

Un'orchestra di strumenti matematici. Macchine matematiche, software di geometria dinamica e LIM nella scuola media¹

1

An orchestra of mathematical instruments.
Mathematical machines, dynamic geometry
software and interactive multimedia whiteboards
in middle school

Giuliana Bettini

Scuola media di Giubiasco, Svizzera

Sunto / In questo articolo è descritto l'uso intenzionale di più strumenti (orchestrazione strumentale) quali un pantografo, un software di geometria dinamica e una lavagna interattiva multimediale (LIM), per introdurre studenti di seconda media all'idea di simmetria assiale come corrispondenza biunivoca tra punti del piano, superando quella più ingenua di trasformazione di figure. Si è fatto riferimento alla teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) e alla struttura didattica in essa proposta: attività con artefatto a piccolo gruppo, attività individuale e discussione collettiva. Inoltre ci si è riferiti all'approccio strumentale (Rabardel, 1995) basato sulla distinzione fra artefatto e strumento. La LIM è stata utilizzata come *spazio d'azione* (Didoni & Di Palma, 2009) per rendere visibili all'intera classe azioni individuali.

Parole chiave: orchestrazione strumentale; pantografo; software di geometria dinamica; lavagna interattiva multimediale; simmetria assiale.

Abstract / This article describes the intentional use of multiple instruments (instrumental orchestration) such as a pantograph, a dynamic geometry software and an interactive whiteboard (IWB), for introducing 7th grade students to the idea of axial symmetry as one-to-one correspondence between points in the plane, overcoming the naïve concept one of figures transformation. The chosen frame of reference is the theory of semiotic mediation (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) and its didactical structure: small group activity with artifact, individual activity and class discussion. Moreover, the instrumental approach (Rabardel, 1995) based on the distinction between artifact and instrument has been taken into account. The IWB has been used as an *action place* (Didoni & Di Palma, 2009) in order to show individual actions to the whole class.

Keywords: instrumental orchestration; pantograph; dynamic geometry software; interactive whiteboard; axial symmetry.

1 Introduzione

Le indicazioni metodologiche e didattiche del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) individuano il laboratorio come «spazio didattico in cui l'allievo è attivo, formula congetture e ipotesi, progetta, sperimenta, raccoglie dati, realizza e controlla le conseguenze delle scelte effettuate, negozia significati, valida e argomenta le proprie scelte con il resto del gruppo classe, costruisce significati interindividuali,

¹ Sintesi del lavoro di diploma per il *Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I*, anno accademico 2015/2016, relatore: Michele Impedovo.

socializza le conoscenze emerse. Il laboratorio matematico costituisce uno spazio privilegiato per lavorare sui nuclei fondanti della disciplina».

Nel Piano di studio si sottolinea inoltre «l'importanza di proporre significativi artefatti utili per l'apprendimento degli allievi, tra i quali i tradizionali strumenti». Nell'ambito di competenza *Geometria*, si raccomanda inoltre la trattazione della simmetria assiale per esplorare significative situazioni geometriche e riconoscere le principali caratteristiche di figure convenzionali (triangoli, quadrilateri, cerchi, poligoni regolari, ecc.) o di figure ispirate alla vita comune (foglie, case, pesci, alberi, ecc.), anche se non è previsto lo studio sistematico delle trasformazioni.

In questo contributo, il laboratorio è stato scelto come ambiente di apprendimento per svolgere attività che si ritengono adatte alla costruzione di significati inerenti la simmetria. Attorno a un unico oggetto matematico, la simmetria assiale, sono stati orchestrati diversi strumenti introducendo artefatti di differente natura (macchine matematiche e tecnologie digitali).

Come artefatto si è scelto il pantografo, che risulta significativo per il concetto di simmetria assiale, al quale è stata affiancata la LIM. Gli studenti sono stati guidati in un percorso di esplorazione e di scoperta e accompagnati nella costruzione di significati matematici inerenti alla simmetria assiale; hanno utilizzato gli strumenti proposti arricchendoli di modalità personali e nel corso dell'attività vi hanno affiancato anche quelli più tradizionali come il compasso o la squadra. Inoltre l'attività di laboratorio ha permesso di far diventare strumenti di apprendimento anche i loro gesti, le loro parole e il confronto con i compagni.

2 Quadro teorico

In questa sperimentazione si è fatto riferimento alla *teoria della mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) e all'approccio strumentale dovuto a Rabardel (1995a). È stato necessario approfondire gli ostacoli legati al concetto di simmetria assiale e documentarsi su sperimentazioni e ricerche inerenti alla didattica con la LIM.

2.1 Artefatti e strumenti

Rabardel nel 1995 pubblicò il volume *Les homme et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains* nel quale distingue tra artefatti e strumenti in riferimento alla tecnologia informatica.

Un artefatto è un oggetto materiale (il compasso, la squadra, la calcolatrice ecc.) o simbolico (un grafico, un algoritmo ecc.). Secondo l'autore, gli artefatti diventano strumenti solo quando, utilizzandoli, ce ne appropriamo e li arricchiamo di componenti soggettive che vengono chiamate "schemi d'utilizzo".

Uno strumento, quindi, è frutto della costruzione di un individuo ed è costituito di due parti: l'artefatto e gli schemi d'utilizzo a esso associati.

Il processo di costruzione individuale di uno strumento a partire da un artefatto è detto “genesi strumentale” ed è il risultato di un doppio processo:

- la “strumentalizzazione”, diretta verso l’artefatto: si indagano le componenti dell’artefatto, in alcuni casi fino alla modifica dell’artefatto stesso;
- la “strumentazione”, relativa al soggetto in apprendimento: si costruiscono schemi di utilizzo personali a partire da compiti specifici da eseguire.

L’insegnante ha il compito di scegliere l’artefatto e di guidare la genesi strumentale poiché è in questa fase che gli allievi costruiscono i significati matematici. Ciascun alunno costruisce il proprio strumento secondo schemi d’uso individuali: Trouche (2005) introduce la nozione di orchestrazione strumentale proprio per descrivere la gestione didattica delle genesi strumentali.

Se nelle attività sono coinvolti più strumenti, questi non possono essere considerati isolati, ma si devono valutare le loro reciproche influenze: la gestione di più strumenti rientra anch’essa nelle dinamiche di orchestrazione strumentale.

2.2 La mediazione semiotica

La macchina, nel nostro caso il pantografo, ha un forte legame con la storia della matematica, elemento proposto nella teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009), che prevede l’uso di artefatti nella costruzione di significati matematici in una prospettiva vygotskiana (Vygotskij, 1978).

L’artefatto, scelto dall’insegnante, deve essere il mediatore di significati relativi ai saperi che esso incorpora. Sono le scelte dell’insegnante che danno una direzione al processo di esplorazione della macchina. Il compito dato agli allievi deve essere accessibile e dare luogo a una produzione intensa di segni (attività semiotica). Questi segni, prodotti dagli studenti, non sono solo disegni o testi, ma anche sguardi, parole e gesti: i segni hanno la funzione di comunicare con i compagni, con l’insegnante e anche di rappresentare il problema a se stessi.

L’insegnante accompagna l’evoluzione dei segni: l’artefatto è uno strumento di mediazione semiotica poiché è legato alla consegna assegnata allo studente e al sapere matematico che si vuol far scaturire.

La struttura didattica della *teoria della mediazione semiotica* propone un «ciclo didattico» costituito da tre attività (lato destro della Figura 1): attività a piccolo gruppo con l’artefatto, attività individuali con produzione di segni, *testi situati*, e la produzione collettiva di segni che avviene mediante una discussione, *testi matematici*. La discussione matematica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009), condotta dall’insegnante, ha l’obiettivo di utilizzare i contributi individuali degli allievi per favorire il passaggio verso segni matematici.

I segni prodotti nell’attività favorita dall’artefatto si possono distinguere, per aspetti cognitivi, in due categorie:

- “segni artefatto”, che si riferiscono ad attività con l’artefatto e contengono il riferimento a sue parti, ad azioni che vengono fisicamente compiute nel corso del suo uso; sono segni di carattere fortemente soggettivo;

- “segni matematici”, legati ai significati matematici condivisi dalla comunità, di cui l’insegnante si fa mediatore. Fanno parte dell’eredità culturale e il loro apprendimento costituisce l’obiettivo dell’insegnamento.

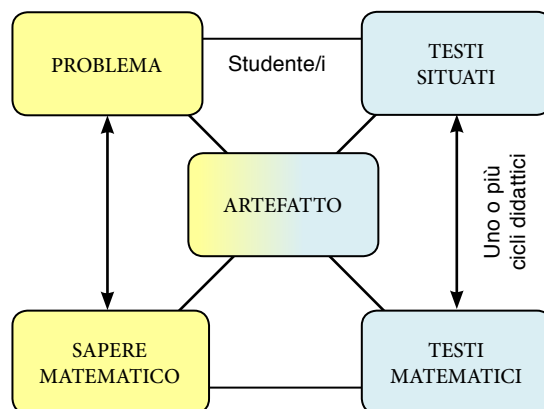


Figura 1
La mediazione semiotica.

A queste due categorie si possono aggiungere i “segni pivot” che possono riferirsi sia all’attività con l’artefatto sia al sapere matematico. È l’insegnante a giocare con i *segni pivot* per favorire la transizione dal contesto di utilizzo degli artefatti al contesto matematico.

I segni prodotti dagli studenti risentono del processo di genesi strumentale, cioè degli schemi d’utilizzo che essi sviluppano a partire dalle consegne dell’insegnante. Si potrebbe dire che negli schemi di utilizzo si trovano quei significati matematici che l’artefatto media e contribuisce a costruire.

