DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 71 - 89, DOI: 10.33683/ddm.23.13.4

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una classe di seconda media

Analogy in mathematics: beliefs and competences in a seventh-grade class

Giada Bordogna
Scuola media Giubiasco – Svizzera

giada.bordogna@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo presenta il percorso didattico svolto in una classe di seconda media con lo scopo di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei problemi di matematica. Dopo aver raccolto le convinzioni iniziali degli allievi è stato sviluppato un itinerario composto da molteplici attività finalizzato ad approfondire e rafforzare la consapevolezza degli allievi rispetto alle diverse tipologie di analogia e al loro utilizzo per facilitare la risoluzione di problemi. I risultati ottenuti mostrano come la consapevolezza degli allievi sulle diverse tipologie di analogie e sulla loro utilità sia migliorata. In particolare, essi riconoscono che saper individuare due problemi analoghi rispetto al procedimento facilita la risoluzione di situazioni nuove. Al termine del percorso si riscontra anche che la capacità di una parte degli allievi di applicare il pensiero analogico nella risoluzione dei problemi è aumentata, favorendo così l'attività di transfer di conoscenze.

Parole chiave: analogia; pensiero analogico; problem solving; strategia risolutiva; transfer di conoscenze.

Abstract / This paper illustrates the didactic itinerary performed in a 7th-grade class with the aim of investigating the development of the students' beliefs and skills regarding the use of analogy in solving mathematical problems. After collecting the students' initial beliefs, an itinerary consisting of multiple activities was developed to deepen and strengthen the students' awareness of the different types of analogy and their use to facilitate problem solving. Results show how students' awareness of the different types of analogies and their usefulness has improved. They recognize that knowing how to identify two similar problems with respect to the procedure facilitates the resolution of unknown situations. At the end of the itinerary, it is also found that the ability of a part of the students to apply analogical thinking in solving problems has increased, thus favoring the transfer of knowledge.

Keywords: analogy; analogical thinking; problem solving; resolution strategy; transfer of knowledge.

1 La risoluzione di problemi

Fin dall'antichità, la risoluzione di problemi (o problem solving) costituisce una parte fondamentale dello studio della matematica, che si rivela essere piena di ostacoli e insidie per gli studenti.
Polya (1945), tra i primi ricercatori a studiare l'apprendimento della risoluzione di un problema, descrive questa attività come la scoperta di mezzi non ancora noti per raggiungere uno scopo ben definito:

> «Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».
>
> (Polya, 1945, citato in D'Amore & Fandiño Pinilla, 2006, p. 649)

Le definizioni di *problema* presenti in letteratura sono varie e complesse. Di seguito, si è deciso di considerare la distinzione tra problemi ed esercizi adottata da D'Amore (2014): entrambi propongono dei contesti "problematici", con la differenza che un esercizio può essere risolto utilizzando regole già apprese e in via di consolidamento, mentre la risoluzione di un problema necessita l'utilizzo di più regole (alcune delle quali introdotte proprio in quell'occasione) o la successione di operazioni frutto di una scelta strategica da parte dell'allievo. Il confine tra il significato dei due termini è labile, in quanto una stessa situazione può essere vissuta come esercizio o problema a dipendenza del grado scolastico in cui viene proposto o, all'interno della stessa classe, della padronanza dei concetti da parte degli allievi stessi. Fatta questa distinzione, circoscriviamo il ragionamento all'oggetto "problema di matematica".
Dal punto di vista operativo, Polya (1945) suddivide il processo risolutivo di un problema in quattro fasi ben distinte:
1. *comprendere il problema*, ovvero comprendere la cornice di senso, identificare i dati, determinare cosa si sta cercando ecc.;
2. *concepire un piano*, individuando il rapporto tra i dati del problema e l'incognita;
3. *mettere in atto il piano*;
4. *esaminare la soluzione ottenuta*, riflettendo sulla sua compatibilità con i vincoli e le condizioni del problema.

Gli allievi sembrano riscontrare maggiori difficoltà nelle prime fasi del processo risolutivo, quelle cioè di lettura e comprensione del problema, senza le quali non è possibile ideare una strategia. Gli ostacoli riguardanti la comprensione del testo possono essere legati a diversi aspetti come alla presenza di un lessico o di un contesto sconosciuto all'allievo, a una lettura superficiale oppure all'incapacità di definire con chiarezza l'obiettivo del problema (Zan, 2007). Superato lo scoglio della comprensione del testo, non sempre gli studenti sono in grado di attivare le proprie conoscenze per elaborare un piano d'azione: si tratta infatti di un processo complesso e personale, non lineare, in cui entrano in gioco fattori cognitivi, metacognitivi ed emozionali. Come sottolinea Zan (2007, p. 159), «il fatto di avere a disposizione un repertorio di strategie non risolve automaticamente il problema centrale di quali utilizzare e come».
È a questo punto che l'analogia entra in gioco: essa può essere utilizzata per concepire un piano, per selezionare o per rigettare possibili strategie risolutive. L'analogia, dunque, può essere utilizzata come «strumento didattico esplicito, per ragionare, per pensare, per sperimentare, per porsi domande intelligenti ed acute» (Sbaragli et al., 2008, p. 5).
L'esperienza didattica qui presentata si è proposta di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi di una seconda media riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei

problemi di matematica. Per maggiori dettagli sul quadro teorico, sulle attività descritte e sull’analisi dei dati raccolti si rimanda al lavoro di tesi completo,[1] da cui è tratto il presente contributo.

2 Analogia come strategia di pensiero

Il significato etimologico del termine *analogia*, derivante dal greco αναλογία, è quello di proporzione matematica: un’uguaglianza di rapporti tra quattro grandezze diverse che può essere rappresentata secondo lo schema $a : b = c : d$. Esiste però un’interpretazione più ampia del termine, secondo la quale l’analogia «fa riferimento alla costruzione di un nesso di similitudine che la mente può costruire tra cose, situazioni e processi che sono differenti, determinando così un’estensione probabile della conoscenza» (Treccani, 2009).
È proprio questo secondo significato che ci interessa, in quanto l’obiettivo dell’esperienza didattica qui descritta è quello di promuovere l’utilizzo dell’analogia come strategia risolutiva, favorendo così il transfer di conoscenze da un contesto conosciuto a uno ignoto.
A questo proposito, Polya (1954, p. 13) parla dell’analogia come di una somiglianza che può essere definita in modo chiaro a un livello concettualmente più alto. Due oggetti con degli aspetti in comune possono essere definiti analoghi solo se è possibile ridurre gli aspetti in cui si accordano a dei concetti ben definiti. Uno degli esempi discussi dall’autore riguarda l’analogia tra il triangolo nel piano e il tetraedro nello spazio, legati dal fatto che entrambi rappresentano il poligono (rispettivamente il poliedro) con il minor numero di lati (rispettivamente facce) possibili.
Richland e Begolli (2016), rifacendosi all’interpretazione di Gentner et al. (1997), definiscono il pensiero analogico come il processo cognitivo che permette agli esseri umani di comprendere i fenomeni del mondo con sistemi di relazioni che possono essere manipolati e confrontati tra loro.
L’importanza dell’analogia come strategia di pensiero è largamente sostenuta nella letteratura, sia da un punto di vista didattico, sia per l’evoluzione stessa della disciplina matematica.
Speranza (1988) dichiara espressamente l’importanza dell’analogia nella didattica perché essenziale per lo sviluppo del pensiero critico e matematico. Brown (1989) e Vosniadou e Ortony (1989) sottolineano come l’utilizzo dell’analogia comporti l’attivazione delle conoscenze pregresse per la costruzione di nuovi concetti, favorendo così l’attività di transfer. Quest’idea è sostenuta anche da Stavy e Tirosh (2001), secondo cui lo scopo primario dell’insegnamento matematico è proprio quello di incoraggiare gli studenti a trasferire la propria conoscenza da una situazione a un’altra. Inoltre, la ricerca di analogie può portare a una maggiore comprensione delle preconoscenze e dunque a una loro ristrutturazione concettuale, perché il processo di comparazione permette di scoprire e comprendere nuove peculiarità degli oggetti matematici coinvolti (Gentner & Wolff, 2000, citato in Vamvakoussi & Vosniadou, 2012).

