ed esercitano le proprie competenze affrontando numerosi ostacoli durante le fasi di gioco» (Zhonggen, 2019, p. 1, traduzione degli autori). L'attività ha coinvolto oltre 50 scuole e 1500 studenti di scuole di tutta Italia, dalla provincia di Bolzano a quella di Catania. Ciascuna classe ha ricevuto telematicamente, nel giorno del Pi Day 2023, i problemi matematici calibrati a seconda del grado di istruzione e il regolamento con le istruzioni per lo svolgimento. Ai docenti referenti è stata data la possibilità di assistere gli studenti nella risoluzione dei problemi, in particolare nella lettura e interpretazione della cornice narrativa del gioco e dei singoli quesiti. Essi erano inoltre autorizzati a utilizzare lo strumento della chat per porre, per conto degli studenti, domande di chiarimento agli organizzatori. A tutti i docenti coinvolti è stato chiesto di non sostituirsi agli studenti nella risoluzione dei problemi matematici, affidando a loro anche il compito di verificare che il regolamento del gioco fosse osservato. Al termine del gioco, è stato offerto agli studenti un seminario sul ruolo degli strumenti matematici nella risoluzione di problemi ingegneristici (in particolare, nella costruzione di lander lunari). Le classi che avevano risolto i problemi e fornito la chiave nel minor tempo sono poi state premiate. L'evento si è chiuso con l'invito ai docenti a discutere in classe i problemi affrontati nell'attività e a contattarci via email per assistenza nel decodificare il ruolo dei materiali forniti (si veda il par. 3). Il presente articolo si soffermerà su:

- i. gli obiettivi didattici che hanno motivato la scelta della modalità di gioco e la costruzione dei problemi matematici proposti;
- ii. la modalità di realizzazione di un contesto virtuale che possa emulare, a basso costo e con strumenti facilmente accessibili, l'esperienza di una *escape room* fisica. Il nostro obiettivo nel condividere principi e implementazione è di promuovere un uso creativo di strategie di insegnamento relative alla risoluzione di problemi.

Euristicamente, distinguiamo la risoluzione di *problemi* dallo svolgimento di *esercizi*: nel primo caso è richiesto uno sforzo di concettualizzazione del problema, di invenzione di strategia risolutiva, e di analisi della soluzione ottenuta; nel secondo caso la concettualizzazione del quesito e la strategia di svolgimento sono già date dal docente tramite istruzioni esplicite e/o la risoluzione di esercizi del tutto analoghi (D'Amore, 2014; Di Martino & Zan, 2019). Come sarà spiegato nel corso della discussione, il gioco matematico da noi ideato puntava a offrire un'esperienza stimolante nell'ambito della risoluzione di problemi, in particolare quando introdotti in modo verbale – i cosiddetti *word problems* (Greer et al., 2002). I materiali forniti suggerivano inoltre, senza imporle, strategie di risoluzione basate su analogie e modelli, cioè sfruttando somiglianze con domini noti o con problemi di più facile risoluzione (Gick & Holyoak, 1980; Polya, 2004). Alcuni esempi notevoli di materiali per favorire un approccio

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

2. Una descrizione più esaustiva dell'iniziativa, corredata da tutti i materiali utilizzati (scaricabili gratuitamente), è disponibile al sito: <http://tiny.cc/escapefrommathland23>.

per analogie alla risoluzione di problemi matematici saranno presentati nel corso della descrizione dell'esperienza didattica (par. 4).

L'articolo è strutturato come segue. Nel par. 2 ci occuperemo del quadro entro il quale abbiamo concepito l'attività didattica e in particolare del "paradosso dell'apprendimento" che ci ha portato a ideare una *escape room* virtuale. Nel par. 3 esporremo le ragioni pedagogiche e le modalità di implementazione di un gioco online che emuli l'esperienza di *escape room*. Nel par. 4 presenteremo alcuni esempi di problemi tratti dall'attività, sottolineando il ruolo di modelli e analogie nelle strategie di risoluzione, e chiarendo anche come uno stesso problema possa essere calibrato in difficoltà per gradi di istruzione diversi. Infine, nel par. 5 concluderemo con una discussione dei risultati ottenuti dagli studenti e una selezione dei commenti degli insegnanti.

2 Motivazione

Le competenze nella risoluzione di problemi sono uno degli obiettivi principali dell'educazione matematica e più in generale scolastica (McKeough et al., 1995; Stavy & Tirosh, 2001). Tuttavia, come è noto, lavorare con gli studenti affinché sviluppino tali competenze è tanto importante quanto difficile (Blum & Leiss, 2007). I principali ostacoli sono l'identificazione di strategie di risoluzione, la loro implementazione in autonomia, e la valutazione critica dei risultati ottenuti (Niss & Blum, 2020), senza dimenticare quelli relativi alla comprensione del testo (Sbaragli, 2019; Zan, 2016). Sotto molti aspetti, lo sviluppo delle competenze di risoluzione di problemi rappresenta un esempio classico di quello che Berieter (1985) chiama il "paradosso dell'apprendimento", una versione di quello che in filosofia è più comunemente noto come il paradosso di Menone. Come scrive Berieter (1985), il nodo cruciale del paradosso consiste in questo argomento: «se si prova a spiegare l'apprendimento tramite azioni mentali che lo studente compie, è necessario attribuire allo studente una struttura cognitiva di partenza che è tanto avanzata o complessa quanto quella che si vuole sia appresa» (p. 202, traduzione degli autori). Ne sembra seguire la conclusione paradossale che un vero apprendimento da parte dello studente sia di fatto impossibile. Se ci soffermiamo sull'aspetto dell'identificazione di una strategia di risoluzione, l'esperienza pratica dei docenti conferma le difficoltà appena menzionate. Da un lato, gli studenti hanno spesso difficoltà a identificare una strategia risolutiva anche quando essa viene suggerita dal docente tramite problemi familiari o analogie con domini noti. Ad esempio, nel descrivere un tentativo fallimentare di sviluppare strategie di risoluzione di problemi aritmetici di scuola elementare per analogia con le operazioni sui regoli, Holt (1982) scrive: «Bill e io [...] vedevamo una forte connessione tra il mondo dei regoli e i numeri. Per questo motivo abbiamo semplicemente dato per scontato che i bambini, guardando ai regoli, potessero percepire immediatamente come funziona il mondo dei numeri» (pp. 138–139, traduzione degli autori). Il messaggio è che le connessioni tra problemi diversi suggerite da un docente possono non essere notate o percepite dagli studenti (come già discusso nella classica trattazione degli stili di apprendimento di Kolb, 1984). Lo stesso ostacolo è discusso in studi più recenti in didattica della matematica, in particolare riguardo allo sviluppo di competenze di risoluzione tramite modelli familiari ed esempi noti (Clement, 2000; Vamvakoussi, 2017).

