DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 59 - 84, DOI: 10.33683/ddm.23.14.3
OPEN ACCESS

La comprensione delle figure geometriche da parte degli insegnanti di scuola secondaria: la loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e di prevedere le difficoltà degli studenti

Secondary teachers' geometrical figure apprehension: their ability to construct geometrical proof and to predict students' difficulties

Athanasios Gagatsis•, Zoi Geitona°, Rita Panaoura•• e Iliada Elia•
•Dipartimento dell'educazione, Università di Cipro – Cipro
°Dipartimento dell'educazione, Università nazionale e capodistriana di Atene – Grecia
••Dipartimento dell'educazione, Università Frederick di Cipro – Cipro

gagatsis@ucy.ac.cy, zgeitona@primedu.uoa.gr, r.panaoura@frederick.ac.cy, elia.iliada@ucy.ac.cy

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA ORIGINALE

Sunto / Questo studio analizza la comprensione delle figure geometriche da parte dei docenti di scuola secondaria in servizio, in relazione alla loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e di prevedere didatticamente difficoltà ed errori dei loro studenti. Il quadro teorico di analisi è basato sulla teoria della comprensione delle figure geometriche elaborata da Duval, presentata ai docenti nell'ambito di un corso di formazione continua in didattica della matematica. Come parte della valutazione finale del corso, è stato costruito e somministrato un test scritto con varie attività geometriche. Sono state analizzate le risposte dei partecipanti in termini di risoluzione e di interpretazione delle difficoltà. I risultati indicano che le teorie e i concetti di didattica della geometria possono far luce su vari aspetti dell'insegnamento-apprendimento della geometria. Un docente che propone una soluzione corretta non necessariamente identifica/comprende le possibili difficoltà degli studenti. La discussione si concentra sulle implicazioni didattiche relative alla geometria e alla dimostrazione geometrica.

Parole chiave: geometria; comprensione delle figure geometriche; dimostrazione geometrica; difficoltà; formazione degli insegnanti di scuola secondaria.

Abstract / The present study investigates in-service secondary teachers' geometrical figure apprehension in relation to their ability to construct geometrical proofs and to predict didactically their students' difficulties and mistakes. The theoretical framework of analysis is based on Duval's geometrical figure apprehension which was taught to the teachers as part of an in-service training course in didactics of mathematics, offered by one of the researchers. As part of the course final assessment, a written test consisting of various geometrical tasks was constructed and administered to the sample. Participants' answers in both solving and interpreting difficulties related to the tasks were analyzed. The results of the study indicate that theories and concepts of didactics of geometry can shed light to various facets of teaching and learning of geometry. A teacher who presents a correct solution at a task does not necessarily identify or understand the possible difficulties faced by students. Discussion concentrates on teaching implications about geometry and geometrical proof.

Keywords: geometry; geometrical figure apprehension; geometrical proof; difficulties; secondary school teacher training.

1 Introduzione

La geometria, che si occupa di forme e oggetti, ricopre un posto essenziale nella vita umana: nella scienza, nell'arte, nell'architettura, nell'ingegneria (Yavuz et al., 2016). Allo stesso tempo, l'insegnamento e l'apprendimento della geometria costituiscono un campo di ricerca privilegiato per i ricercatori in didattica della matematica e in psicologia: «L'insegnamento della geometria è un argomento importante, ma spesso trascurato nella ricerca in didattica e nella pratica educativa attuale» (Bergstrom & Zhang, 2016, p. 134, traduzione degli autori). Vi è inoltre un crescente consenso sul fatto che la geometria sia un ambito che causa difficoltà agli studenti, indipendentemente dalla loro età e dal loro contesto culturale. Fin dall'inizio degli anni '70, numerosi studi condotti in diversi Paesi avevano esaminato le conoscenze matematiche degli insegnanti basandosi sulla convinzione comune che tanto maggiore è la conoscenza della disciplina, quanto migliore è l'insegnamento. Nel caso della geometria, la conoscenza disciplinare della matematica tra gli insegnanti appare disomogenea, con molte lacune, soprattutto tra gli insegnanti della scuola primaria (Leikin & Levav-Waynberg, 2007); inoltre, il legame tra le limitazioni della conoscenza disciplinare e la qualità dell'insegnamento è chiaro. Esistono diversi quadri concettuali che descrivono le conoscenze matematiche necessarie per l'insegnamento (Manizade & Mantinovic, 2018): i ricercatori generalmente concordano sul fatto che la conoscenza pedagogica, così come è stata introdotta da Shulman, collega la conoscenza disciplinare della matematica con la pedagogia. Shulman (1986) discute la necessità di esaminare le conoscenze degli insegnanti e la loro capacità di insegnare in relazione alla conoscenza dei contenuti, conoscenza che contribuisce in modo significativo al rendimento degli studenti (Chinnappan et al., 2018). La conoscenza che un insegnante apporta al contesto di insegnamento-apprendimento è infatti fondamentale per la qualità dell'apprendimento degli studenti; secondo Ball et al. (2008), più la conoscenza dei contenuti di un docente è ampia e approfondita, maggiore sarà la sua capacità di estenderla in modo flessibile alle proprie conoscenze pedagogiche o matematiche per insegnare.