Riconosciuta la valenza dell’analogia come strumento didattico, è importante essere consapevoli della sua duplice natura e delle insidie che essa nasconde, come ben espresso da Bazzini (1995, citato in Sbaragli et al., 2008, p. 18) che la definisce come «una lama a doppio taglio». Il pensiero analogico può essere infatti fonte di misconcezioni e conclusioni sbagliate, se gli elementi su cui si basa l’analogia non fanno in realtà parte della struttura matematica condivisa dai due sistemi messi a confronto (Fischbein, 1987).
Inoltre, Richland e Begolli (2016) evidenziano la difficoltà degli studenti nel riconoscere la possibilità

1. Lavoro di Diploma di Giada Bordogna (2022), intitolato “L’analogia in matematica: convinzioni e competenze in una seconda media”, svolto nell’ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrici: Silvia Sbaragli, Marta Barbero. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: https://tesi.supsi.ch/4269/.

e/o l’utilità di effettuare un ragionamento per analogia, oltre al grande sforzo richiesto a livello cognitivo in questo tipo di attività: il ragionamento analogico è infatti considerato un processo cognitivo complesso, che richiede all’allievo di manipolare contemporaneamente diverse rappresentazioni mentali durante la ricerca e l’esecuzione di una strategia risolutiva, mettendo sotto forte pressione la limitata capacità della memoria di lavoro.
Vamvakoussi (2017), riprendendo il lavoro di Clement (2008), sottolinea come, in alcuni casi, la difficoltà del cogliere analogie risieda nella poca familiarità degli studenti con il contesto di riferimento; oltre al fatto che spesso le relazioni di similitudine tra l’esempio analogico e il concetto desiderato siano chiare solo al docente che le propone. Vamvakoussi (2019) approfondisce questo aspetto rimarcando come gli studenti dimostrino di avere grandi difficoltà nell’identificare la stessa struttura matematica soggiacente a due problemi presentati in contesti differenti, in quanto essi si focalizzano su aspetti superficiali (legati ad esempio alla presenza di uno stesso oggetto) piuttosto che sulle relazioni in atto. Questa idea viene approfondita anche da Richland e McDonough (2010), i quali sottolineano come due problemi possono essere analoghi oppure no a livello contestuale, indipendentemente dalla struttura matematica soggiacente.
Oltre ai vantaggi e alle difficoltà intrinseci nella natura dell’analogia come strategia di pensiero, bisogna tenere in considerazione altri aspetti, come le misconcezioni e le discrepanze tra i significati personali e quelli formali della matematica che possono formarsi nel tempo.

3 Modelli intuitivi, misconcezioni e analogia

Fischbein (1985a) attribuisce all’influenza dei modelli intuitivi impliciti molte delle difficoltà riscontrate nell’apprendimento della matematica. Con il termine *modelli intuitivi impliciti* si intende la «rappresentazione di certe nozioni matematiche astratte che si sviluppano ad uno stadio iniziale del processo di apprendimento e che continuano ad influenzare, tacitamente, le interpretazioni e le decisioni risolutive dell’allievo» (Fischbein, 1992, p. 26). Si tratta dunque di modelli mentali personali con caratteristiche tali da essere considerati autoevidenti e utilizzati con piena fiducia dall’allievo.
Generalmente, questi modelli intuitivi suggeriscono direttamente l’operazione da utilizzare nella risoluzione di un problema. Spesso però, il significato intuitivo e quello formale di un’operazione non coincidono, mettendo così in difficoltà gli allievi.[2]
Un’altra problematica riscontrata da Fischbein è legata alla natura stessa dei numeri utilizzati all’interno del testo proposto agli allievi. Rinomato è l’esempio che l’autore propone proprio legato alle misconcezioni dell’operazione divisione: «Una bottiglia di aranciata da 0,75 L costa 2 dollari. Qual è il prezzo di 1 litro di aranciata?».
Sebbene la risoluzione di questo problema sia semplice, è stato riscontrato come la maggior parte degli studenti di scuola media esiti o non sia in grado di indicare la divisione come operazione risolutiva. Questa difficoltà non è invece rilevata con il seguente problema, analogo al primo dal punto di vista strutturale e formale, ma che coinvolge solamente numeri naturali: «Una bottiglia di aranciata da 2 L costa 6 dollari. Qual è il prezzo di 1 litro di aranciata?». La risposta a questo secondo problema è quasi scontata; infatti, il modello intuitivo implicito secondo cui “la divisione diminuisce sempre” coincide con il modello formale (Fischbein, 1985b).
Per aggirare questo ostacolo, Fischbein suggerisce proprio l’analogia come strategia risolutiva efficace, proponendo l’utilizzo di una classe di problemi analoghi che richiedono la stessa operazione riso-

2. Per un maggior approfondimento sul tema, si faccia riferimento a Fischbein (1985b) e Vergnaud (1982).

lutiva, in cui però i dati numerici siano in accordo con i modelli intuitivi degli allievi: «Il problema può anche essere risolto per mezzo dell'analogia con il problema che ha la stessa struttura matematica, ma che usa solo numeri interi» (Fischbein, 1998, p. 9).
Stavy e Tirosh (2001) propongono una strategia simile, basata sul passaggio da una situazione neutra (che non attiva quindi modelli intuitivi ingannevoli) a una situazione-obiettivo che invece innesca proprio questi modelli intuitivi fuorvianti, tramite l'utilizzo di una o più situazioni intermedie, collegate tra di loro da analogie di vario genere.
Brown e Clement (1989) espongono invece la teoria delle analogie ponte (*bridging analogies*) come strategia per il superamento di misconcezioni. L'idea consiste nel collegare le preconoscenze degli allievi al concetto scientifico desiderato attraverso una serie di situazioni intermedie (chiamate *anchoring situations*) legate tra loro tramite analogia. È auspicabile che queste situazioni intermedie attivino delle intuizioni positive che possono essere sviluppate nei passaggi successivi verso la conoscenza desiderata.
La letteratura mostra dunque come il pensiero analogico sia necessario da un lato per il superamento dei modelli intuitivi formatisi con il passare del tempo, e che portano lo studente a sbagliare quando i significati intuitivi non corrispondono a quelli formali e astratti della matematica, dall'altro per la comprensione di situazioni complesse e per l'introduzione di nuovi concetti teorici che richiedono uno sforzo cognitivo maggiore. L'agire dell'insegnante dovrebbe dunque essere guidato da un uso consapevole ed esplicito dell'analogia, prevedendo e anticipando le possibili difficoltà degli studenti e fornendo tutti i supporti visivi e gestuali possibili.

4 Metodologia

L'esperienza didattica che si presenta in questo contributo è stata proposta a una classe seconda della scuola media di Giubiasco in Canton Ticino composta da 20 allievi. Il lavoro è stato suddiviso in tre fasi: questionario iniziale, intervento didattico e questionario finale. Il questionario iniziale (Allegato 1) aveva l'obiettivo di indagare le convinzioni degli allievi riguardo agli elementi che rendono analoghi o differenti due problemi matematici, oltre alla loro capacità di riconoscere analogie e differenze tra alcune coppie di problemi. Successivamente, è stato proposto agli studenti un percorso didattico con l'obiettivo di renderli consapevoli della presenza di vari aspetti dell'analogia nei diversi contesti matematici e soprattutto della loro utilità per facilitare la risoluzione di problemi. L'intervento didattico (Allegati 2-9) è stato strutturato come segue:
1. Le lenti di ingrandimento: tre diverse tipologie di analogia.
2. Le analogie che possono trarre in inganno.
3. L'analogia come strategia per il transfer di conoscenze.
4. Analogie e misconcezioni.
5. Creare e riconoscere analogie.

L'evoluzione delle competenze degli allievi nel riconoscere analogie è stata sondata dalla docente attraverso l'osservazione degli studenti sia durante tutto il percorso didattico sia durante la normale pratica quotidiana. Per quanto riguarda l'evoluzione delle loro convinzioni sul tema, invece, è stato somministrato un questionario finale (Allegato 10).
Per la creazione del percorso didattico, si è deciso di impiegare le unità didattiche previste dal programma di seconda media, focalizzando l'attenzione sui processi analogici che emergono all'interno dei vari argomenti. Le attività sono state proposte nel periodo tra novembre e metà marzo.

