DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 135 - 156, DOI: 10.33683/ddm.23.13.7

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Educare alla "matematizzazione e modellizzazione" attraverso l'uso delle rappresentazioni semiotiche nella scuola media

Mathematical modelling education based on the use of semiotic representations in lower secondary school

Maria Giuseppina Chiara Nestola
Scuola media Viganello – Svizzera

maria.nestola@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo descrive un'esperienza didattica svolta in una classe di quarta media attitudinale[1] con lo scopo di indagare le convinzioni e le competenze degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella comprensione e risoluzione di una situazione matematica. Il percorso didattico si compone di molteplici attività volte a stimolare l'uso di differenti registri semiotici (linguistico, numerico, algebrico e grafico) nell'attività di risoluzione di un problema. Gli allievi hanno partecipato con motivazione e interesse alle varie attività, apprezzando i relativi riferimenti al mondo reale. I risultati mostrano come accompagnare l'allievo a matematizzare situazioni attraverso la gestione di differenti rappresentazioni dello stesso oggetto matematico favorisca una comprensione più profonda del problema e un utilizzo più consapevole degli strumenti matematici necessari per la sua risoluzione.

Parole chiave: registri semiotici; rappresentazioni semiotiche; funzioni; problemi matematici; ciclo della matematizzazione.

1. In Canton Ticino a partire dalla terza media gli allievi vengono inseriti in corsi base e attitudinale in funzione delle competenze matematiche raggiunte alla fine della seconda.

Abstract / The article describes a didactic experience carried out in a 9th grade attitudinal class[1] and aims to investigate the students' beliefs and skills regarding the use of semiotic representations in understanding and solving a mathematical situation. The didactic path consists of multiple activities aimed at stimulating the use of a vast range of semiotic registers (linguistic, numerical, algebraic and graphic) in mathematical problem-solving activity. The students participated with motivation and interest in the various activities, appreciating the relative references to the real world. The results show how accompanying the student to mathematize situations through the management of different representations of the same mathematical object allows for a deeper understanding of the mathematical problem and a more conscious use of the mathematical tools necessary for its resolution.

Keywords: semiotic registers; semiotic representations; functions; mathematical problems; mathematization cycle.

1. In Canton Ticino starting from 8th grade the students are inserted into basic and attitudinal courses depending on the mathematical skills reached at the end of the 7th grade.

1 Le rappresentazioni semiotiche

Il ruolo fondamentale svolto dalla semiotica (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) nell'apprendimento e comprensione della matematica è stato esplicitato in diverse ricerche (D'Amore et al., 2013; Duval, 1993, 2006a, 2006b, 2008). In particolare, Duval (1993) sostiene che la caratteristica principale degli oggetti matematici è la loro inaccessibilità percettiva e strutturale: non è possibile fare alcuna esperienza diretta di un piano, un punto, un'equazione, un numero, una funzione. Di conseguenza, poiché ciò che è possibile vedere, toccare, manipolare sono solo le rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici cui ci si riferisce, in matematica la costruzione concettuale non può che essere strettamente legata alla capacità di gestire opportune rappresentazioni semiotiche dello stesso oggetto. Per Duval, quando si parla di registro semiotico ci si riferisce ad «un sistema di segni» che permette di «riempire le funzioni di comunicazione, trattamento e oggettivizzazione» (D'Amore, 2001, p. 155). Una rappresentazione semiotica è sempre prodotta all'interno di un registro semiotico e non è concepibile al di fuori di esso (Duval, 2008). Essa ha una struttura del tipo: {contenuto della rappresentazione (R), registro semiotico (r), oggetto rappresentato (O)}. Dato un oggetto matematico O, la sua rappresentazione richiede una scelta del registro semiotico. Tuttavia, non esiste la rappresentazione perfetta ed esaustiva di un oggetto matematico, in quanto ognuna ne esplicita una determinata qualità. È la molteplicità di rappresentazioni che consente una costruzione efficace di un oggetto matematico. Un esempio spesso utilizzato nella scuola media, riportato in D'Amore et al. (2013), riguarda l'oggetto matematico *quadrato di un binomio* la cui rappresentazione algebrica risulta essere $(a + b)^2$. Una possibile rappresentazione grafica, utilizzata dallo stesso Euclide, si compone di un quadrato avente lati lunghi $(a + b)$ come mostrato in **Figura 1a**. A questa rappresentazione si può aggiungere la scrittura algebrica, come riportato in **Figura 1b**.

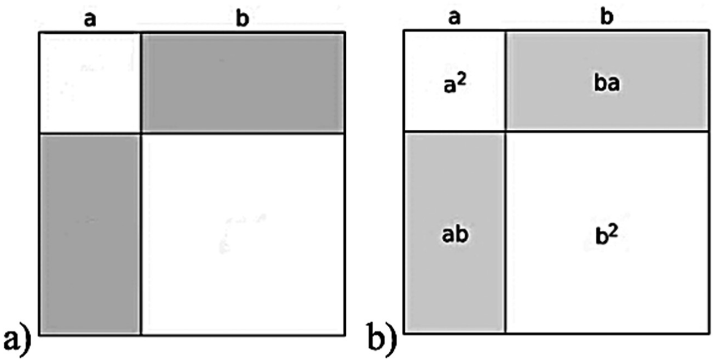


Figura 1. Rappresentazione grafica e algebrica del quadrato di un binomio.

Le due rappresentazioni dell'oggetto matematico *quadrato di un binomio* sono complementari.
La prima risulta una rappresentazione puramente algebrica, che talvolta porta gli allievi a dimenticare il doppio prodotto (scrivendo $(a + b)^2 = a^2 + b^2$); la seconda associa alla rappresentazione algebrica la corrispondente rappresentazione grafica che, dando una veste geometrica a tutti gli elementi dell'espansione algebrica, può rendere maggiormente evidente la relazione $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. L'inaccessibilità dell'oggetto matematico rende i processi cognitivi mobilitati nell'apprendimento della matematica strettamente dipendenti dalla capacità di scegliere un registro semiotico e di saper gestire quelle che sempre Duval chiama trasformazioni semiotiche. La scelta del registro, dunque, è determinante per garantire un'efficace costruzione di un oggetto matematico.
Secondo Duval (2006a) una rappresentazione è interessante solo se può essere trasformata in un'altra rappresentazione. Dal punto di vista cognitivo si possono distinguere due tipi di trasformazioni: trat-

tamento e conversione. Il trattamento è inteso come trasformazione tra due distinte rappresentazioni semiotiche all'interno dello stesso registro. Si riporta in **Figura 2** un esempio di trattamento dell'oggetto matematico *un mezzo*.

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

Figura 2. Trattamento nel registro numerico.

La conversione è invece una trasformazione tra due rappresentazioni semiotiche espresse in registri semiotici differenti. In **Figura 3** viene proposto un esempio di conversione dell'oggetto matematico *un mezzo* dal registro numerico a quello grafico-figurale.

Registro numerico: $\frac{1}{2}$

Registro grafico-figurale:

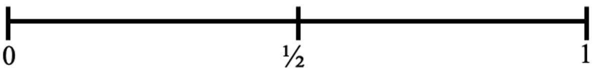


Figura 3. Conversione dal registro numerico al registro grafico-figurale.

La conversione tra due registri differenti può risultare difficile per l'allievo a causa delle differenze esistenti tra il registro di partenza e quello di arrivo. In tal caso, il ricorso a rappresentazioni ausiliarie che mescolano caratteristiche appartenenti al registro di partenza e di arrivo può facilitare il passaggio dall'uno all'altro (Iori, 2015). Si pensi, a titolo esemplificativo, a un'attività che richieda di descrivere una data situazione matematica attraverso una funzione. In questo caso, la tabella è una efficace rappresentazione ausiliaria che facilita la conversione dal registro linguistico del problema al registro algebrico e/o grafico con cui rappresentare la funzione.
L'esperienza didattica qui presentata si è proposta di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella comprensione e risoluzione di una situazione matematica. Per maggiori dettagli sul quadro teorico, sulle attività descritte e sull'analisi dei dati raccolti si rimanda al lavoro di tesi completo,[1] da cui è tratto il presente contributo.

2 Il ricorso alle rappresentazioni semiotiche nel processo di problem-solving

Il processo di problem-solving è complesso e legato a diversi fattori, sia interni al soggetto che apprende (di tipo cognitivo, emotivo e fisiologico) sia esterni, di tipo socioculturale. Nel processo risolutivo di un problema matematico, la conoscenza coinvolta è complessa e articolata e comprende

1. Lavoro di Diploma di Maria Giuseppina Chiara Nestola (2022), intitolato "Il ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione dei problemi", svolto nell'ambito del Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I, presso il Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. Relatrici: Silvia Sbaragli, Marta Barbero. Il lavoro completo è disponibile al seguente link: https://tesi.supsi.ch/4286/.

definizioni, procedure e competenze (Schoenfeld, 1992). Schoenfeld (1981) sostiene che un buon solutore di problemi è in grado di attuare precise decisioni strategiche sintetizzate in sette episodi: lettura, analisi, esplorazione, pianificazione, implementazione, verifica e transizione. Un buon solutore ottimizza la distribuzione del proprio lavoro, dedica molto tempo alla comprensione del testo e alla sua rappresentazione tramite disegni, grafici e schemi. Un solutore competente esplora differenti strategie prima di implementare quella più efficace alla risoluzione di un dato problema. Un cattivo solutore dedica poco tempo alla lettura, comprensione e rappresentazione del problema, dedicandosi principalmente all’implementazione di diversi tentativi.
Per la risoluzione di un problema matematico è, dunque, necessario che l’allievo sia in grado di individuare le informazioni utili, porsi domande, intuire, provare, pianificare, riflettere e analizzare il processo risolutivo e i risultati ottenuti, attuando una vera e propria riflessione e penetrazione nel problema matematico. Queste azioni rappresentano le tappe fondamentali di uno tra i processi cognitivi più importanti indicati nel Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese (Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015): “Matematizzare e modellizzare”. Tale processo si riferisce infatti «all’attività di organizzazione e analisi di qualsiasi situazione di realtà attraverso strumenti matematici, cioè alla traduzione, riorganizzazione e (ri)costruzione di un problema all’interno del contesto reale nel mondo simbolico» (Jupri & Drijvers, 2016, p. 2481, traduzione dell'autrice).
La risoluzione di un problema attraverso strumenti matematici richiede la traduzione del problema reale a problema in contesto matematico, la successiva risoluzione matematica del problema e l’interpretazione del risultato nel mondo reale. Questo approccio viene ben descritto nello schema del ciclo della matematizzazione delineato dall’indagine internazionale PISA (*Programme for International Student Assessment*), promossa dall’OCSE (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2016). I processi coinvolti nel ciclo sono *formulare*, *utilizzare*, *interpretare* e *valutare*, come riportato in Figura 4.
I processi *formulare* e *interpretare* costituiscono la matematizzazione orizzontale e fungono da ponte comunicativo tra il mondo reale e quello matematico. I processi *utilizzare* e *valutare* costituiscono la matematizzazione verticale, ovvero la capacità di applicare procedure e strategie all’interno dello stesso mondo, reale o matematico, verificandone l’uso in funzione del contesto (e la relativa possibilità di generalizzazione in contesti nuovi).