Le prestazioni degli studenti in geometria sono state correlate, da un punto di vista scientifico e didattico, alla loro capacità di comprendere e costruire dimostrazioni geometriche. Cirillo (2018) sostiene che, sebbene ci siano stati continui inviti a migliorare la trattazione scolastica del ragionamento e delle dimostrazioni in matematica, il successo nell'insegnamento delle dimostrazioni è rimasto sfuggente. I risultati della ricerca internazionale confermano quanto l'insegnamento delle dimostrazioni geometriche nella scuola secondaria non sia un compito facile (Fujita & Jones, 2014). Come sostengono Fujita et al. (2010) una sfida importante nella didattica della matematica per quanto riguarda la geometria e le dimostrazioni geometriche è quella di ideare modi per consentire agli studenti di muoversi con successo tra i domini pratici e teorici della matematica. Il successo dell'insegnamento della geometria dipende dalla conoscenza che i docenti possiedono della geometria stessa e dei modi per insegnarla efficacemente (Jones, 2000).

Il presente studio intende contribuire, nel panorama internazionale della ricerca, agli sforzi volti a migliorare l'insegnamento della dimostrazione in geometria, e lo fa attraverso la lente della comprensione che gli insegnanti hanno delle figure geometriche, più precisamente utilizzando il modello di Duval, nonché analizzando la loro capacità di insegnare in modo efficace. La componente del processo di insegnamento esaminata nel presente studio riguarda la capacità degli insegnanti di prevedere, interpretare e identificare con successo le difficoltà degli studenti. Lo scopo principale di questo lavoro è stato quello di esaminare la comprensione delle figure geometriche da parte degli insegnanti di matematica in relazione alla loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e di prevedere le difficoltà degli studenti durante l'insegnamento di argomenti specifici. Ci siamo quindi concentrati sulla possibilità che gli insegnanti applichino la teoria di Duval della comprensione delle figure geometriche mentre dimostrano quesiti geometrici specifici e anche sulla loro capacità di prevedere e interpretare potenziali difficoltà ed errori degli studenti in relazione a tali quesiti.

2 Quadro teorico

2.1 L'insegnamento della geometria e della dimostrazione geometrica nella scuola secondaria

L'interazione con i contenuti geometrici promuove le abilità cognitive di base e contribuisce alla comprensione del mondo in cui viviamo (Kuzle, 2022). Il dominio dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria è sempre di notevole interesse internazionale, con molte domande che rimangono irrisolte per quanto riguarda i metodi di insegnamento e i rispettivi risultati di apprendimento. A questo proposito, nel 2018 è stata realizzata una monografia ICME[1] sulle prospettive internazionali dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria nelle scuole secondarie.

Molti studi hanno esaminato le connessioni tra pensiero geometrico e abilità spaziali (Jones & Tzekaki, 2016). Secondo Battista et al. (2018) un'abilità spaziale si compone di visualizzazione spaziale e ragionamento analitico basato sulle proprietà. La visualizzazione spaziale comporta la creazione mentale di immagini di oggetti, mentre il ragionamento analitico basato sulle proprietà comporta la scomposizione di oggetti in parti utilizzando proprietà geometriche per specificare come queste parti sono correlate. In generale, diversi studi suggeriscono che le abilità spaziali degli studenti sono correlate alle loro prestazioni in geometria (Tso & Liang, 2002). Panaoura et al. (2007) hanno mostrato che le prestazioni degli studenti di scuola primaria e secondaria[2] nei test relativi alle abilità spaziali potrebbero fungere da indicatore di rendimento nei quesiti geometrici. Inoltre, alcuni ricercatori hanno cercato di mettere in relazione le abilità spaziali con la comprensione delle figure geometriche e la creatività in geometria (Gagatsis & Geitona, 2021; Gagatsis et al., 2022).

