Doremat – La musica della matematica

Doremat – The music of mathematics

ESPERIENZA DIDATTICA

Rachele Vagni, Denise Lentini
Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica, Enfap, Italia

Sunto / I laboratori Doremat sono dedicati a scoprire la matematica che c'è nella musica e a suonare e ascoltare la "musica della matematica". Due scienze, solo apparentemente lontane, si uniscono in un intreccio disciplinare che vuole coinvolgere i ragazzi e renderli consapevoli del fatto che si può leggere la musica con occhi matematici.

Parole chiave: matematica; musica; motivazione; significato; cittadinanza.

Abstract / Doremat laboratories are aimed at discovering Mathematics in music and at playing and listening to the "music of Mathematics". These two branches of knowledge, just apparently distant, come together in an dialogue of disciplines. The objective is to engage students and let them experience how to read music through the eyes of Maths.

Keywords: Mathematics; music; motivation; meaning; citizenship.

1 Doremat: obiettivi educativi e aspetti didattici [1]

Doremat - La musica della matematica è un metodo di insegnamento-apprendimento della matematica attraverso la musica. Nasce da un'intuizione di Denise Lentini, dirigente di una scuola di Istruzione e Formazione Professionale, che vede nell'innovazione della didattica una risorsa per motivare i ragazzi all'apprendimento della matematica e che ha avviato una sperimentazione a partire dal 2007, coinvolgendo quasi 2000 allievi tra scuola media e scuola media superiore in tutta Italia. Tale metodo è nato per contrastare la dispersione scolastica, fenomeno spesso correlato alla demotivazione all'apprendimento e all'insuccesso scolastico. Doremat ha visto il proprio sviluppo attraverso un'attività di ricerca che ha permesso di ripercorrere e mettere in evidenza le analogie che intercorrono tra matematica e musica, compiendo un sistematico lavoro di declinazione in chiave musicale delle conoscenze e delle competenze matematiche dei curricula dalla scuola media fino alla terza classe della scuola media superiore. Ciò è stato reso possibile dalla stessa natura delle due discipline che usano simboli (pressoché) universali per esprimere dei significati e possiedono una comune matrice culturale. Da queste riflessioni, dallo studio delle analogie e delle differenze, dal successo riscontrato nell'esperienza e dal lavoro di ricerca e sperimentazione [2] è nato il metodo didattico che vede la sua naturale applicazione in ambito laboratoriale.

1. Per un approfondimento di questo metodo si veda Bianchi, Cuomo, Curti, Lentini, Magnani & Vagni (2015).
2. Per alcuni aspetti connessi alla ricerca e alla sperimentazione del metodo si possono consultare: DO.RE.MAT. (2014) e Bolondi, Vagni, Lentini (2014). Più in generale, è possibile consultare il sito http://www.doremat.it/.

Riteniamo opportuno chiarire i principali capisaldi concernenti le motivazioni educative che caratterizzano Doremat e proporre alcune osservazioni di natura didattica, al fine di una migliore comprensione di questa pratica didattica.

1.1 I capisaldi educativi

Se si considera il processo formativo di un individuo nell'arco della sua istruzione dalla scuola elementare alla scuola media superiore, la matematica è la sola materia scientifica che viene trattata con continuità. Pertanto, rappresenta un particolare paradosso: da un lato, è la materia considerata "difficile" per eccellenza e, come sottolineano alcune ricerche[3], l'insuccesso in tale disciplina è tra le cause della dispersione scolastica; dall'altro, è l'unica materia curriculare su cui l'allievo può progressivamente maturare un pensiero scientifico. Un pensiero scientifico che risulta fondamentale per la crescita consapevole dei giovani, poiché consolida l'atteggiamento del chiedersi il perché delle cose che, attraverso la matematizzazione e la modellizzazione, forma al sapere individuare ed esaminare quei legami complessi che caratterizzano le realtà, i diversi mondi che viviamo, le nostre società contemporanee. Anche l'educazione musicale, come afferma La Face Bianconi (2008, pp. 13-25), risulta una componente fondamentale dell'apprendimento:

> «[…] è disciplina essenziale alla formazione del cittadino, ossia a quel processo del formare/formarsi, dare/darsi forma che, com'è noto, è dinamico, autoregolativo, fatto di ristrutturazioni e aggiustamenti continui. In quanto disciplina, l'Educazione musicale chiede perciò che se ne definiscano lo statuto, i linguaggi, gli oggetti e i metodi, che se ne segnino i paradigmi di confine.»
>
> (La Face Bianconi, 2008, 14)

L'educazione musicale si connota quindi come una disciplina articolata, con un suo proprio modello disciplinare, e, soprattutto, in grado di fornire strumenti cognitivi e metacognitivi di interpretazione e comprensione. L'educazione musicale può configurarsi come quello strumento di risposta alle necessità evolutive del sistema educativo-formativo. Questo perché:

> «La musica è essenzialmente cultura, sapere reticolare, interdisciplinare, capace d'illuminare gli altri saperi, dai quali, a sua volta riceve continuamente luce.»
>
> (La Face Bianconi, 2008, p. 14)

Doremat, nel favorire lo sviluppo delle competenze matematiche, recupera l'orizzonte culturale della musica e persegue anche l'importante obiettivo di rimotivare i giovani allo studio. Quindi, è fondamentale sviluppare percorsi in grado di supportare i giovani esposti all'insuccesso scolastico, alle problematiche di socializzazione e considerati "deboli" sotto il profilo delle basi culturali.

3. In ISFOL (2012) si osserva che l'OCSE e la UE, nel monitoraggio della dispersione, prendono in considerazione come indicatore la qualità degli esiti scolastici, ovvero i punteggi medi dei quindicenni in matematica e lettura rilevati attraverso l'indagine campionaria PISA, oltre che il tasso di partecipazione scolastica o tasso di scolarità. Risultati forniti da PISA (2015), ma anche dall'Indagini IEA PIRLS e TIMSS (2011), mostrano che la performance degli studenti è correlata positivamente col loro background socio-economico.