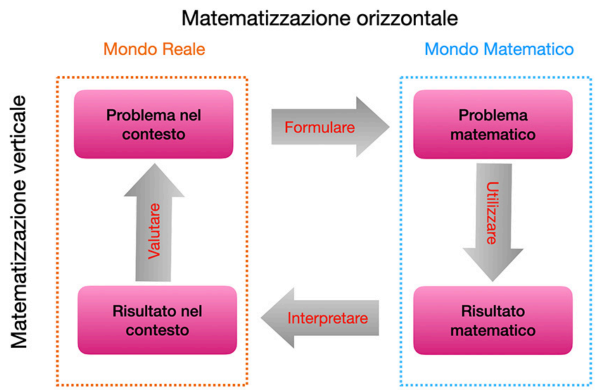


Figura 4. Il ciclo della matematizzazione (OECD, 2016).

Il processo di risoluzione di un problema consiste nella capacità di saper formulare, utilizzare, interpretare un modello matematico, valutandone la coerenza con la situazione matematica. Per poter risolvere un problema è necessario operare una variazione, ovvero una trasformazione che richiede il ricorso a uno o più registri semiotici (numerico, grafico, iconico, algebrico e/o geometrico). Le rappresentazioni semiotiche svolgono un ruolo fondamentale nell’attività di risoluzione di una situazione

matematica. Ricerche nell’ambito della didattica matematica (Clements, 1980; Demartini & Sbaragli, 2019; Salvisberg et al., 2019; Sbaragli & Franchini, 2018) dimostrano come le difficoltà degli allievi nella risoluzione dei problemi siano associate anche a carenze linguistiche, all’incomprensione del testo e alla difficoltà di trasformare la descrizione testuale del problema in un modello matematico, ossia al primo processo del ciclo di matematizzazione: *formulare*. Queste difficoltà risultano principalmente dovute all’incapacità di stabilire un collegamento tra linguaggio naturale e linguaggio specifico della matematica e di gestire le rappresentazioni semiotiche.
L’importanza delle trasformazioni semiotiche nei processi di problem-solving è stata evidenziata da diversi autori. Polya (1945), ad esempio, sostiene che «la variazione del problema è essenziale» e che il successo nella risoluzione del problema dipende dalla capacità dell’allievo di riconoscerne «il lato più accessibile» (Polya, 1945, p. 68, traduzione dell'autrice). A riguardo, un esempio classico è il calcolo della somma dei numeri naturali da 1 a n. La risoluzione del problema può essere affrontata seguendo diversi approcci che prevedono un ricorso a registri differenti, quali, ad esempio, il registro numerico e quello geometrico-figurale. Nel primo caso (**Tabella 1**) si può ricorrere all’uso di una tabella per rappresentare il calcolo che consente di ottenere il risultato desiderato.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Calcolo	$\frac{2 \cdot 1}{2}$	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	$\frac{4 \cdot 3}{2}$	$\frac{5 \cdot 4}{2}$	$\frac{6 \cdot 5}{2}$	$\frac{7 \cdot 6}{2}$	$\frac{8 \cdot 7}{2}$	$\frac{9 \cdot 8}{2}$	$\frac{10 \cdot 9}{2}$	…

Tabella 1. Somme parziali dei numeri naturali da 1 a 10.

Nel secondo caso la somma può essere rappresentata da un rettangolo, avente lati di dimensioni rispettivamente pari a (n+1) e n, la cui area restituisce esattamente il doppio della somma dei numeri naturali da 1 a n. In **Figura 5** viene riportata una rappresentazione geometrica figurale nel caso in cui $n = 6$.

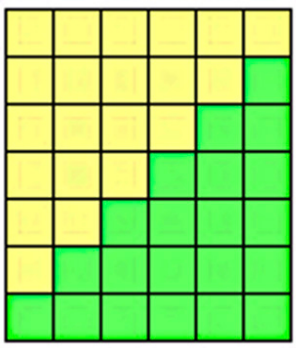


Figura 5. Rappresentazione geometrico-figurale della somma S_6 (De Petris, 2017).

Polya non è l’unico a interrogarsi sull’importanza di “variare” la presentazione del problema. Vygotskij (1978) riconosce nell’uso dei segni un elemento cruciale per l’attuazione di processi cognitivi in grado di orientare il comportamento dell’uomo. Per Vygotskij il segno è uno strumento dell’attività psichica paragonabile all’utensile nel lavoro. D’Amore et al. (2013) sottolineano come l’esplorazione delle strategie risolutive di un problema necessiti di una significativa gestione semiotica, il cui apprendimento rappresenta una tappa fondamentale nell’insegnamento della matematica. Duval (2011,

2013) sostiene che alcune difficoltà riscontrate dagli allievi nelle attività di problem-solving debbano essere ricondotte al mancato riconoscimento delle correlazioni esistenti tra i contenuti dei diversi registri semiotici coinvolti nella risoluzione del problema.
È fondamentale che la prassi didattica consenta agli allievi di appropriarsi della capacità di cambiare registro. Le capacità di conversione e trattamento devono essere opportunamente educate affinché l’allievo si appropri in modo consapevole delle diverse rappresentazioni semiotiche cogliendo i vantaggi e gli svantaggi di ciascuna a dipendenza della situazione matematica presentata. Rappresentazioni semiotiche distinte dello stesso oggetto matematico veicolano infatti contenuti differenti e la capacità di gestire più rappresentazioni dello stesso oggetto matematico può favorire una comprensione più profonda della situazione matematica, un utilizzo più consapevole degli strumenti matematici necessari per la sua risoluzione e una riflessione sulla plausibilità del risultato ottenuto e la sua coerenza con la situazione iniziale.

3 Metodologia

Viene presentata in questo articolo un’esperienza didattica che mira a supportare e analizzare il cambio di convinzioni e competenze nelle attività di problem-solving a seguito di un percorso che valorizzi l’uso delle rappresentazioni semiotiche. Il percorso didattico è stato svolto in una classe quarta (corso attitudinale) della scuola media di Chiasso composta da 19 allievi.
Il percorso si è articolato in tre fasi: nella prima fase è stato analizzato attraverso un questionario lo stato iniziale delle convinzioni e delle competenze degli allievi; nella seconda fase è stato proposto un percorso didattico centrato sull’uso delle diverse rappresentazioni semiotiche delle funzioni, durante il quale è stata valutata l’evoluzione delle competenze degli allievi; nella terza fase sono state analizzate le conseguenze del percorso sulle convinzioni degli allievi attraverso un questionario finale.
Più nello specifico, il questionario iniziale (Allegato 1) era composto di tre parti: la prima parte ha permesso di indagare le convinzioni degli allievi sull’uso delle rappresentazioni semiotiche nell’attività di risoluzione di un problema; la seconda parte ha consentito di indagare le capacità dell’allievo nell’utilizzo delle rappresentazioni semiotiche; la terza parte è stata tratta da Arrigo (2014) e ha consentito di indagare le capacità dell’allievo nell’utilizzo delle diverse rappresentazioni semiotiche nell’attività di risoluzione di un problema. Dall’analisi del questionario iniziale è emerso come la maggior parte degli allievi sottostimasse il contributo delle operazioni di conversione e trattamento alla comprensione di una situazione matematica e incontrasse difficoltà nell’uso delle rappresentazioni all’interno del ciclo della matematizzazione. Per tale motivo, è stato proposto un percorso didattico che stimolasse l’uso di diversi registri semiotici nell’attività di risoluzione di un problema. Sono state progettate sette attività (Allegato 2) attinenti principalmente agli ambiti “Funzioni” e “Numeri e calcolo” del Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese (DECS, 2015). I principali registri coinvolti sono stati: il registro algebrico, il registro grafico, il registro numerico e il registro linguistico.
Con lo scopo di fornire un’analisi quantitativa delle competenze manifestate dai singoli allievi relativamente all’uso delle rappresentazioni semiotiche e dei livelli di padronanza attinenti ai processi attivati nel ciclo della matematizzazione e modellizzazione sono state progettate due griglie osservative (Griglia A e Griglia B nell’Allegato 3). L’impiego della Griglia A ha permesso di valutare le sole operazioni di trattamento e conversione. L’impiego della Griglia B ha consentito di valutare l’uso dei registri semiotici all’interno dei vari processi coinvolti nel ciclo della matematizzazione.
Infine, la prima parte del questionario iniziale è stata somministrata nuovamente al termine del percorso come questionario finale. Tale indagine ha permesso di identificare eventuali cambi di convinzioni degli allievi in merito all’uso delle rappresentazioni semiotiche nell’attività di risoluzione di un problema.