La geometria è in gran parte legata alla comprensione e all'uso delle figure geometriche, intese come entità mentali che esistono solo sulla base delle definizioni e dele proprietà che le caratterizzano (Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2014). Tuttavia, quando insegnano la geometria, gli insegnanti potrebbero non riuscire a dare la giusta attenzione alla struttura di una figura, a causa del poco tempo a disposizione o delle loro difficoltà nel disegnare una figura alla lavagna con precisione. Questo fallimento potrebbe essere dovuto alla scarsa capacità degli insegnanti di proporre una serie di esempi con caratteristiche generiche sufficienti su cui costruire tutte le proprietà della figura.

Comprendere e costruire una dimostrazione matematica è fondamentale nell'insegnamento della geometria. Dimostrare è una parte fondamentale dell'apprendimento matematico in quanto comporta il congetturare, il generalizzare e il giustificare e richiede agli studenti di pensare alle idee matematiche in modo flessibile (Lesseig, 2016).

> «Una dimostrazione assiomatica è un'argomentazione matematica che consiste in una sequenza di affermazioni tra loro collegate a sostegno di un enunciato matematico, essendo ciascuna affermazione logicamente dedotta da affermazioni precedenti e giustificata attraverso una combinazione di affermazioni date, assiomi e teoremi precedentemente dimostrati».
>
> (Winer & Battista, 2022, p. 3, traduzione degli autori)

Hunte (2018) sostiene che quando gli studenti si cimentano in ragionamenti e dimostrazioni hanno l'opportunità di sviluppare una comprensione concettuale più profonda del contenuto matematico e di apprezzare lo scopo del ragionamento e della dimostrazione in matematica. Durante le attività di ragionamento, gli studenti attribuiscono un senso a pattern o congetture utili a sviluppare contro-argomentazioni o dimostrazioni a sostegno della costruzione di significati matematici. La

1. *International Congress on Mathematical Education.*
2. Il sistema educativo a Cipro è suddiviso in 6 anni di istruzione primaria, 3 anni di istruzione secondaria inferiore (*Gymnasio*), 3 anni di istruzione secondaria superiore (*Lykeio*), e la successiva istruzione universitaria.

dimostrazione geometrica è correlata con il ragionamento basato su proprietà geometriche. Il ragionamento geometrico è collegato al ragionamento spaziale, già menzionato in precedenza, ed è necessario esaminare fino a che punto il ragionamento spaziale degli studenti dipenda dall'uso delle proprietà (Battista et al., 2018).

Le difficoltà nell'insegnamento e nell'apprendimento delle dimostrazioni sono ben riconosciute a livello internazionale (Miyazaki et al., 2016). Anche gli studenti universitari di matematica hanno difficoltà a comprendere e costruire dimostrazioni matematiche (Zazkis & Zazkis, 2013). Winer e Battista (2022) hanno mostrato che la maggior parte degli studenti utilizzano un ragionamento solido nelle proprie spiegazioni orali, ma faticano a esplicitare lo stesso ragionamento nelle dimostrazioni scritte. Per sostenere il ragionamento relativo a dimostrazioni geometriche, Cheng e Lin (2008) hanno sviluppato una strategia di ragionamento passo-a-passo e hanno mostrato che questa strategia di insegnamento migliora il processo di dimostrazione degli studenti.

Nel report di Mwadzaangati e Kazima (2019), riguardante i sistemi educativi africani, si evidenzia la mancanza di conoscenze nell'insegnamento delle dimostrazioni geometriche da parte degli insegnanti come la causa principale della debolezza degli studenti nello sviluppo delle dimostrazioni geometriche. La ricerca sul lavoro degli studenti con le dimostrazioni si è concentrata sulle difficoltà degli studenti rispetto al ragionamento logico (Stylianides, 2018). Tradizionalmente, nel curriculum scolastico la dimostrazione viene insegnata in maniera più estesa nel contesto della Geometria Euclidea e viene presentata come conferma formale di affermazioni ritenute vere. Una componente importante della validità delle dimostrazioni geometriche degli studenti è la sequenza delle deduzioni logiche che essi producono. Tuttavia, la costruzione di una dimostrazione basata sulle proprietà geometriche presuppone la comprensione di tali proprietà e la capacità di correlarle a una struttura di ragionamento geometrico. Duval (2007) sostiene che la parte più importante della costruzione di una dimostrazione logica è la comprensione dello stato o della funzione di ciascuna proposizione attraverso una singola deduzione.