Percorsi che li accompagnino nella costruzione del loro sistema di competenze, attitudini, motivazioni e capacità di apprendimento. La metodologa adottata da Doremat è il *laboratorio*:

> «Una scuola di laboratorio è un ambiente formativo che fa ricerca. Impegnato a qualificare e a innovare costantemente i propri percorsi di insegnamento-apprendimento attraverso modelli didattici a nuovo indirizzo [...] [Il laboratorio] accumula una doppia risorsa didattica. La prima è quella di offrirsi da spazio paradigmatico per imparare ad imparare (obiettivo metacognitivo); la seconda risorsa è quella di essere il luogo deputato a ricostruire, a re-inventare e, se necessario, a trasgredire le conoscenze facendo largo uso di codici immaginari, inusuali, originali (obiettivo fantacognitivo).»
>
> (Frabboni, 2009, p. 5)

Appare quindi evidente come il laboratorio, per le proprie intrinseche virtù, sia un ambiente in cui diventa possibile dare strumenti cognitivi, interpretativi e sociali ai giovani allievi, aiutando a ricostruirne un'identità – individuale e sociale – più matura e integrata in un contesto di cittadinanza consapevole. È proprio per questo motivo che il cuore del metodo Doremat è l'attività laboratoriale. Per loro stessa natura, inoltre, la matematica e la musica si connotano come discipline particolarmente adatte alla didattica laboratoriale.

Doremat prevede per ogni argomento matematico un vero e proprio laboratorio matematico-musicale, nel quale gli studenti ascoltano, apprendono, si esprimono, si esercitano e inventano. Il laboratorio è luogo di interazione, dove l'allievo può mettere alla prova sé stesso, le proprie capacità e il proprio modo di esperire la realtà.

1.2 L'intreccio delle discipline alla luce dei costrutti della didattica

Nell'ampio ambito dell'educazione permanente, della cittadinanza e della democrazia, ci si può (ci si deve) chiedere, se e in che misura i ragazzi che terminano l'istruzione obbligatoria abbiano acquisito le competenze essenziali per la loro vita futura, come cittadini responsabili. Ma cosa s'intende per competenza? In modo semplicistico, ma chiarificatore per ciò che concerne il discorso che andremo a sviluppare, potremmo affermare che le competenze sono dipendenti da quanto un ragazzo è in grado di trasferire nei diversi contesti in cui si troverà ad operare dell'insieme delle conoscenze e abilità apprese a scuola.

È l'OCSE-PISA che valuta a livello internazionale l'acquisizione di tali competenze e riconosce tra gli ambiti di competenza quella matematica (*mathematical literacy*).

L'indagine del 2012 ha avuto come focus la competenza in matematica e in problem solving. Queste competenze sono state riformulate, rispetto alle precedenti edizioni, nel seguente modo:

> «La *literacy* matematica è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere

> fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo»
> (OCSE-PISA, 2012, p. 25).

Evidenziamo l'enfasi posta sull'idea di competenza come capacità di mobilitare conoscenze e abilità e sviluppare atteggiamenti, nelle situazioni che lo studente incontrerà come cittadino. La visione della matematica che emerge non è ridotta alla pura esecuzione di procedure o calcoli, nella quale l'argomentazione è un esercizio logico fine a sé stesso o, peggio ancora, in cui si enunciano teoremi senza capirne il significato e senza dimostrazione. È invece una matematica ricca, legata a contesti significativi, centrata all'attività di risoluzione dei problemi. La matematica è, per la sua duttilità, un potente strumento per comprendere e rappresentare la realtà; apprenderla implica lo sviluppo di capacità quali, ad esempio, intuire, inventare, analizzare, sintetizzare e interpretare. Si comprende quindi l'importanza di tale disciplina nel perseguimento di un'educazione permanente.

Ma quale è il livello delle competenze matematiche dei ragazzi italiani? Confrontando i risultati dell'indagine OSCE-PISA nel corso delle varie somministrazioni emerge un lievissimo miglioramento, seppure non si sono registrati cambiamenti statisticamente significativi.[4] Queste indagini hanno fornito risultati preoccupanti, non tanto per ciò che riguarda la capacità di utilizzare e manipolare simboli matematici, ma più per ciò che concerne la matematizzazione orizzontale, ossia per le attività di rappresentazione di una situazione del contesto reale in una forma matematica e nella interpretazione dei risultati matematici trovati nel contesto del problema originale. È naturale e doveroso chiedersi: perché ciò accade? Perché i ragazzi italiani hanno difficoltà in determinate domande delle indagini internazionali, anche relativamente semplici? A questi interrogativi, risposte come, ad esempio, "non studiano" o "non sono portati per la matematica" non possono essere accettate, in quanto troppo semplicistiche, non realistiche (se si sta compiendo una generalizzazione) e infruttuose. Tutt'altro, occorre capire cosa succede ai nostri ragazzi, darsi delle chiavi interpretative: elaborare dei costrutti, delle categorie, attraverso i quali interpretare certi fatti e comportamenti e analizzare le pratiche didattiche delle nostre classi quando affrontano la matematica. È necessario riflettere su cosa succede in classe: ha senso pensare che il problema sia tutto nel "come insegnare la matematica"? O non dobbiamo piuttosto riflettere su cosa significa per il ragazzo cercare di comprendere e apprendere la matematica?