4 Descrizione del percorso didattico

In questa sezione vengono presentate la descrizione del percorso didattico e l’analisi delle attività ritenute più significative. Nello specifico, nel **par. 4.1** viene riportata una descrizione degli obiettivi e della struttura di ciascuna delle sette attività svolte in classe. Nell’Allegato 2 vengono riportati i dettagli di ciascuna attività: una tabella riassuntiva che presenta l’argomento, lo scopo, la descrizione dell’attività, i principali luoghi di difficoltà, i registri e i processi (trasformazioni) semiotici coinvolti, processi del ciclo della matematizzazione coinvolti, durata e modalità di lavoro; a seguire, viene riportata la scheda consegnata agli allievi con le specifiche consegne. Nel **par. 4.2** vengono descritte le riflessioni emerse dall’analisi dei protocolli più significativi.

4.1 Descrizione delle attività

La *prima attività* ha riguardato il confronto tra due differenti offerte per il noleggio di uno scooter. Ciascuna delle due offerte poteva essere matematizzata con una funzione lineare. Agli studenti è stato chiesto dapprima di stilare una tabella che descrivesse la situazione proposta, poi di derivare la forma algebrica delle relazioni funzionali per rappresentare le singole offerte. A seguito di una messa in comune, che aveva lo scopo di stimolare una riflessione sulle differenti rappresentazioni semiotiche di una funzione, è stato richiesto di confrontare le due tariffe presentate in termini di convenienza economica, attraverso alcune domande stimolo. Si è infine proceduto con un’ulteriore messa in comune, che aveva l’obiettivo di stimolare un uso consapevole delle rappresentazioni semiotiche per interpretare e valutare la coerenza delle soluzioni ottenute.

La *seconda attività* ha richiesto all’allievo di confrontare tre tariffe per il roaming di dati in termini di convenienza economica. Lo scopo dell’attività è stato stimolare l’uso individuale e autonomo di tabelle e grafici per analizzare una situazione reale. L’attività ha previsto due differenti fasi di lavoro autonomo. Nella prima fase agli allievi è stato richiesto di utilizzare le rappresentazioni semiotiche che si ritenevano più adeguate a descrivere la situazione presentata. I registri più adottati sono stati: il registro numerico e grafico. Durante la messa in comune sono state confrontate le strategie risolutive emerse. Nella seconda fase, agli allievi è stato richiesto di rispondere ad alcune domande con lo scopo di stimolare i processi di interpretazione e valutazione dei risultati ottenuti.

La *terza attività* è stata presentata sotto forma di articolo di giornale da cui dedurre informazioni sui costi dell’autosilo di Lugano in due diverse fasce orarie: diurna e notturna. I costi di ciascuna fascia oraria potevano essere matematizzati con una funzione costante a tratti. L’attività ha previsto due fasi di lavoro. Nella prima fase di lavoro, la classe è stata suddivisa in due gruppi, A e B. Al gruppo A è stato richiesto di descrivere la situazione tramite una tabella; al gruppo B invece è stato chiesto di utilizzare una rappresentazione grafica. Durante la prima messa in comune è emerso come principale luogo di difficoltà la rappresentazione grafica della funzione discontinua. Nella seconda fase di lavoro, sono stati formati nuovi gruppi di tre/quattro allievi, due del gruppo A e uno/due del gruppo B, per favorire il confronto, l’interpretazione e la valutazione dei due differenti processi risolutivi tramite l’utilizzo di domande stimolo. Durante la messa in comune, che aveva lo scopo di confrontare le rappresentazioni tabulare e grafica, è emerso che per i due terzi degli allievi la tabella risultava lo strumento più utile e semplice da consultare.

La *quarta attività* ha tratto spunto da un compito di realtà della collana DeAScuola (2021) e ha richiesto di stabilire se fosse possibile suddividere in modo equo un numero dato di tavolini e coperti tra due differenti camerieri. L’attività poteva essere modellizzata tramite una equazione. Anche altre rappresentazioni semiotiche differenti da quella algebrica erano ammesse. Lo scopo dell’attività era stimolare l’utilizzo dei registri algebrico e numerico per descrivere una situazione matematica reale. La messa in comune è stata dedicata alla condivisone e al confronto delle diverse strategie risolutive impiegate per la rappresentazione e risoluzione della situazione matematica presentata.

La *quinta attività* ha previsto l’analisi e il confronto di due diverse tariffe per la ricarica di auto elettriche e l’identificazione di una terza tariffa sulla base di informazioni note. L’attività si componeva di due quesiti. Il primo quesito riguardava il confronto di due tariffe di differenti distributori di energia per auto elettriche. Il secondo quesito prevedeva la rappresentazione grafica di una terza tariffa sulla base di informazioni date. Tutte le tariffe proposte potevano essere modellizzate tramite due funzioni lineari. Agli allievi è stato richiesto di utilizzare i registri che ritenevano più opportuni per rappresentare la situazione presentata. La prima messa in comune è stata utilizzata per confrontare le varie strategie risolutive. Durante lo svolgimento del secondo quesito è emersa la difficoltà da parte degli allievi di individuare una strategia efficace per identificare la terza tariffa. È stata svolta, pertanto, una seconda messa in comune per supportare gli allievi nella decodifica del quesito e condividere i limiti e le potenzialità delle varie strategie risolutive adottate.

La *sesta attività* è stata tratta dalla Banca di problemi del Rally Matematico Transalpino (Associazione del Rally Matematico Transalpino, 2013). Il testo dell’attività richiedeva di calcolare le dimensioni della recinzione di un terreno di forma rettangolare. L’attività poteva essere modellizzata tramite una equazione. Gli allievi hanno avuto a disposizione il software GeoGebra. Nella lezione successiva sono state confrontate le strategie risolutive emerse.

La *settima attività* ha richiesto di ricavare le dimensioni di un contenitore ottenuto da un foglio di tetrapak ed è tratta da un esame del corso di Didattica disciplinare del Master. L’attività poteva essere modellizzata tramite una equazione. Gli allievi hanno avuto a disposizione il software GeoGebra. Durante la messa in comune sono state confrontate le varie strategie emerse.

La sesta e settima attività hanno previsto una modalità di lavoro individuale con lo scopo di indagare l’evoluzione delle competenze relative all’uso delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione di un problema al termine del percorso didattico.

4.2 Analisi di alcune attività

Qui di seguito vengono analizzati i protocolli più significativi della prima, quarta e sesta attività con lo scopo di evidenziare in che modo il percorso didattico abbia stimolato l’uso delle rappresentazioni semiotiche nell’attività di risoluzione di un problema e reso l’allievo un solutore più efficace e competente. Le tre attività sono analizzate in riferimento ai processi del ciclo della matematizzazione attivati in ciascuna di esse.

4.2.1 Analisi della prima attività

Relativamente al ciclo della matematizzazione, in questa attività vengono analizzati i processi:

– *utilizzare*: quando gli allievi stilano tabelle e grafici per rappresentare la situazione matematica;
– *interpretare* e *valutare*: quando si chiede agli allievi di verificare la plausibilità dei risultati ottenuti e la loro coerenza con la situazione proposta.

Sebbene la formulazione di un modello matematico sia sempre presente nell’attività di risoluzione del problema, si è ritenuto opportuno non analizzare il processo *formulare* in quanto guidato dall’intervento del docente.

In merito al processo *utilizzare*, circa un terzo degli allievi ha effettuato correttamente una conversione dapprima dal registro linguistico al registro numerico (rappresentazione tabulare) e successivamente dal registro numerico al registro algebrico, derivando la funzione che descrive la relazione tra la distanza percorsa e il costo totale. La tabella è stata, inoltre, utilizzata come rappresentazione ausiliaria nel passaggio dal registro algebrico a quello grafico, come emerge, ad esempio, nel protocollo in Figura 6.

OFFERTA SM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	0	30	48	90	120	150	180	1,20x

OFFERTA FM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	30	50	62	90	110	130	150	30+0,80x

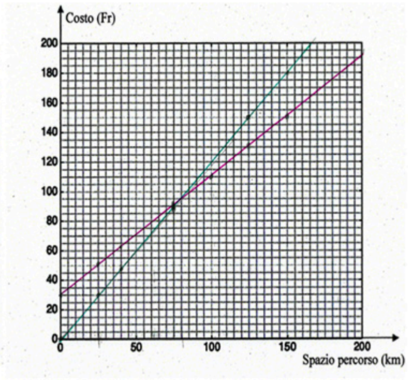


Figura 6. Esempio di conversione nel registro grafico utilizzando la tabella come rappresentazione ausiliaria.

Circa due terzi degli allievi hanno compiuto errori di trattamento e conversione. Nello specifico, gli errori sono stati di due tipologie. La prima ha riguardato la decodifica del testo e la conversione nel registro numerico (rappresentazione tabulare). Ad esempio, nel protocollo mostrato in Figura 7 l’allievo dimentica di aggiungere la quota fissa in tutti i calcoli numerici successivi al primo e così anche nel registro algebrico quando scrive la funzione che esprime la relazione tra costo e distanza percorsa secondo l’offerta FM.

OFFERTA SM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	0	30	48	90	120	150	180	1,20·x

OFFERTA FM

x (km)	0	25	40	75	100	125	150	x
y (Fr)	30	20	32	60	80	100	120	(0,80x)

Figura 7. Protocollo di un allievo che compie un errore di decodifica nella conversione dal registro linguistico al registro numerico.

La seconda, invece, ha riguardato errori di conversione dal registro numerico impiegato per stilare la tabella a quello grafico impiegato per rappresentare le due funzioni associate alle due tariffe nel diagramma cartesiano, come emerge dai due protocolli mostrati in Figura 8.