Dall'altro lato spesso accade che la strategia di risoluzione di un problema venga esibita dal docente nel corso di un'attività didattica. In questo caso è l'altra faccia del paradosso dell'apprendimento a presentarsi in tutta la sua forza. Se è compito del docente esibire la strategia di risoluzione, l'implementazione da parte dello studente della strategia appena esibita non implica necessariamente una profonda comprensione della strategia. Come scrive Brousseau (1984): «più sono esplicito sul comportamento che voglio che i miei studenti esibiscano, più è probabile che gli studenti esibiscano quel comportamento senza ricorso alla comprensione che il comportamento normalmente indica» (p. 7,

traduzione degli autori). In altre parole, il problema è che un tale approccio rischia di limitare il lavoro dello studente a un uso meramente riproduttivo di strategie risolutive viste in precedenza. È evidente che lo studente che si limita a seguire l'insegnante o a ripetere i suoi comportamenti, senza riflettere sugli aspetti rilevanti del problema e senza analizzare le conclusioni suggerite dalla strategia di risoluzione, non sta imparando a risolvere problemi (Sbaragli et al., 2009).

Prima di acquisire un atteggiamento troppo negativo, è importante ricordare alcune delle ragioni che portano i docenti di matematica a tentare di indurre lo sviluppo di competenze di risoluzione dei problemi. Innanzitutto, poiché la matematica è una disciplina che ha tra le sue caratteristiche la possibilità di lavorare su rappresentazioni diverse dello stesso oggetto o concetto, essa è in una situazione privilegiata per tentare di sviluppare negli studenti una capacità di riconcepire un problema inizialmente complesso come un problema di un altro tipo (Polya, 1954). Le competenze nello sviluppo di strategie di risoluzione tramite riduzione di problemi complessi a problemi più semplici e dell'ignoto e inusuale a ciò che è più noto o familiare sono considerate essenziali per sviluppare l'autonomia intellettuale e le competenze di cittadinanza degli studenti (Zan, 2007). In secondo luogo, puntare l'attenzione sulla risoluzione dei problemi nella pratica didattica è utile anche a presentare la matematica come un ambito del sapere creativo e non meramente nozionistico o procedurale. Trasmettere l'idea di una disciplina nella quale la creatività e l'immaginazione nell'identificazione di strategie risolutive occupano un ruolo centrale è considerato uno strumento valido per sviluppare un maggiore apprezzamento della matematica e della sua storia negli studenti (Behnamnia et al., 2020; Dele-Ajayi et al., 2019; Gil-Doménech & Berbegal-Mirabent, 2019). La modalità di *escape room* a cui ci siamo rivolti nel progettare la nostra attività didattica non è stata concepita solo come un modo per attirare un pubblico di studenti a un gioco matematico, ma assume per noi un'importante funzione didattica, mirata al superamento delle difficoltà appena esposte. La nostra proposta mira, in particolare, a costruire un contesto specifico per fare esperienza nella risoluzione di problemi, lavorando quindi allo stesso tempo sugli aspetti motivazionali e su quelli cognitivi. In particolare, abbiamo selezionato la modalità *escape room* perché caratterizzata da tre aspetti:

1. l'aspetto ludico, che può rendere possibile un coinvolgimento attivo degli studenti e facilita l'assunzione di un atteggiamento e un umore positivo verso la risoluzione di problemi (Zhonggen et al., 2019);
2. l'aspetto del lavoro di gruppo, nel quale sono possibili forme di cooperazione e di revisione tra pari nell'individuazione di strategie di risoluzione e nella valutazione dei risultati ottenuti;
3. l'aspetto della narrazione, che ha consentito di giustificare naturalmente l'uso di enigmi in modalità verbale, così come l'uso di suggerimenti e insidie comuni in giochi di questo tipo, tramite materiali appositi (par. 3).

La nostra congettura è stata che, in un contesto adeguatamente costruito sia negli aspetti emotivo-motivazionali che in quelli cognitivi, gli studenti fossero più naturalmente portati a lavorare sui problemi in maniera indipendente, senza ripetere comportamenti già visti, e a fare esperienza di un uso produttivo delle proprie risorse cognitive e motivazionali nella risoluzione di problemi. Tale congettura è ben supportata da recenti studi sull'uso di *escape room* con finalità educative (Botturi & Babazadeh, 2020; Fotaris & Mastoras, 2022).

È importante sottolineare come alcuni degli elementi che hanno reso l'attività proposta particolarmente motivante per gli studenti, come la sfida a tempo (relativamente breve) e la partecipazione contemporanea di un grande numero di classi, si siano rivelati al contempo una limitazione alla completa realizzazione dell'attività come proposta didattica. Come suggerito dalla letteratura recente, i processi di risoluzione dei problemi durante attività a tempo limitato, come nel caso della nostra *escape room*, spesso non si conformano alle modalità suggerite dalla narrazione o dagli indizi (Veldkamp et al., 2020). Perché l'attività possa prefiggersi di raggiungere un obiettivo didattico e non soltanto ludico, è quindi opportuno programmare dei momenti di *debriefing*, nei quali il docente può ritornare

sui problemi proposti e discutere con maggiore calma sulle rispettive strategie di risoluzione suggerite (Botturi & Babazadeh, 2020; Fotaris & Mastoras, 2022). Nel nostro caso, l'interazione a distanza con un gran numero di studenti di diversi indirizzi e gradi di istruzione ha impedito lo svolgimento da parte nostra di attività di discussione, riflessione, e rielaborazione successiva. Il *debriefing* è stato delegato ai docenti coinvolti, i quali hanno avuto la possibilità di usufruire della nostra assistenza a distanza e dei materiali forniti durante la prova (si veda il par. 3) per progettare delle attività "su misura" per i loro studenti. Per quanto non ci sia dato sapere il contenuto specifico di tali attività, dalla corrispondenza con i docenti referenti è emerso il vivo interesse ai problemi matematici degli studenti coinvolti anche diverse settimane dopo l'evento.

È evidente in ogni caso che, perché si possa discutere di efficacia della nostra proposta rispetto agli obiettivi intesi, quest'ultima vada calata all'interno di un percorso didattico più ampio, ad esempio focalizzato sul ruolo dei modelli nella risoluzione di problemi. Una sperimentazione in questo senso è in corso in alcune delle scuole partecipanti. Tuttavia, una trattazione esaustiva di tali azioni e dei loro esiti esula dal tema di questo articolo, incentrato sui principi di costruzione dell'esperienza di gioco e dei quesiti che la compongono.

Dal momento che la costruzione del contesto assume un ruolo centrale nella nostra proposta, nella prossima sezione ci soffermeremo sulle modalità di realizzazione della situazione di *escape room* in modalità online, per poi passare nel par. 4 alla selezione dei problemi matematici proposti.

3 L'esperienza di *escape room*

Poiché l'esperienza didattica prevedeva la partecipazione di circa 1500 studenti, provenienti da scuole secondarie di primo e secondo grado di tutta Italia, abbiamo progettato una *escape room* di tipo digitale. Prima dell'inizio del gioco, le classi partecipanti sono state divise in tre sessioni Zoom parallele in base al loro grado scolastico: scuola secondaria di primo grado, biennio della scuola secondaria di secondo grado, triennio della scuola secondaria di secondo grado. Il giorno precedente allo svolgimento dell'attività, un kit di materiali aggiuntivi, contenenti alcuni indizi utili allo svolgimento del gioco, è stato inviato in formato PDF ai docenti referenti, in modo che potessero stamparli in anticipo. Tale organizzazione è stata pensata per permettere agli studenti coinvolti di partecipare al gioco restando nelle loro classi. L'inizio del gioco è stato sancito con l'invio, tramite lo strumento chat di Zoom, di un file PDF e del link a un modulo Microsoft Form tramite il quale inviare le risposte. Sia il file PDF che il modulo Microsoft Form contenevano la descrizione del regolamento del gioco, il prologo (un breve testo per la contestualizzazione del gioco) e i testi di tutti gli enigmi. Alle classi è stata messa a disposizione un'ora per la risoluzione degli enigmi e l'identificazione della chiave d'uscita. Durante la prova non è stato consentito l'utilizzo di device connessi a Internet.