La matematica è una disciplina "dai tempi lunghi", ossia, ogni apprendimento veramente significativo è sempre costruito con un lavoro di medio-lungo termine. Su tutti i principali nuclei fondanti l'allievo vive rivisitazioni, arricchimenti, approfondimenti, estensioni e ampliamenti successivi. Questo apprendimento diventa una conquista profonda del soggetto, in qualche modo contribuisce a plasmarlo e diventa parte di lui. L'apprendimento della matematica dei nostri ragazzi, invece, spesso si dimostra estremamente instabile, volatile, fragile. Instabile: a seconda delle giornate, sembra che abbiano appreso una cosa oppure no. Volatile: argomenti che sembravano conquistati

4. Cambiamenti significativi si sono registrati rispetto ai cicli ancora precedenti: il punteggio medio del ciclo 2015 è risultato superiore di 24 punti in confronto al 2003 e di 28 punti rispetto al 2006 (OCSE-PISA, 2015).

svaniscono quando cambia l'insegnante o il ragazzo passa da una scuola all'altra. Fragile: fatti o situazioni nuove mettono in crisi quello che era stato faticosamente conquistato. Ma ciò è interpretabile con il fatto che tali apprendimenti non sono veramente significativi. Ossia, è il significato dell'oggetto matematico a essere fragile e instabile. Non a caso, nei test internazionali, i nostri allievi sbagliano risposte anche a domande relativamente semplici, in cui, però, occorre avere un certo controllo sul significato di un determinato oggetto matematico. Il controllo del significato è la cosa che più manca nella scuola italiana, nella nostra matematica. Ma come si può fare per dare significato a un oggetto matematico? La costruzione del significato si fa agganciando il significante su cui si sta lavorando a un contesto, a un qualcosa in cui il significato emerga, agganciando le attività, il lavoro dei ragazzi a qualcosa riconosciuto dagli allievi come dotato di un senso. Allora si capisce come un aggancio extradisciplinare, soprattutto con ragazzi che non hanno una forte motivazione intrinseca, è uno dei mezzi possibili con i quali si può costruire il significato degli oggetti matematici con cui si lavora e che sono l'oggetto dell'apprendimento. Il contesto dell'apprendimento, e in particolare gli agganci con altre discipline, diventa fondamentale perché rende gli apprendimenti veramente significativi. Poco sopra abbiamo parlato di motivazione, che è un altro problema fondamentale studiato dalla didattica della matematica. Molte ricerche, nell'ambito degli studi sui cosiddetti fattori affettivi, hanno evidenziato come la motivazione giochi un ruolo fondamentale nelle attività matematiche, in particolare nel problem solving. La musica diventa in Doremat un contesto per la costruzione del significato e, al tempo stesso, una cornice motivante per il lavoro degli allievi.

2 La pratica didattica attraverso il racconto dei laboratori

Entriamo ora nel vivo della pratica didattica, ossia nei laboratori Doremat, presentando nei paragrafi che seguono due esempi di laboratori: uno sulle frazioni in musica e un altro sulle simmetrie. Abbiamo fatto questa scelta per fornire un contributo afferente all'ambito aritmetico e uno all'ambito geometrico. Le attività proposte partono sempre da una situazione reale che gli studenti si trovano a esperire, ossia da un contesto di carattere musicale praticato. Dunque, in generale, invece di iniziare la trattazione di un argomento matematico con definizioni, enunciati di teoremi e proposizioni, si parte da una situazione problematica musicale, dalla quale è possibile scoprire, inventare e ricostruire concetti matematici. È l'alunno che compie queste azioni con la guida dei docenti. Le lezioni musicali, quindi, costituiscono l'ambiente da cui attingere situazioni che gli allievi devono poi problematizzare.

2.1 Le frazioni in musica

Le attività qui proposte sono finalizzate all'associazione tra figure (e figurazioni) ritmiche e frazioni e tra il loro succedersi nel tempo e l'operazione di addizione. Ciò avviene a partire da esperienze musicali, durante le quali gli studenti familiarizzano con le strutture ritmiche, dapprima interiorizzandole attraverso l'esperienza pratica, poi imparando a scriverle e leggerle con la simbologia musicale, e infine ragionando sul concetto di tempo in musica.

Per iniziare, facciamo riflettere gli studenti sui gesti e i movimenti che naturalmente ci vengono spontanei quando ascoltiamo una canzone che ci piace: battiamo il piede, schiocchiamo le dita o, anche, balliamo; osserviamo che tutti questi gesti non avvengono in maniera disorganizzata o irregolare ma, anzi, sono cadenzati, regolari… sembra proprio che stiano seguendo un ritmo. Ciò che accade, infatti, è conseguenza del fatto che il nostro cervello sta eseguendo delle vere e proprie operazioni matematiche. Vogliamo capire e approfondire proprio questo aspetto. Prendiamo in esame i rapporti tra le varie figure ritmiche: a tal fine, per avere un'idea di che cosa sia in musica un valore doppio o pari alla metà, proponiamo agli allievi un'attività idonea che usa le mani o altre parti del corpo come strumenti. La descrizione è quella che segue. Facciamo battere agli studenti con la mano destra su un piano dei colpi regolari, cioè in modo tale che tra uno e l'altro ci sia sempre il medesimo intervallo di tempo; con l'altra mano, la sinistra, facciamo battere nel medesimo intervallo due colpi, uguali tra loro. Prestiamo attenzione a che il primo di questi due colpi coincida con il primo colpo della mano destra, e che poi la mano sinistra batta il secondo colpo da sola. In tal modo otterremo immediatamente una maggiore precisione. Questa operazione è controllata dal nostro cervello che generalmente è in grado di "calcolare" il tempo in modo preciso, senza utilizzare altri strumenti. Tale facoltà di prevedere gli accenti e di misurare i movimenti, ad esempio battendo le mani o con i passi, in sincronia tra loro, è una delle facoltà del nostro sistema nervoso centrale, le cui manifestazioni si possono notare fin dalle prime settimane di vita. Con un po' di esercizio tutti possono arrivare a una coordinazione soddisfacente, e così i movimenti delle nostre mani ci forniscono un'idea chiara di che cosa siano il doppio e la metà l'uno dell'altro; vale a dire che il concetto di doppio e di metà viene veicolato da un supporto di natura motoria e rinforzato da un segnale sonoro (il colpo della mano sul piano). Differenziando il suono prodotto delle due mani (ad esempio con due strumenti di timbro differente) questi concetti risulteranno ancora più chiari e l'attività ancora più gradevole. Cliccando [in questo video] potrete vedere e ascoltare questa attività. Cerchiamo in seguito di rappresentare graficamente questa attività motoria; a tale fine, disegniamo alla lavagna due semirette parallele, intese come linee del tempo, e chiediamo agli studenti di rappresentare su una semiretta ciò che fa la mano destra e sull'altra ciò che fa la mano sinistra. Il risultato potrebbe essere schematizzato come nella **Figura 1**:

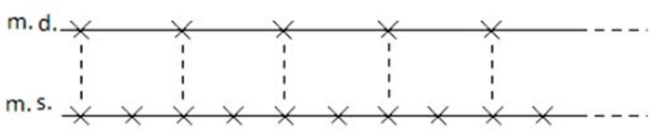

Figura 1
Rappresentazione dell'attività motoria descritta.

Nel grafico sono rappresentati i colpi delle mani tramite le "x", equidistanti, una per la mano destra ogni due della sinistra e allineate quando le mani battono insieme un colpo. Nell'esperienza, quando gli studenti non hanno colto l'equidistanza dei colpi, il rapporto o l'allineamento, li abbiamo stimolati con delle domande del tipo: "Come abbiamo battuto la mano sinistra? Questo vuol dire che abbiamo diviso il tempo in parti uguali oppure no? Ogni quanti colpi della mano sinistra la mano destra batte un colpo?".

Facciamo notare agli studenti che, se utilizziamo la simbologia musicale, possiamo scrivere il risultato della nostra attività motoria nel modo (**Figura 2**):

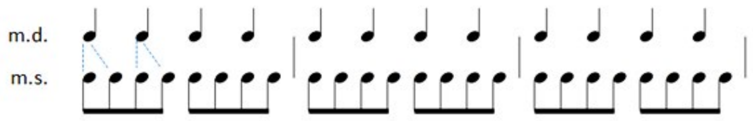

Figura 2
Scrittura musicale dell'attività descritta.

In relazione alla **Figura 2**, cerchiamo di mettere in evidenza il rapporto di uno a due (e viceversa) tra i suoni prodotti dalle due mani utilizzando un linguaggio che richiama quello delle frazioni e spieghiamo le notazioni musicali: la semiminima (ossia, la figura ritmica che compare più in alto) equivale a due crome. La croma è una figura musicale che si può trovare in raggruppamenti di due o più figure o anche separatamente. Una semiminima equivale a 2 crome e, viceversa, una croma equivale a metà semiminima (o è un mezzo di una semiminima). Volendo arricchire il linguaggio, proponiamo di parlare di durata delle figure ritmiche, così possiamo affermare anche che una semiminima ha durata che è il *doppio* di una croma. Cerchiamo ora di passare dalla rappresentazione grafica, sonora, motoria e proposizionale (linguaggio naturale) a una rappresentazione nel registro aritmetico, giungendo alla scrittura in **Figura 3**:

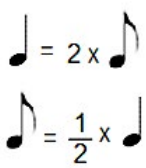

Figura 3
Rappresentazione nel registro aritmetico.

Possiamo procedere generalizzando l'esempio proposto in precedenza, osservando che possiamo costruire altre figure ritmiche raddoppiando o dimezzando la durata di quelle appena viste. In breve, giungiamo alla tabella in **Figura 4**:

Figura 4
Tabella con alcune figure ritmiche.

Per ritmare le figure musicali della **Figura 4** è necessario evidenziare i rapporti tra le durate delle varie figure ritmiche: ad esempio, se vogliamo suonare delle semicrome (ossia le note compaiono nella riga più in basso) dovremo battere quattro colpi nel tempo di una semiminima. Nell'esecuzione ritmica possiamo battere tra di loro le mani, o battere con delle penne sul banco, o ancora utilizzando delle bacchette; possiamo dividere la classe in gruppi e assegnare ai vari gruppi l'esecuzione di figure ritmiche diverse (un gruppo può scandire, ad esempio, delle semiminime, mentre un altro delle semicrome, o delle crome).

Tutte queste attività utilizzano vari registri semiotici: ad esempio, si passa da una rappresentazione semiotica espressa nel registro grafico a una espressa nel registro aritmetico e viceversa.

L'introduzione del concetto di battuta musicale ci consente, infine, di assegnare a ciascuna figura ritmica una frazione. Sempre a partire dalla musica, iniziando con l'ascolto di un brano, scopriamo che alcune frazioni sono usate per identificare proprio delle figure ritmiche, e anche il metro di battuta. Il tempo in cui si svolge la vicenda musicale, infatti, è suddiviso in porzioni di tempo (battute); ciascuna porzione è a sua volta divisa in altre piccole porzioni di tempo di uguale durata e il modo in cui può avvenire quest'ultima suddivisione non è unico e identifica il *metro* della battuta. Ad esempio, possiamo avere battute di metro 4/4, oppure 3/4, o ancora, 2/8, ecc. Nella nostra pratica didattica usiamo il metro 4/4, sia perché è il più comune (moltissime canzoni che ascoltiamo sono in 4/4) e il più semplice da eseguire, sia per un motivo di carattere aritmetico, che sarà chiaro a breve. Se una battuta è di metro 4/4, vuol dire che tale porzione di tempo è suddivisa in 4 porzioni di tempo, ciascuna della durata di un quarto. Nella teoria musicale la frazione 1/4 è proprio il valore assegnato alla semiminima. Nella pratica didattica presentiamo agli studenti la battuta rappresentando una porzione di tempo attraverso un segmento orientato (che si assume come l'intero), chiediamo di dividerlo in quattro parti di uguale lunghezza, di assegnare a ciascun segmento così ottenuto una frazione e diciamo che quello è il valore frazionario con cui, nella teoria musicale, si indica la semiminima (**Figura 5**):

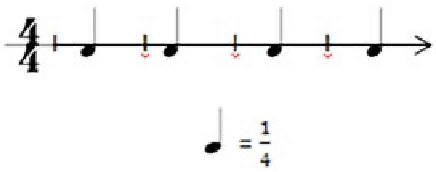

Figura 5
Una battuta di metro 4/4.