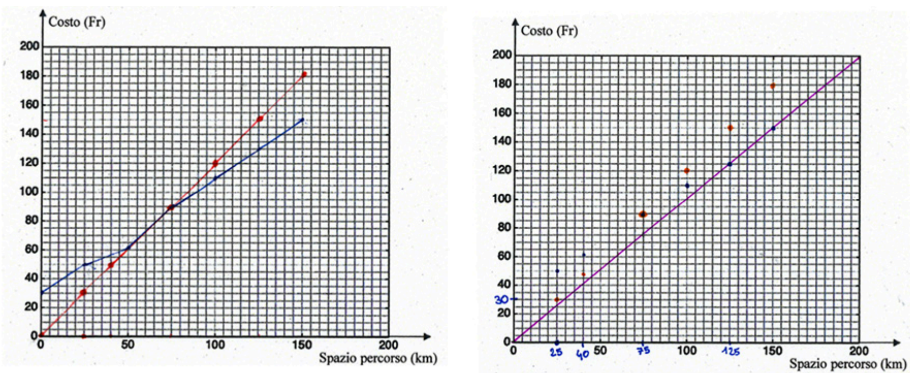
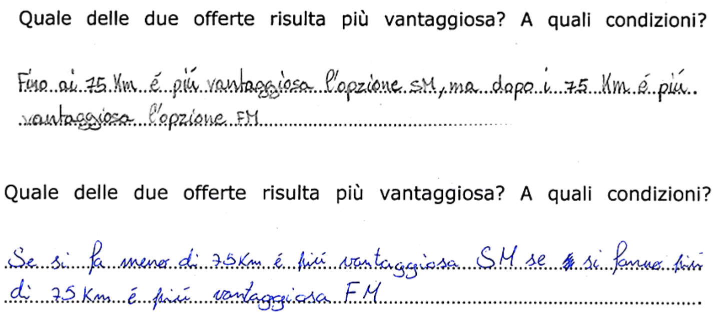


Figura 8. Protocolli di due allievi che compiono un errore di conversione dal registro numerico al registro grafico.

I processi *interpretare* e *valutare* sono stati analizzati sulla base della risposta al quesito «Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?» presentato nella seconda fase della prima attività. Dall’analisi dei protocolli emerge che circa un quarto degli allievi ha commentato in modo completo e dettagliato la convenienza in termini economici delle due tariffe di noleggio dello scooter presentate nell’attività. Due esempi sono riportati in **Figura 9**.


Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

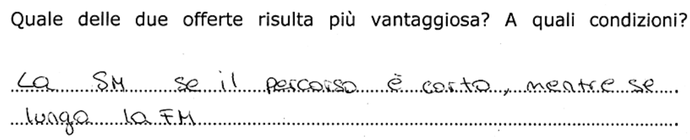
Fino ai 75 Km é più vantaggiosa l'opzione SM, ma dopo i 75 Km é più vantaggiosa l'opzione FM

Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

Se si fa meno di 75Km é più vantaggiosa SM se si fanno più di 75 Km é più vantaggiosa FM

Figura 9. Due protocolli con descrizione del confronto tra le due tariffe.

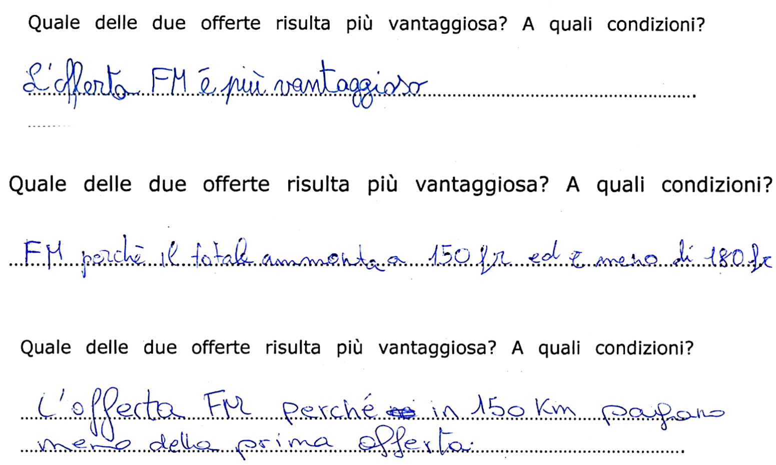
Due terzi degli allievi hanno fornito risposte incomplete o errate dimostrando una riflessione superficiale sui risultati ottenuti e la difficoltà di identificare tutte le possibili informazioni che le rappresentazioni di una funzione forniscono. La **Figura 10** riporta, ad esempio, il protocollo di un allievo che confronta la convenienza economica delle due tariffe senza precisare la distanza che rende l’una più vantaggiosa dell’altra.


Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

La SM se il percorso è corto, mentre se lungo la FM

Figura 10. Protocollo di un allievo che propone una descrizione corretta ma poco precisa.

La **Figura 11** riporta i protocolli di tre allievi: nel primo e nel secondo protocollo si nota come i due allievi considerino vantaggiosa l’offerta che consente di spendere meno sulle lunghe distanze; il terzo protocollo mostra come l’allievo non fornisca alcuna argomentazione in merito alla propria scelta.


Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

L'offerta FM é più vantaggiosa

Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

FM perchè il totale ammonta a 150 fr ed è meno di 180 fr

Quale delle due offerte risulta più vantaggiosa? A quali condizioni?

L'offerta FM perché in 150 Km pagano meno della prima offerta.

Figura 11. Protocolli di tre allievi che forniscono una descrizione superficiale della situazione presentata nella prima attività.

4.2.2 Analisi della quarta attività

I processi del ciclo della matematizzazione analizzati in questa attività sono:

– *formulare*: agli allievi è richiesto di identificare variabili significative, riconoscere la struttura geometrica del problema e decodificare il testo in un modello matematico;
– *utilizzare*: gli allievi devono utilizzare i registri scelti per produrre una risposta al problema presentato;
– *interpretare* e *valutare*: gli allievi devono verificare la coerenza dei risultati ottenuti con la situazione presentata, individuare eventuali limiti e le potenzialità delle strategie adottate.

In merito al processo *utilizzare*, circa la metà degli allievi ha utilizzato in modo autonomo, e senza compiere errori, le operazioni di trattamento e conversione coinvolte nella strategia scelta. La maggior parte degli allievi che hanno individuato una strategia risolutiva efficace e fornito una risposta coerente con la situazione presentata ha utilizzato il registro algebrico, come mostrato, ad esempio, nel protocollo in Figura 12.

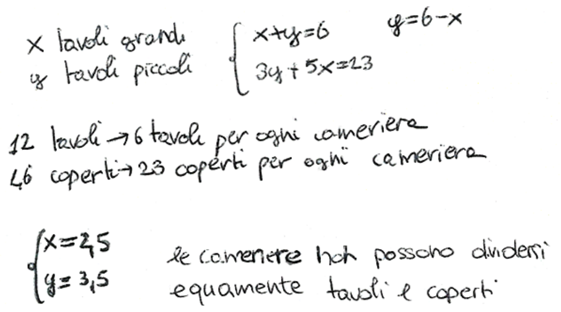


Figura 12. Protocollo di un allievo che converte correttamente il registro linguistico nel registro algebrico.

Oltre al registro algebrico, un altro registro adottato è stato quello iconico come mostrato, ad esempio, nel protocollo in Figura 13. In questo caso, l’uso del registro iconico fornisce una rappresentazione efficace e immediata della situazione matematica. L’analisi del protocollo dimostra, inoltre, come l’allievo sia in grado di riflettere e interpretare in modo corretto la propria strategia risolutiva.

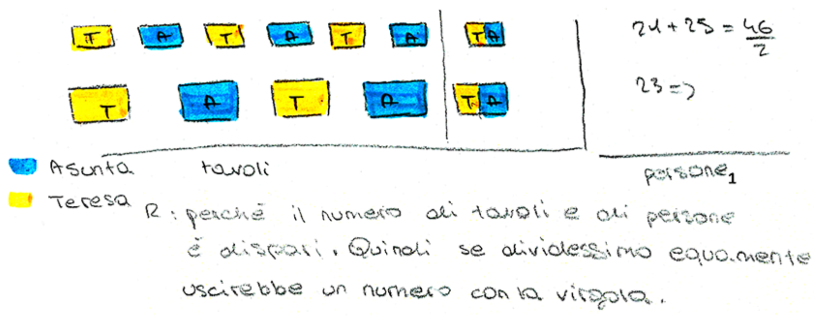


Figura 13. Protocollo di un allievo che converte il testo nel registro iconico.

I principali errori emersi durante lo svolgimento dell’attività sono stati errori di conversione e trattamento. Ad esempio, la Figura 14 mostra il protocollo di un allievo che attribuisce erroneamente a ciascuna cameriera il numero totale di tavolini. Il sistema algebrico, pertanto, non rappresenta una matematizzazione e modellizzazione coerente con la situazione proposta. Il risultato ottenuto è un valore negativo che non risulta plausibile sulla base delle condizioni fornite dal problema. L’allievo dimostra, inoltre, di non attivare i processi *interpretare* e *valutare* e di non verificare che il processo risolutivo abbia senso nel contesto reale di partenza.

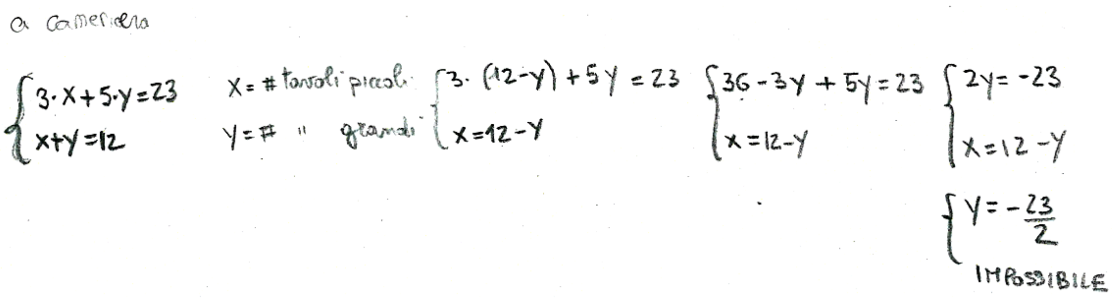


Figura 14. Protocollo di un allievo che compie errori di decodifica nella conversione dal registro linguistico al registro algebrico.