2.3 Lavagna interattiva multimediale (LIM)

Le ricerche relative all’utilizzo della LIM in classe sono state in questi anni prevalentemente qualitative. In un articolo pubblicato sul sito *educa.ch* (Burton, Monney & Jauquier, 2010) si legge che nessuno studio sperimentale finora effettuato ha potuto dimostrare evidenti effetti positivi sull’apprendimento a lungo termine dovuti all’utilizzo della LIM. Sono invece confermati effetti positivi (Salvadori, 2012) sulla motivazione degli allievi e degli insegnanti, nonostante non si escluda la possibilità che la LIM favorisca lezioni svolte in modalità prevalentemente frontale. Recentemente sono stati pubblicati i risultati di una ricerca svolta in Québec (Samson & Lefebvre, 2016) in cui si descrivono le pratiche didattiche degli insegnanti della scuola elementare e della scuola media che utilizzano questo supporto didattico. Nei risultati di questa ricerca si conferma il largo uso di didattiche frontali in classi in cui è presente una lavagna interattiva e si mette in evidenza come l’utilizzo combinato di tablet e della LIM in classe sarebbe la ricetta da privilegiare per trarre pienamente profitto dalle potenzialità di questa tecnologia.

Didoni e Di Palma (2009) classificano tre diversi modi d’uso della lavagna multimediale: *finestra multimediale*, *memoria digitale* o *spazio d’azione*. Nei primi due casi la LIM è utilizzata come una periferica di output: per la condivisione di materiali multimediali elaborati dal docente o dagli studenti (*finestra multimediale*) e per una facile consulta-

zione a casa, o nelle lezioni successive, di quanto prodotto in classe (memoria digitale). La LIM è, però, anche una periferica di input e come tale ha una terza importantissima funzione: condivisione di azioni rese visibili a tutta la classe (spazio di azione). L'armonizzazione di queste tre funzionalità, secondo gli autori, sarebbe la condizione ideale per favorire la costruzione della conoscenza.

Nel suo scritto *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée* (1993), Duval distingue fra oggetti matematici e loro rappresentazione. Questi due aspetti, paradosso cognitivo del pensiero matematico, non si possono scindere nella fase di apprendimento. Proprio per evitare che l'allievo identifichi l'oggetto matematico con la sua rappresentazione è necessario presentare più rappresentazioni semiotiche.

L'utilizzo combinato del software di geometria dinamica *Geogebra* e della LIM risponde ai criteri, per Duval (1993) necessari, affinché un sistema semiotico sia considerato un registro di rappresentazione: è un sistema di segni che permette di riempire le funzioni di comunicazione (permette di disegnare, di scrivere, ecc.), di trattamento (la dinamicità del software permette continue riconfigurazioni) e di conversione in un altro registro senza cambiare oggetto (l'alunno descrive le sue azioni, le discute con i compagni).

Quale LIM?

Esistono diverse tipologie di lavagne interattive multimediali. Si distinguono per le caratteristiche tecnologiche (alcune sono touch, altre interagiscono unicamente mediante l'utilizzo di una penna specifica), per il tipo di proiezione (proiettore frontale o retroproiettore) e per i programmi applicativi che utilizzano.

«Diverse marche di LIM si dividono il mercato scolastico. Sfortunatamente, però, i software che lavorano su queste diverse lavagne non sono compatibili tra loro. Alcune marche propongono soluzioni limitate per l'importazione e l'esportazione dei file dei prodotti concorrenti. Questa mancanza di interoperabilità è problematica poiché limita la condivisione delle risorse digitali tra gli insegnanti. Essa complica [...] rende più difficile il lavoro dei formatori del corpo insegnante» (Burton Monney & Jauquier, 2010). Per ovviare a questi problemi si potrebbero utilizzare soluzioni *opensource*, come ad esempio Open-Sankoré, compatibili con le diverse LIM.

Non sono però solo i software a essere differenti, variano anche le caratteristiche di interoperabilità. Per alcune lavagne, ad esempio, è possibile registrare o stampare il contenuto presente sulla lavagna, per altre no; in alcune lavagne è possibile importare file in vari formati, modificarli e poi salvarli per le lezioni seguenti, in altri casi si possono modificare solo file realizzati nel software specifico della LIM. I diversi schemi d'uso possono essere così differenti da non poter parlare genericamente di attività con la LIM, ma rendono necessario specificare le caratteristiche della lavagna utilizzata.

2.4 La simmetria assiale

«C'è un legame privilegiato tra la geometria e la realtà. La geometria è una disciplina teorica, ma al tempo stesso, dipende dalla realtà come modello di alcuni suoi aspetti» (Bartolini Bussi & Maschietto, 2007). Anche la simmetria rientra fra questi casi: essa può

essere sperimentata in campi come la musica, l'arte, la biologia e la fisica. Nella vita di tutti i giorni il termine simmetria assume il significato di *armonioso o ben proporzionato*, ma la simmetria è anche un'idea centrale della matematica (Weyl, 1952) e richiede un processo matematico di definizione che deve essere guidato dall'insegnante.

La simmetria assiale è fra i concetti indagati da Nathalie Sinclair, della facoltà di Educazione della Simon Fraser University (Canada), che si occupa del modo in cui le tecnologie digitali e i software di geometria dinamica cambiano l'apprendimento della matematica.

In un articolo presentato ad Ankara nel 2011, conferma che i bambini mostrano una forte capacità di riconoscere figure simmetriche, ma anche che, prima dei dodici anni, molti concetti della simmetria non sono ancora stabilizzati.

Anche Rabardel, in un articolo del 1995, cita ricerche condotte in Canada (Ouray, 1991) in cui si mette in evidenza come la nozione di simmetria assiale, che richiede il concetto di ortogonalità, non possa essere pienamente trasmessa attraverso pratiche di piegamento o con l'utilizzo di fogli quadrettati. Lo strumento, secondo Rabardel (1995b), non è indifferente per il processo di concettualizzazione: la costruzione ottenuta con il foglio quadrettato, anche se corretta, è comunque più povera di quella ottenuta con uno strumento come la squadra. Utilizzando una squadra l'alunno deve considerare l'ortogonalità ed effettuare misure prendendo in carico una dimensione fondamentale della simmetria, la distanza.

Gli autori del manuale destinato alla formazione degli insegnanti *Donner du sens aux mathématiques* (Fénichel, Pauvert & Pfaff, 2004), nella sezione dedicata allo spazio e alla geometria, individuano differenti procedure di risoluzione di problemi inerenti alla simmetria assiale ed elencano gli errori tipici e ricorrenti che si riscontrano nei diversi cicli scolastici. Le procedure dipendono dagli strumenti proposti agli studenti per la soluzione (forbici, riga, squadra, carta trasparente ecc.), dai diversi supporti (carta a quadretti, fogli bianchi ecc.), dalla figura stessa (esterna all'asse, attraversata dall'asse ecc.) e, infine, dalla direzione dell'asse di simmetria all'interno del foglio (verticale, orizzontale ecc.). Gli autori del volume, citando Lurçat (1982), rilevano che la prima procedura applicata si affida in ogni caso alla percezione: non ci si deve stupire se anche un bambino della scuola materna riconosce l'asse di simmetria di una figura, in particolare se l'asse è verticale. Secondo gli autori, la ricerca di un asse di simmetria parte sempre da un'ipotesi che si basa su una percezione: un'idea, anche non rigorosa, su cui poi basare la costruzione. Alle scuole elementari ci si esercita maggiormente nel trasformare globalmente figure, senza porre l'attenzione sui particolari della figura stessa, sui punti. La simmetria assiale è una corrispondenza biunivoca tra punti del piano, per questo quando si passa a problemi più complessi, la strategia puntuale risulta più efficace che considerare l'intera figura. Basta esaminare esercizi in cui, ad esempio, si debba costruire la simmetrica di una figura poligonale i cui lati non seguono le diagonali dei quadretti del foglio. Per arrivare a una soluzione, la figura deve essere pensata come una successione di vertici uniti da segmenti. Queste situazioni costringono lo studente a considerare la distanza dei vertici dall'asse introducendo una procedura puntuale.

Ci sono comunque errori ricorrenti e tipici che si verificano in particolare se l'asse non è né *verticale* né *orizzontale*, oppure se l'asse attraversa la figura. Questi segnali

permettono di identificare un ostacolo (D'Amore, 1995): un'idea che inizialmente era efficace per il tipo di problemi proposti (seguire i quadretti, piegare il foglio ecc.) diventa fallimentare nei nuovi casi da affrontare (non è possibile piegare lo schermo della LIM, mancano i quadretti, l'asse è obliquo, la figura interseca l'asse ecc.). Didatticamente questi ostacoli si possono superare con situazioni, appositamente studiate, che "convincano" gli studenti della necessità di rivedere e modificare le proprie concezioni e strategie.

3 Domande di ricerca

D1. L'introduzione di artefatti significativi può favorire i processi cognitivi che qualificano il sapere matematico (esplorare, provare, interpretare, argomentare e comunicare)? (DECS, 2015).

D2. Cosa può aggiungere uno strumento tecnologico, come una lavagna multimediale, all'esperienza di laboratorio matematico?

D3. Consapevoli del prevalere delle procedure percettive nel realizzare figure simmetriche, l'orchestrazione di più strumenti può aiutare a superarle?

D4. La LIM può favorire il passaggio da una concezione globale (trasformazione di una figura) a una concezione puntuale (simmetrico di un punto) della simmetria assiale?

D5. L'attività di laboratorio fatta affiancando artefatti differenti, come le macchine matematiche e la LIM (utilizzata come touch-screen per un software di geometria dinamica), può introdurre l'idea di trasformazione geometrica come corrispondenza biunivoca tra punti del piano?

4 Metodologia di ricerca

La sperimentazione si è svolta in una seconda media di 18 alunni (11 ragazze e 7 ragazzi) del Collegio Papio di Ascona ed è stata realizzata in due fasi distinte:

- attività di laboratorio a gruppi con una macchina matematica (senza la LIM), della durata di tre ore;
- attività dialogata con schede di lavoro (con la LIM), della durata di tre ore.