Per assegnare alle figure ritmiche le rispettive frazioni si richiamano agli studenti le esperienze e le osservazioni descritte poco sopra: ad esempio, se la croma è la metà della semiminima, ciascuna porzione da 1/4 dovrà essere divisa in due parti di uguale lunghezza e avremo il segmento suddiviso in otto parti, o, ugualmente, si può osservare che in una battuta ci stanno otto crome… e così il valore frazionario della croma è proprio 1/8. Naturalmente, lasciamo che siano gli studenti a dedurre e ottenere il valore frazionario delle figure ritmiche, esortandoli a tentare, manipolare le rappresentazioni, facendoli riflettere sulle esperienze condotte prima. Otteniamo quindi la seguente tabella:

nomi	Note	simbolo di pausa	valore
Semibreve	𝅝	𝄻	Un intero (4/4)
Minima	𝅗𝅥	𝄼	Un mezzo (2/4)
Semiminima	𝅘𝅥	𝄽 𝄽	Un quarto (1/4)
Croma	𝅘𝅥𝅮	𝄾	Un ottavo (1/8)
Semicroma	𝅘𝅥𝅯	𝄿	Un sedicesimo (1/16)
Biscroma	𝅘𝅥𝅰	𝅀	Un trentaduesimo (1/32)
Semibiscroma	𝅘𝅥𝅱	𝅁	Un sessantaquatresimo (1/64)

Figura 6
Valore delle figure musicali.

Possiamo commentare nuovamente i rapporti tra le figure ritmiche, usando però, questa volta, i loro valori frazionari: ad esempio, possiamo dire che 1/4 è la metà di 1/2 o, scrivere anche, che $1/2 \div 2 = 1/4$ (**Figura 6**).

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per poter inventare sequenze ritmiche ed espressioni aritmetiche. Invitiamo gli studenti a comporre delle sequenze ritmiche mischiando le varie figure e figurazioni ritmiche, come fossero mattoncini di un lego.

Possiamo partire con la richiesta di inventare una sola battuta oppure due o tre battute (sempre di metro 4⁄4). Questa attività non è immediatamente semplice o banale: per comporre correttamente le battute si devono scegliere tra varie figure e figurazioni ritmiche avendo bene presente il loro valore, contando in quarti per avere in ciascuna battuta esattamente il valore di 4⁄4. A titolo esemplificativo, la **Figura 7** mostra tre battute inventate dagli allievi:

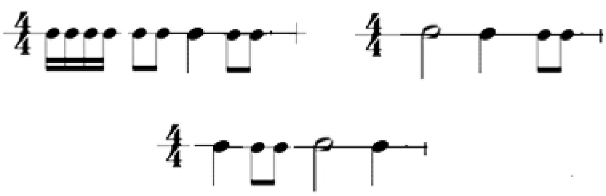

Figura 7
Prodotti degli allievi.

Osserviamo che la scrittura più in basso non è una battuta di metro 4⁄4, infatti essa è composta esattamente da 5⁄4. Queste attività, se svolte nella modalità di lavoro in gruppo, risultano certamente più fruttuose e ricche.

Osserviamo che agli studenti viene naturale applicare un'addizione tra frazioni; è opportuno farli riflettere esplicitamente sull'associazione che hanno compiuto: il succedersi nel tempo di figure ritmiche con l'operazione di addizione tra le frazioni che le identificano.

Così la musica si intreccia con la matematica: inventare una sequenza ritmica è come inventare un'espressione aritmetica; da qui in poi ci può sbizzarrire con le possibilità che ci offre questo splendido intreccio di discipline.

Un'ulteriore considerazione che si può condividere con gli studenti è che le frazioni sembrano proprio adatte a rappresentare delle figure ritmiche. Tornando, infatti, alla Figura 6, possiamo "leggerla" in vari modi. Ad esempio, assumendo le figure musicali come grandezze variabili, se consideriamo una figura e la sua successiva (leggendo dall'alto verso il basso) esse hanno rapporto 2:1. Essendo questo rapporto costante, possiamo dire che sono grandezze proporzionali. Il che significa che scorrendo le frazioni in tabella dall'alto in basso, la successiva indica un valore che è sempre la metà di quella precedente; compiendo il percorso in senso contrario, cioè dal basso in alto, il valore raddoppia. Si potrà affermare ad esempio che la semibreve ha una durata, o un valore, doppio della minima; che la minima a sua volta ha un valore, o una durata doppia della semiminima, e via dicendo. Se scorriamo verso l'alto diremo altresì che la semiminima dura, o vale, la metà, della minima e che questa a sua volta vale, o dura, la metà della semibreve. Tuttavia, ciò che non è possibile stabilire (e forse non è neppure utile farlo) è di quanto sia questa durata, quale sia la sua misura. Quello che importa è invece la proporzione tra le durate delle note e dei suoni da queste raffigurati, vale a dire la loro durata relativa, indipendentemente da quella assoluta. Ai fini dell'esecuzione musicale non interessa tanto la misurazione quantitativa dei suoni, quanto sapere che mentre un musicista esegue un suono (ad esempio una semibreve) il collega che sta suonando insieme a lui deve eseguirne due, tre o quattro. Principalmente per questo motivo le durate delle note si esprimono in termini relativi e vengono fissate le proporzioni tra di esse attraverso l'impiego delle frazioni. Non esistono note che durano 1, 2, 3 o 4 secondi, ma note che durano la metà o il doppio (e anche un terzo, un quarto ecc.) di altre note che vengono prese come riferimento di volta in volta.