Nel protocollo riportato in Figura 15 l'allievo decodifica correttamente il testo utilizzando rappresentazioni linguistiche e iconografiche ausiliarie. L'analisi del protocollo mostra come l'allievo compia alcuni errori di trattamento nel registro algebrico, utilizzando in modo errato le proprietà delle operazioni aritmetiche nella risoluzione del sistema di equazioni. Tuttavia, la soluzione trovata risulta plausibile con la situazione presentata. In questo caso, riflettere sul significato di soluzione di un sistema di equazioni avrebbe potuto consentire all'allievo di effettuare le opportune retroazioni correttive in modo autonomo.

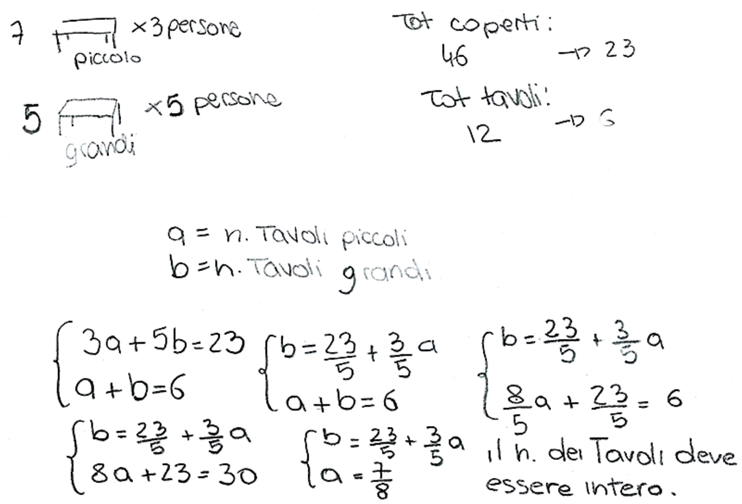


Figura 15. Protocollo di un allievo che compie errori di trattamento nel registro algebrico.

In merito ai processi *interpretare* e *valutare* circa la metà degli allievi ha interpretato il risultato in modo coerente rispetto alla situazione posta, rendendosi conto che la richiesta del problema non poteva essere soddisfatta. Alcuni degli allievi che hanno compiuto errori di conversione dal registro linguistico al registro algebrico non hanno verificato che la coppia di valori numerici fosse soluzione del sistema di equazioni e non hanno effettuato alcuna retroazione sulla strategia adottata.

4.2.3 Analisi della sesta attività

I processi del ciclo della matematizzazione analizzati in questa attività sono gli stessi menzionati nell'analisi dell'attività precedente. Dall'analisi dei protocolli emerge che circa i due terzi degli allievi ha formulato una strategia risolutiva in modo autonomo, dimostrando una adeguata comprensione del testo del problema. Circa un quinto degli allievi ha compiuto errori di decodifica dovuti ad una errata comprensione della situazione proposta.

Per quanto riguarda il processo *utilizzare*, circa metà degli allievi ha utilizzato in modo autonomo e corretto le operazioni di trattamento e conversione coinvolte nella strategia scelta. Un terzo degli allievi ha compiuto errori di conversione e/o trattamento. A tal proposito, la **Figura 16** riporta il protocollo con un errore di decodifica. L'allievo suppone di dover recintare tutti i lati del terreno, ignorando la presenza di una preesistente recinzione menzionata nel testo del problema e rappresentata nell'immagine ad esso associata.

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ y = \dfrac{40}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + x + y + y = 20 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

$$10 - x = \frac{40}{x}$$
$$x(10-x) = \frac{40}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}$$
$$10x - x^2 = 40$$
$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Figura 16. Protocollo di un allievo che compie un errore di decodifica nella conversione dal registro linguistico al registro algebrico.

In **Figura 17** si mostra il protocollo di un allievo che matematizza e modellizza la situazione descritta nel testo del problema tramite l'impiego di un sistema di due equazioni in due incognite (b e a). Le operazioni di trattamento compiute nel registro algebrico dimostrano come l'allievo abbia riconosciuto in ciascuna delle due equazioni una funzione reale (f_1: $b \to 20 - 2b$ e f_2: $b \to \frac{40}{b}$) cui è associato un campo di esistenza ($\mathbb{R}$ per la prima funzione e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per la seconda funzione) che non è specificato con la dovuta precisione. Il protocollo mostra, inoltre, come l'allievo converta una rappresentazione nel registro algebrico in una rappresentazione nel registro grafico, individuando tutte le possibili soluzioni del sistema di equazioni.

$$\begin{cases} a \cdot b = 40 \\ a + 2b = 20 \end{cases}$$

$a = \frac{40}{b}$ $\quad a = 20 - 2b$ $\quad b \neq 0$

$a = 20 - 2b$

$A = (2,8 ; 14,5)$

$B = (7,2 ; 5,5)$

I grafici si intersecano nei punti A e B
le dimensioni del terreno sono
$a \simeq 14,5$ m $\quad b \simeq 2,8$ m
$a \simeq 5,5$ m $\quad b \simeq 7,2$ m

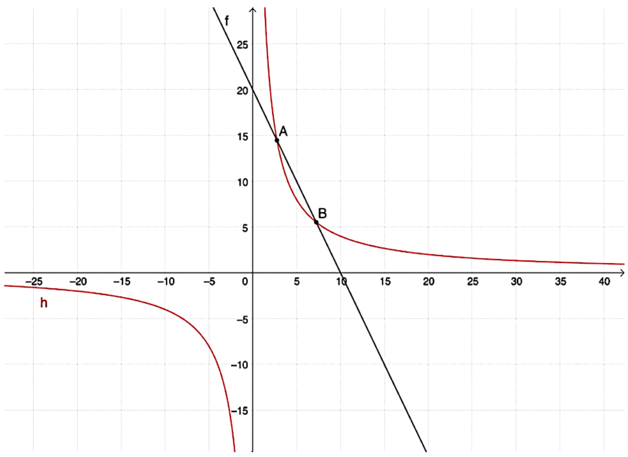


Figura 17. Protocollo di un allievo che utilizza correttamente i registri algebrico, numerico e grafico.

La **Figura 18** e la **Figura 19** mostrano due protocolli in cui il testo del problema è stato correttamente decodificato nel registro algebrico tramite l'impiego di un sistema di equazioni in due variabili (x e y).

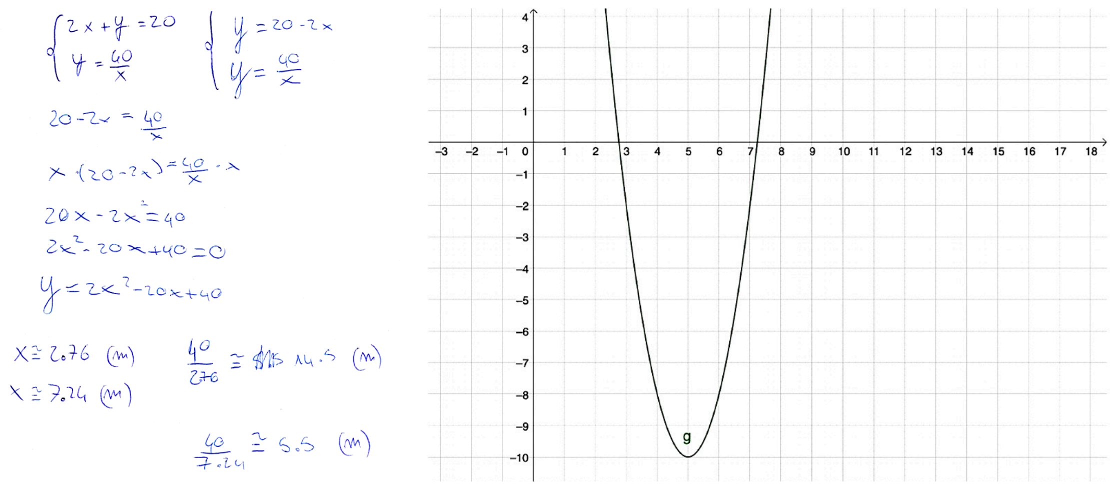


Figura 18. Protocollo di un allievo che dimentica di identificare il valore eccezionale della equazione in una sola variabile risultante dalle operazioni di trattamento nel registro algebrico.

Le differenze di trattamento operate nel registro algebrico dai due allievi conducono a due differenti equazioni in una sola incognita di cui solo l'allievo del protocollo riportato in **Figura 19** identifica correttamente il valore eccezionale ($x = 0$). In entrambi i protocolli, infine, la strategia risolutiva prevede la conversione del registro algebrico nel registro grafico. Le rappresentazioni mostrate in **Figura 18** ed in **Figura 19** sono differenti, ma coerenti con la situazione descritta nel testo del problema e le operazioni di trattamento effettuate dai due allievi durante l'implementazione della strategia risolutiva. Nello specifico, nel protocollo in **Figura 18** l'allievo individua graficamente gli zeri della funzione $x \to 2x^2 - 20x + 40$.