5 Descrizione del percorso didattico

Nei paragrafi seguenti vengono illustrate nel dettaglio le attività realizzate durante il percorso didattico proposto agli allievi e il riscontro di ciò che è avvenuto in aula, con una particolare attenzione alle difficoltà riscontrate.

5.1 Le lenti di ingrandimento: tre diverse tipologie di analogia

L'esame delle risposte degli allievi al questionario iniziale (Allegato 1) ha permesso di identificare tre livelli di analisi del testo di un problema: il contesto (ovvero la situazione in cui è ambientato un problema), i numeri (intesi sia come tipologia di numeri sia come numeri stessi presenti nel problema, a dipendenza della situazione) e la strategia risolutiva (ovvero la strategia necessaria per risolvere un problema). Per facilitarne l'utilizzo da parte degli studenti, si è deciso di associare ogni livello a una lente di ingrandimento differente, come mostrato nella **Figura 1**: più la lente è "preziosa", più l'osservazione è profonda (Allegato 2). L'analogia con le lenti di ingrandimento è stata scelta per cercare di trasmettere il messaggio che nel percorso, lavorando come dei detective, si sarebbero cercati quegli elementi che avrebbero facilitato la risoluzione del problema.

Figura 1. I tre livelli di analogia presentati come lenti di ingrandimento.

L'esemplificazione delle diverse analogie durante la presentazione delle risposte al questionario iniziale e in particolare il fatto che metà della classe sostenesse di non aver mai incontrato problemi analoghi nelle lezioni di matematica ha suscitato emozioni e reazioni contrastanti: un certo smarrimento per chi era convinto della propria risposta negativa e incredulità da parte di chi invece riconosceva analogie tra le diverse attività affrontate. Questo ha permesso di motivare gli studenti alla fase successiva dell'attività, ovvero cercare esercizi analoghi, relativamente alla strategia risolutiva, tra le diverse situazioni trattate in classe e i problemi proposti durante le verifiche formative e sommative. La ricerca ha permesso a una parte degli studenti, che dichiaravano di non avere mai incontrato analogie, di rendersi conto di quante volte vengano proposti problemi simili tra loro dal punto di vista del procedimento risolutivo. Per gli altri, invece, la ricerca è stata infruttuosa: si tratta degli studenti con fragilità disciplinari più evidenti.

5.2 Le analogie che possono trarre in inganno

In questa seconda attività sono stati proposti due problemi, analoghi nel contesto e nei numeri, ma diversi nella domanda e quindi nella strategia risolutiva (Allegato 3). La prima richiesta consisteva nell'indicare tutte le analogie e le differenze che gli studenti erano in grado di identificare.
Le risposte da parte degli allievi sono state varie: tutti hanno individuato le analogie relative al contesto e ai numeri; invece, per quanto concerne le differenze, metà classe ha riconosciuto una differenza nella domanda e solo due allievi hanno citato la strategia risolutiva.

Quattro studenti, nonostante si siano resi conto che le domande dei problemi sono differenti, hanno affermato che questi si risolvono nello stesso modo (**Figura 2**), accendendo così una discussione con i compagni di classe:

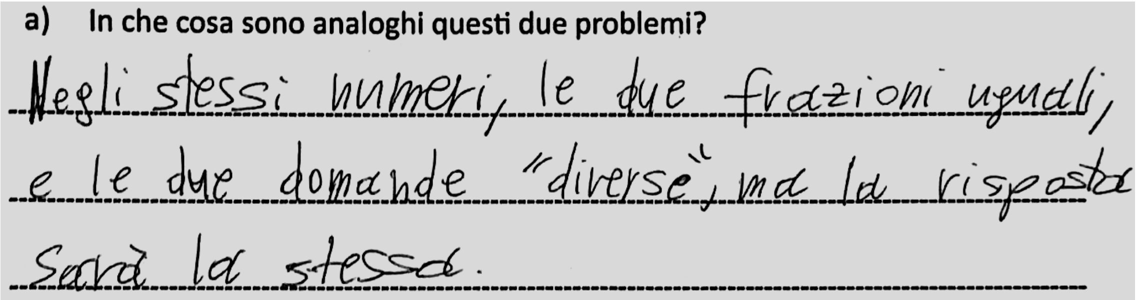


Figura 2. Protocollo di un allievo che, nonostante identifichi la diversa natura delle domande, afferma che la risposta sarà la stessa.

Questa discussione ha permesso agli studenti di analizzare nel dettaglio le informazioni in loro possesso e di risolvere i due problemi. Durante la messa in comune finale è stato fondamentale l’utilizzo della rappresentazione grafica: solo così anche gli allievi più scettici si sono convinti della differenza tra le due situazioni.
Durante la seconda fase dell’attività, svolta a gruppi, gli studenti dovevano cercare analogie tra sei diversi problemi con le frazioni (Allegato 3). Volutamente non sono state fornite indicazioni riguardo le tipologie di analogie da cercare. La maggior parte dei gruppi si è dapprima concentrata sul contesto, individuando quattro diverse tematiche nei problemi proposti, mentre un paio di gruppi ha analizzato i numeri (**Figura 3**); solo un gruppo di allievi si è concentrato invece direttamente sul processo risolutivo.

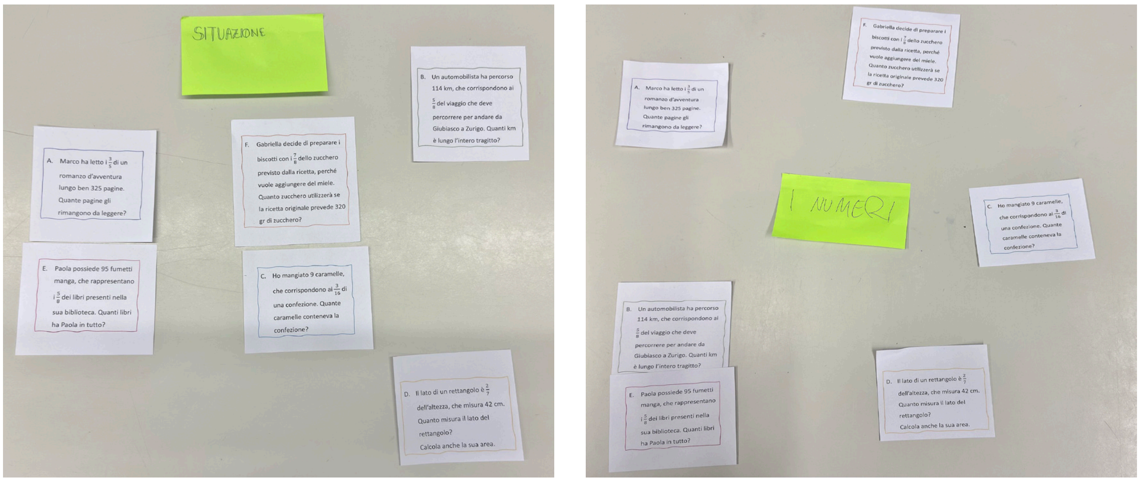


Figura 3. Categorizzazione dei problemi secondo le diverse lenti di ingrandimento. A sinistra si trova una categorizzazione secondo l’analogia del contesto, mentre a destra si trova una caratterizzazione dei problemi secondo l’analogia dei numeri.