Al termine di queste attività e laboratori abbiamo in definitiva associato alle varie figure ritmiche una frazione e associato al loro succedersi nel tempo l'operazione di addizione. Abbiamo sempre cercato di ricorrere a diverse rappresentazioni in vari registri semiotici del concetto di frazione (grafico, proposizionale, aritmetico, sonoro e motorio) e ne abbiamo evidenziato aspetti del significato, come rapporto tra grandezze e come parte di un uno-tutto.[5] Abbiamo usato la musica come contesto al quale agganciare un possibile senso delle frazioni e dell'equivalenza tra queste, usandolo come significante. Abbiamo impegnato gli studenti in significative attività di matematizzazione di contesti musicali, che li ha condotti a una interpretazione di simboli usati in due linguaggi diversi: aritmetico e ritmico, mettendo in relazione parti di strutture, ad esempio le frazioni con le figure ritmiche. Sul concetto di *struttura* torneremo alla fine di questo articolo.

2.2 Invenzione di forme simmetriche

La musica offre la possibilità anche di parlare di trasformazioni geometriche: sovente si sente parlare, ad esempio, della forma simmetrica di un brano, o della omoritmia tra

5. Sull'importanza di presentare diversi significati del concetto di frazione, si veda ad esempio Fandiño Pinilla (2005), in cui si trattano anche gli aspetti didattico e storico delle frazioni.

due (o più) parti o voci (che consiste nell'avere il medesimo profilo ritmico) che possiamo interpretare come una congruenza tra figure piane. I laboratori che possiamo svolgere sono numerosi, tuttavia, più che l'analisi di un brano, ci interessa l'invenzione di forme simmetriche.
Dividiamo la classe in almeno due gruppi (in genere, tre o quattro), dotati di strumenti melodici (come ad esempio strumenti a barre) o anche solo strumenti ritmici (come ad esempio legnetti, tamburelli) con la seguente consegna:

«Inventare una sequenza musicale di lunghezza predefinita (ad esempio, 4 battute di metro 4/4), utilizzando determinate note/altezze». Nella consegna espressa in questo modo, si fa attenzione che, in ogni caso, le produzioni dei vari gruppi risultino differenti, per profilo ritmico, per profilo melodico o per carattere tonale/modale, assegnando appunto differenti gruppi di note/altezze (per esempio, suoni diatonici o suoni cromatici, differenti insiemi di note corrispondenti a scale differenti), come quelli mostrati nella **Figura 8**:

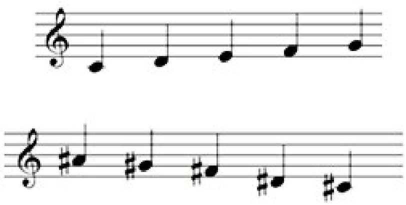

Figura 8
Differenti insiemi di note.

Una volta ottenute le sequenze inventate, scegliamone due, ad esempio, quelle riportate nella **Figura 9**; scriviamole e quindi suoniamole separatamente.
La prima viene indicata con la lettera A e la seconda con la B per evidenziarne il carattere reciprocamente contrastante (A è costruita su una porzione di scala diatonica, B sulla scala pentatonica).

Figura 9
Due sequenze ritmiche inventate dagli studenti.

Volendo comporre un brano, utilizzando le due sequenze inventate dagli studenti, ci accordiamo in questo modo: A rappresenta l'inizio cui segue un episodio di contrasto B; per concludere a maggioranza si ripropone A (**Figura 10**).

Figura 10
Brano A-B-A.

Commentiamo il brano, condividendo con gli studenti alcune differenze e analogie tra le due sequenze che lo compongono.

Per sintetizzare il percorso musicale, possiamo dire di avere composto una forma ternaria, fatta cioè di tre parti A-B-A, in cui A è il segmento iniziale che ci serve anche come chiusura del brano e B il segmento di carattere contrastante con A, che quindi si troverà in mezzo alla composizione (cosa ben visibile anche in partitura).

Condividiamo con gli studenti che molti brani musicali, canzoni, danze sono costruiti in questo modo, cioè alternando un episodio contrastante a una idea iniziale che ritorna subito dopo terminato il contrasto. Indipendentemente dalla complessità, dalla lunghezza o dalla forza con cui si impone la parte contrastante, sintetizziamo la loro forma in questo modo: A-B-A, aggiungendo che si tratta di una forma simmetrica.

Parlare di forma o di simmetria a proposito di un brano musicale significa usare termini che, pur aiutando a costruire un'immagine mentale di ciò che ascoltiamo, non provengono dal contesto "sonoro"; frequentemente utilizziamo termini che non cadono sotto il dominio sensoriale dell'udito per descrivere i suoni, dicendo ad esempio che quel suono è "ruvido" o "dolce", non possedendo termini migliori per restituircene l'aspetto. Se ad alcuni questa potrebbe sembrare una carenza lessicale, e non senza ragione, da un altro lato le sinestesie, gli ibridi che si creano, ci potrebbero consentire di stabilire degli intrecci tra ambiti esperienziali anche assai lontani e, per ciò che a noi interessa, tra discipline che grazie a questi collegamenti si scoprono condividere contenuti e processi di pensiero. In ogni caso, se utilizziamo la parola "simmetria" in musica, non lo facciamo senza ragione, lo facciamo perché questa parola ci restituisce un'immagine complessiva di ciò che abbiamo ascoltato. Nella dimensione in cui avviene l'esperienza musicale (quella dell'ascolto come quella della pratica o dell'invenzione) si può sempre ravvisare un prima e un dopo (oltre che un durante), collegati da relazioni dotate di senso (ad esempio una melodia e un ritmo che l'accompagna, la ripetizione di una frase in momenti successivi, la variazione di idee sentite prima, ecc.). Osserviamo che l'udito, se non supportato, non può dare una visione di insieme di un brano, non potendo controllare in un unico istante ciò che accade in momenti successivi, a differenza di ciò che restituisce la vista di fronte alla facciata di un palazzo neoclassico, che permette di osservarla nel suo insieme. Riusciamo, però, a ricomporre ciò che ascoltiamo in un oggetto dotato di senso descrivendone la struttura musicale con i termini che ne suggeriscono un'immagine il più fedele possibile, sia pure per analogia.