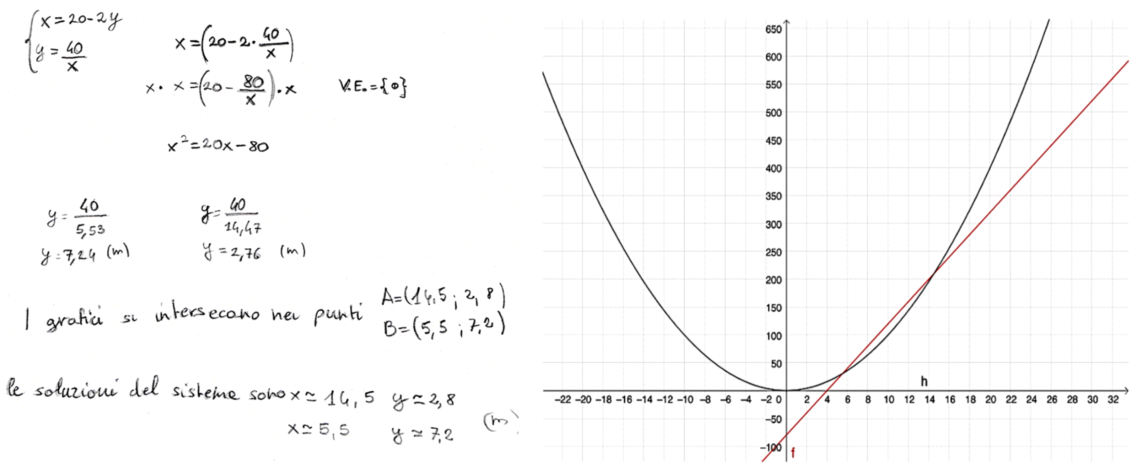
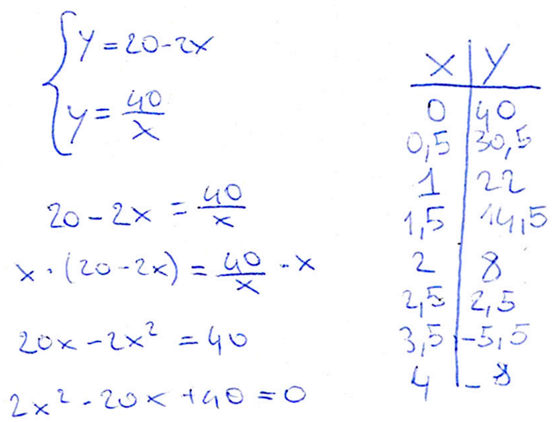


Figura 19. Protocollo di un allievo che utilizza correttamente i registri algebrico, numerico e grafico.

Nel protocollo in **Figura 19** l'allievo identifica graficamente le coppie di valori in cui le funzioni reali f_1: $x \to x^2$ e f_2: $x \to 20x - 80$ assumono la stessa immagine. Infine, le risposte riportate nei due protocolli consentono di verificare come entrambi gli allievi attivino in modo adeguato tutti i processi coinvolti nel ciclo della matematizzazione.

La **Figura 20** invece mostra il protocollo di un allievo che, dopo aver decodificato il testo del problema correttamente, cerca le soluzioni dell'equazione risultante per tentativi senza tuttavia riuscire a individuare le possibili soluzioni del problema. Durante la messa in comune (svolta nella lezione successiva) si è, pertanto, ritenuto opportuno confrontare le varie strategie emerse mettendo in luce i limiti e le potenzialità di ciascuna di esse.



$$\begin{cases} y = 20-2x \\ y = \frac{40}{x} \end{cases}$$

$$20-2x = \frac{40}{x}$$

$$x \cdot (20-2x) = \frac{40}{x} \cdot x$$

$$20x - 2x^2 = 40$$

$$2x^2 - 20x + 40 = 0$$

x	y
0	40
0,5	30,5
1	22
1,5	14,5
2	8
2,5	2,5
3,5	-5,5
4	-8

Figura 20. Protocollo di un allievo che procede per tentativi nella ricerca della soluzione del sistema di equazioni.

Riguardo ai processi *interpretare* e *valutare*, circa i tre quarti degli allievi ha interpretato correttamente il risultato assegnando al terreno tutte le possibili dimensioni che il rettangolo poteva assumere. Circa i due quinti degli allievi hanno, inoltre, verificato che i risultati ottenuti fossero soluzione del sistema algebrico che matematizzava la situazione presentata. Circa un quinto degli allievi ha ipotizzato che la "base" del rettangolo dovesse possedere misura maggiore della sua "altezza", individuando una sola soluzione del problema.

5 Evoluzione delle competenze

In questo paragrafo viene analizzata l'evoluzione delle competenze degli allievi in merito all'uso delle rappresentazioni semiotiche all'interno del ciclo della matematizzazione. Nello specifico, viene presentato un confronto tra la terza parte del questionario iniziale e la settima attività svolta all'interno del percorso. Usando la Griglia A e la Griglia B (Allegato 3), ad ogni allievo è stato attribuito un livello che poteva variare tra avanzato, intermedio e parziale: il livello avanzato prevedeva autonomia e correttezza nell'uso delle strategie scelte; il livello intermedio prevedeva un lavoro autonomo con la presenza di errori; il livello parziale comportava l'intervento del docente a supporto dell'allievo.
La **Figura 21** e la **Figura 22** riportano i due diagrammi a barre ottenuti analizzando la terza parte del questionario iniziale tramite le Griglie A e B. Dal diagramma in **Figura 21** emerge come nella fase iniziale del percorso la maggior parte degli allievi fosse in grado di identificare varie rappresentazioni di uno stesso oggetto matematico. Tuttavia, il diagramma in **Figura 22** evidenzia la difficoltà da parte degli allievi di dare un senso a tali rappresentazioni all'interno del ciclo della matematizzazione. Solo due allievi sono stati in grado di utilizzare correttamente le rappresentazioni semiotiche per risolvere la situazione matematica presentata.

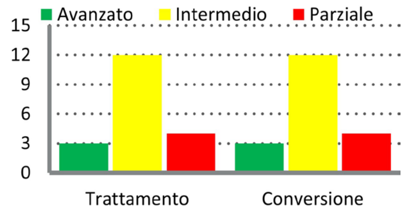


Figura 21. Diagramma a barre delle trasformazioni semiotiche relative al questionario iniziale ottenuto tramite l'impiego della Griglia A.

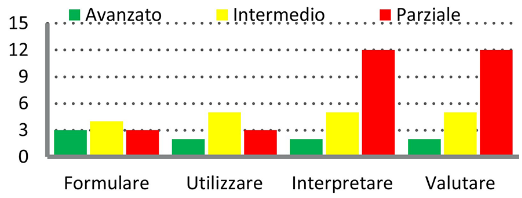


Figura 22. Diagramma a barre dei processi attivati nella risoluzione del questionario iniziale ottenuto tramite l'impiego della Griglia B.

I diagrammi a barre riportati in **Figura 23** e **Figura 24** si riferiscono all'analisi della settima attività. Dal grafico in **Figura 23** emerge come la maggior parte degli allievi abbia raggiunto un livello avanzato/intermedio nell'uso delle operazioni di trattamento e conversione coinvolte nella risoluzione di un'attività matematica. Il diagramma in **Figura 24** evidenzia come circa la metà degli allievi abbia raggiunto un livello avanzato nell'uso dei registri semiotici all'interno del ciclo della matematizzazione. Circa un terzo degli allievi dimostra, invece, di saper utilizzare le rappresentazioni semiotiche in modo consapevole e adeguato, seppur compiendo errori di conversione e trattamento.

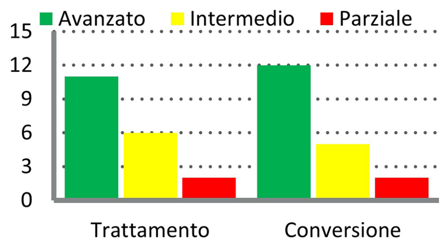


Figura 23. Diagramma a barre delle trasformazioni semiotiche relative alla settima attività ottenuto tramite l'impiego della Griglia A.

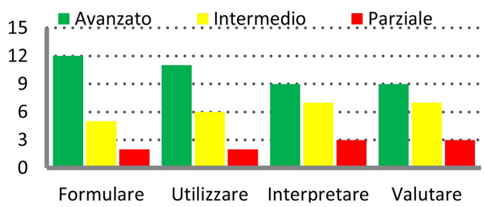


Figura 24. Diagramma a barre dei processi attivati nella risoluzione della settima attività ottenuto tramite l'impiego della Griglia B.

Il confronto dei grafici relativi al questionario iniziale (**Figure 21-22**) con i diagrammi ottenuti dall'analisi dell'ultima attività (**Figure 23-24**) evidenzia come, al termine del percorso, la maggior parte degli allievi sia in grado di identificare le rappresentazioni semiotiche più efficaci alla comprensione e risoluzione di un problema. È possibile, dunque, ipotizzare che il percorso didattico abbia reso gli allievi più consapevoli del ruolo svolto dalle rappresentazioni semiotiche e del significato che esse veicolano all'interno del ciclo della matematizzazione.

6 Cambi di convinzioni

Di seguito vengono descritti i cambi di convinzione attinenti all'aspetto linguistico, all'aspetto strategico e all'uso delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione di problemi matematici. Si ricorda che le domande analizzate sono quelle della prima parte del questionario in Allegato 1 e che un'analisi completa dei dati raccolti è disponibile nel lavoro di tesi completo (Nestola, 2022).

6.1 Aspetto linguistico

La Figura 25 presenta il confronto tra i diagrammi a barre riguardanti le convinzioni iniziali e finali relativamente all'aspetto linguistico nella risoluzione di problemi matematici.