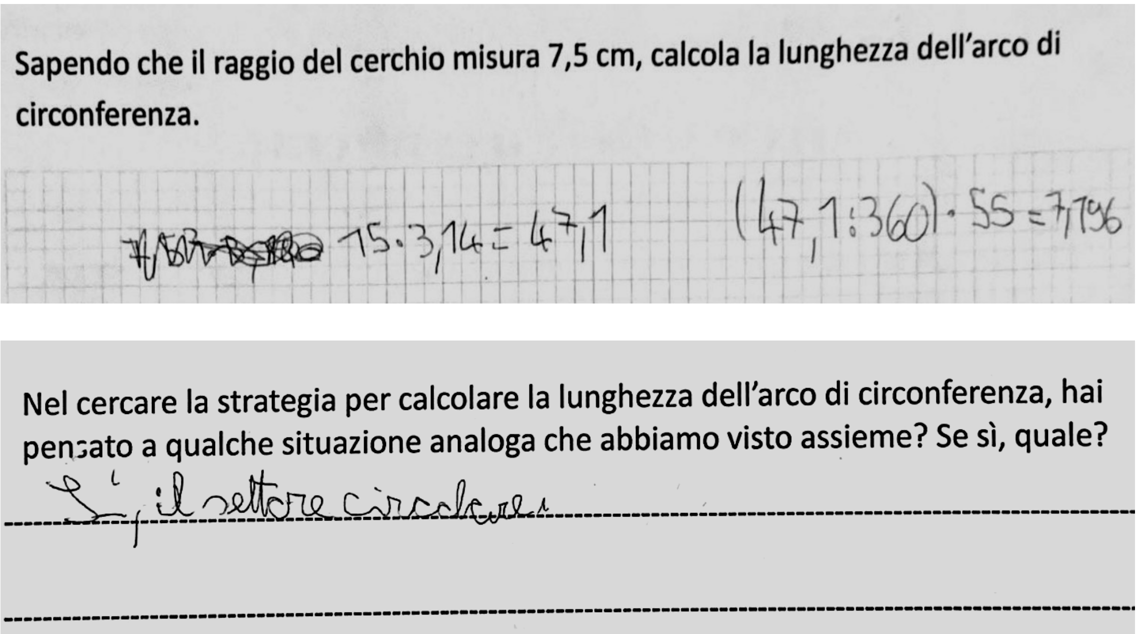
Agli allievi è stato chiesto di annotare quale lente di ingrandimento avessero scelto per cercare l’analogia e, una volta terminato il lavoro di categorizzazione dei problemi, di provare a utilizzare le altre lenti di ingrandimento viste con l’attività precedente. In questo modo hanno potuto sperimentare come un diverso punto di vista cambi completamente la suddivisione dei problemi.
Il bilancio dell’attività è positivo: gli allievi hanno potuto rendersi conto di come il contesto uguale e la presenza di una frazione non implichino l’utilizzo della stessa strategia risolutiva, portandoli così a riflettere con attenzione sulla natura della domanda posta dal problema.

5.3 L'analogia come strategia per il transfer di conoscenze

Per lavorare sull'analogia come strategia di stimolo al transfer di conoscenze si è deciso di proporre due attività diverse: la prima, sull'arco di circonferenza, richiedeva agli allievi di utilizzare le proprie conoscenze per sviluppare una strategia di calcolo per la lunghezza dell'arco di circonferenza. Nella seconda attività, invece, si presentava la stessa situazione geometrica in due contesti differenti: uno più astratto e un contesto di vita reale.

5.3.1 Arco e settore a confronto

L'obiettivo di questa terza attività (Allegato 4) era di promuovere il transfer di conoscenze da una situazione nota (il settore circolare) a una incognita (l'arco di circonferenza), entrambe riferite a una stessa circonferenza e allo stesso angolo al centro. Inizialmente, gli allievi dovevano cercare analogie e differenze tra un settore circolare e il corrispondente arco di circonferenza. Poi veniva loro chiesto di calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza.
Tutti gli allievi hanno indicato l'ampiezza dell'angolo al centro come analogia tra le due figure. Alcuni studenti hanno rilevato delle analogie aggiuntive, sia legate al contesto matematico (come il raggio) sia più superficiali (come il colore della linea). La ricerca di differenze si è dimostrata più difficile, infatti più della metà degli studenti si è focalizzata su aspetti superficiali ed estranei alla matematica (colore e tipo di linea), a conferma di quanto sostenuto da Richland e Begolli (2016). Sette allievi hanno indicato come differenza il fatto che il settore circolare rappresenta una superficie, mentre l'arco di circonferenza una lunghezza, anche se non sempre questo concetto è stato espresso utilizzando i termini corretti.
La seconda parte dell'attività consisteva nel calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza, senza alcuna ulteriore indicazione. Lo scopo era infatti quello di osservare quanti allievi sarebbero stati in grado di utilizzare le conoscenze sul settore circolare per trovare una strategia da applicare nel caso della lunghezza dell'arco di circonferenza.
Un solo allievo è stato in grado di calcolare con successo la lunghezza dell'arco di circonferenza, affermando di aver utilizzato il settore circolare come ispirazione per la strategia messa in atto, come mostrato nella Figura 4.


Sapendo che il raggio del cerchio misura 7,5 cm, calcola la lunghezza dell'arco di circonferenza.

15·3,14 = 47,1   (47,1:360)·55 = 7,196

Nel cercare la strategia per calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza, hai pensato a qualche situazione analoga che abbiamo visto assieme? Se sì, quale?

Sì, il settore circolare.

Figura 4. Protocollo dell'allievo che identifica una strategia di calcolo per la lunghezza di un arco di circonferenza sfruttando l'analogia con la situazione nota del settore circolare.

Un altro allievo ha calcolato un’approssimazione del risultato (**Figura 5**), ragionando sul numero di volte che l’angolo al centro è contenuto nell’angolo giro e dividendo la circonferenza del cerchio per 6.

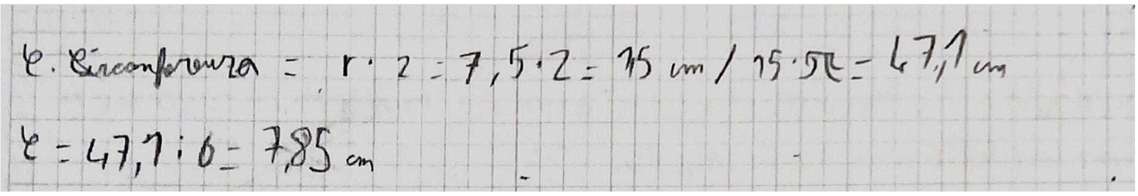


Figura 5. Protocollo dell’allievo che ha calcolato la lunghezza dell’arco di circonferenza tramite un processo di approssimazione.

La messa in comune di queste diverse soluzioni ha permesso di evidenziare il ragionamento svolto dai due studenti e di sottolineare come, in entrambi i casi, essi si siano ispirati a quanto fatto in precedenza per il settore circolare. Dopo aver messo a confronto il calcolo per la superficie del settore circolare e quello effettuato per la lunghezza dell’arco di circonferenza, tutta la classe si è dichiarata convinta della validità della strategia proposta e dell’utilità di confrontare le nuove situazioni con quelle già studiate.
Anche se il risultato dell’attività non ha coinciso con quello sperato in fase di progettazione, le difficoltà riscontrate dagli allievi hanno permesso di avviare una discussione interessante sulle possibili strategie risolutive e su come comportarsi di fronte a un problema che si pensa di non essere in grado di risolvere. Probabilmente la maggior parte di loro non aveva ancora acquisito appieno la strategia per calcolare l’area di un settore circolare e per questo non è stata in grado di trasferirla all’arco di circonferenza.

5.3.2 Irrigazione circolare

La seguente attività si è svolta sull’arco di due lezioni, poiché lo scopo era quello di verificare se gli allievi fossero in grado di ricordare le situazioni presentate nella prima parte dell’attività per risolvere una situazione reale più complessa presentata nella seconda parte.
La prima parte consisteva nel risolvere due problemi analoghi per strategia risolutiva, in quanto entrambi richiedevano di calcolare l’area di un rettangolo non occupata da cerchi congruenti e tangenti inscritti nel rettangolo (Allegato 5). Gli allievi hanno lavorato individualmente su entrambi i problemi, senza particolari indicazioni da parte della docente.
È seguita una messa in comune in cui sono state discusse le strategie risolutive adottate dagli allievi e le eventuali analogie riscontrate. Il primo problema è stato risolto correttamente da tutti gli allievi, mentre un quarto degli allievi ha avuto difficoltà con il secondo problema.
Per quanto riguarda le analogie riscontrate, un quarto della classe ha indicato la situazione geometrica (cerchi tangenti inscritti in un rettangolo), metà degli allievi ha individuato la stessa lunghezza del raggio del cerchio e ben tre quarti degli studenti ha dichiarato di aver riconosciuto la strategia risolutiva analoga (**Figura 6**).