Per quanto riguarda l'insegnamento della geometria, il focus di una grande quantità di ricerche verte sulla conoscenza dei contenuti e sulle rispettive conoscenze didattiche degli insegnanti. Come sottolineato da Ball et al. (2001), pochissimi studi si sono concentrati su questo tema e quelli esistenti hanno talvolta fornito risultati paradossali, come nel saggio di Begle (1979, citato da Ball et al., 2001) in cui l'autore concludeva che una maggiore conoscenza delle materie matematiche poteva essere associata a un effetto negativo sul rendimento degli studenti. Shulman (1986) introdusse il concetto di conoscenza del contenuto pedagogico (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK) per integrare la conoscenza del contenuto disciplinare e, sulla base di questa idea, sono stati apportati diversi perfezionamenti per descrivere le conoscenze realmente necessarie per insegnare la matematica. Hill et al. (2008) hanno introdotto il concetto di conoscenza dei contenuti e degli studenti (*Knowledge of Contents and Students* – KCS) e di conoscenza dei contenuti e dell'insegnamento (*Knowledge of Contents and Teaching* – KCT) per organizzare la conoscenza matematica per l'insegnamento (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT). Dal punto di vista della ricerca in didattica, è stata introdotta in modo simile anche la correlata nozione di conoscenza dei contenuti didattici (Houdement & Kuzniak, 1996, 2001) allo scopo di indagare la conoscenza della didattica della matematica di cui gli insegnanti hanno bisogno in aula. Gli insegnanti sembrano guardare al rendimento degli studenti attraverso alcune nozioni preconcette di geometria e ciò li porta ad adottare atteggiamenti diversi nei confronti delle difficoltà che gli studenti incontrano. Nel caso della dimostrazione geometrica, Fuglestad e Goodchild (2009) hanno esaminato le conoscenze degli insegnanti sulla dimostrazione, concludendo che alcuni insegnanti non sembrano sicuri circa la natura e la necessità della dimostrazione. Cirillo (2011) ha indicato che anche un insegnante principiante con un forte background matematico può non essere ben preparato per insegnare le dimostrazioni.

2.2 La teoria della comprensione delle figure geometriche di Raymond Duval

Oltre alla teoria riguardante un approccio semiotico all'apprendimento della matematica, le cui nozioni chiave sono i registri delle rappresentazioni semiotiche, le trasformazioni tra le rappresentazioni e il funzionamento cognitivo del pensiero (Duval, 1993), Duval ha sviluppato un'importante teoria relativa all'insegnamento e all'apprendimento della geometria e, più specificatamente, alla comprensione delle figure geometriche (Duval, 1995, 1998, 2005).

Le figure geometriche sono rappresentazioni che possiedono un ruolo centrale nell'attività geometrica. Una figura unisce tre rappresentazioni semiotiche: la dimensione, la configurazione della forma e le parole che ne denominano le proprietà. Secondo Duval (2005), la questione cruciale nell'apprendimento della geometria è la separazione tra dimensione e visualizzazione, perché la messa in gioco della dimensione (2D o 3D) provoca illusioni visive e stime percettive errate riguardo le relazioni tra le unità figurali. Pertanto, le difficoltà che la maggior parte degli studenti devono affrontare sono dovute a un divario cognitivo tra due modi opposti di guardare le figure e riconoscere ciò che rappresentano: il modo percettivo usato spontaneamente per qualsiasi rappresentazione visiva di oggetti materiali o organizzazione spaziale (immagini, diagrammi, mappe ecc.) e il modo matematico legato al ragionare, definire, risolvere problemi o dimostrare. La stima percettiva è talvolta fuorviante per il riconoscimento delle proprietà geometriche e, di conseguenza, degli oggetti geometrici rappresentati. D'altra parte, la visualizzazione è indipendente da aspetti dimensionali e riguarda solo la discriminazione e la configurazione della forma (Duval, 1995): è la comprensione simultanea e immediata di una configurazione nel suo insieme.