Nella prima parte, gli studenti hanno lavorato con cinque pantografi avuti in prestito dal *Laboratorio delle Macchine Matematiche* dell'Università di Modena e Reggio Emilia. Al termine delle due fasi sopra descritte si è svolta una verifica e la discussione in classe dei relativi risultati (due ore).

Si è scelto di non anticipare l'oggetto del laboratorio: gli studenti non sono stati informati del tipo di trasformazione che effettua il pantografo.

Come strumenti di rilevamento dei dati è stato utilizzato un diario di tipo esperienziale, la video documentazione delle prime lezioni e i protocolli degli allievi. Nel corso delle attività didattiche sono stati annotati fatti significativi (interventi degli alunni, loro dialoghi, azioni di particolare interesse). Grazie alla collaborazione di due colleghi, è stato possibile filmare alcune parti del laboratorio coi pantografi e la riscrittura dei dialoghi è stata utilizzata nell'analisi dei dati. Nel corso dei lavori con la LIM o della verifica si è fatto anche uso delle fotografie per documentare momenti significativi. Tutti i protocolli prodotti dagli allievi sono stati raccolti e utilizzati per rispondere alle domande di ricerca.

Per la ricerca è stato utilizzato un videoproiettore con funzionalità interattiva. Il videoproiettore ha una periferica di rilevamento fissa: l'utilizzatore può così lavorare sulla stessa superficie sia con dei pennarelli (a rilevatore spento), sia interattivamente per mezzo di una penna (a rilevatore acceso e connesso al computer). L'utilizzo della penna rende il videoproiettore una lavagna multimediale (LIM). È possibile, inoltre, passare dalla modalità *finestra multimediale* alla modalità *spazio d'azione* senza perdere quanto disegnato alla lavagna. Ad esempio è possibile interagire con il software utilizzando la penna come mouse e passare poi alla modalità lavagna mantenendo lo stesso sfondo.

I file utilizzati con la LIM sono stati realizzati dall'insegnante con il software di geometria dinamica *Geogebra*.

4.1 Il laboratorio col pantografo per la simmetria assiale

L'artefatto proposto nella prima fase è stato il pantografo per la simmetria assiale (Figura 2).

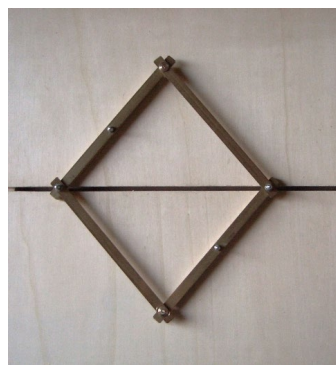
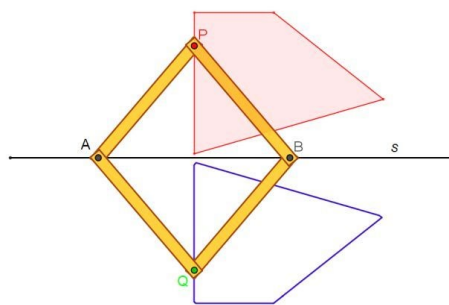


Figura 2
Pantografo per la simmetria assiale.

Figura 3
Immagine di un'animazione di un pantografo per la simmetria assiale.



Il pantografo è formato da un rombo articolato $AQBP$ (Figura 3) i cui vertici A e B sono vincolati a muoversi su una scanalatura s , mentre gli altri due vertici, P e Q , hanno due gradi di libertà. La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni limitate di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a s . Per le proprietà del rombo e per come questo è incernierato al piano (una delle diagonali giace sulla scanalatura s), i punti P e Q si corrispondono in una simmetria assiale (in cui l'asse è la scanalatura s). Quando P percorre una traiettoria assegnata, Q descrive la traiettoria simmetrica, come mostrato nella Figura 3 (Associazione Macchine Matematiche).

In accordo con i riferimenti teorici citati, l'attività si è svolta seguendo questa successione:

- a) Com'è fatta la macchina?
 - Esplorazione della macchina come artefatto a piccolo gruppo (quante aste, quanti vincoli, materiali, limiti della macchina);
 - produzione di testi (in gruppo o individuale);
 - condivisione dei risultati.
- b) Cosa fa la macchina?
 - Esplorazione della macchina come strumento, suddivisi in gruppi (all'artefatto si aggiungono gli schemi d'uso e la macchina diventa uno strumento);
 - produzione di congetture (individuale o in gruppo).
- c) Perché lo fa?
 - Matematica incorporata nella macchina: lavoro collettivo (caratteristiche costruttive dello strumento che permettono di ottenere la trasformazione, proprietà matematiche alla base della costruzione).

Per il lavoro a gruppi sono state fornite agli allievi schede di lavoro con domande atte a sostenere la genesi strumentale nell'esplorazione della macchina matematica.

4.2 Discussione attorno alla LIM

Sequenza 1

Agli studenti sono stati consegnati esercizi da svolgere individualmente: le stesse configurazioni presenti sulle schede sono state riproposte alla classe sulla lavagna interattiva e la discussione si è spostata attorno alla LIM (spazio d'azione).

La discussione collettiva è stata arricchita dalla possibilità di realizzare con un software di geometria dinamica e con la LIM la stessa trasformazione studiata con i pantografi. Lo scopo era evidenziare eventuali contraddizioni fra le risposte degli allievi e porre il problema della validazione.

Sequenza 2

Dopo il laboratorio con le macchine e la sequenza di esercizi, l'idea di simmetria è già stata condivisa, gli studenti sono stati invitati alla lavagna per svolgere, a turno, esperienze dinamiche di simmetria con l'ausilio dello strumento *Traccia* e delle funzionalità *touch-screen* della LIM.

Sequenza 3

La LIM in dotazione della classe permette a due utenti di scrivere contemporaneamente, perciò le esperienze dinamiche con l'ausilio della lavagna coinvolgono direttamente al massimo due alunni alla volta. Si è scelto quindi di far seguire alla *Sequenza 2*, in cui la LIM era protagonista, una serie di esercizi di anticipazione da svolgere anche con carta e matita, su schede prodotte dall'insegnante, e successivamente tornare alla discussione collettiva sulla LIM, dando così la possibilità, nelle tre sequenze, a tutti gli alunni di essere sempre attivi e di partecipare alla discussione. Le attività sono state progettate dall'insegnante e presentavano diverse categorie di esercizi (nelle figure seguenti sono riportati due esempi, gli altri si trovano in [Esercizi introduttivi.docx](#)):

- a) Tracciare l'asse di simmetria e la figura simmetrica a quella data, a partire da due punti simmetrici.

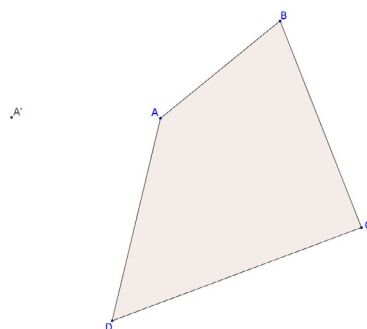


Figura 4
Esercizio assegnato:
Disegna l'asse e il simme-
trico del quadrilatero.

- b) Tracciare la figura simmetrica rispetto a un asse su foglio a quadretti (l'asse segue la diagonale dei quadretti):

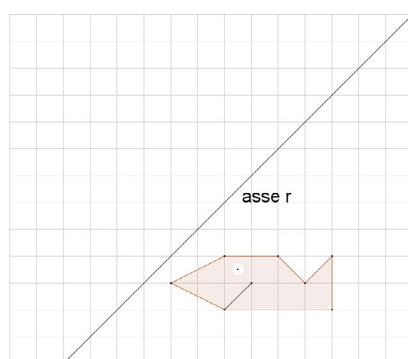


Figura 5
Esercizio assegnato:
Traccia il pesce simmetrico.

Al termine del percorso è stata somministrata una verifica in cui sono state proposte costruzioni di difficoltà crescente seguendo le indicazioni riportate nel quadro teorico e secondo le categorie di esercizi proposti durante la ricerca.

5 L'esperienza in classe

5.1 Come è fatta la macchina?

La classe è stata suddivisa in cinque gruppi composti di 3-4 allievi. Si è deciso di formare gruppi omogenei. Nei primi cinque minuti di lezione è stata introdotta l'attività e presentato l'artefatto senza anticipare la sua funzione. Si sono utilizzati termini come scanalatura, aste, tracciatore e puntatore, di cui alcuni alunni si sono serviti per descrivere il pantografo.

Nella fase iniziale i gruppi hanno lavorato approcciando con curiosità l'artefatto. Inizialmente si sono dedicati all'esplorazione della macchina, poi hanno compilato le

schede fornite dall'insegnante continuando a muovere le aste e utilizzando strumenti di misura. Ogni studente era libero di formulare una risposta condivisa con il gruppo o meno. Sono stati forniti anche fogli bianchi e le mine necessarie per tracciare i segni e per favorire anche le osservazioni dei movimenti.

Domande poste agli studenti ([Com'è fatta la macchina.docx](#)):

- Descrivi accuratamente la macchina servendoti anche di disegni se necessario.
- Prendi le misure delle diverse componenti della macchina.
- Di quante aste rigide è costituita la macchina?
- Vi sono aste fissate tra loro? In che modo?
- Quale figura formano tali aste?
- Quali parti del sistema si muovono e quali restano fisse?
- Vi sono parti fissate alla base in legno? Quali? Dove sono posizionate?

Compilando le schede e rispondendo alle domande, gli studenti hanno prodotto testi situati in cui erano ancora presenti molti riferimenti all'artefatto: questi testi sono stati utilizzati dall'insegnante come segni pivot, per favorire l'evoluzione di segni matematici. Terminata l'esplorazione durata circa 25 minuti, l'insegnante ha guidato la discussione collettiva mostrando un pantografo alla classe. Anche in questa fase sono stati utilizzati, dagli alunni e dall'insegnante, i termini *scanalatura*, *aste*, *tracciatore* e *puntatore*.