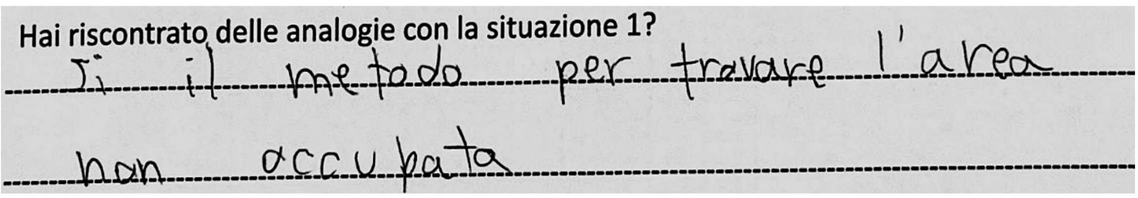
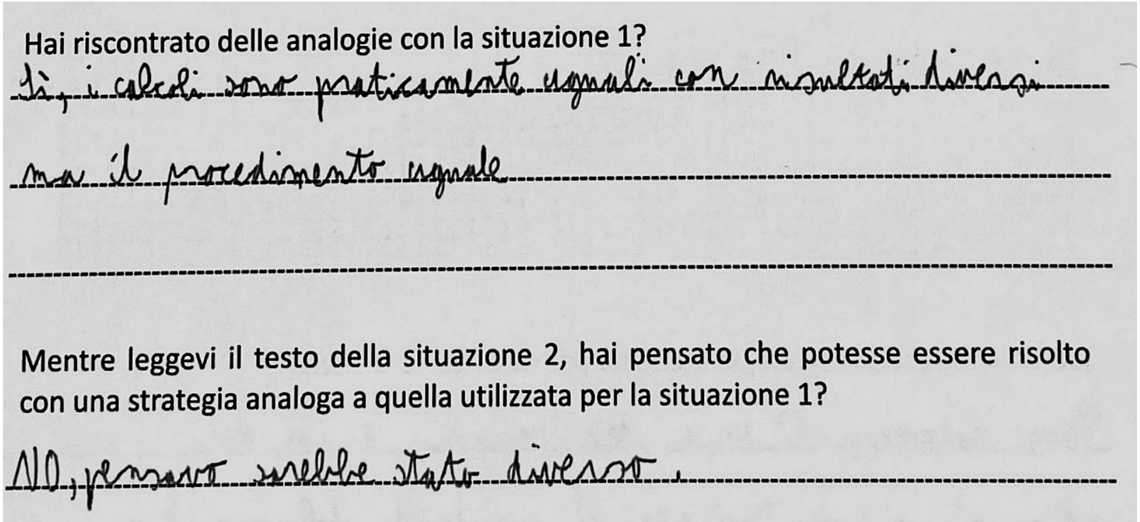


Figura 6. Protocollo di un allievo che ha riscontrato l’analogia della strategia risolutiva tra le situazioni proposte.

Un solo allievo ha dichiarato di non aver riscontrato nessun tipo di analogia tra le situazioni proposte, mentre altri quattro allievi hanno affermato di non aver pensato che la seconda situazione potesse essere risolta con la stessa strategia risolutiva della prima (Figura 7).


Hai riscontrato delle analogie con la situazione 1?

Sì, i calcoli sono praticamente uguali con risultati diversi ma il procedimento uguale

Mentre leggevi il testo della situazione 2, hai pensato che potesse essere risolto con una strategia analoga a quella utilizzata per la situazione 1?

NO, pensavo sarebbe stato diverso.

Figura 7. Protocollo di un allievo che inizialmente non aveva riscontrato l'analogia della strategia risolutiva.

Nella seconda parte dell'attività, è stata presentata la situazione della costruzione di un orto cittadino (Allegato 6), spiegando che il compito di ogni gruppo era quello di trovare una soluzione più efficace del posizionare un unico irrigatore al centro dell'orto, ma che allo stesso tempo fosse ecologica.
Un gruppo ha mostrato parecchie difficoltà nell'approcciare il problema. È stato dunque necessario rivedere la situazione insieme a loro e indirizzare il loro ragionamento tramite delle domande-stimolo. Tutti gli altri gruppi invece hanno affrontato autonomamente la situazione.
Al termine dell'attività, tutti i gruppi tranne uno hanno proposto la soluzione ottimale (Figura 8), ovvero posizionare quattro irrigatori in modo che le aree bagnate siano tangenti tra loro. Il gruppo che non ha trovato la soluzione ottimale ha suggerito invece di posizionare cinque irrigatori in modo da coprire anche la superficie al centro, dimenticandosi della richiesta di essere ecologici e quindi di non sprecare acqua.

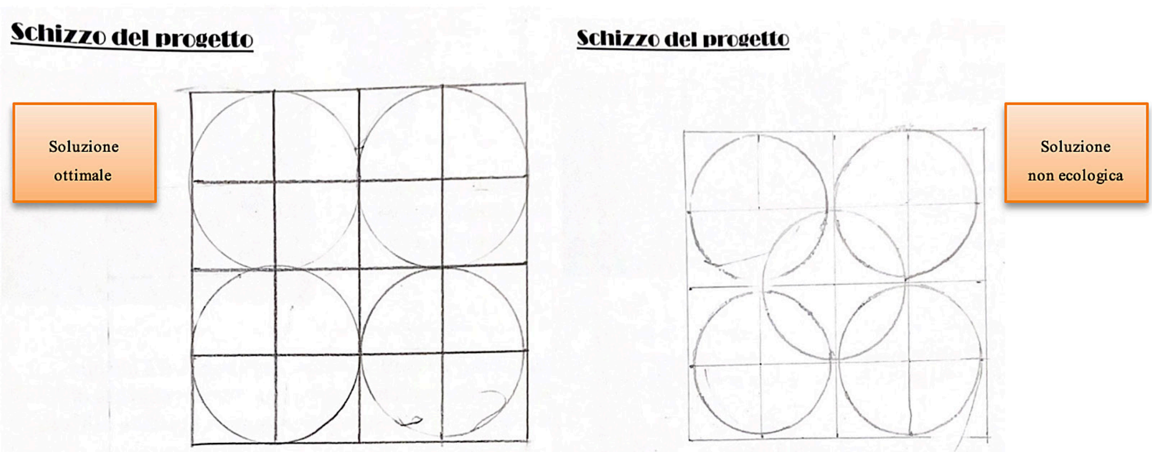
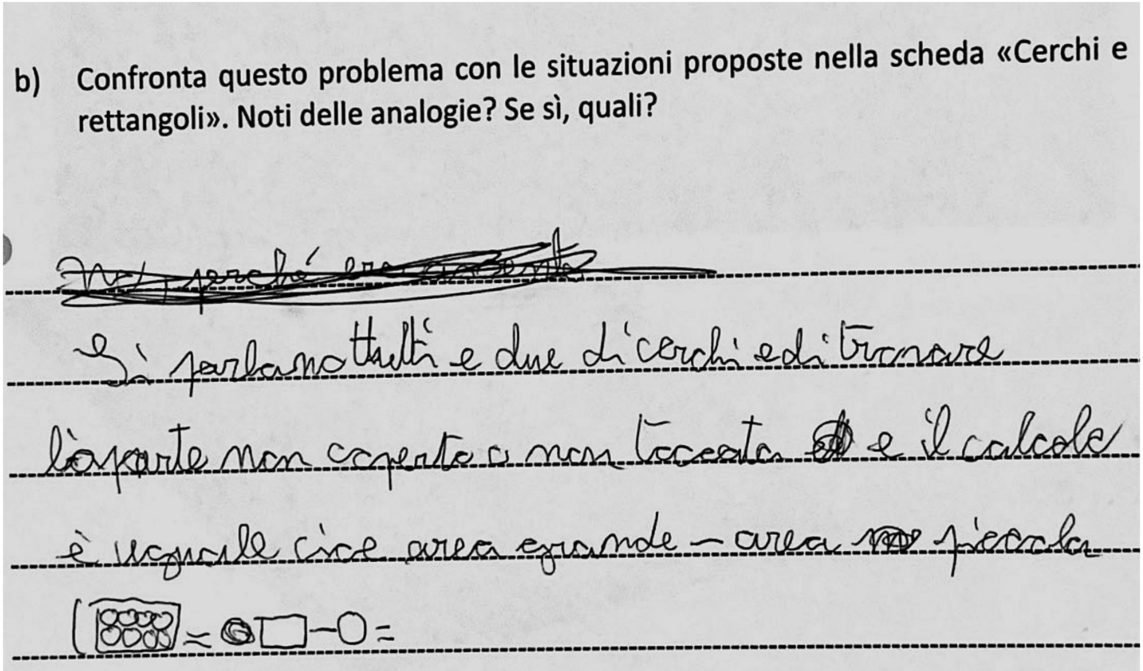


Figura 8. Progetti a confronto. A sinistra è presentata la soluzione ottimale, a destra la soluzione non ecologica proposta da un gruppo di allievi.