Duval distingue quattro forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche: percettiva, sequenziale, discorsiva e operativa. Affinché un disegno funga da "figura geometrica", devono essere attivate la comprensione percettiva e almeno una delle altre tre forme di comprensione.

– La *comprensione percettiva* è la capacità di una persona di nominare figure e riconoscere diverse sotto-figure nel piano o nello spazio. La percezione rispetto a ciò che la figura mostra è determinata dalle leggi dell'organizzazione figurale e dai segni pittorici. Ad esempio, nella Figura 1 sottostante è possibile guardare la figura ABCEDF in due modi diversi (Gagatsis, 2015).

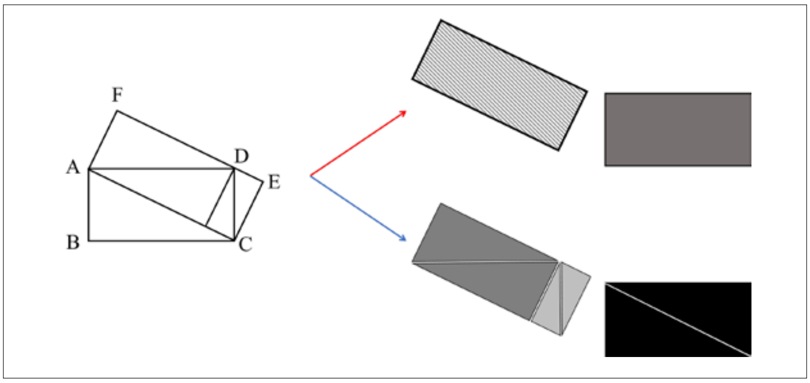


Figura 1. Esemplificazione di due diversi modi di comprendere percettivamente la figura data.

In particolare, la modalità percettiva del riconoscimento visivo si concentra esclusivamente sulla globalità della figura o sul contorno chiuso, secondo i principi enunciati dalla teoria della Gestalt, escludendo così il riconoscimento di altre possibili riconfigurazioni. La modalità percettiva si attiva e si rinforza quando le figure vengono utilizzate come oggetti osservabili empiricamente e può favorire o inibire il riconoscimento euristico.

– La *comprensione sequenziale* si riferisce alla capacità di una persona di costruire una figura o di descrivere la costruzione di una figura. L'organizzazione delle unità figurali elementari non dipende dalla comprensione percettiva, ma piuttosto da vincoli tecnici e proprietà matematiche.

– La *comprensione operativa* è una forma di trattamento visivo che permette un'analisi approfondita della soluzione di un problema osservando una figura e dipende dai vari modi in cui può essere modificata una data figura. Uno dei modi è quello mereologico che si riferisce alla divisione in parti dell'intera figura e alla combinazione di queste in un'altra figura o in sotto-figure (riconfigurazione). Il modo mereologico è una procedura comune utilizzata nelle attività geometriche riguardanti, ad esempio, l'area delle figure. All'interno della comprensione operativa la figura data diventa punto di partenza per esplorare altre configurazioni che hanno origine dall'applicazione di altre operazioni visive: la percezione visiva e la modifica dell'orientamento della figura. La percezione visiva è correlata al percepire la figura più larga o più stretta, o inclinata mentre la modifica dell'orientamento è correlata alla variazione della posizione o dell'orientamento di una data figura. Infine, l'uso di linee ausiliarie per dimostrare un problema geometrico risulta essere un modo importante per comprendere operativamente una figura geometrica. È importante notare che, in generale, la dimostrazione di un problema geometrico è più difficile quando le linee ausiliarie sono esterne alla figura iniziale (Levav-Waynberg & Leikin, 2009).
– La *comprensione discorsiva* riguarda l'efficace uso delle proprietà per scopi deduttivi. Una figura è vista in relazione a una denominazione o a un'ipotesi che rendono esplicite determinate proprietà. La comprensione percettiva non può determinare le proprietà matematiche rappresentate in un disegno (Duval, 1995), quindi alcune proprietà matematiche devono essere fornite attraverso il discorso (denominazione e ipotesi). L'assenza di denominazioni e di ipotesi in un disegno lo rende una rappresentazione ambigua e, quindi, le proprietà che si osservano possono non essere le stesse per tutti (Duval, 1995). La comprensione discorsiva avviene quando un individuo utilizza l'argomentazione o il discorso per dimostrare le proprietà matematiche della figura. Questo tipo di comprensione cognitiva è necessaria poiché un individuo non può determinare le proprietà matematiche solamente attraverso la comprensione percettiva.