Gli elementi dell'*escape room* sono stati progettati con lo scopo di essere coerenti l'uno con l'altro e allo stesso tempo fedeli agli obiettivi didattici della proposta. Di seguito presentiamo la proposta seguendo lo schema di progettazione dello "Star Model" di Botturi e Babazadeh (2020). Quest'ultimo divide gli elementi rilevanti in *trama*, *gameflow*, *enigmi*, *materiali* e *apprendimento prospettato*.

3.1 Trama

La trama scelta per l'*escape room* permetteva a ciascuna classe partecipante di identificarsi con la classe protagonista del gioco, ovvero gli studenti del matematico Tullio Levi Civita. Grazie al prologo, infatti, i partecipanti viaggiano nel tempo sino ai primi del '900 e si trasformano negli studenti del famoso matematico il quale, alla fine di una lunga giornata di lezione, dopo essersi addormentato con la testa sulla cattedra, trasporta nel proprio sogno anche gli studenti. I partecipanti si ritrovano

così al centro di una strana sfera, ognuna delle quali intitolata a un(a) famoso(a) matematico(a) e contenente un enigma da risolvere. È quindi la voce dello stesso professore ad annunciare ai partecipanti che il luogo in cui si trovano è la sua mente: un “garbuglio geometrico”, una trappola onirica invasa da problemi matematici che esigono una risoluzione per trovare la chiave che consente di uscire dal sogno. Il matematico chiede aiuto ai suoi studenti per risolvere gli enigmi e fornisce loro uno schema bidimensionale della sfera onirica, rappresentato in Figura 1. La rappresentazione bidimensionale è un primo indizio fornito ai partecipanti: tra le altre cose, è possibile intuire da essa che gli enigmi contenuti nelle stanze “Fermat” e “Ipazia” sono collegati.

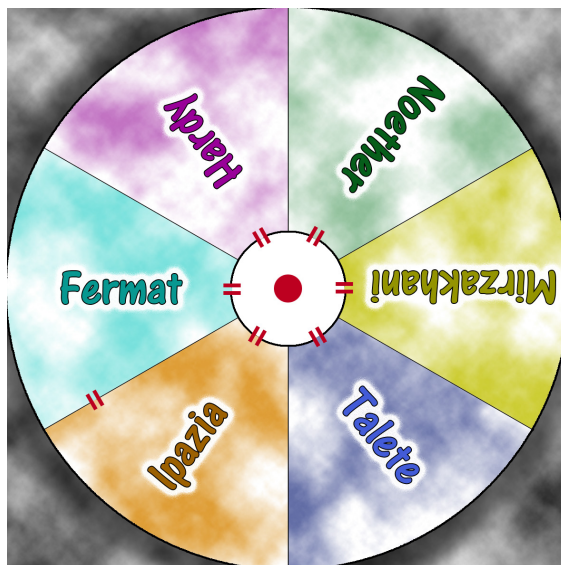


Figura 1. Schema bidimensionale della sfera onirica.

La scelta di un tema onirico per l'*escape room* ha permesso, come evidenziato in Fotaris e Mastoras (2022), di sfruttare il potenziale che i temi fantasiosi hanno nel favorire il pensiero creativo nello svolgimento di compiti non routinari. Inoltre, esso ci ha consentito una certa libertà nella presentazione narrativa degli enigmi nelle varie stanze e nella strutturazione dei loro collegamenti.

3.2 Gameflow

Per quanto riguarda il *gameflow*, abbiamo scelto quello di tipo aperto, per il quale gli enigmi vengono resi disponibili ai partecipanti nello stesso momento e i loro risultati vengono utilizzati per risolvere l'enigma finale. La scelta di questo particolare tipo di *gameflow* è stata dettata dal numero stimato di studenti di ciascuna delle classi partecipanti, che rendeva importante che gli studenti si dividessero in gruppi per permettere loro un maggiore coinvolgimento nell'attività. Il *gameflow* di tipo aperto permette infatti facilmente ai gruppi di lavorare contemporaneamente su diversi enigmi.

In Figura 2 riportiamo l'enigma finale che richiedeva agli studenti di ricombinare le soluzioni dei sei enigmi precedenti per trovare la chiave di uscita. È stato richiesto agli studenti di inserire nel Microsoft Form fornito all'inizio dell'esperienza sia la soluzione per ciascuna stanza (un numero) che la chiave alfabetica di uscita (una parola di senso compiuto, ottenibile tramite la “codifica” dei numeri risultanti da determinate operazioni sulle soluzioni delle singole stanze in lettere dell'alfabeto italiano; si veda la Figura 2). In questo modo, è stato anche possibile misurare tanto il tempo di risoluzione totale quanto il numero dei problemi matematici effettivamente risolti da ciascuna classe (par. 5).

Centro Pigreco

Se chiave vuoi la, tabella interpretare la dovrai!

F	$S \times 2 + 2 =$		
H	$N + N + D =$		
I	$4^{\text{da}} =$		
M	$S^3 - 3 =$		
N	$da + u =$		
T	$S : 108 =$		

Figura 2. Enigma finale (versione per il triennio). Una delle chiavi di uscita era la parola "Eulero", che poteva essere ottenuta sostituendo opportunamente le soluzioni numeriche all'interno delle espressioni rappresentate in figura, successivamente traducendo i numeri ottenuti (tutti valori da 1 a 21) in lettere dell'alfabeto, e infine riordinando le lettere.

3.3 Enigmi

La selezione degli enigmi è avvenuta in piena coerenza con la scelta della modalità di gioco *escape room*. Potendo contare su un contesto privilegiato per proporre un'attività che fosse coinvolgente e motivante per gli studenti (Fotaris & Mastoras, 2022), abbiamo pensato a dei problemi che non fossero risolvibili applicando delle semplici procedure e allo stesso tempo non risultassero di eccessiva difficoltà, per continuare a tenere coinvolti gli studenti nel corso di tutte le fasi di gioco. Il livello di difficoltà è stato calibrato a seconda del grado di istruzione sulla base di precedenti esperienze e di quanto osservato nelle banche dati dei test INVALSI (www.gestinv.it). Nello specifico, abbiamo preparato due versioni del gioco, una (più facile) per le scuole secondarie di primo grado e per il primo biennio di scuole secondarie di secondo grado, e un'altra (più difficile) per gli ultimi tre anni di scuole secondarie di secondo grado.

In entrambi i casi, abbiamo pensato a degli enigmi che permettessero alle classi partecipanti di lavorare sullo sviluppo di competenze matematiche (Niss & Højgaard, 2019). L'accento posto sullo sviluppo di competenze, piuttosto che sulla riproduzione di procedure e sull'applicazione di conoscenze matematiche, oltre a essere in linea con le Indicazioni nazionali per i licei (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010) e le Linee guida per istituti tecnici e professionali, ha anche permesso una maggiore equità nello svolgimento della prova, data la grande varietà di tipologie di scuole secondarie di secondo grado che hanno partecipato all'attività. Alcuni esempi di enigmi verranno descritti in dettaglio nel par. 4.