Tornando al brano composto, possiamo realmente dire che presenta un qualche tipo di simmetria? Cosa vuol dire che un oggetto è simmetrico? E rispetto a cosa lo è? Con queste domande possiamo stimolare gli studenti a spiegare cosa è secondo loro una simmetria, quando possiamo dire che due oggetti sono simmetrici (rispetto a qualcosa). Gli studenti, in genere, rispondono facendo riferimento a oggetti concreti, ad esempio, "le mani (poste sullo stesso piano e con i palmi rivolti nello stesso verso) perché sono uguali e alla stessa distanza" o a esperienze vissute, ad esempio, "lo specchio che produce un'immagine speculare"; in ogni caso, gran parte degli studenti alludono a una simmetria assiale.

Tornando alla composizione, verifichiamo assieme agli studenti attraverso un'analisi della partitura ottenuta, che la simmetria che abbiamo realizzato è di natura analogica (non certo una perfetta simmetria), per via del segmento di partitura che abbiamo indicato con "B".

Sarebbe possibile, intervenendo sulla partitura e quindi rielaborando le idee dei ragazzi, ottenere una simmetria vera, che sia tale almeno sulla carta? Esortiamo quindi gli studenti a modificare il brano realizzato in precedenza; a titolo esemplificativo, riportiamo nella **Figura 11** alcuni dei risultati delle nostre esperienze:

Figura 11
Brano A-B-A'.

Qui i ragazzi hanno manipolato soltanto il segmento A che, dopo B, è riscritto partendo dall'ultima nota fino alla prima. Il primo e il terzo sono, quindi, simmetrici rispetto al segmento B.

Figura 12
Brano A-B'-A'.

Nella **Figura 12**, invece, gli studenti hanno lavorato su tutti i segmenti musicali, ottenendo una simmetria rispetto all'asse "temporale" che delimita la sesta e la settima battuta.

Lavorando in gruppo gli studenti possono così manipolare un brano musicale e costruire una simmetria, attività significativa in quanto implica l'utilizzo e lo sviluppo di competenze e abilità, quali ad esempio riconoscere gli elementi costitutivi di oggetti, porre in relazione parti di strutture e manipolarle al fine di costruire un nuovo oggetto con determinate caratteristiche.

Non è detto però che la correzione apportata al nostro brano, al fine di ottenere una simmetria precisa della sequenza delle altezze o del profilo ritmico, determini nell'ascoltatore una percezione più chiara della presenza di una struttura simmetrica nella musica. Non è detto perché le regole che determinano la chiarezza nella comprensione di un elaborato sonoro non sono quelle della geometria; parlare di simmetria musicale serve a dare significato all'esperienza musicale, che si tratti di ascolto o di invenzione o di pratica.

La presenza nella musica di strutture simili a quelle della geometria, tanto che è possibile prendere a prestito da questa le parole per descrivere quelle, ci fornisce l'occasione per cercare di creare degli intrecci didattici fecondi, delle vie per apprendere meglio.

Anche in questo ambito torna il concetto di *struttura*, citato nel precedente paragrafo. Il concetto di *struttura* è trasversale a molte discipline, in particolare alla matematica e alla musica. Esso è indipendente dagli elementi usati e con elementi diversi si possono costruire strutture identiche; per cui, non sono tanto i segni usati, ma le relazioni che intercorrono tra essi a produrre significato. Per poter leggere la realtà, interpretarla, modellizzarla, agire su di essa, lo studente deve saper padroneggiare le strutture matematiche. Analogamente, il concetto di struttura è presente anche nella musica, sia nella dimensione ritmica che in quella che riguarda l'altezza dei suoni; è per questo motivo che la musica aiuta a comprendere il concetto di struttura. Nei laboratori Doremat gli studenti operano associazioni tra alcuni concetti di musica e alcuni di matematica, scoprendo delle corrispondenze (tra parti di strutture); come sostiene Hofstadter:

> «la percezione di isomorfismi è ciò che crea i significati nella mente umana».
> (Hofstadter, 1984, p. 54).

Per concludere vi proponiamo un'attività che abbiamo realizzato con degli studenti: una rielaborazione dell'Inno alla gioia, brano tratto dalla celeberrima Nona Sinfonia di Ludwig Van Beethoven. Siamo partiti dall'ascolto del brano, cercando di commentarne i movimenti; gli studenti hanno poi riconosciuto delle linee melodiche inizialmente "salire", poi "scendere". Partendo da queste osservazioni, abbiamo scritto su un pentagramma una prima linea melodica; successivamente con gli studenti abbiamo stabilito di raddoppiare la melodia in moto retto all'intervallo di un'ottava, che è sembrato quello più gradevole. Infine, abbiamo inventato un accompagnamento che, in Figura 13, è rappresentato in notazione geometrica dal terzo rigo e in notazione aritmetica dal quarto rigo, eseguito al tamburo; il primo rigo, invece, è scritto in notazione tradizionale. Ecco: Video dell'Inno alla gioia.