Durante la discussione dei diversi progetti, un'allieva ha dichiarato che per non sprecare l'acqua i campi dovrebbero essere a forma circolare, anticipando l'applicazione reale dell'attività.
Alla domanda se questa attività avesse ricordato loro dei problemi visti precedentemente, due quinti della classe ha risposto negativamente, un quinto ha affermato di sì senza specificare però cosa ricordasse loro e i restanti studenti hanno citato l'attività "Cerchi e rettangoli" (Allegato 5).
Alla richiesta di confrontare la situazione con quelle proposte nell'attività "Cerchi e rettangoli", tutti gli allievi tranne uno hanno riscontrato l'analogia legata alla strategia risolutiva (**Figura 9**).


b) Confronta questo problema con le situazioni proposte nella scheda «Cerchi e rettangoli». Noti delle analogie? Se sì, quali?

Sì parlano tutti e due di cerchi e di trovare la parte non coperta o non toccata e il calcolo è uguale cioè area grande – area piccola

Figura 9. Protocollo di un allievo che riconosce l'analogia della strategia risolutiva con l'attività precedente.

Nel complesso, l'attività proposta si è rivelata soddisfacente, sia come opportunità per allenare la capacità di transfer di conoscenze a situazioni complesse, sia come occasione per riflettere sull'analogia legata alla strategia risolutiva e su come la capacità di riconoscerla possa essere un aiuto nell'affrontare situazioni sconosciute.

5.4 Analogie e misconcezioni: problemi al supermercato

Lo scopo di questa attività (Allegato 7) era di presentare l'utilizzo di una classe di problemi analoghi nella struttura, ma con numeri diversi, come strategia per sorpassare l'ostacolo dei numeri in forma decimale che influenzano il processo risolutivo, come suggerito da Fischbein (1998).
È stato così proposto agli allievi dapprima il seguente problema: «Se una bottiglia di gazzosa da 0,35 L costa 2.70 Fr., quanto costerà 1 L di gazzosa?».
Le reazioni e i tentativi di risoluzione da parte degli studenti sono stati molto diversi tra loro. Metà della classe ha infatti dichiarato che non era possibile risolvere il problema a causa della presenza di numeri in forma decimale, un quarto della classe ha affermato di non sapere come fare e solo il restante quarto ha provato a risolvere il problema con due approcci distinti. Il primo è stato quello di riflettere sul fatto che 0,35 L è circa un terzo di un litro, riflessione che li ha portati a moltiplicare il prezzo per 3, trovando un risultato approssimato, come mostrato nella **Figura 10**.

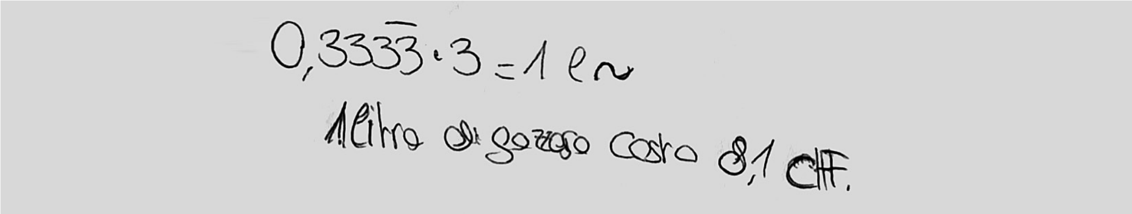


Figura 10. Risoluzione del problema per approssimazione.

Il secondo approccio è stato quello di risolvere algebricamente il problema attraverso una divisione, trovando così il risultato esatto. Tutti gli allievi che hanno utilizzato questa strategia però, al vedere il risultato finale maggiore del prezzo iniziale, hanno dichiarato che il loro metodo era sicuramente sbagliato, in quanto la divisione non può far aumentare il dividendo (**Figura 11**).

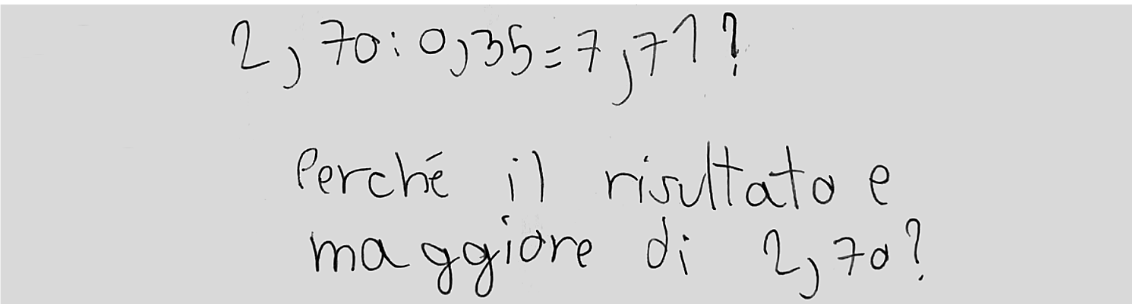


Figura 11. Protocollo di un allievo che si domanda perché il risultato della divisione è maggiore del valore di partenza.

Senza rivelare quale fosse la risposta esatta, si è proseguita l'attività consegnando lo stesso problema, ma questa volta con i numeri coperti, chiedendo agli allievi di riflettere sulla strategia generale di risoluzione (Sbaragli, 2009).
Tre quarti della classe ha inserito dei numeri nel testo del problema e poi calcolato il risultato. È interessante notare come la maggior parte di loro abbia scelto la capacità della bottiglia in modo che moltiplicata per un fattore intero il risultato fosse 1 litro (**Figura 12**), così da rendere più facile il procedimento risolutivo.

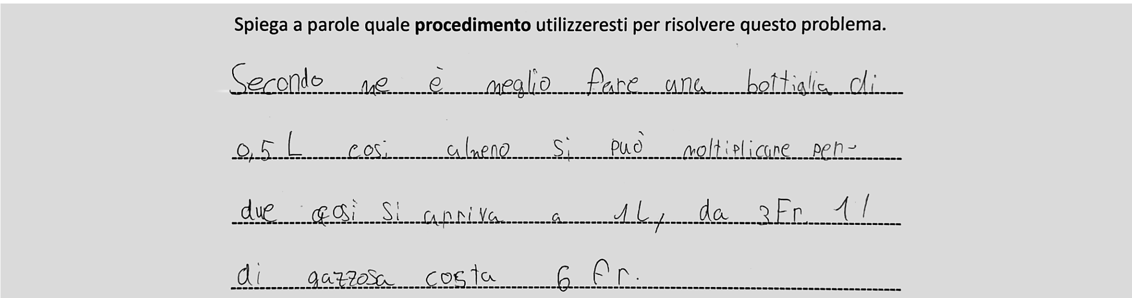


Figura 12. Protocollo di un allievo che risolve il problema scegliendo dei numeri a lui più congeniali.

Gli studenti restanti sono stati in grado di individuare nella divisione la corretta operazione da applicare, specificando che per risolvere il problema bisognava dividere il prezzo per la capacità della bottiglia, come mostrato nella **Figura 13**.

Spiega a parole quale **procedimento** utilizzeresti per risolvere questo problema.

5:2 = 2,5 franchi. Ho preso il prezzo della bottiglia da 2 l e poi ho fatto diviso 2.

Figura 13. Protocollo di un'allieva che riconosce la strategia risolutiva necessaria.