3.4 I materiali

Gli indizi utili alla risoluzione dei problemi sono stati forniti grazie ai materiali aggiuntivi. A differenza degli enigmi, che sono stati forniti in forma narrativa, abbiamo pensato a degli indizi che fossero in sola forma grafica. Nel caso di alcuni quesiti, l'individuazione dei materiali di supporto era indispensabile per la risoluzione di un problema. Un esempio è il problema riportato di seguito:

Ti ritrovi circondato da forme chiuse di tutti i tipi. Ti raggiunge Ipazia D'Alessandria e ti chiede: «Quale di queste figure ha l'area uguale a un quattrocentesimo dell'area della faccia della spugna di Tarmef appena pescata (cioè prima di seccare)? Senza la risposta non possiamo andare avanti. Mi basta il numero!».

Il problema richiama gli studenti all'uso della **Figura 3**, contenuta nel kit di materiali aggiuntivi.

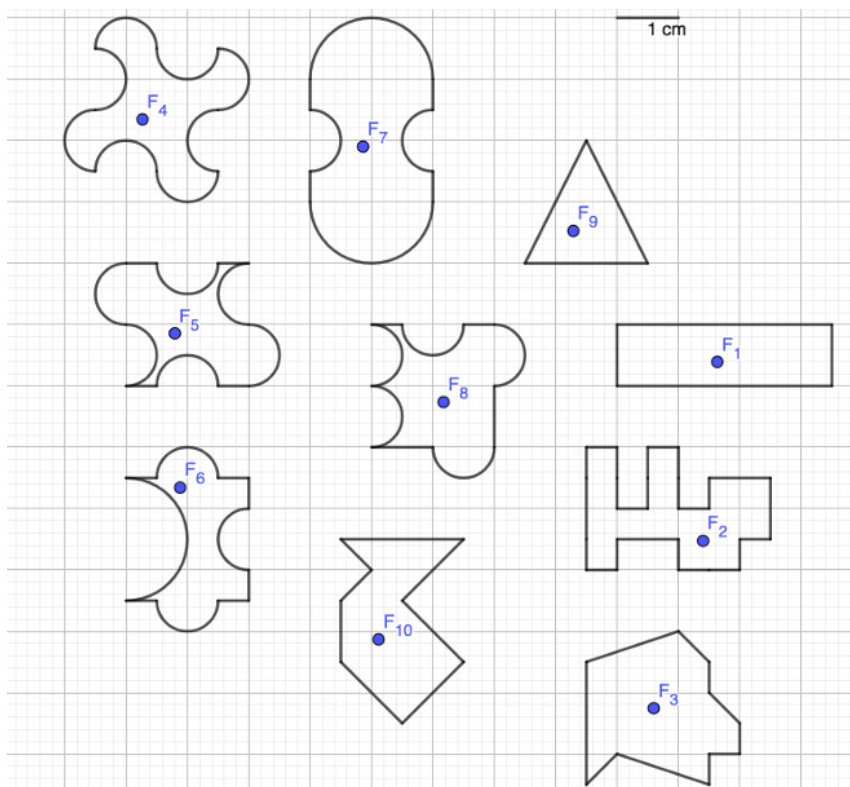


Figura 3. Materiale aggiuntivo utilizzabile per la risoluzione dell'enigma nella stanza "Ipazia" (Livello: scuola secondaria di primo grado).

È opportuno sottolineare qui che il dato mancante (l'area della faccia della spugna) è calcolabile a partire dai dati di un altro enigma. In altri casi, i materiali contenuti nel kit sono stati intesi come supporto per la risoluzione di un problema, suggerendo una strategia risolutiva particolarmente rapida, ma non risultano indispensabili. Un esempio di questo tipo sarà dato nel par. 4.2.

Una sfida aggiuntiva che si è voluta porre agli studenti è quella della corretta selezione dei materiali rilevanti e dell'esclusione dei materiali fuorvianti (*red herrings*) come in **Figura 4**. L'introduzione di *red herrings* ci ha permesso di mettere le classi nella condizione di lavorare sulla competenza di modellistica matematica (Niss & Højgaard, 2019), per lo sviluppo della quale la capacità di distinguere le informazioni rilevanti da quelle irrilevanti è una componente fondamentale (Maass, 2006). Come nella tradizionale esperienza di *escape room*, abbiamo immaginato che gli studenti producessero nel corso dell'attività argomenti diversi per l'utilizzo di alcuni indizi piuttosto che altri, e che tali argomenti venissero poi valutati e le conclusioni accettate o modificate nel corso delle discussioni (durante la prova o, più verosimilmente, nelle attività di *debriefing*).

Inoltre, una volta selezionati i materiali rilevanti, è ancora necessario identificare la strategia di risoluzione. Avendo imposto un tempo limitato per la risoluzione degli enigmi, l'utilizzo dello strumento dei materiali aggiuntivi tendeva a premiare, da un lato, la capacità di compiere "salti mentali" (Holyoak & Thagard, 1995) tra domini apparentemente distanti tra loro (come la forma di un cubo e di un suo particolare sviluppo bidimensionale; si veda il par. 4.2), dall'altro, la capacità di riflettere sulle soluzioni ottenute tramite l'applicazione dei modelli presenti negli indizi, con opportuna selezione dei modelli rilevanti ed esclusione di quelli fuorvianti.

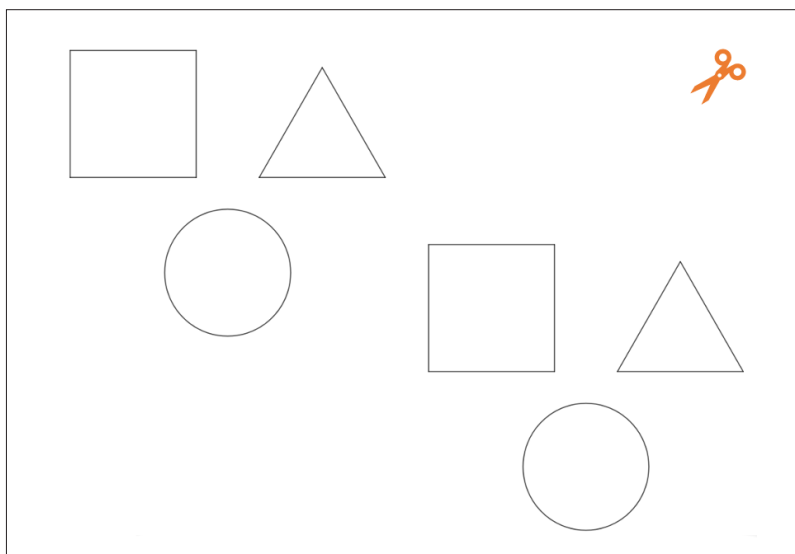


Figura 4. Esempio di materiale fuorviante presente in tutti i kit. Le figure geometriche proposte non hanno una particolare utilità per la corretta risoluzione degli enigmi.