Utilizzando gli stessi gesti della fase di esplorazione ("gesti d'uso" della macchina), la docente si è fatta carico della genesi strumentale degli allievi: i gesti fanno parte di quei segni la cui produzione è sollecitata dall'utilizzo del pantografo. In termini di genesi strumentale, la successione di attività proposte agli studenti ha portato l'attenzione sull'importanza di quella parte del processo di esplorazione in cui la macchina è in movimento.

Ha suscitato dibattito la domanda *Quale figura formano tali aste?*

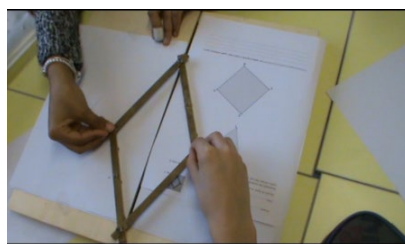
Fra le risposte: «un quadrilatero modificabile», «un quadrato che si può modellare (muovere)», «un rombo (che può diventare un quadrato)», «una figura con un asse di simmetria (la scanalatura), che è una diagonale». L'insegnante non conferma né sottolinea l'ultima osservazione. Conclude affermando che la macchina utilizza il rombo per realizzare disegni geometrici.

5.2 Cosa fa la macchina?

Nella lezione successiva a ogni gruppo sono assegnate una macchina e tre schede con figure diverse e la richiesta *Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi* ([cosa fa la macchina.docx](#)). La consegna aveva lo scopo di far riprodurre figure assegnate e far vivere esperienze sulle proprietà invarianti della simmetria assiale.

Figura 6

Immagine di due alunni al lavoro col pantografo. Estratto dal video [Alunni al lavoro col pantografo](#).



Sono riportate le risposte più significative dei cinque gruppi e alcune immagini realizzate col pantografo.

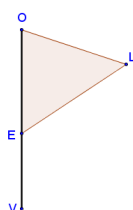


Figura proposta sulla scheda



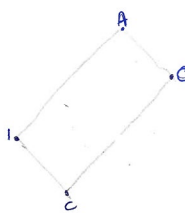
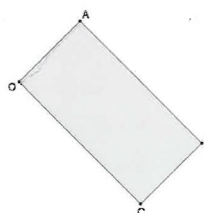
Figura riprodotta col tracciatore

Figura 7

Figura, sua trasformata e risposta di un gruppo.

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

OSSERVAMO CHE I PUNTI SONO INVERTITI RISPETTO ALL'IMMAGINE.



Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

se si fa un rettangolo, si fa un rettangolo anche dall'altra parte se il lato misura 10 cm anche dall'altra parte misura 10 cm, è TUTTO simmetrico

Figura 8

Figura, sua trasformata e risposta di un gruppo.

Le figure ottenute col pantografo non sono precise, ma consentono ai gruppi di sperimentare il movimento e gli invarianti. Solo due gruppi hanno sottolineato inizialmente "l'inversione" delle figure (Figura 7 e Figura 12), ma, nel corso dell'osservazione in classe, tutti hanno in seguito posto l'attenzione su questo aspetto.

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

Se da una parte ci si avvicina
si avvicina anche dall'altra parte.
Se traccio una linea retta si traccia una
linea retta anche dall'altra parte. praticamente
è tutto simmetrico!!! Se da una parte un
angolo ha 90° anche l'altro ha 90°

Figura 9
Risposta di un gruppo.

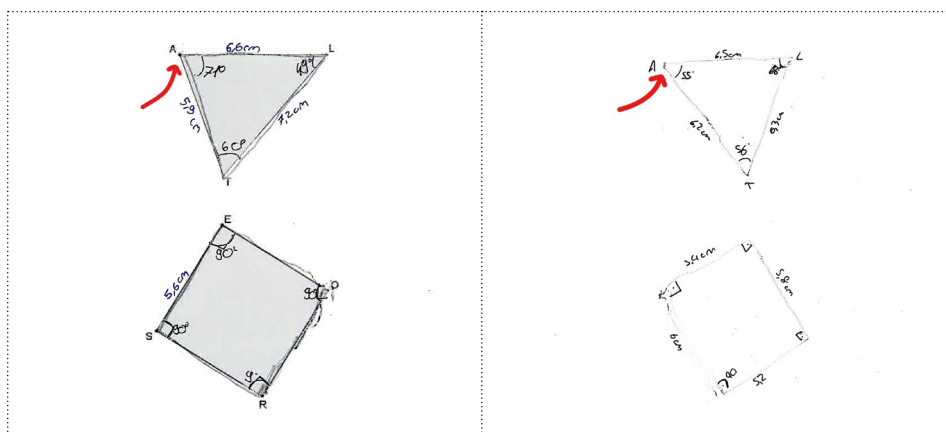


Figura 10
Figura e rispettiva
trasformata.

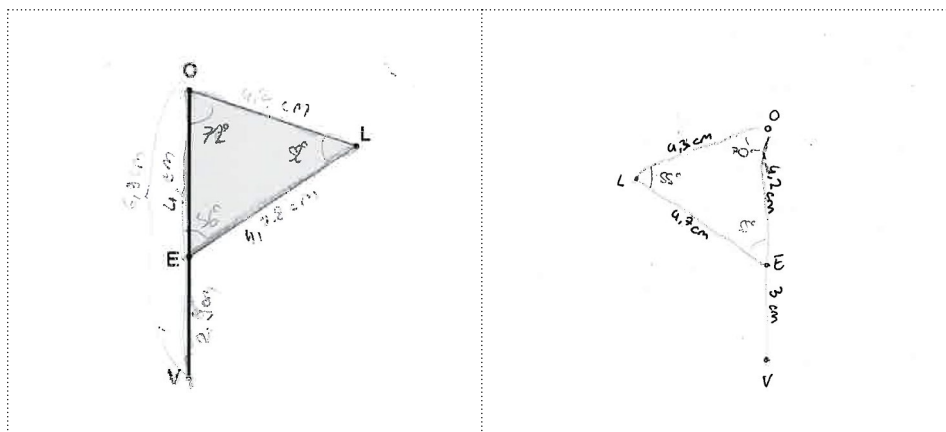


Figura 11
Figura e rispettiva
trasformata.

Si noti che nella Figura 10 le lettere sono state scambiate come se si volesse mantenere l'ordine della figura da trasformare, mentre un altro gruppo scrive quanto riportato nel protocollo in Figura 12.

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

Praticamente la lettera "A" nel foglio che abbiamo fatto noi diventa la lettera "L". Il tutto si inverte.

Figura 12
Risposta di un gruppo.

Sarà necessaria la discussione matematica della lezione successiva per fare chiarezza sull'ordine dei vertici. Nelle osservazioni in classe si è potuto constatare che la maggior parte degli alunni definisce la trasformazione con i termini "figure a specchio" come è riportato in alcuni protocolli, forse derivante dal loro vissuto o dall'insegnamento ricevuto nei livelli scolastici precedenti (Figura 13 e Figura 14).

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

Confrontando la figura di partenza con quella tracciata abbiamo notato che le due figure sono a "specchio", cioè che viene tracciato dalla punta viene tracciato anche dall'altra parte.

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

le figure sono come lo specchio.

Figura 13 e 14
Risposte di due gruppi.

Disegnare la figura simmetrica della circonferenza è stato particolarmente problematico per gli studenti, una di loro propone di utilizzare il compasso (Figura 15).

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

l' ha detto che si potrebbe anche solo fare il raggio e la circonferenza si può fare col compasso

Figura 15
Risposta di un gruppo.

Si osservi come diffusi riferimenti alla simmetria siano già evidenti in questa seconda fase e non solo in un paio di casi come in precedenza. Avendo tracciato i simmetrici di alcune figure geometriche (triangoli, rettangoli, ecc.). Gli studenti hanno osservato che si mantiene invariata anche l'ampiezza degli angoli e che rette parallele restano parallele. In questa fase tutti i gruppi si sono scontrati con i limiti fisici della macchina e hanno spesso dovuto modificare la posizione della scheda assegnata per fare in modo che fosse possibile tracciare le figure simmetriche.

5.3 Perché lo fa?

La terza lezione ha avuto inizio con una discussione collettiva. Si sono discusse le caratteristiche della trasformazione emerse nell'esplorazione col pantografo e le sue proprietà invarianti: se un punto appartiene a un semipiano, il suo simmetrico si trova nel semipiano opposto; la simmetria assiale mantiene invariata la lunghezza dei segmenti, ma non conserva l'orientamento dei punti; quando il puntatore si avvicina alla scanalatura il tracciatore si avvicina, quando il puntatore si muove in senso orario il tracciatore si muove in senso antiorario.

L'insegnante mostrava il pantografo agli alunni e guidava la discussione ponendo domande. Quando le risposte erano condivise venivano riportate alla lavagna. Lo scopo era di passare dai segni artefatto ai segni matematici.

Al termine dell'indagine è stata posta agli studenti la domanda: *quale trasformazione realizza la macchina?* In un primo momento le risposte sono state «triangoli», «tutti i quadrilateri», e infine ha prevalso la proposta di un alunno: «simmetria assiale, perché c'è un asse».

Alla classe è stata distribuita una scheda ([perché lo fa.docx](#)) che doveva essere completata per istituzionalizzare le osservazioni precedenti. In essa si chiedeva cosa cambia e cosa non cambia a seguito della trasformazione effettuata (la misura dei segmenti, l'ampiezza degli angoli, il parallelismo, la direzione delle rette, l'orientamento delle figure). L'insegnante si è fatta carico di riprendere le osservazioni fatte dalla classe in termini matematicamente corretti. La questione della direzione delle rette (cambia o no?) ha destato qualche perplessità, ma l'intervento di un allievo ha convinto tutti: «Sì, cambia. Tipo hai due rette parallele che vanno da su a giù, cioè da sinistra a destra (gesti con le mani), quando le riporti dall'altra parte vanno da destra a sinistra».