In molti nostri studi precedenti, è stato dimostrato che le diverse forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche sono strettamente correlate (Gagatsis, 2015; Gagatsis at al., 2015). È stato infatti validato un modello strutturale per studenti di scuola secondaria (di 13-17 anni), che comprende tutte e quattro le forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, sequenziale, operativa e discorsiva). In altre parole, il termine "modello strutturale" viene utilizzato basandosi sull'analisi statistica nota come SEM (*Structural Equation Modelling*), secondo la quale un modello teorico viene validato attraverso l'utilizzo dell'analisi fattoriale confermativa. Vale la pena notare che questo modello ha la stessa struttura per due diverse popolazioni sperimentali, ovvero per studenti di scuola secondaria inferiore (di 13-15 anni) e per studenti di scuola secondaria superiore (di 16-17 anni). Un modello strutturale simile è stato validato per allievi di scuola primaria (di 10-12 anni), comprendendo tre forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, discorsiva e operativa) (Gagatsis et al., 2015). Questo risultato è importante perché nonostante le differenze nelle conoscenze e nelle abilità degli studenti rispetto alle tre diverse popolazioni e le differenze tra i problemi di geometria proposti alle tre popolazioni, i modelli strutturali risultanti dall'analisi statistica SEM sono risultati simili. In aggiunta, Torregrosa e Quesada (2009) hanno studiato forme di ragionamento in cui comprensione discorsiva e comprensione operativa si coordinano per generare una dimostrazione. Riteniamo che la loro affermazione possa essere riferita al nostro "modello strutturale" sperimentale e alla sua relazione con le dimostrazioni generate dagli studenti e/o dagli insegnanti.

3 Metodologia

3.1 Contenuto del corso

La ricerca qui descritta è stata svolta con 42 insegnanti di matematica di scuola secondaria (inferiore o superiore) che hanno partecipato a un corso intensivo di pedagogia. Tutti gli insegnanti avevano un Bachelor in Matematica conseguito in diverse università di Cipro, della Grecia, di altri Paesi europei o degli Stati Uniti. Più della metà dei partecipanti avevano anche un Master in Matematica pura e/o applicata e in Didattica della matematica. Inoltre, è importante notare che alcuni di loro avevano anche conseguito un dottorato di ricerca in diversi ambiti della matematica. Quasi tutti gli insegnanti avevano esperienza nell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie di Cipro; prima di frequentare questo specifico corso di formazione lavoravano come insegnanti di matematica presso scuole private o come docenti precari presso le scuole pubbliche e stavano frequentando il corso per ottenere una posizione permanente.

Il corso è stato offerto nell'ambito del programma post-laurea in Didattica della matematica dall'Istituto pedagogico di Cipro in cooperazione con il Dipartimento dell'educazione dell'Università di Cipro. Nello specifico, il contenuto del corso includeva una breve rassegna di alcuni concetti e metodi di ricerca in didattica della matematica, nonché la presentazione dei risultati di diversi articoli di ricerca pubblicati riguardanti l'interpretazione degli errori degli studenti nelle attività di algebra, analisi e geometria. Una parte del corso, in cui è stata presentata la teoria della comprensione delle figure di Duval, ha riguardato l'insegnamento della geometria. Particolare enfasi è stata posta sull'insegnamento e l'apprendimento della geometria con riferimenti dettagliati alla comprensione delle figure geometriche e ad altri concetti (la teoria dei registri semiotici di Duval, la teoria dei concetti figurali di Fischbein, la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau e il modello del ragionamento geometrico di Van Hiele).