Da notare, inoltre, che i materiali aggiuntivi sono stati pensati anche come base per la progettazione di attività di *debriefing* da parte dei docenti coinvolti, con o senza assistenza esterna.

3.5 L'apprendimento prospettato

L'apprendimento prospettato spazia dal consolidamento di specifiche conoscenze matematiche agli aspetti della confidenza nella risoluzione di problemi matematici. Qui ci soffermiamo su un aspetto della nostra proposta che ci sembra particolarmente rilevante e distintivo, cioè l'utilizzo combinato di problemi verbali e indizi grafici. Tale scelta è stata pensata per lavorare, da un lato, sulle competenze nella rappresentazione di problemi verbali in problemi matematici (tramite l'identificazione di una certa rappresentazione grafica come rilevante per un problema; si veda anche Duval, 2006) e dell'altro, sulla capacità di riflettere su inferenze suggerite da somiglianze con indizi grafici (tramite l'esame di gruppo delle soluzioni ottenute). Per utilizzare un'espressione di Fischbein (1987, 1992), il lavoro su problemi e indizi è stato pensato per permettere agli studenti di mettere alla prova (durante il gioco o nelle fasi di *debriefing*) i propri *modelli intuitivi*, cioè quelle iniziali associazioni e rappresentazioni di nozioni matematiche che «continuano ad influenzare, tacitamente, le interpretazioni e decisioni risolutive dell'allievo» (Fischbein, 1992, p. 26). Gli enigmi proposti offrivano agli studenti la possibilità di riflettere sia sui vantaggi che sui rischi dell'uso di tali modelli nella risoluzione di problemi (Sbaragli et al., 2009).

Nel suo tentativo di innescare durante le fasi di gioco strategie di risoluzione tramite modelli e analogie, cioè mediante un trasferimento ragionato di proprietà di problemi più semplici o di domini più familiari (Borgogna, 2023; Cangiotti & Nappo, 2023; Polya, 1954) la nostra proposta può essere distinta da un approccio comune nella letteratura recente, che consiste nell'arricchire il contesto di risoluzione di un problema tramite un intervento del docente volto a identificare un'analogia intermedia (*bridging analogy*). Nei loro studi sulla didattica della fisica, per esempio, Brown e Clement (1989) descrivono come gli studenti siano indotti a concepire correttamente il sistema di forze di un libro che poggia sul tavolo tramite un esempio intermedio (proposto dal docente) di un libro che poggia su un ripiano flessibile, che è a sua volta analogo al caso della molla su cui si esercita una pressione. In uno studio più recente, Vamvakoussi (2017) ha esteso l'uso di analogie intermedie per facilitare una corretta acquisizione della nozione matematica di densità, dove la retta dei numeri reali è paragonata dal docente a «una banda elastica che non si rompe mai» (p. 497, traduzione degli autori). Altri

studi influenti sostengono l'arricchimento diretto del contesto in cui operano gli studenti attraverso l'utilizzo di processi di «dissolvenza del concreto» (*concreteness fading*, Fyfe et al., 2014) innescati dal docente. Nel nostro caso, l'intervento del docente viene quasi interamente a mancare (almeno durante l'attività di gioco) ed è sostituito dall'aspetto motivazionale della modalità *escape room* e dalla presenza di materiali con indizi sia utili che fuorvianti. Per quanto i risultati positivi nella risoluzione degli enigmi ottenuti dalle classi partecipanti (riportati nel par. 5) possano suggerire la conclusione che la costruzione di un adeguato contesto emotivo-motivazionale e di adeguati materiali possano talvolta sostituire un intervento diretto del docente nell'innescare strategie risolutive di problemi matematici tramite modelli e analogie, l'impossibilità da parte nostra di osservare gli studenti nello svolgimento del gioco non ci consente di raggiungere questa importante conclusione. Rimandiamo pertanto l'esame dell'ipotesi appena menzionata a uno studio futuro.

Concludiamo questa sezione ricordando che, come anticipato nei paragrafi precedenti, l'attività di *debriefing* è stata demandata ai docenti coinvolti, eventualmente con il supporto dei materiali aggiuntivi e della nostra assistenza esterna. I docenti hanno potuto anche offrire una valutazione più accurata dello svolgimento della prova da parte dei loro studenti rispetto a quello che è stato offerto da noi tramite l'informazione del loro "punteggio" ufficiale e del tempo impiegato. Tutto ciò rientra coerentemente all'interno dell'obiettivo di offrire alle classi coinvolte un'attività di *stimolo* allo sviluppo delle competenze matematiche – più un punto di partenza che un punto di arrivo.

4 La selezione dei problemi

In questo paragrafo presentiamo tre esempi di problemi estratti dal gioco descritto poco fa. Tutti i problemi sotto illustrati sono rivolti agli studenti del triennio (terza, quarta, quinta) delle scuole secondarie di secondo grado. Per ogni problema riportiamo il testo, gli eventuali materiali di supporto alla soluzione contenuti nei materiali aggiuntivi, le possibili strategie risolutive e le competenze matematiche che il problema può contribuire a sviluppare.

4.1 Problema: una passeggiata sulle facce di una piramide

Il primo problema è di natura geometrica. Riportiamo di seguito il testo:

La luce è giallastra, l'aria è fastidiosa. Ci metti un momento per capire che sei nel bel mezzo di una tempesta di sabbia. Non hai più due gambe e due braccia ma otto zampe lunghe e pelose! Ti accorgi di esserti trasformato in un grosso ragno e ti trovi molto in alto, proprio nel baricentro di una delle facce laterali di una piramide regolare! Vicino a te trovi una pergamena. Nel vento riecheggia un suono, una voce: «Misura il percorso più breve che ti porta a toccare tutti i baricentri delle facce laterali e la tempesta cesserà». Qual è la sua lunghezza (approssimata al metro)?

Agli studenti è stato fornito del materiale aggiuntivo (presente nel kit di supporto): una pergamena con alcuni dati relativi alla piramide (Figura 5) e alcune immagini geometriche, tra le quali lo sviluppo bidimensionale della piramide (Figura 6). Notiamo che molti dei dati forniti non sono utili allo svolgimento del problema, ma concorrono a simulare un contesto reale e a testare la competenza degli studenti nel discernere le informazioni rilevanti da quelle superflue, permettendo loro di lavorare allo sviluppo della competenza di modellistica matematica (Niss & Højgaard, 2019).

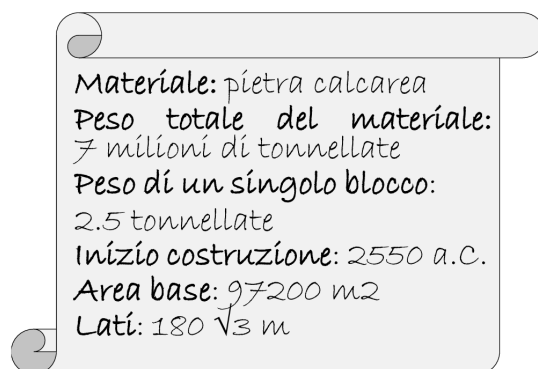


Figura 5. Pergamena fornita nel kit di supporto.