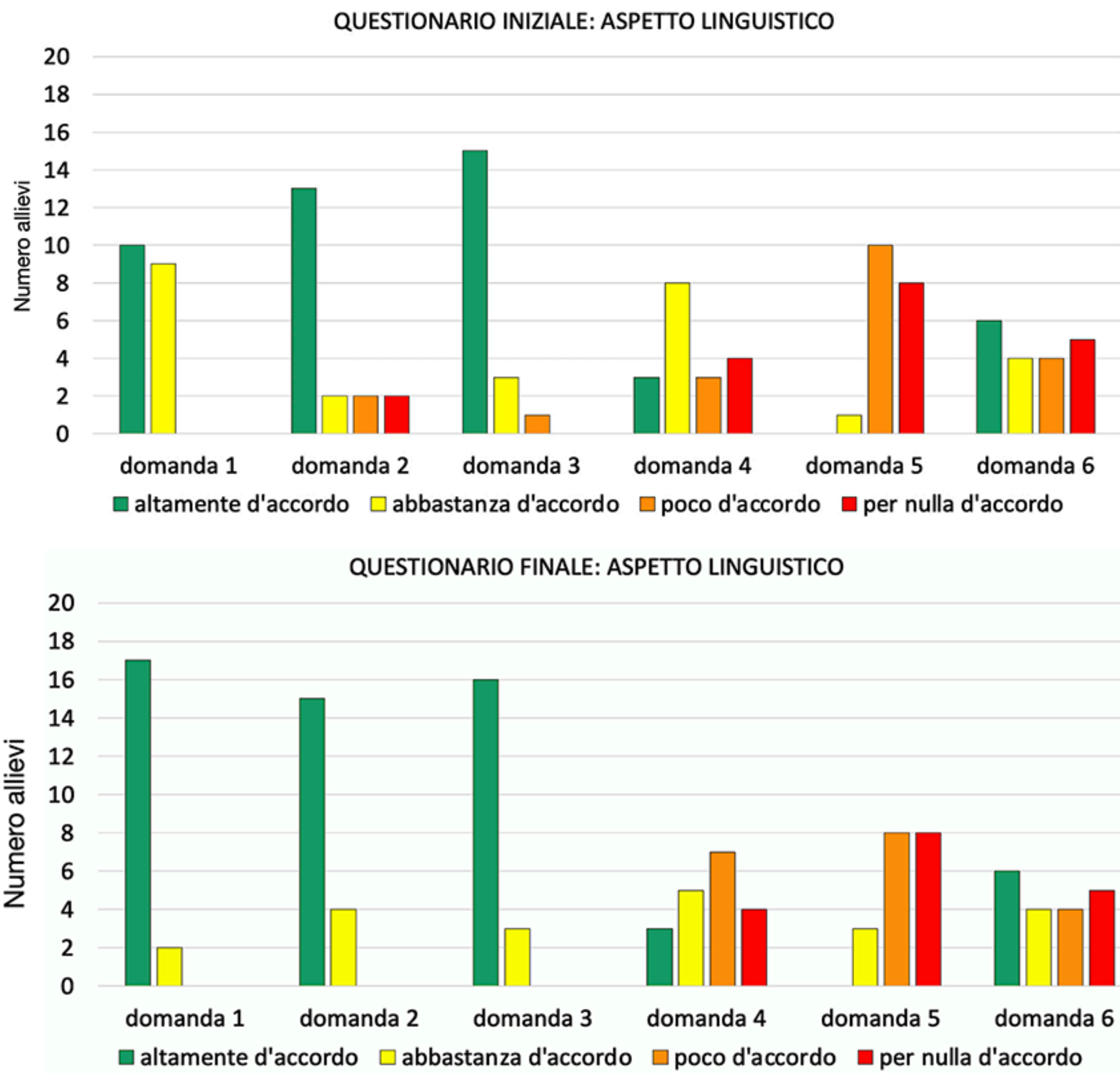


Figura 25. Confronto tra questionario iniziale e finale sull'aspetto linguistico.

Dal confronto dei diagrammi e dall'analisi delle singole risposte si possono notare i cambiamenti di convinzione più significativi su alcune specifiche domande:

– 7 allievi su 19 cambiano la propria convinzione sull'importanza di capire gli argomenti coinvolti nel problema (domanda 1), passando da *abbastanza d'accordo* ad *altamente d'accordo*.

- 4 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sull'importanza di capire il significato delle domande del problema (domanda 2). Tra questi, 2 allievi modificano la propria convinzione passando da *per nulla d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*, 2 allievi modificano la propria convinzione passando da *poco d'accordo* ad *altamente d'accordo*.
- 2 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni circa l'importanza di capire bene la situazione proposta dal problema (domanda 3). Tra questi, 1 allievo modifica la propria convinzione passando da *abbastanza d'accordo* ad *altamente d'accordo* e 1 allievo modifica la propria convinzione passando da *poco d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*.
- 3 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sull'utilità della ricerca di parole chiave nel testo del problema (domanda 4), passando da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*.

6.2 Aspetto strategico

La Figura 26 presenta il confronto tra i diagrammi a barre riguardanti le convinzioni iniziali e finali relativamente all'aspetto strategico nella risoluzione di problemi matematici.

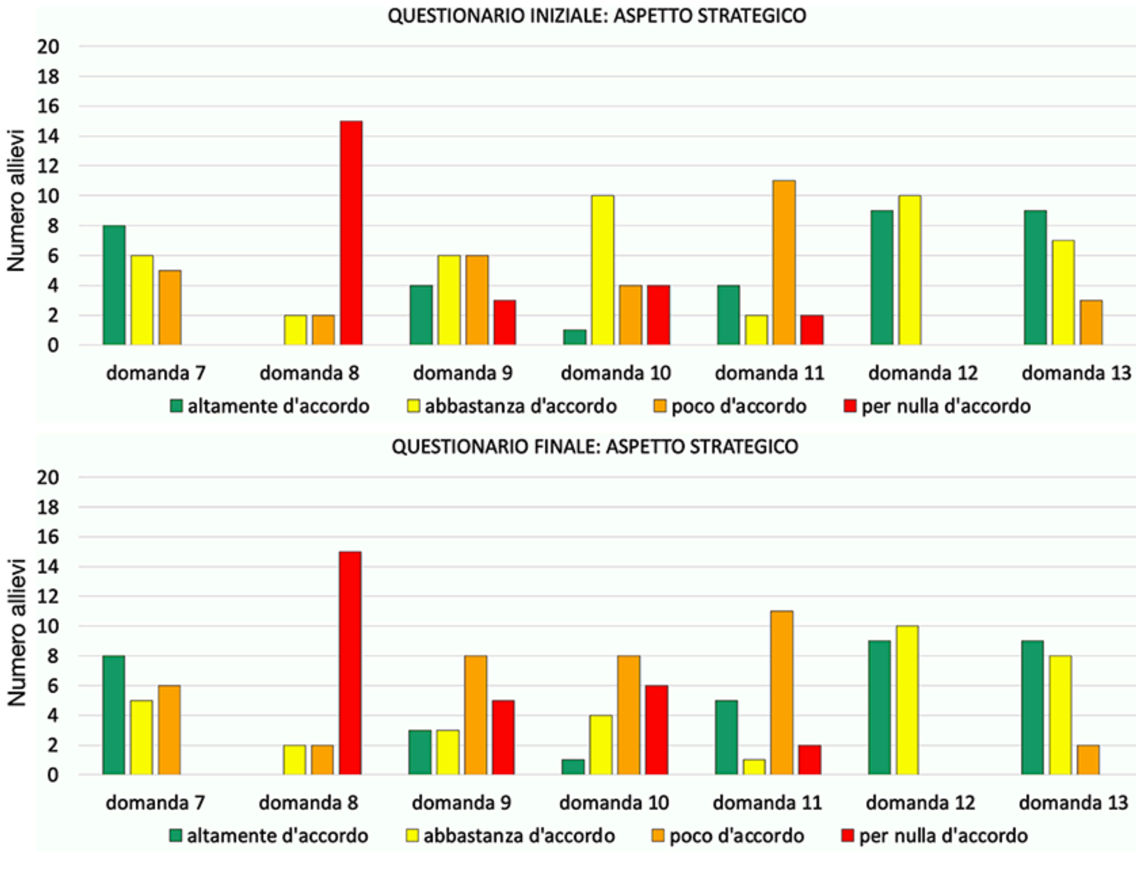


Figura 26. Confronto tra questionario iniziale e finale sull'aspetto strategico.

Dal confronto emerge come per la maggior parte degli allievi il focus si sposti dal prodotto al processo, dal risultato alla strategia. Nello specifico, commentando solo le domande dove il cambiamento di convinzione è più significativo:

- 5 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sulla credenza che risolvere un problema matematico significhi trovare la soluzione corretta (domanda 9). Tra questi, 1 allievo passa da *altamente d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 2 allievi su 19 passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*; 2 allievi su 19 passano da *abbastanza d'accordo* a *per nulla d'accordo*.

– 6 allievi su 19 modificano le proprie convinzioni sulla credenza che se il risultato è giusto allora la strategia è corretta (domanda 10). Tra questi, 4 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*; 2 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *per nulla d'accordo*.
– 1 allievo modifica la propria convinzione in merito all'importanza di esplorare diverse strategie (domanda 11) passando da *poco d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*. Tuttavia, sono ancora tanti (13 su 19) gli allievi che si dichiarano *poco d'accordo* o *per nulla d'accordo*.

6.3 Ruolo delle rappresentazioni semiotiche

La Figura 27 presenta il confronto tra i diagrammi a barre riguardanti le convinzioni iniziali e finali relativamente al ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione di problemi.