In didattica della matematica sono stati sviluppati un insieme di concetti, metodi e teorie che ne delineano il campo di validità (Brousseau, 1997). Le teorie che riguardano i concetti e i metodi della didattica della matematica emergono da svariate ricerche che concernono diverse situazioni didattiche e vari concetti matematici. Il concetto di contratto didattico, ad esempio, è stato introdotto da Brousseau e si riferisce alle varie situazioni di insegnamento in cui esiste un accordo implicito tra un insegnante e un allievo riguardo ciò che viene gestito da ciascun "partner" e sulle loro reciproche responsabilità, impegni ecc. Il ruolo del contratto didattico è quello di regolare le interazioni tra docente e studente in termini di conoscenza. L'insegnante rispetta il contratto insegnando e valutando, e lo studente rispetta il contratto se completa la valutazione, fa i compiti e cerca di comprendere le aspettative dell'insegnante per soddisfarle. Brousseau (1989) ha studiato anche il contratto didattico che gli studenti devono rispettare mentre risolvono i problemi. Questi problemi sono solitamente problemi ordinari con una sola soluzione che si ottiene utilizzando tutti i dati forniti attraverso processi familiari; se questi problemi ordinari sono di tipo geometrico, la soluzione deve essere trovata o applicando un teorema o una proprietà oppure derivandola direttamente dalla figura. A causa del rispetto dei termini contrattuali, gli studenti lavorano in un modo tipico, formale e non realistico (Verschaffel et al., 2000). La **Figura 2** è un semplice esempio indicativo di un problema geometrico in cui il concetto di contratto didattico potrebbe interferire (Panaoura-Maki, 2007). La maggior parte degli studenti trovano la soluzione ovvia $\overline{AC} = 6$ cm come lato del quadrato. Molti di loro, tuttavia, non si accontentano della soluzione ovvia e per trovarla applicano il teorema di Pitagora perché, secondo il contratto didattico, una soluzione matematica è accettabile solo quando risulta dall'applicazione di un algoritmo, di un teorema o di una proprietà matematica. Tuttavia, il vero apprendimento non avviene attraverso una cieca obbedienza ai termini del contratto, ma al contrario avviene quando il contratto didattico viene violato (Brousseau, 1989).

Nel triangolo rettangolo ABC, $\overline{BC} = 10$ cm e $\overline{AB} = 8$ cm. ACDE è un quadrato ($\overline{CD} = 6$ cm). Trova la lunghezza del segmento AC.

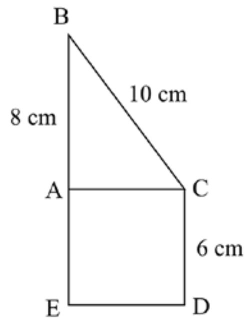


Figura 2. Un quesito geometrico in cui può interferire il contratto didattico.

3.2 La prova scritta

I partecipanti al corso hanno completato una prova scritta composta da due parti (si veda l'Allegato 1): la parte A comprende sei semplici quesiti geometrici per studenti di scuola secondaria inferiore (di 12-14 anni) e la parte B comprende tre domande che miravano a esaminare la capacità dei partecipanti di prevedere errori e difficoltà degli studenti. I quesiti inclusi nella seconda parte sono tre proposizioni geometriche riguardanti l'uguaglianza di due altezze o di due mediane o due bisettrici di un triangolo. In tutti e tre i casi il triangolo risulta essere isoscele. Questi tre quesiti hanno una formulazione quasi identica, ma la difficoltà di risoluzione differisce notevolmente. In altre parole, si potrebbe sostenere che vi sia una analogia nel modo in cui sono presentati i tre quesiti. Ci siamo concentrati sull'identificazione delle relazioni tra le soluzioni che gli insegnanti hanno dato ai quesiti in entrambe le parti del test e le loro interpretazioni riguardo alle possibili difficoltà degli studenti nel risolvere quei quesiti, riferendosi alle diverse forme di comprensione delle figure geometriche. I quesiti sono stati presentati agli insegnanti attraverso la seguente consegna: «Presenta la risposta corretta ad ogni quesito e spiega come lavorerebbero gli studenti e i loro possibili errori. Presenta e spiega quali concetti o teorie della didattica intervengono nella loro soluzione».