Una strategia di risoluzione del problema proposto si basa proprio sullo sviluppo bidimensionale della piramide di Figura 6. Infatti, grazie a questa visualizzazione il problema geometrico tridimensionale (muoversi tra le facce di una piramide) si riduce a un problema di più facile risoluzione: il calcolo della lunghezza di un percorso sul piano formato da più segmenti (le cui lunghezze sono deducibili dai dati forniti in pergamena e da alcune proprietà base dei triangoli equilateri).

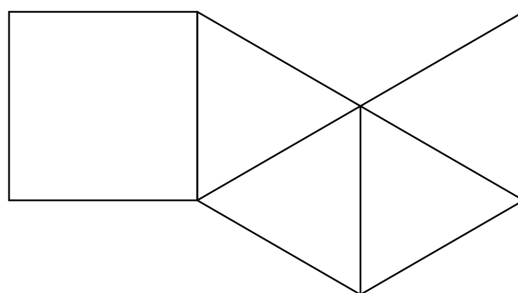


Figura 6. Sviluppo bidimensionale della piramide.

Considerando i baricentri delle facce laterali (come indicato nel testo), la risoluzione grafica del problema è quella rappresentata in Figura 7.

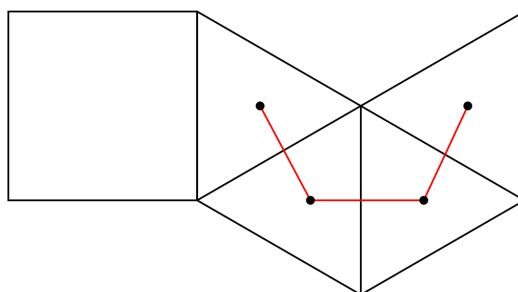


Figura 7. I tre segmenti rossi rappresentano il percorso più breve che congiunge i quattro baricentri delle facce laterali della piramide.

La soluzione delineata mostra come il problema proposto abbia il potenziale di aiutare gli studenti a lavorare sulla competenza di rappresentazione, in quanto coinvolge l'utilizzo di una rappresentazione bidimensionale di un problema tridimensionale. Come sottolineato in Niss e Højgaard (2019), il cam-

biamento di rappresentazione è raramente una trasformazione biettiva. Al contrario, può causare il guadagno o la perdita di informazioni. Nel problema qui considerato, in particolare, il passaggio da una rappresentazione tridimensionale a una bidimensionale, supportato dallo sviluppo bidimensionale fornito, può aggiungere informazioni funzionali alla risoluzione.

4.2 Problema: l'estrazione dei cubetti colorati

Il secondo problema si compone di una parte geometrica (più complessa) e di una parte probabilistica (più semplice). Il testo del problema è il seguente:

Un odore acre pervade il tuo olfatto. Il fumo di due camini accessi riempie quello che sembra essere un raffinato salotto. Inizi a intravedere delle sagome, prima un uomo al centro della stanza, poi una donna che parla con lui, ora due ragazzi seduti sul divano, e poi un gruppo di tre ragazze davanti a una scacchiera. Il fumo si dirada e ora distingui 5, 8, 13, 21 sagome. Alcuni giocano a dama, altri a scacchi, altri ancora a carte. Ti avvicini a un tavolo dove un uomo sta dipingendo le sei facce di un grande cubo di legno di colore verde. Ti fissa e ti passa un seghetto. «Dividilo in 216 cubetti» – dice l'uomo – «tutti uguali e precisi. Non sbagliare!». In un istante hai fatto, ma ti senti stanco come se avessi corso 33 giri di campo. L'uomo raccoglie i piccoli cubetti in un sacchetto di stoffa ed esclama: «Da questa stanza uscire potrai se la probabilità (in forma di frazione ridotta ai minimi termini) di pescare dal sacchetto un cubetto con esattamente due facce di colore verde indovinerai!». Mentre l'uomo parla ti guardi intorno e noti che sul tavolo ci sono anche altri oggetti e forme geometriche, tra cui una strana croce...

Le due parti di cui si compone l'enigma sono il conteggio dei cubetti che rispettano la caratteristica indicata nel testo (avere esattamente due facce colorate) e il rapporto del numero ottenuto con i cubetti totali (indicati nel testo: 216) per calcolare la probabilità come "casi favorevoli su casi possibili". Similmente al caso precedente, nel kit di supporto è possibile trovare (tra le varie figure geometriche fornite) uno sviluppo bidimensionale del cubo (Figura 8). Il suo utilizzo può condurre alla soluzione dell'enigma tramite la divisione in quadratini della figura bidimensionale e la sua ricomposizione manuale in forma di cubo. Come nel problema precedente, il materiale aggiuntivo introduce quindi un elemento di concretezza nell'individuazione della strategia di risoluzione. Inoltre, notiamo che anche in questo caso il testo dell'enigma è cosparso di dati superflui, contribuendo a testare anche la competenza di modellizzazione matematica degli studenti (Niss & Højgaard, 2019).

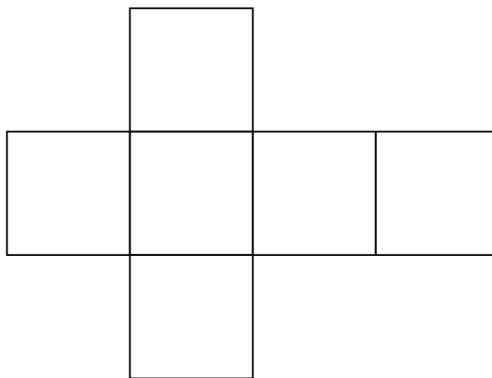


Figura 8. Uno sviluppo bidimensionale del cubo.

Per l'uso di una figura bidimensionale come indizio, il problema sopra descritto è simile al precedente.

Tuttavia, è bene evidenziare due importanti differenze:

- La connessione tra lo sviluppo bidimensionale e la figura tridimensionale appare in questo caso più debole e, pur offrendo una strategia risolutiva particolarmente rapida, può indurre in errore se utilizzata in modo inappropriato. È infatti vero che le uniche facce interessate alla colorazione sono quelle visualizzate nello sviluppo bidimensionale; tuttavia, alcuni lati necessitano dell'operazione di *identificazione* (ad esempio, i lati agli estremi sono esattamente lo stesso lato) per non contare lo stesso cubetto due volte.
- Il metodo appena esposto non è l'unica via per selezionare i cubetti utili alla soluzione né tanto meno la via più intuitiva di risoluzione. Una valida alternativa consiste nella ricostruzione del cubo (dopo averlo diviso tramite l'utilizzo del righello) e nel contare i cubetti con esattamente due facce colorate del cubo tridimensionale ottenuto tramite questa procedura (si veda la Figura 9). Inoltre, è possibile procedere alla soluzione anche solo numericamente.

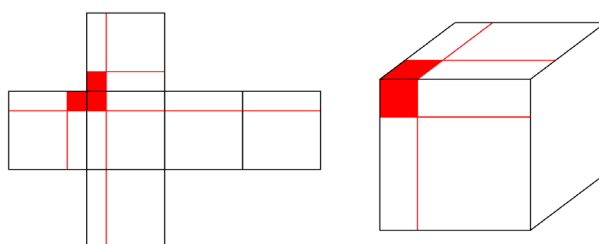


Figura 9. Ricostruzione del cubo dallo sviluppo bidimensionale alla versione tridimensionale.