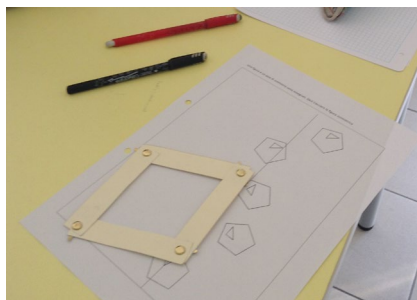
Terminata la discussione era necessario definire la simmetria assiale attraverso la costruzione del simmetrico di un punto rispetto a una retta, utilizzando riga e squadra alla lavagna. Gli strumenti utilizzati erano noti alla classe. La prima parte della costruzione è stata realizzata dall'insegnante e gli alunni dovevano ripetere i passi della costruzione sul loro foglio, ma è stato sufficiente riprendere le osservazioni scaturite dal gruppo per ottenere una definizione condivisa.

Gli studenti sono tornati poi sulle macchine divisi per gruppo e hanno ricevuto la seguente consegna: *quali caratteristiche della macchina permettono la realizzazione di tale trasformazione?* Erano a disposizione fogli bianchi, inoltre il puntatore e il tracciatore del pantografo avevano entrambi la possibilità di disegnare. Alcune risposte:

- «Perché fissa i due angoli con dei chiodi sull'asse, così che sia ancora (solo) possibile muoverli sull'asse così il rombo è diviso a metà e ogni cosa che si fa in una metà succede anche nell'altra».
- «Questa macchina serve per fare da specchio, se da una parte disegni un cerchio dall'altra ti disegnerà un cerchio».
- «Perché i segmenti isometrici sono collegati fra loro, di conseguenza se allarghi i due punti sull'asse, il puntatore e il tracciatore si avvicinano isometricamente all'asse. Il centro del rombo rimane sempre il medesimo».

L'attività con i pantografi è terminata con la raccolta dei protocolli degli alunni e la distribuzione del materiale per la costruzione di un rombo articolato, con la consegna di assemblarlo per la volta successiva.

Figura 16
Rombo articolato.



5.4 Discussione attorno alla LIM

Successivamente è stato introdotto un nuovo strumento: la LIM.

Agli studenti sono stati inizialmente assegnati esercizi da svolgere con carta e matita per poi passare alla discussione collettiva dei risultati con la lavagna. Negli esercizi assegnati, si trattava di verificare se una retta data è asse di simmetria per la figura proposta a meno di traslazioni. Le schede proposte inizialmente erano ancora di tipo esplorativo.

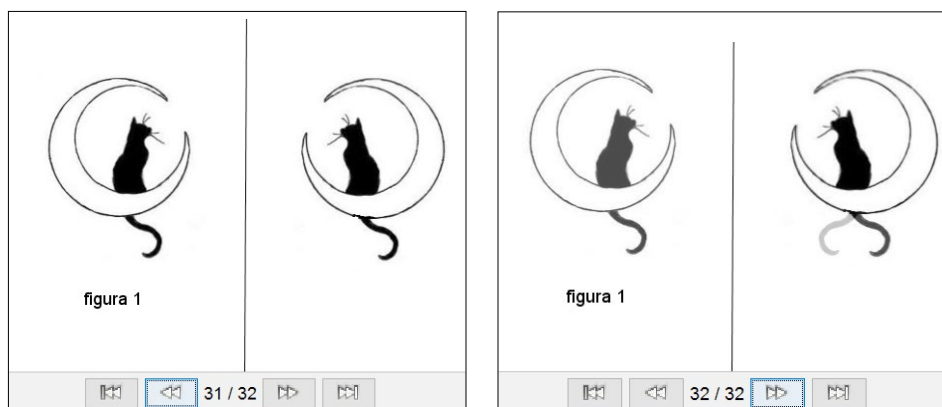
Nei file, predisposti per la fase di confronto alla lavagna, compariva la *barra di navigazione* e le figure erano state importate come immagini.



Figura 17
Consegna: Trova il gatto
simmetrico.

Alcuni elementi (nell'esempio il gatto a sinistra dell'asse e l'asse, nella figura 17) erano fissati, altri potevano essere spostati dagli studenti. Era possibile anche disegnare con la penna della LIM alternando le due funzioni: schermo touch del computer e lavagna. Gli studenti anticipavano le posizioni sulla lavagna e il software permetteva la verifica. Il gatto a destra doveva essere posizionato dall'alunno e si poteva verificarne l'esattezza procedendo con la barra di navigazione. L'immagine simmetrica del gatto compariva con bassa *opacità* in modo da non coprire la proposta dell'allievo. [Trova il gatto simmetrico.](#)

Figura 18
Esempio di verifica col
software della congettura.



In questa fase si fa riferimento ancora alla percezione globale, ma gli esercizi iniziano a sottolineare alcune caratteristiche della simmetria assiale: coppie di punti corrispondenti di due figure simmetriche devono avere la stessa distanza dall'asse e devono essere sulla stessa perpendicolare all'asse.

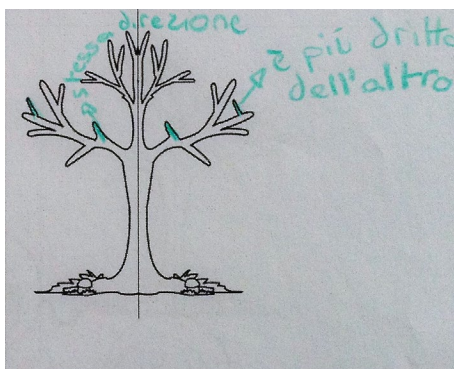


Figura 19
Protocollo di un'allieva
relativo alla consegna:
Individua il solo albero
simmetrico.

Gli esercizi hanno avuto una valenza ludica, i ragazzi si sono appassionati e discutevano in modo animato (Figura 19, [ricerca dell'albero simmetrico](#)).

Per favorire la genesi strumentale della macchina "simmetria assiale", che gli studenti avevano visto in azione, è stato utilizzato un file di esplorazione dal nome *la mosca*.

Muovi la "mosca" più grande e cerca di prendere quella piccola!!!!

Figura 20
Immagine dello schermo
del file "mosche".



All'apertura del file compaiono due punti e uno *slider*. Il punto di dimensione maggiore ha due gradi di libertà mentre il punto più piccolo è il suo simmetrico. L'asse di simmetria è nascosto. Agli alunni è stato poi chiesto di muovere, a turno, il punto mosca nel piano e osservare i movimenti del simmetrico, per il quale era stato attivato il comando

Traccia, con lo scopo di raggiungere la mosca piccola. Lo *slider* serve all'insegnante per modificare la posizione dell'asse nel piano.

Muovi la “mosca” più grande e cerca di prendere quella piccola!!!!



Figura 21
Immagine dello schermo
del file “mosche”.

Lo strumento *Traccia* è attivo su entrambi i punti. Gli studenti avevano due ruoli: lo studente che a turno andava alla lavagna interagiva con la LIM e gli altri che erano spettatori, suggerivano movimenti e scambiavano osservazioni col compagno alla lavagna.

Muovi la “mosca” più grande e cerca di prendere quella piccola!!!!

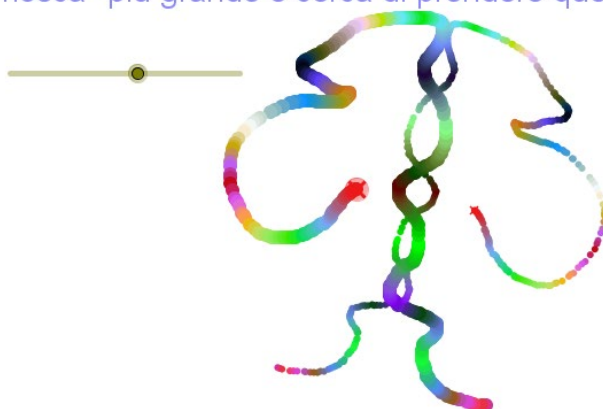


Figura 22
Immagine dello schermo
del file “mosche”.
Si veda il video [La mosca](#).

La LIM è stata utilizzata come “spazio d’azione” e la configurazione, molto libera, è stata coinvolgente per gli studenti. Si è reso necessario lasciare loro il tempo anche di provare a turno, per consentire che si esaurisse l’entusiasmo dovuto alle figure multicolore (gli alunni coinvolti nella ricerca conoscevano il software e lo hanno utilizzato in aula informatica, quindi inizialmente volevano sapere come avrebbero potuto riprodurre l’effetto). Dopo poche sequenze hanno individuato l’asse in corrispondenza dei punti in cui le *mosche* si sono incontrate. Nella fase successiva si è mostrato l’asse: gli alunni hanno riprodotto i movimenti di puntatore e tracciatore muovendo il punto *mosca* per osservare le posizioni reciproche.

Un'alunna, nel ruolo di spettatrice, ha domandato: «Ma allora il punto può passare dall'altra parte?». Più che una domanda è apparsa un'idea da sottoporre all'opinione del gruppo, che l'ha condivisa con differenti gradi di consapevolezza.

Il software ha favorito l'approccio dinamico allo studio della simmetria e la LIM ha permesso di sperimentare nuove configurazioni. Gli studenti hanno ritrovato i movimenti sperimentati con i pantografi, ma hanno potuto scoprire qualcosa di nuovo: la simmetria assiale è una trasformazione del piano e non c'è un semipiano privilegiato. Il lavoro di gruppo ha poi lasciato spazio a una fase con carta e matita in cui sono stati proposti svariati esercizi come per esempio:

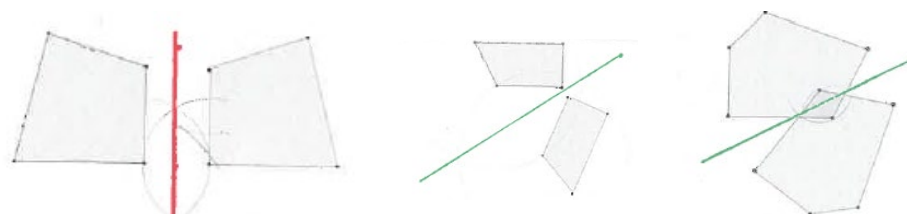


Figura 23
Consegna: Disegna l'asse di simmetria.