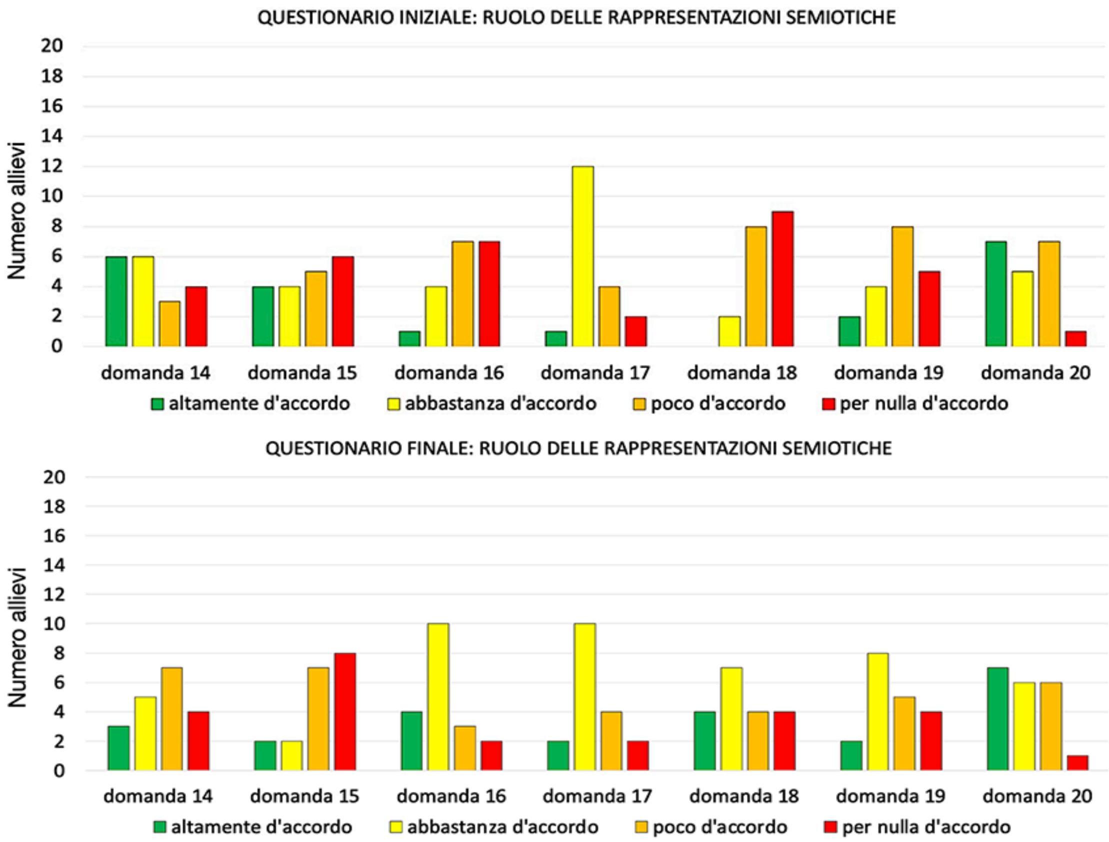


Figura 27. Confronto tra questionario iniziale e finale sul ruolo delle rappresentazioni semiotiche.

Dal confronto dei diagrammi e dall'analisi delle singole risposte sulle domande più significative emerge che:
– 6 allievi su 19 modificano la propria convinzione sull'esistenza di una rappresentazione matematicamente più corretta per ogni problema (domanda 14). Nello specifico, 2 allievi passano da *altamente d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 1 allievo passa da *altamente d'accordo* a *poco d'accordo*; 3 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*.
– 6 allievi su 19 modificano la propria convinzione sulla possibilità di trascurare alcune tra le informazioni fornite nei diversi registri per comprendere il problema (domanda 15). Nello specifico, 2 allievi passano da *altamente d'accordo* ad *abbastanza d'accordo*; 2 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *poco d'accordo*; 2 allievi passano da *abbastanza d'accordo* a *per nulla d'accordo*.
– 14 allievi su 19 modificano la propria convinzione sull'uso di disegni, schemi e grafici per rappresentare una situazione matematica data (domanda 16). Nello specifico, 3 allievi passano da *abbastanza d'accordo* ad *altamente d'accordo*; 6 allievi passano da *poco d'accordo* ad *abbastanza*

d’accordo; 3 allievi passano da *per nulla d’accordo* ad *abbastanza d’accordo*; 2 allievi passano da *per nulla d’accordo* a *poco d’accordo*.
– 11 allievi su 19 modificano la propria convinzione sull’uso di strumenti software per risolvere equazioni (domanda 18). Nello specifico, 2 allievi passano da *abbastanza d’accordo* ad *altamente d’accordo*; 2 allievi passano da *poco d’accordo* ad *altamente d’accordo*; 2 allievi passano da *poco d’accordo* ad *abbastanza d’accordo*; 5 allievi passano da *per nulla d’accordo* ad *abbastanza d’accordo*.
– 5 allievi su 19 modificano la propria convinzione in merito all’uso di rappresentazioni per verificare la correttezza di un procedimento (domanda 19). Nello specifico, 4 allievi passano da *poco d’accordo* ad *abbastanza d’accordo*; 1 allievo passa da *per nulla d’accordo* a *poco d’accordo*.

7 Conclusioni

Il percorso didattico presentato in questo articolo è stato progettato con il duplice scopo di rendere l’allievo maggiormente consapevole del ruolo svolto dalle rappresentazioni semiotiche nella comprensione e risoluzione di un problema matematico e competente nella gestione delle operazioni di conversione/trattamento coinvolte in una strategia risolutiva.
Le attività scelte per il percorso didattico si sono rivelate stimolanti e adeguate all’obiettivo di favorire l’acquisizione di competenze partendo da attività il più possibile significative e vicine alla vita quotidiana e che restituiscono il senso di quanto appreso durante le lezioni di matematica. Le situazioni matematiche presentate hanno accompagnato gradualmente gli allievi a matematizzare e modellizzare situazioni reali simili tra loro con l’obiettivo di tradurle in problemi matematici accomunati dallo stesso modello matematico: le funzioni.
Durante il percorso, si è avuto modo di osservare una crescita nella maggior parte degli allievi in termini di competenze attinenti al ciclo della matematizzazione. Nello specifico, l’analisi dei protocolli raccolti durante lo svolgimento del percorso didattico dimostra come valorizzare l’uso di vari registri semiotici consenta all’allievo di appropriarsi delle varie rappresentazioni di un oggetto matematico per poterle impiegare efficacemente nell’attività di risoluzione di un problema. Gli allievi hanno lavorato con interesse e partecipazione, dimostrando anche di saper cercare e applicare diverse strategie nella fase di esplorazione, arrivando a tradurre la realtà in un modello matematico. A seguito del lavoro svolto in classe, si è anche avuto modo di notare che gli allievi si rivelano maggiormente disposti a mettersi in gioco e a cercare possibili strategie risolutive all’interno di contesti noti e non noti. Il percorso ha, dunque, avuto delle ricadute positive anche dal punto di vista della disposizione ad agire e a esplorare situazioni di apprendimento con un atteggiamento positivo.
Uno dei principali limiti dell’analisi didattica qui presentata è il numero esiguo di allievi del campione di riferimento. Sarebbe opportuno proporre il percorso a un numero maggiore di allievi estendendolo anche a classi di prima, seconda e terza media. Il presente lavoro, inoltre, non valuta se le convinzioni e le competenze si mantengono costanti nel tempo. A questo riguardo, sarebbe interessante studiare il cambio di competenze e convinzioni nell’arco di un ciclo scolastico, estendendo l’applicazione del tema anche ad ambiti differenti dalle funzioni.
I risultati ottenuti confermano come le rappresentazioni semiotiche svolgono un ruolo importante non solo nella costruzione del sapere matematico, sia esso concettuale o procedurale, ma anche nella risoluzione dei problemi. Inoltre, rendere consapevoli gli allievi dell’importanza di tale ruolo può favorire un cambiamento delle loro convinzioni in merito alla risoluzione di problemi e all’uso di rappresentazioni e trasformazioni semiotiche come strumento fondamentale per matematizzare e modellizzare situazioni reali.

Bibliografia

Arrigo, G. (2014). Conversioni e trattamenti semiotici nel problem solving. *Bollettino dei docenti di matematica*, *69*, 85–103.

Associazione del Rally Matematico Transalpino. (2013). Il prato di zio Francesco (II). *Studio ARMT, Gruppo funzione*. http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/studio-fn6-it.pdf

Clements, M. K. (1980). Analyzing children’s errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(1), 1–21. https://doi.org/10.1007/BF00369157

D’Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 150–173.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Pitagora.

DeAScuola. (2021). *Compiti di realtà. Zona Matematica.* https://zonamatematica.deascuola.it/i-grado/aree-e-percorsi/compiti-di-realta/

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, *5*, 9–43. https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.1

De Petris, V. (2017). Quattro itinerari diversi per arrivare alla formula di Gauss per la somma dei numeri naturali. *Maths on the web – Un sito web per le Scienze Matematiche e Fisiche.* http://www.vdepetris.it/t10/Text10.htm

Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese.* DECS. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006b). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *4*, 585–619.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (vol. 1, pp. 39–61). Brill Sense.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas* (a cura di T. M. M. Campos, trad. M. A. Dias). PROEM.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l’acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*(1), 1–45. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p1

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell’insegnante della dimensione semio-cognitiva dell’apprendimento della matematica.* Tesi di dottorato. Università di Palermo.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481–2502. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1299a

Nestola, M. G. C. (2022). *Il ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione dei problemi.* Tesi Master, Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://tesi.supsi.ch/4286/

Organization for Economic Co-operation and Development. (2016). *The PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy.* OECD Publishing.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Salvisberg, M., Crotta, F., & Sbaragli, S. (2019). *Verifica delle Competenze Fondamentali (VeCoF) 2016. Risultati ticinesi in matematica nell’11° anno scolastico.* Centro innovazione e ricerca sui sistemi educativi. http://repository.supsi.ch/id/eprint/12304

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2018). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare.* Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. https://repository.supsi.ch/10150/1/Valutazione%20didattica%20prove%20standardizzate_5%20elementare.pdf

Schoenfeld, A. H. (1981). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (Los Angeles, USA, 13-17 aprile 1981). https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED201505.pdf

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). Macmillan Publishing Co, Inc.

Vygotskij, L. (1978). *Mind in Society. The development of Higher Psychological Processes.* Harward University Press.