L'ultima richiesta posta agli allievi è stata quella di risolvere un terzo problema analogo, ma con numeri naturali e in accordo con il modello intuitivo implicito secondo cui "la divisione diminuisce sempre". Come previsto, quest'ultimo problema è stato risolto senza nessuna difficoltà da tutti gli allievi. Alla richiesta di confrontare quest'ultimo problema con il primo è nata una discussione abbastanza accesa tra gli allievi, suddivisi tra chi riconosceva l'analogia tra i problemi e chi invece continuava a sostenere che la presenza di numeri in forma decimale rendesse i due problemi diversi.
La discussione è continuata esponendo i tre problemi alla lavagna contemporaneamente e ragionando assieme sul motivo che ha reso difficile la risoluzione del primo problema. Gli allievi hanno modificato il problema sostituendo i numeri presenti con dei numeri che ritenevano più o meno facili, giungendo tutti alla conclusione che la difficoltà maggiore era rappresentata dalla presenza di due numeri in forma decimale.
L'attività conclusiva ha richiesto di risolvere alcuni problemi aggiuntivi, riguardanti sia la divisione che la moltiplicazione, in cui la scelta dei numeri era contro-intuitiva. Agli allievi è stata lasciata la libertà di scegliere come approcciarli, anche se è stato consigliato di utilizzare una delle tecniche introdotte precedentemente (ovvero coprire i numeri o sostituirli con numeri naturali). Osservate le risoluzioni degli allievi, si è deciso di discutere i problemi presenti in Figura 14, perché in entrambi i casi la scelta dell'operazione errata portava ad un risultato senza senso (come, ad esempio, il fatto che un trancio di focaccia costasse più dell'intera focaccia), consentendo così di lavorare sul processo cognitivo "Interpretare e riflettere sui risultati" promosso dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015).

2. **Se 1 kg di focaccia costa 9,90 Fr., quanto costerà un trancio da 0,250 kg?**
3. **Martina ha acquistato 25 limoni per un peso complessivo di 3,75 kg. Quanto pesa all'incirca ogni limone?**

Figura 14. Problemi discussi assieme alla classe per individuare la strategia risolutiva soggiacente.

Il bilancio dell'attività è stato sicuramente positivo e in linea con le aspettative. Gli allievi hanno partecipato con interesse, affrontando alcune delle misconcezioni più comuni legate alla divisione e alla moltiplicazione e riflettendo sulla possibilità di utilizzare l'analogia per modificare i dati del problema, facilitando così l'individuazione di una strategia risolutiva.

5.5 Gara di analogie

L’attività seguente si è svolta sull’arco di due lezioni: la prima subito dopo l’attività “I problemi con le frazioni” (Allegato 3), la seconda come attività conclusiva del percorso didattico prima del questionario finale (Allegato 10).

Durante la prima parte dell’attività (Allegato 8), svolta a coppie, è stato chiesto agli allievi di scegliere due lenti di ingrandimento (e quindi la tipologia di analogia) e di creare il testo di due problemi analoghi secondo quelle lenti. I problemi sarebbero serviti in seguito per la seconda parte dell’attività che consisteva in una gara di analogie (Allegato 9).

La presenza della competizione ha motivato gli allievi nell’utilizzare la tipologia di analogia che, secondo loro, fosse la più difficile da trovare. In alcuni casi, è stato scelto di combinare le diverse tipologie di analogia per mettere ancora più in difficoltà i compagni. La stesura dei testi, con l’aggiunta dei vincoli imposti dall’analogia, si è rilevata più complicata del previsto. È stato dunque necessario aiutare gli allievi, soprattutto chi aveva scelto la strategia risolutiva come fonte di analogia.

A distanza di circa tre mesi dalla stesura dei problemi, dopo aver terminate l’attività “Problemi al supermercato” (Allegato 7), si è svolta la gara di analogie. La scelta di far trascorrere così tanto tempo tra le due fasi dell’attività è motivata dal fatto di voler osservare se, a conclusione del percorso didattico descritto, gli allievi fossero in grado di individuare correttamente le analogie all’interno dei problemi da loro creati.

Durante la gara, si è deciso di mantenere la classificazione dei problemi rispetto alle analogie indicate dagli allievi, anche se nel caso dell’analogia legata al contesto a volte le situazioni scelte risultavano ambigue. Ad esempio, gli autori dei testi presenti nella **Figura 15** hanno dichiarato di aver creato due problemi con contesti differenti, ma metà della classe li ha invece giudicati analoghi. Durante la discussione avvenuta in aula, gli allievi hanno giustificato la loro interpretazione di contesti differenti affermando che, nel secondo problema, il fatto che oltre ai nipoti fossero coinvolti degli amici cambiava la situazione. Dopo aver ascoltato le argomentazioni dei compagni che invece li giudicavano analoghi, gli autori hanno ammesso di aver creato due situazioni che possono essere considerate simili. Questa discussione ha permesso alla classe di concludere che, rispetto all’analogia del contesto, ci possono essere più interpretazioni.

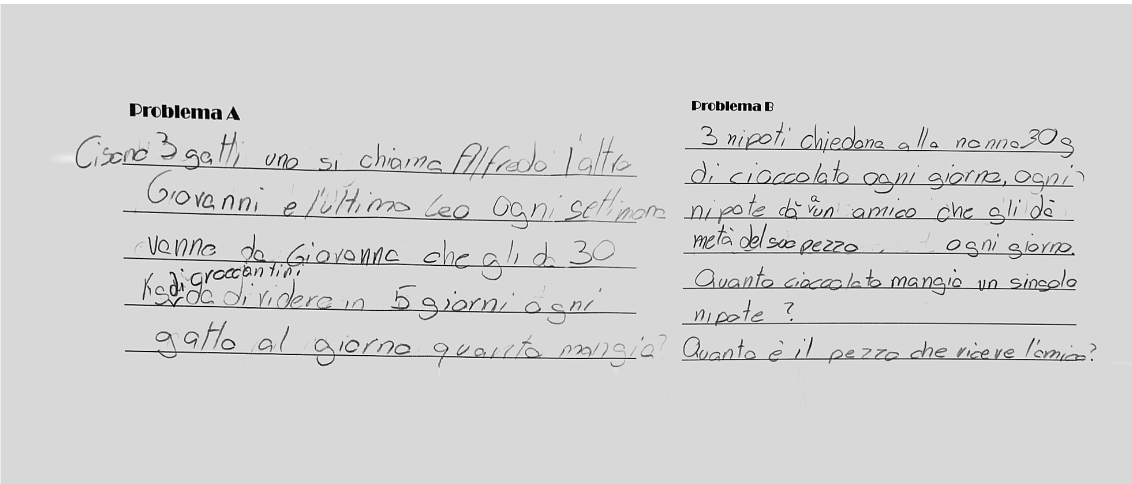


Figura 15. Coppia di problemi ambigui rispetto all’analogia del contesto.

Dall’analisi delle risposte degli allievi risulta che l’analogia legata al contesto sia quella che ha creato più confusione. Al contrario, l’analogia legata ai numeri è stata individuata correttamente in quasi tutte le coppie di problemi.

Per quanto riguarda la strategia risolutiva, invece, la situazione varia molto da una coppia di problemi a un'altra. Ad esempio, è interessante notare come, nella coppia di problemi mostrati nella Figura 16, tutti gli allievi abbiano correttamente identificato il diverso procedimento risolutivo: i problemi creati dagli studenti riprendevano gli esempi dei problemi con le frazioni affrontati nell'attività "I problemi con le frazioni" (Allegato 3).

Pietro deve andare alla Decathlon a comprare un pallone che costa 25.- Fr. Nel portafoglio Pietro ha 60.- Fr., ma può spenderne solo i $\frac{2}{6}$. Riuscirà a comprare il pallone?	Giuseppino il nonnino spende i $\frac{2}{6}$ dei suoi risparmi per comprare un prosciutto da 60.- Fr. Gli restano così solo 25.- Fr. Quanti soldi aveva all'inizio?

Analogie: ....

Figura 16. Coppia di problemi creata dagli allievi, analoghi a quelli proposti nell'attività "I problemi con le frazioni".

L'esito dell'attività è risultato soddisfacente: tutti gli allievi hanno indicato correttamente le analogie nei problemi creati da loro stessi e, rispetto all'inizio del percorso, si è notato un miglioramento da parte degli studenti nell'identificare diverse categorie di analogie nei problemi matematici creati dai loro compagni.