Dall'analisi dei protocolli e dall'osservazione in classe, si è evidenziato che alcuni alunni stavano mettendo in atto strategie soggettive, come l'utilizzo di strumenti a loro familiari (Figura 24), o di strumenti introdotti nel corso della ricerca (Figura 6): si è assistito ad evidenti segnali di un'evoluzione dell'idea di simmetria attraverso l'esplicitazione degli schemi di utilizzo personali (*strumentazione*).

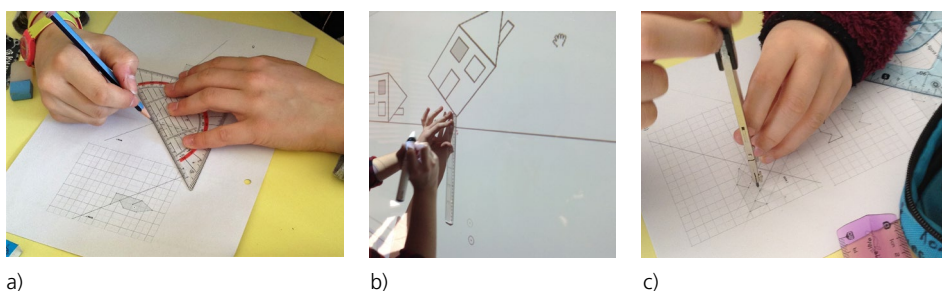


Figura 24
Immagini di alunni nello svolgimento di esercizi.

Nella terza sequenza di esercizi proposti era necessario modificare le posizioni dell'asse e introdurre figure attraversate dall'asse di simmetria. In questo caso i file proposti per la validazione con la LIM riportavano gli stessi soggetti, ma non riproducevano la stessa situazione, ma situazioni modificabili, quindi più dinamiche. Nelle figure seguenti sono riportati alcuni esempi dei protocolli cartacei.

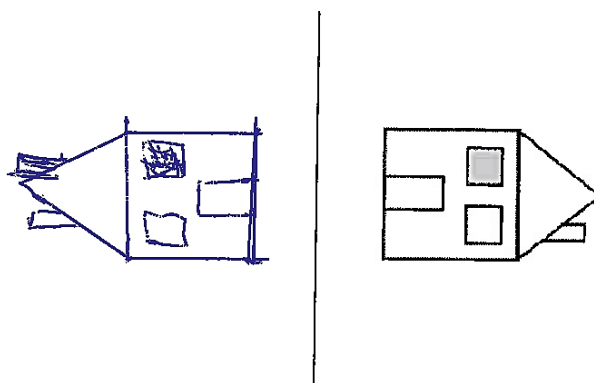
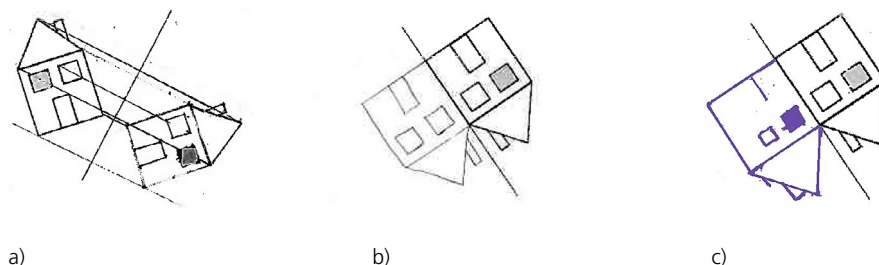


Figura 25
Consegna: Traccia la casetta simmetrica.

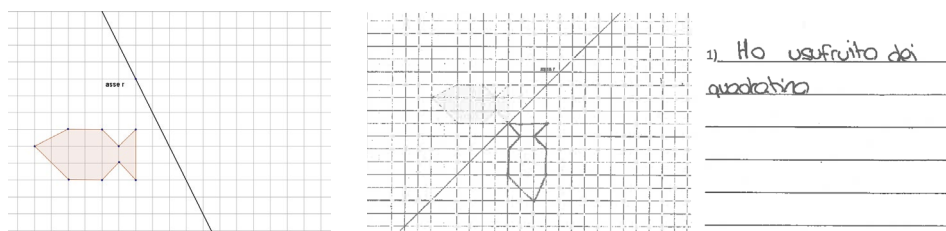
Alla figura sono stati aggiunti piccoli particolari per spostare l'attenzione dell'alunno dalla percezione globale al punto. Nella Figura 25 è ben visibile la difficoltà di posizionare il camino della casetta. La stessa difficoltà si ritrova in altri casi anche più complessi come in Figura 26.

Figura 26
Disegni di alunni:
casette simmetriche.



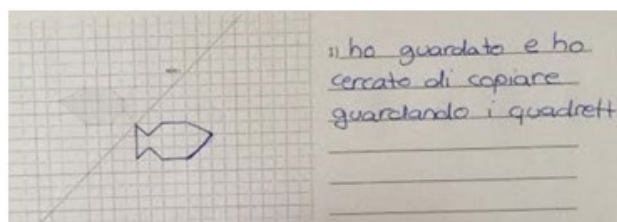
Negli esercizi conclusivi è stato richiesto di esplicitare la strategia utilizzata: di seguito alcuni esercizi svolti dagli alunni.

Figura 27a
Protocollo di un allievo
relativo alla consegna:
Trova il pesce simmetri-
co! Descrivi il metodo
da te utilizzato per ogni
figura.



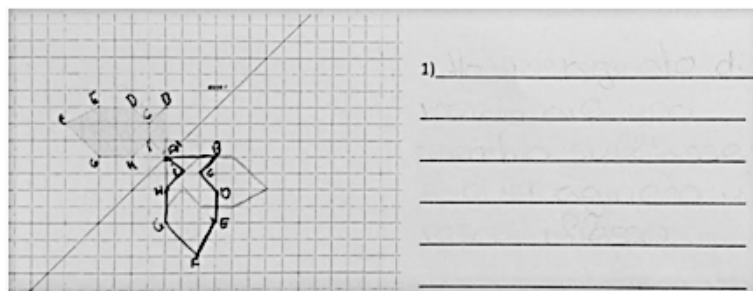
Nell'esempio di Figura 27a e 27b l'asse e alcuni lati del "pesciolino" non seguono le diagonali dei quadretti, ma la figura coincide con l'asse in un punto e la strategia ben nota agli studenti dalle scuole elementari risulta ancora efficace. Questa procedura, comune a tutti, in alcuni casi però conduce a conclusioni errate:

Figura 27b
Protocollo di un allievo
relativo alla consegna:
Trova il pesce simmetri-
co! Descrivi il metodo
da te utilizzato per ogni
figura.



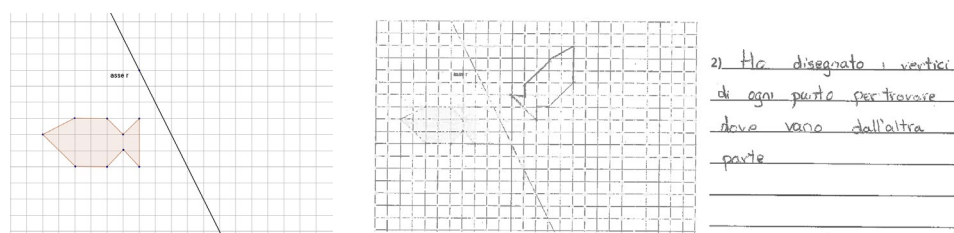
Un'altra alunna scrive: «penso che sia uno specchio e quindi, poiché la pinna del pesce è la parte più bassa e tocca la linea di simmetria dall'altra parte, la parte più in alto della pinna tocca la linea di simmetria». Alcuni alunni ricorrono alla piegatura del foglio: «ho piegato il foglio per capire esattamente dove tracciare le linee del pesce». In Figura 27c è riportato un esercizio di una alunna in cui è evidente un primo tentativo poi abbandonato, inoltre compare un testo cancellato che fa pensare a un ripensamento.

Figura 27c
Protocollo di un allievo
relativo alla consegna:
Trova il pesce simmetri-
co! Descrivi il metodo
da te utilizzato per ogni
figura.



Il testo scritto dall'allieva era: «ho immaginato di posizionare uno specchio sull'asse r e ho immaginato il pesce riflesso». La procedura a specchio non era risultata efficace.

Figura 28
Protocollo di un allievo
relativo alla consegna:
Trova il pesce simmetri-
co! Descrivi il metodo
da te utilizzato per ogni
figura.



In Figura 28 il “pesciolino” non tocca l’asse e si legge nel commento dell’allievo l’esi-
genza di tracciare prima i punti simmetrici dei vertici.

Figura 29
Protocollo di un allievo
relativo alla consegna:
Trova il pesce simmetri-
co! Descrivi il metodo
da te utilizzato per ogni
figura.



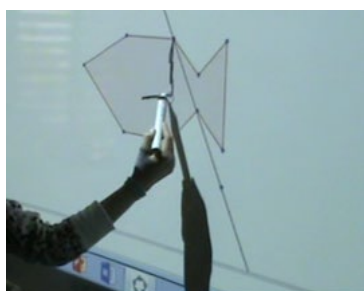
Figura 30
Protocollo di un allievo
relativo alla consegna:
Trova il pesce simmetri-
co! Descrivi il metodo
da te utilizzato per ogni
figura.



L'alunna che ha realizzato queste trasformazioni, e altri che hanno seguito procedure simili, non ha però scritto la metodologia utilizzata come invece aveva fatto nel caso dei quadretti.

Viste le notevoli difficoltà emerse nel lavoro su carta, gli studenti che avevano acquisito sicurezza sono stati invitati a mostrare i gesti delle loro costruzioni alla lavagna (Figura 31 e Figura 32). A partire da figure simili a quelle proposte, l'insegnante modificava le configurazioni, mostrando o meno lo sfondo a quadretti e facendo lavorare gli studenti con la penna. Il "pesciolino" è costruito con lo strumento *Poligono* e quindi era possibile far tracciare dal software il pesciolino simmetrico per la validazione.