Abbiamo immaginato in questo caso che, nel discutere in gruppo (durante la prova o nelle successive attività di *debriefing*) le varie strategie risolutive del quesito, gli studenti potessero lavorare sulle competenze relative alla gestione dei problemi matematici (Niss & Højgaard, 2019).

4.3 Problema: il mondo degli otto-dita

L'ultimo enigma del quale proponiamo la descrizione è di natura numerica. Il testo recita:

Che strana scuola è questa! Un buffo professore coi baffi a forma di 9 ti chiama alla lavagna. Dietro di te c'è scritto "DIVISIONE" e una tabella da completare:

654321	25	0
54321	17	1
4321	12	3
321	6	6
5362545	...	?

Ti guardi intorno per ricevere qualche suggerimento ma noti solo un curioso dettaglio: tutti hanno solo otto dita! Come faranno mai in questa scuola a contare e a dividere? Il buffo professore ti guarda con aria perplessa e ti interroga: «Che numero dovrò inserire nella casella in basso a destra?».

Nello spirito delle *escape room*, sono stati nascosti alcuni indizi nel testo. In particolare, per la risoluzione si riveleranno utili il numero "9" (la forma dei baffi del professore), la parola "otto" (relativa al numero delle dita degli alunni della scuola) e la parola "dividere" inserita nella domanda.

Le intestazioni della tabella inserita nel testo del problema sono rese esplicite nella Tabella 1.

<i>Numero (in base 8)</i>	<i>Somma delle cifre (in base 8)</i>	<i>Resto della divisione per 7 (in base 8)</i>
654321	25	0
54321	17	1
4321	12	3
321	6	6
5362545	...	?

Tabella 1. La corretta lettura della tabella: la prima colonna rappresenta dei numeri in base 8, la seconda colonna è la somma delle cifre del numero nella prima colonna in base 8 e la terza colonna è il resto della divisione per 7 in base 8 (il cui risultato è lo stesso se la divisione viene svolta rispetto al numero nella prima colonna o nella seconda, analogamente a come funziona la regola della divisione con resto per 9 in base 10).

Una volta interpretato il significato delle diverse colonne della tabella, il risultato (cioè il numero da inserire nella casella in basso a destra) segue immediatamente. Si presume infatti che comprendere il significato della tabella sia equivalente a capire la regola di divisione con resto per 7 in base 8. Quest'ultimo problema sfrutta l'analogia tra le regole di divisione in base 10 e base 8, rispettivamente per 9 e 7.³ Analogamente si può procedere in base 8 quando il divisore è 7 (notiamo che la somma delle cifre del dividendo può essere svolta in qualsiasi base e non necessariamente nella base di partenza, la qual cosa offre un ulteriore spunto di riflessione e di potenziale discussione collettiva).

Il problema appena descritto si propone di far sorgere negli studenti domande del tipo «Esiste uno schema che i numeri riportati in tabella soddisfano?», «Qual è lo schema sottostante?», offrendo un pretesto per lavorare in classe sulla competenza di pensiero matematico (Niss & Højgaard, 2019). Tale competenza coinvolge infatti la capacità di porre un particolare tipo di domande caratteristiche della matematica, come ad esempio: «Esiste...?», «Sotto quali condizioni?», «È possibile che...?».

5 Risultati

In questa sezione riassumiamo gli esiti dell'*escape room* sopra descritta, focalizzandoci solo su alcuni aspetti che abbiamo ritenuto interessanti. In totale hanno partecipato all'attività 61 classi di cui 16 delle "medie" (scuola secondaria di primo grado, grado 6-9), 27 del "biennio" (primi due anni della scuola secondaria di secondo grado, grado 10-11) e 18 del "triennio" (ultimi tre anni della scuola secondaria di secondo grado, grado 12-14). Come da regolamento, il punteggio è stato calcolato come segue. Il valore attribuito alla risoluzione di ciascun problema matematico è stato di 15 punti. Il valore attribuito all'inserimento della chiave alfabetica corretta è stato di 21 punti. Solo in caso di completamento corretto del gioco (cioè se tutte le risposte fornite erano corrette), sono stati attribuiti punti extra in base al tempo di consegna, con un incremento di 9 punti in caso di completamento tra 0 e 45 minuti, di 6 punti in caso di completamento tra 45 e 50 minuti, e di 3 punti in caso di completamento

³ Ricordiamo che, in base 10, per trovare il resto della divisione di un numero D per 9 è sufficiente trovare il resto della divisione per 9 del numero ottenuto sommando le cifre di D .

tra 50 e 55 minuti. Il punteggio massimo ottenibile in base al regolamento è quindi di 120 punti. La Tabella 2 riporta i punteggi delle classi premiate.

Vincitore	Punteggio	Tempo
Medie	120	41' 35"
Biennio	120	31' 06"
Triennio	90	60' 00"

Tabella 2. Punteggi e tempi delle classi premiate divisi per categoria.

Per completezza, proponiamo nella Tabella 3 il punteggio medio e il tempo medio impiegato a completare il gioco diviso per i tre livelli:

Tipo di classe	Punteggio medio	Tempo medio
Medie	64,7	42' 11"
Biennio	80,7	52' 57"
Triennio	40,8	55' 47"

Tabella 3. Medie dei punteggi e tempi delle classi partecipanti divise per categoria.

I risultati suggeriscono che il gioco si è rivelato di più facile soluzione per gli studenti del biennio delle scuole secondarie di secondo grado. Non sorprende che la stessa tipologia di problemi (e quindi lo stesso livello di difficoltà) si sia rivelata leggermente meno accessibile per gli studenti delle scuole secondario di primo grado. Un discorso a parte va invece fatto per il triennio: in questo caso la maggior parte dei problemi era differente (sia per conoscenze che per competenze) rispetto a medie e biennio. I dati suggeriscono che il livello di difficoltà incontrato al triennio sia stato decisamente più elevato rispetto al resto delle classi partecipanti. Non abbiamo sufficienti informazioni per fare ipotesi sulle cause della maggiore difficoltà incontrata al triennio.

In riferimento ai problemi presentati nel par. 4, un dato interessante è che solo il 17% delle classi partecipanti del triennio sia riuscito a risolvere il problema sulla passeggiata sulle facce della piramide, nonostante la presenza dello sviluppo bidimensionale della piramide nei materiali di supporto, segno che forse vi è una limitata familiarità con l'utilizzo di rappresentazioni bidimensionali di oggetti tridimensionali per la risoluzione di problemi. Nel problema dell'estrazione dei cubetti colorati, tuttavia, le percentuali di successo salgono in modo significativo: circa l'89% delle classi del triennio ha risposto correttamente al quesito. I dati raccolti non sono sufficienti a stabilire se la differenza negli esiti sia dovuta principalmente al fatto che il problema dell'estrazione dei cubetti colorati è risolvibile anche per sola via numerica, senza l'utilizzo dello sviluppo bidimensionale del cubo, o per altri motivi.