6 Sintesi dei risultati

Dall'analisi del questionario iniziale somministrato agli allievi a inizio percorso è risultato che essi fossero poco o per nulla consapevoli dei diversi aspetti dell'analogia e soprattutto dei vantaggi del ragionamento analogico come strategia risolutiva nei problemi di matematica. La richiesta di spostare la propria attenzione dal prodotto finale alla strategia messa in atto è risultata insolita per gran parte degli studenti, segnale che nel corso della loro carriera scolastica sono stati probabilmente poco stimolati in questo senso. Infatti, se in linea teorica circa metà della classe ha dichiarato di ritenere due problemi analoghi quando è possibile risolverli con la stessa strategia, durante l'atto pratico di confrontare due problemi quasi tutti hanno focalizzato la loro attenzione su aspetti superficiali e irrilevanti dal punto di vista matematico, ignorando il procedimento risolutivo.
Al termine del percorso didattico si è riscontrato un cambiamento in positivo nelle convinzioni e nelle competenze degli allievi riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei problemi di matematica. Tra le risposte fornite dagli studenti nel questionario finale (Allegato 10), è interessante confrontare quelle date alla seconda domanda riguardo gli elementi che rendono analoghi due problemi in matematica, riassunte nella Figura 17.

	Questionario iniziale	Questionario finale
A.1	2	3
A.2	1	1
A.3	1	
A.4	1	
A.5	2	3
A.6	1	3
A.7	0	3
A.8	2	3
A.9	0	
A.10	1	3
A.11	1	3
A.12	1	2
A.13	1	
A.14	2	3
A.15	3	3
A.16	2	3
A.17	1	3
A.18	0	3
A.19	0	3
A.20	1	3

C0. Non lo so / Aspetti irrilevanti

C1. Contesto

C2. Tipologia di numeri / Figura geometrica

C3. Strategia risolutiva

Elementi in comune

Figura 17. Confronto delle risposte alla domanda "Cosa rende due problemi analoghi in matematica?" nel questionario iniziale e finale.

Le risposte sono state categorizzate secondo i tre livelli di analogia (contesto, numeri e strategia risolutiva); nel caso in cui uno studente avesse dato più risposte appartenenti a categorie differenti, si è considerata la categoria più evoluta dal punto di vista dell'analogia, indicando comunque la quantità di livelli citati.

Si può notare come a fine percorso tutti gli allievi siano stati in grado di definire l'analogia tra due problemi matematici: il 75% degli studenti cita tutte le categorie di analisi studiate nel percorso, mentre i restanti allievi migliorano la loro risposta iniziale aumentando il numero di categorie citate o indicando un livello di analogia più profondo.

Sebbene alcuni allievi affermino di non ritenere utile il processo di ricerca di analogie, la maggior parte di loro dichiara che saper riconoscere due problemi analoghi rispetto alla strategia risolutiva è molto utile e vantaggioso nell'affrontare situazioni sconosciute. Questo permette infatti di ipotizzare possibili strategie risolutive e di scartarne altre, effettuando con efficacia il transfer di conoscenze, abilità molto importante sia per la vita scolastica sia per la vita professionale di ogni individuo. Rispetto alle competenze, dalle attività svolte emerge come riconoscere analogie sia un'attività complessa, che richiede un allenamento costante e intenzionale. Si è potuto notare una maggiore consapevolezza degli allievi e un miglioramento nel riconoscere strategie risolutive analoghe, anche al di fuori delle attività del percorso didattico dedicato. Questo processo è sicuramente facilitato nell'ambito Geometria dalla presenza di immagini, più semplici da confrontare per gli allievi rispetto a dei problemi puramente algebrici. Per quanto riguarda l'applicazione di questo processo di analisi nella risoluzione dei problemi, si notano dei miglioramenti in una parte degli allievi, ma non in tutti. Gli allievi con un basso rendimento nella disciplina sono quelli che hanno faticato maggiormente durante il percorso, proprio per la richiesta di riflettere in modo astratto sui problemi, senza doverli per forza risolvere.

7 Conclusioni

Il percorso didattico descritto nei paragrafi precedenti fornisce una panoramica sull'analogia in matematica e sulle sue possibili applicazioni all'interno del programma di una classe di seconda media.

La ricerca di analogie su diversi livelli richiede l'attivazione di processi cognitivi superiori ed è perciò

un lavoro complesso. Per questo motivo, si è deciso di limitare il numero di tipologie di analogia considerate a tre grandi categorie: contesto, numeri e strategia risolutiva.
Le varie attività svolte avevano l'obiettivo di mostrare vantaggi e criticità del ragionamento analogico. Gli allievi hanno dunque affrontato situazioni diverse, in cui individuare la presenza di un'analogia rispetto alla strategia risolutiva poteva rappresentare un vantaggio per la loro risoluzione oppure situazioni in cui le analogie rispetto al contesto e ai numeri potevano trarre in inganno e far pensare che anche il procedimento risolutivo fosse analogo.
Una delle problematiche principali di questo percorso didattico è legata all'esiguo campione di ricerca, che non permette la generalizzazione dei risultati ottenuti. Un altro limite è rappresentato dal tempo trascorso tra le diverse attività e dal loro numero ridotto, determinati da esigenze di programma e dalle tante assenze degli allievi dovute dalla pandemia in corso. Nonostante si sia cercato di utilizzare le tematiche previste dal programma di seconda media per progettare le attività, in futuro si potrebbe pensare a un'integrazione maggiore dell'analogia sull'arco di tutto l'anno scolastico. Per un intervento ancora più efficace, si dovrebbe iniziare questo lavoro già dalla prima media o, se possibile, anche prima.
In un mondo in continua evoluzione, diventa fondamentale essere in grado di analizzare la realtà e di trovare soluzioni per problemi complessi attraverso il pensiero strategico, la riflessione critica e la creatività. Lo sviluppo di un pensiero analogico consapevole è dunque cruciale per promuovere le competenze di problem solving negli allievi come futuri cittadini del mondo.

Bibliografia

Bordogna, G. (2022). *L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una seconda media.* Tesi Master, Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://tesi.supsi.ch/4269/

Brown, A. L. (1989). Analogical learning and transfer: What develops?. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 369–412). Cambridge University Press.

Brown, D. E., & Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*, *18*(4), 237–261.

Clement, J. (2008). The role of explanatory models in teaching for conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (pp. 417–452). Lawrence Erlbaum Associates.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica.* INDEX Editore.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi!. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *6*(29), 645–664.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* DECS. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds

Fischbein, E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Zanichelli – UMI.

Fischbein, E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Zanichelli – UMI.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Mathematics Education Library, Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 25–38). Pitagora.

Fischbein, E. (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica. *La matematica e la sua didattica*, *4*, 365–401.

Gentner, D., Brem, S., Ferguson, R., Markman, A., Levidow, B., Wolff, P., & Forbus, K. (1997). Analogical reasoning and conceptual change: A case study of Johannes Kepler. *Journal of The Learning Sciences*, *6*(1), 3–40.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton University Press.

Richland, L. E., & Begolli, K. N. (2016). Analogy and higher order thinking: Learning mathematics as an example. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, *3*(2), 160–168.

Richland, L. E., & McDonough, I. M. (2010). Learning by analogy: Discriminating between potential analogs. *Contemporary Educational Psychology*, *35*(1), 28–43.

Sbaragli, S. (2009). Le insidie della divisione. *La Vita Scolastica*, *14*, 18–19.

Sbaragli, S., Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., & Ricci, M. (2008). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in ambito geometrico* (Matematica per gli insegnanti e la classe, Vol. 1). Armando Editore.

Speranza, F. (1988). Salviamo la geometria!. *La matematica e la sua didattica*, *2*(3), 6–13.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze? Alcune regole intuitive generano errori clamorosi.* Erickson.

Treccani. (2009). Analogia. In *Dizionario di filosofia.* Consultato in data 16 ottobre 2021, da https://www.treccani.it/enciclopedia/analogia_%28Dizionario-di-filosofia%29/

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, *49*(4), 497–507.

Vamvakoussi, X. (2019). The use of analogies in mathematics instruction: Affordances and challenges. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. J. Ochsendorf & K. Mann Koepke (Eds.), *Cognitive foundations for improving mathematical learning* (Mathematical Cognition and Learning Series, Vol. 5, pp. 247–267). Academic Press, Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265–284.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and substraction* (pp. 39–59). Lawrence Erlbaum.

Vosniadou, S., & Ortony, A. (Eds.). (1989). *Similarity and analogical reasoning.* Cambridge University Press.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Springer-Verlag.