Figura 31
Immagini dei gesti di una
alunna alla LIM.

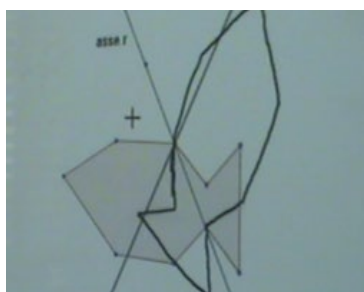


a)

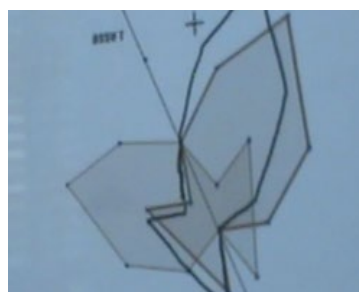


b)

Figura 32
Fasi della validazione
della costruzione.



c)



d)

5.5 Verifica

Nella verifica sono stati proposti esercizi in ordine crescente di difficoltà: agli studenti era richiesto di individuare la figura simmetrica di una data rispetto ad un asse, oppure di individuare l'asse di simmetria date due figure. Gli studenti potevano utilizzare gli strumenti e le strategie che avevano scelto per le attività in classe (Figura 27a e Figura 27c). Si riportano esempi per ogni tipologia di esercizi, i risultati e alcune immagini. Gli alunni erano tutti presenti alla verifica.

Figure con asse di simmetria che segue i quadretti (1).

La figura scelta nella prima richiesta della verifica ricordava quella dell'ultima esercitazione con la LIM, ma aveva in più alcuni elementi per verificare la percezione puntuale,

che rappresenta uno degli obiettivi dell'esperienza. Questo esercizio è stato risolto correttamente da 17 alunni su 18.

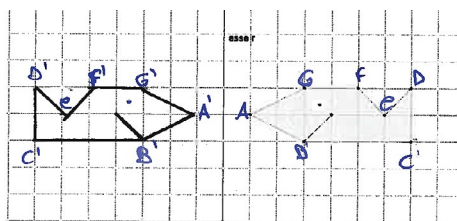


Figura 33
Figura tracciata da un
alunno: l'asse segue i
quadretti.

Figure con asse di simmetria che segue i quadretti (2).

In due casi la figura è stata traslata, sedici sono invece le soluzioni corrette.

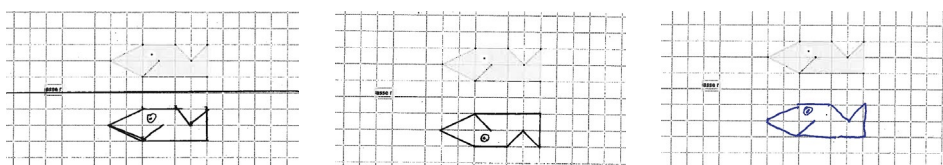


Figura 34
Figure tracciate dagli
alunni: l'asse segue i
quadretti.

L'asse non attraversa la figura, su foglio a quadretti.

Alcuni studenti hanno utilizzato la strategia condivisa nelle ultime lezioni e sono partiti dai vertici: nei loro elaborati compaiono infatti i nomi dei vertici e in alcuni casi i segmenti che congiungono i due punti simmetrici. Due alunni risolvono i primi esercizi servendosi dei quadretti e decidono di utilizzare una strategia puntuale solo quando i quadretti non sono più d'aiuto.

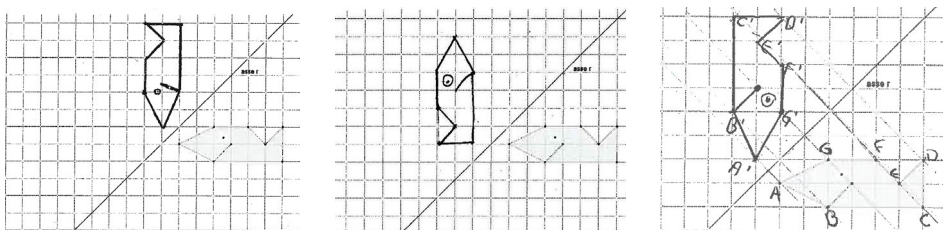


Figura 35
Figure tracciate dagli
alunni: l'asse, esterno
alla figura, segue la
diagonale dei quadretti.

L'asse attraversa la figura su foglio a quadretti.

Due studenti sbagliano la trasformazione e tre non forniscono un tentativo di soluzione, gli altri risolvono correttamente.

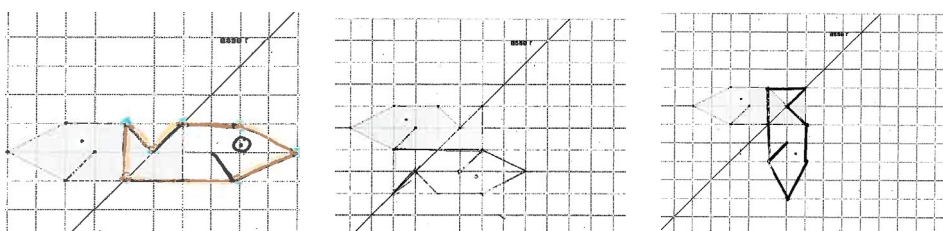


Figura 36
Figure tracciate dagli
alunni: l'asse attraversa
la figura e segue la
diagonale dei quadretti.

Esercizio su foglio bianco.

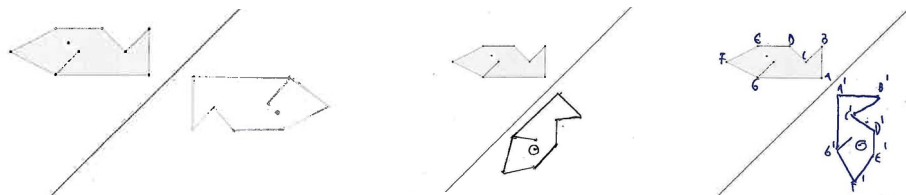


Figura 37
Figure tracciate da allievi
su foglio bianco.

Le risposte corrette sono state 14, inoltre l'osservazione dell'elaborato di un alunno, mostra come abbia tentato una strategia per punti senza riuscire però a portare a termine la costruzione del simmetrico (Figura 38).

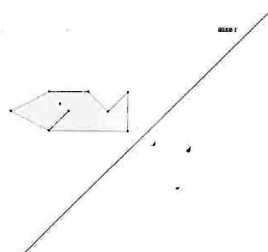


Figura 38
Tentativo di un alunno
di tracciare la figura
simmetrica a partire dai
vertici.

Esercizio su foglio bianco, con figura attraversata dall'asse.

Questo esercizio ha avuto solo cinque risultati positivi e cinque tentativi errati. Ben otto studenti non hanno tentato la soluzione.

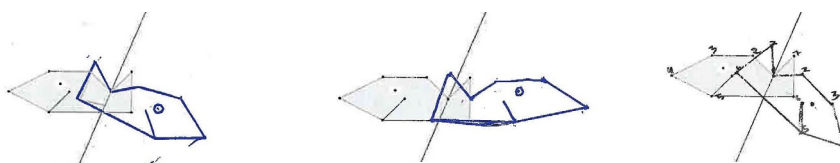


Figura 39
Simmetria assiale su
foglio bianco.

Disegnare l'asse di simmetria di una configurazione di due figure.

In questo esercizio tutti gli studenti hanno tentato la soluzione e in quattordici hanno disegnato correttamente l'asse di simmetria di una configurazione assegnata.

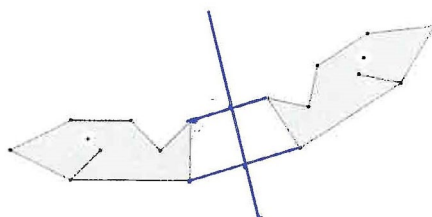
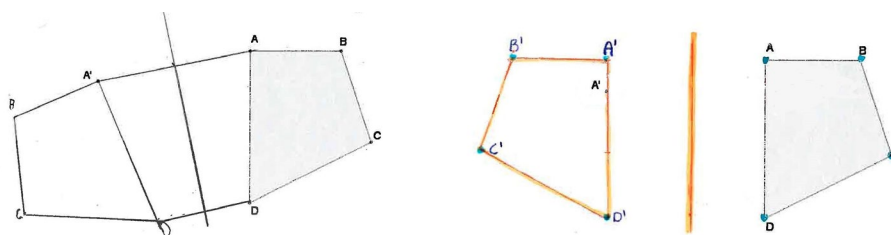


Figura 40
Asse di simmetria dise-
gnato da un alunno.

Un altro esercizio prevedeva diverse configurazioni in cui occorreva distinguere fra quelle simmetriche e quelle che non lo erano: 14 alunni hanno risposto correttamente per tutte le configurazioni e un solo alunno non ha svolto l'esercizio.

Disegnare una figura simmetrica ad una data a partire dall'immagine di uno dei vertici.

Figura 41
Soluzioni proposte da
alcuni alunni.



L'ultimo esercizio è stato risolto correttamente solo da quattro studenti, mentre sette allievi hanno fornito tentativi solo parzialmente corretti. Tre alunni non hanno provato a risolverlo, mentre quattro studenti non hanno individuato la strategia adeguata.

6 Risposte alle domande di ricerca

L'artefatto e le attività proposte hanno suscitato interesse e favorito il confronto fra gli studenti. La situazione fornita, adattandosi ai diversi stili cognitivi, ha coinvolto gli studenti in tutte le sue fasi.