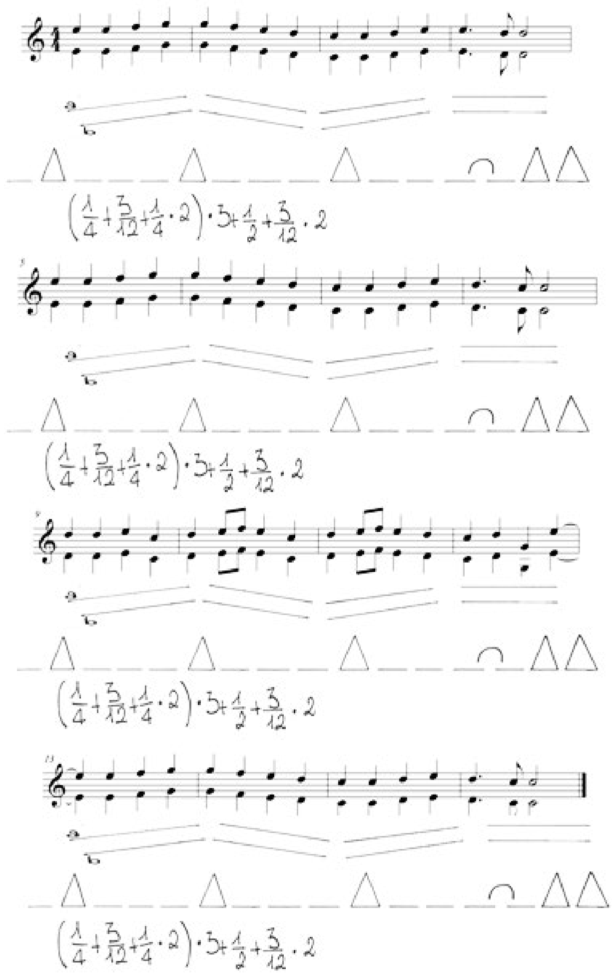

Figura 13
Una rappresentazione dell'Inno alla gioia.

Bibliografia

Azzaroni, L. (1997). *Canone infinito: lineamenti di teoria della musica*. Bologna: Clueb.

Bianchi, A., Cuomo, C., Curti, G., Lentini, D., Magnani, N., & Vagni, R. (2015). *Doremat - La Musica della Matematica. Il Testo. Insegnare e imparare la Matematica con la Musica*. Modena: Digital Index [collana diretta da Silvia Sbaragli].

Bolondi, G., Vagni, R., & Lentini, D. (2014). Doremat, la Musica della Matematica, In B. D'Amore, & S. Sbaragli, (a cura di). *Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora, 159-162.

Borzacchini, L. (2005). *Il computer di Platone. Alle origini del pensiero logico e matematico*. Bari: Dedalo.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A. M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 25*(3), 255-270.

Cazzago, P. (1984). *Psicomotricità e spazio-tempo: strutture e ritmi*. Brescia: La Scuola.

Dahlhaus, C. (1990). *Beethoven e il suo tempo*. Torino: EDT.

DO.RE.MAT. (2014). *Decrease Obstacles Related to Mathematics Teaching – La Musica della Matematica - Trasferimento di metodologie innovative per l'insegnamento della matematica attraverso la musica*. [Rapporto finale di valutazione del progetto 2012-1-IT1LEO05-02810]. Disponibile in http://dorematleonardo.eu/index.php/it/prodottiita (consultato il 2.04.2017).

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Frabboni, F. (2009). *Lo spazio Laboratorio. Progetto LAIV* (Laboratorio delle arti interpretative dal vivo). Disponibile in http://www.progettolaiv.it/resources/laiv/PDF/Frabboni%20-%20spazio%20laboratorio.pdf (consultato il 2.04.2017).

Ghione, F., & Catastini, L. (a cura di)(2011). *Matematica e Arte. Forme del pensiero artistico*. Milano: Springer.

Hofstadter, D. R. (2003). *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*. Milano: Adelphi.

IEA PIRLS e TIMSS (2011). *I risultati degli studenti italiani in scienze, matematica e lettura.* Disponibile in: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2011/documenti/Rapporto_PIRLS_TIMSS.pdf (consultato il 2.04.2017).

Del Cimmuto, A., Fiacca, F., Palomba, L., & Senatore, A. M. (2012). *Le azioni del pon "competenze per lo sviluppo" di contrasto alla dispersione scolastica un'indagine valutativa*. ISFOL. Disponibile in http://isfoloa.isfol.it/bitstream/handle/123456789/134/Del%20Cimmuto_Fiacco_Lupo_Palomba_Senatore_Rapporto%20dispersione%20scolastica.pdf;jsessionid=E7D57602593D266C0722AE865248C84D?sequence=3 (consultato il 2.04.2017).

La Face Bianconi, G. (2008), Il cammino dell'Educazione musicale: vicoli chiusi e strade maestre. In G. La Face Bianconi & F. Frabboni (a cura di). *Educazione musicale e Formazione,* Milano: FrancoAngeli.

OCSE-PISA (2012). Pisa 2012. *Quadro di riferimento per la Matematica*. Disponibile in http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf (consultato il 03.04.2017).

OCSE-PISA (2015). *I risultati degli studenti italiani in scienze, matematica e lettura*. Disponibile in: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2015/doc/rapporto_PISA_2015.pdf (consultato il 2.04.2017).

PISA (2015). *Result in focus*. Disponibile in http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf (consultato il 2.04.2017).

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics, 42*(3), 237-268.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Allegati

1. Video 1 - https://www.youtube.com/watch?v=lfJxiqNJJhw&feature=youtu.be
2. Video 2- Inno alla gioia - https://www.youtube.com/watch?v=Chw6u1m1kzs&feature=youtu.be

Autori: **Rachele Vagni, Denise Lentini**
Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica, Enfap, Bologna.
rachele.vagni@gmail.com, lentini.denise@gmail.com