Infine, il 43% dei partecipanti del triennio ha fornito la corretta soluzione al problema sul mondo degli otto-dita. Quest'ultimo dato risulta interessante perché il tema affrontato nell'esercizio (l'aritmetica in basi diverse dalla base 10) non è spesso un argomento curriculare. Per questo motivo è interessante notare come una buona percentuale di classi (significativamente maggiore di quella del

problema della passeggiata sulle facce della piramide) sia riuscita a risolvere correttamente il quesito. In ogni caso, è importante sottolineare come le analisi dei risultati ottenuti, per quanto provenienti da un campione relativamente significativo di classi, restituiscano una visione estremamente parziale, che necessita di un'ulteriore indagine con l'osservazione diretta delle modalità di risoluzione più utilizzate dagli studenti. Più significativi sono invece i feedback ricevuti dai docenti in merito all'esperienza. Le testimonianze collezionate nei giorni successivi sono state generalmente positive, come mostrano i due seguenti esempi:

«Quanto all'attività, i ragazzi erano molto contenti di "utilizzare" la matematica in un contesto differente da quello tradizionale; hanno lavorato con entusiasmo e partecipazione» (docente del triennio).

«L'attività legata al PiGame è stata molto gradita. I ragazzi hanno lavorato con entusiasmo e la formula della Escape Room è stata vincente» (docente del biennio).

I commenti confermano l'impressione di un vivo interesse verso un'attività didattica non tradizionale focalizzata sulle competenze nella risoluzione di problemi. Infine, è importante sottolineare gli aspetti affettivi che emergono quando i docenti si riferiscono al lavoro dei propri studenti usando le parole "entusiasmo" e "partecipazione".

6 Conclusioni

In questo articolo abbiamo descritto una proposta di gioco matematico in modalità *escape room*. L'idea di presentare la nostra attività all'interno di un contesto di gioco si è rivelata uno dei punti di forza di questa iniziativa, come abbiamo potuto constatare dai commenti positivi rilasciati dagli insegnanti. Nella nostra proposta, le capacità di coordinare diversi registri semiotici (Duval, 2006) e di gestire problemi (Niss & Højgaard, 2019) apparentemente distanti tra loro è stata posta come prioritaria rispetto alla sola conoscenza dei teoremi e delle proprietà matematiche. I commenti ricevuti in seguito all'esperienza suggeriscono che integrare una modalità di apprendimento inusuale, basata su un gioco, possa fornire al docente non solo uno strumento utile per testare il livello di apprendimento delle competenze logico-matematiche, ma anche un supporto per sviluppare in modo autonomo competenze nella risoluzione di problemi. Nella nostra discussione abbiamo inoltre sottolineato il ruolo dello strumento narrativo e degli indizi (tipici dell'esperienza di *escape room*) per consentire agli studenti di esercitarsi nella rappresentazione di problemi matematici e nell'utilizzo ragionato di procedure di risoluzione tramite modelli e analogie. Ulteriori studi, tra cui esperienze effettuate in presenza, saranno utili a verificare l'efficacia della proposta combinazione di problemi in forma narrativa e indizi in forma grafica agli scopi didattici da noi intesi.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano tutte le scuole che hanno partecipato all'iniziativa PiGame2023 "Escape from MathLand" il 14 marzo 2023. In particolare, un ringraziamento va a tutti gli studenti e gli insegnanti che si sono messi in gioco e hanno contribuito all'ottima riuscita dell'evento. Inoltre, gli autori ringraziano Anna Rho e Laura Guarino che hanno offerto il loro supporto nell'organizzazione, progettazione e gestione dell'evento. Infine, gli autori ringraziano il progetto PLS – Matematica e il Laboratorio FDS del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano che hanno finanziato l'intera iniziativa e i due revisori anonimi del presente articolo, per i loro preziosi commenti.

Bibliografia

- Behnamnia, N., Kamsin, A., Ismail, M. A. B., & Hayati, A. (2020). The effective components of creativity in digital game-based learning among young children: a case study. *Children and Youth Services Review*, 116, 105227.
- Berieter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55, 201–226.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems?. In C. Haine, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, Engineering and Economics – ICTMA 12* (pp. 222–231). Elsevier.
- Borgogna, G. (2023). L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una classe di seconda media. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 13, 71–89.
- Botturi, L., & Babazadeh, M. (2020). Designing educational escape rooms: validating the Star Model. *International Journal of Serious Games*, 7(3), 41–75.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education* (pp. 110–119). University of Bielefeld.
- Brown, D. E., & Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: Abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*, 18(4), 237–261.
- Cangiotti, N., & Nappo, F. (2023). Reasoning by analogy in mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, 31(2), 176–215.
- Clement, J. (2000). Model based learning as a key research area for science education. *International Journal of Science Education*, 22(9), 1041–1053.
- D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. INDEX Editore.
- Dele-Ajayi, O., Strachan, R., Pickard, A., & Sanderson, J. (2019). Games for teaching mathematics in Nigeria: What happens to pupils' engagement and traditional classroom dynamics?. *IEEE Access*, 7, 53248–53261.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Giunti Scuola.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12(3), 306–355.
- Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). "The answer is really 4.5". Beliefs about word problems. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 271–292). Kluwer Academic Publishers.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Reidel.

- Fischbein, E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 25–38). Pitagora.
- Fotaris, P., & Mastoras, T. (2022). Room2Educ8: A Framework for Creating Educational Escape Rooms Based on Design Thinking Principles. *Education Sciences*, 12(11), 768.
- Fuentes-Cabrera, A., Parra-Gonzalez, M., Lopez-Belmonte, J., & Segura-Robles, A. (2020). Learning mathematics with emerging methodologies – the escape room as a case study. *Mathematics*, 8(9), 1586.
- Fyfe, E., McNeil, N., Son, J., & Goldstone, R. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: a systematic review. *Educational Psychology Review*, 26, 9–25.
- Gil-Doménech, D., & Berbegal-Mirabent, J. (2019). Stimulating students' engagement in mathematics courses in non-STEM academic programmes: A game-based learning. *Innovations in Education and Teaching International*, 56(1), 57–65.
- Holt, J. (1982). *How children fail*. Delta.
- Holyoak, K., & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: analogy in creative thought*. MIT Press.
- Kolb, D. (1984). *Experiential Learning as the Science of Learning and Development*. Prentice Hall.
- Maass, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 113–142.
- McKeough, A., Lupart, J., & Marini, A. (Eds.). (1995). *Teaching for transfer: Fostering generalization in learning*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali per i licei*. https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/decreto_indicazioni_nazionali.pdf
- Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modeling*. Routledge.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9–28.
- Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.
- Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (Vol. 85). Princeton University Press.
- Sbaragli, S. (2019). Il ruolo della comprensione del testo nella risoluzione di problemi. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica e professionalità docente* (pp. 47–50). Pitagora.
- Sbaragli, S., Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., & Ricci, M. (2009). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in ambito geometrico* (Matematica per gli insegnanti e la classe, Vol. 1). Armando Editore.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze? Alcune regole intuitive generano errori clamorosi*. Centro Studi Erickson.

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 49(4), 497–507.

Veldkamp, A., Grint, L., Knippels, M., & van Joolingen, W. (2020). Escape education: A systematic review on escape rooms in education. *Educational Research Review*, 31, 100364.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer-Verlag.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Carocci.

Zhonggen, Y. (2019). A meta-analysis of use of serious games in education over a decade. *International Journal of Computer Games Technology*, 4797032.