Inizialmente il pantografo ha suscitato curiosità e le congetture degli studenti sono state facilmente verificabili manipolando la macchina. In tutte le fasi del lavoro con il pantografo sono state inoltre stimulate l'argomentazione e l'interpretazione dei procedimenti e dei risultati. È in questa prima fase che la percezione globale di simmetria è emersa (*Cosa fa la macchina?*, *Perché lo fa?*), poiché gli studenti hanno posto l'attenzione sulla figura (globale) e non sui suoi punti (puntuale). La dinamicità della macchina è risultata subito limitata ed è stato utile e necessario affiancare le potenzialità di un software di geometria dinamica per verificare tutte le congetture emerse dalla classe nella fase di esplorazione.

L'uso integrato di un software di geometria, che permette di variare dinamicamente le posizioni dell'asse di simmetria, e della LIM, hanno consentito una verifica immediata delle loro anticipazioni, consentendo di mettere in evidenza l'inefficacia della procedura percettiva per disegnare la figura simmetrica di una assegnata rispetto ad un asse e la necessità di costruire nuove strategie. L'orchestrazione strumentale ha permesso di favorire l'idea di trasformazione geometrica come corrispondenza biunivoca tra punti del piano.

La funzione *Traccia di Geogebra* ha aggiunto nuove rappresentazioni del concetto, mettendo in evidenza gli aspetti puntuali della trasformazione.

La discussione matematica è avvenuta, nella fase conclusiva, intorno alla LIM: gli alunni hanno potuto alternarsi alla lavagna interattiva per realizzare esercizi di anticipazione, esplorazione e scoperta nell'ambito della ricerca del simmetrico di un punto rispetto a un asse.

7 Conclusioni

Considerando la natura della classe e la presenza di due alunni con disturbi specifici dell'apprendimento, le attività svolte sono state complessivamente coinvolgenti e adatte ai diversi stili cognitivi. L'attività, infatti, caratterizzata da una forte componente visiva, ha messo in evidenza abilità geometriche che in alcuni alunni prevalgono rispetto alle abilità analitiche (Krutetskii, 1976, citato in Bartolini Bussi & Maschietto, 2007) ridando fiducia a ragazzi spesso demoralizzati dalle loro difficoltà. Questi alunni sono stati in grado di argomentare le proprie scelte senza timore e il confronto si è sempre svolto in modo sereno.

La macchina matematica proposta, pur avendo molti limiti fisici, è stata per tutti gli studenti una esperienza reale alla quale far riferimento nel corso dello svolgimento delle attività di laboratorio. Tutti gli allievi, incuriositi, hanno esplorato il pantografo e sono rimasti colpiti dal rombo articolato e dai suoi movimenti. In poco tempo sono stati in grado di riconoscere che l'artefatto proposto disegnava figure simmetriche. Nel ricercare le proprietà meccaniche del pantografo che permettono di realizzare figure simmetriche, più studenti hanno individuato nel centro del rombo il punto chiave per la simmetria. Il *centro del rombo* è l'ideale punto d'incontro delle diagonali del rombo, esso non compare nella macchina poiché solo una delle due diagonali, quella che coincide con la scanalatura, è visibile, ma ciò nonostante è diventato per gli studenti un segno al quale fare riferimento anche nella fase successiva. La macchina è quindi stata arricchita dalle esperienze e dai gesti degli alunni; il rombo articolato, racchiude il concetto di ortogonalità che è necessario per arrivare a una corretta concettualizzazione della simmetria assiale, ed è divenuto una rappresentazione alla quale far riferimento anche in assenza della macchina.

Per passare a esercizi più complessi, non riproducibili col pantografo, sono stati introdotti esercizi realizzati con *Geogebra* e progettati per essere svolti con la LIM utilizzata come touch-screen.

Le attività svolte con la LIM hanno consentito un'esplorazione delle configurazioni priva di imperfezioni e più veloce. Ogni esercizio è stato un po' un gioco e un po' una sfida. Le congetture degli studenti sono state messe alla prova, le conoscenze sono state socializzate e si sono costruiti significati condivisi.

La LIM ha consentito di coinvolgere tutti, anche gli alunni in difficoltà con il pantografo. Le idee degli studenti sono state rapidamente verificate e le configurazioni modificate seguendo anche i ritmi della classe. La discussione matematica ne ha tratto un notevole vantaggio per la continua condivisione fra compagni e insegnante.

La funzione *Traccia*, tipica del software, è stata fondamentale per incrementare ulteriormente l'utilizzo della LIM come spazio d'azione e richiamare, nella seconda fase della ricerca, gli schemi d'uso dell'attività col pantografo.

Il gioco delle *mosche che si rincorrono* è stato un valido momento di conflitto cognitivo: si è passati dalla costruzione di figure simmetriche alla determinazione del simmetrico di un punto. L'esternazione spontanea di un'alunna «Ma allora il punto può passare

dall'altra parte?» ha posto per la prima volta veramente l'attenzione del gruppo su un punto e non più su un'intera figura contenuta in uno dei due semipiani.

Gli studenti hanno sentito la necessità di modificare la propria concezione di simmetria: la lavagna non si può piegare e non c'è un semipiano privilegiato come quando si fa riferimento allo specchio (da una parte abbiamo l'oggetto, dall'altra solamente la sua immagine); le due mosche si possono scambiare i ruoli e si incontrano solo sull'asse. L'esercizio proposto era stato studiato proprio per accompagnare al superamento dell'ostacolo.

In precedenti sperimentazioni (Bettini, Facchetti & Maschietto, 2012) era stata realizzata alla lavagna tradizionale un'attività simile a quelle delle *mosche*: con il gesso si tracciava una traiettoria e un alunno doveva disegnare la traiettoria simmetrica rispetto ad una retta. L'azione era la stessa, ma non c'era modo per gli studenti di verificarne la correttezza: l'attività coinvolgeva esclusivamente l'alunno alla lavagna e l'insegnante. Dall'esercizio proposto in passato non era scaturita una discussione matematica: lo strumento utilizzato era meno significativo.

L'orchestrazione non ha riguardato unicamente gli strumenti, ma anche i diversi schemi d'uso. Durante la discussione matematica seguita al gioco delle mosche gli studenti si osservavano, scambiavano significati, facevano gesti e si interrogavano sui gesti dei compagni.

La lavagna, che sia interattiva o tradizionale, non può essere considerata uno strumento matematico poiché essa, al contrario del pantografo, non è matematicamente "ricca". La LIM però, in questa sperimentazione è stata arricchita matematicamente dall'insegnante che l'ha affiancata a un software di geometria e a file appositamente progettati. La combinazione di questi tre elementi è divenuta uno strumento matematico per mediare significati relativi alla simmetria assiale e per favorire, come auspicato, il passaggio da una concezione globale ad una puntuale della simmetria.

Bibliografia

- Associazione Macchine Matematiche (2017, 4 aprile). Associazione Macchine Matematiche, Modena. Disponibile in <http://www.macchinematematiche.org>.
- Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2007). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Milano: Springer.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32, 269-294.
- Bettini, G., Facchetti, C., & Maschietto, M. (2012). *Costruzione di significati nel laboratorio di matematica: attività con la macchina matematica per la simmetria assiale*. In O. Robutti, & M. Mosca (a cura di). *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DiFiMa 2011*, pp. 193-204. Torino: Kim Williams Books.
- Burton Monney, S., & Jauquier, L. (2010). *LIM Insegnare con le lavagne interattive multimediali*. Bern: Educa.ch. Disponibile in http://insegnamento.educa.ch/sites/default/files/20110126/guide_iwb_1.pdf (consultato il 15.5.2017).

- D'Amore, B. (1995). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- DECS, (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Bellinzona: DECS. Disponibile in: <http://www.pianodistudio.ch>.
- Didoni, R., & di Palma, M. T. (2009). Lavagne interattive multimediali e innovazione didattica. *Tecnologie Didattiche*, 48, 32-38.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37-65.
- Fénichel, M., Pauvert, M., & Pfaff, N. (2004). *Donner du sens aux mathématiques*. Paris: Bordas.
- Paola, D. (2003). Il laboratorio di matematica. *Atti XXIII Convegno UMI – CIIM, L'insegnante di matematica nella scuola di oggi: formazione e pratica professionali*. 150-152.
- Prodi, G., & Bastianoni, A. (2003). *Scoprire la matematica: Geometria del piano*. Milano: Ghisetti e Corvi.
- Rabardel, P. (1995a). *Les hommes et les technologies. Approches cognitive des instruments contemporains*. Paris : A. Colin.
- Rabardel, P. (1995b). Qu'est-ce qu'un instrument? Les dossier de l'Ingénierie éducative. *CN-DP-DIE*, mars 1995, 61-65.
- Salvadori, I. (2012). Cosa sappiamo circa l'efficacia della LIM nel contesto scolastico? *Form@re*, 78(12), 4-10.
- Samson, G., Lefebvre, S. & Gareau, A. (2016). *L'impact de l'utilisation des tableaux numériques interactifs sur les pratiques pédagogiques des enseignants du primaire et du secondaire*. Université du Québec a Trois-Rivières.
- Sinclair, N., & Kaur, H. (2011a). *Young children's understanding of reflectional symmetry in a dynamic geometry environment*, Ankara: PME.
- Sinclair, N. (2011b). L'uso della geometria dinamica nella scuola primaria: un modo nuovo di vedere, pensare, parlare. In O. Robutti & M. Mosca (a cura di). *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DiFiMa 2011*. 67-74. Torino: Kim Williams Books.
- Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25, 91-138.
- Vygotskij, L. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Process*. Harvard University Press.
- Weyl, H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press.

Allegati

1. [Esercizi introduttivi.docx](#)
2. [Com'è fatta la macchina.docx](#)
3. [Cosa fa la macchina.docx](#)
4. Video - [Alunni al lavoro con il pantografo](#)
5. [Perché lo fa.docx](#)
6. Video - [Trova il gatto simmetrico](#)
7. Video - [Ricerca dell'albero simmetrico](#)
8. Video - [La mosca](#)

Autore / Giuliana Bettini

Scuola media di Giubiasco

giuliana.bettini@edu.ti.ch



© 2017 by the author(s).