3.3 Analisi dei risultati

L'analisi dei risultati è stata divisa in tre fasi: a) un'analisi qualitativa del modo in cui gli insegnanti hanno analizzato a priori i concetti didattici coinvolti nella soluzione dei quesiti, b) un'analisi quantitativa delle soluzioni dei partecipanti e delle loro previsioni sulle possibili difficoltà ed errori degli studenti, c) un'analisi statistica implicativa per esaminare le interrelazioni tra le loro soluzioni e le rispettive aspettative didattiche. L'analisi statistica implicativa è stata concepita da Gras per la sua tesi di dottorato riguardante gli obiettivi della didattica della matematica (Gras et al., 2013; Gras et al., 2008). Il software che implementa il metodo si chiama CHIC e ne esistono diverse versioni (per questo studio è stata utilizzata la versione 6.1). I risultati sono prodotti in forma algebrica o diagrammatica. In questa ricerca vengono presentati due diagrammi, che sono i più importanti: il grafico implicativo e l'albero delle similarità. Nei grafici implicativi sono presenti frecce tra i diversi quesiti (variabili). Se esiste una freccia tra la variabile A e la variabile B, A → B, significa che il successo di A implica il successo di B. D'altra parte, nell'albero delle similarità, se due variabili sono collegate con due linee verticali, significa che i due quesiti vengono elaborati in modo simile.

Il metodo di Gras è particolarmente efficace per quanto riguarda l'uso delle rappresentazioni e in particolare il fenomeno della compartimentazione delle rappresentazioni nell'insegnamento della matematica. La compartimentazione è identificata come una difficoltà cognitiva quando un individuo tenta di interpretare e di spostarsi avanti e indietro tra diversi tipi di rappresentazioni matematiche (Duval, 2002). Vinner e Dreyfus (1989) hanno esteso il concetto sostenendo che la compartimentazione si verifica quando un individuo ha due schemi divergenti e potenzialmente contraddittori nella sua struttura cognitiva. Hanno inoltre affermato che un comportamento incoerente è indice di compartimentazione.

Il fenomeno della compartimentazione è stato mostrato attraverso l'analisi statistica implicativa in diversi concetti matematici. In questi studi gli studenti tendono a distinguere i problemi matematici in base alla loro rappresentazione iniziale. Alcuni studi si concentrano sull'uso del modello geometrico della retta numerica per quanto riguarda l'addizione e la sottrazione di numeri interi (Gagatsis & Shiakalli, 2004), mentre altri si concentrano sull'uso delle rappresentazioni nelle funzioni (Gagatsis et al., 2006). Il modo di pensare compartimentalizzato è risultato evidente sia negli studenti di scuola primaria che secondaria. In tutti i casi l'analisi statistica implicativa ha giocato un ruolo essenziale nel rivelare il fenomeno della compartimentazione che influenza negativamente l'apprendimento della matematica da parte degli studenti.
Per il punteggio della prova scritta abbiamo utilizzato il seguente schema di valutazione sia per le soluzioni che per le interpretazioni degli insegnanti: è stata assegnata una scala di punteggi a 5 punti compresa tra 0 e 1 (0; 0,25; 0,5; 0,75; 1) a seconda del livello della correttezza della soluzione data o del livello di pertinenza dell'interpretazione data. Due ricercatori hanno valutato i test in modo indipendente per verificare i risultati e dare affidabilità al punteggio.

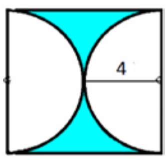
4 Risultati

4.1 Analisi qualitativa delle previsioni degli insegnanti sui quesiti

Prima di presentare l'analisi di ciascun quesito separatamente, è importante notare che la maggior parte degli insegnanti hanno identificato come fattori che intervengono nella soluzione corretta i seguenti concetti o teorie didattiche, vale a dire tutte le forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, sequenziale, operativa, discorsiva), abilità spaziali, visualizzazione spaziale e contratto didattico. Di seguito presentiamo e analizziamo ciascun quesito insieme al lavoro e ai commenti degli insegnanti.

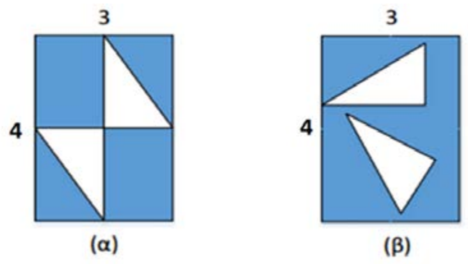
4.1.1 Parte A

T1. Nella figura qui sotto, i due semicerchi all'interno del quadrato hanno un raggio di 4 cm. Calcola l'area colorata. Mostra il modo in cui hai lavorato.



Per risolvere il quesito T1 sono necessarie la comprensione percettiva e quella operativa della figura, come anche la conoscenza dell'area del cerchio e delle proprietà del quadrato. La maggior parte degli insegnanti hanno ritenuto che la comprensione percettiva sia necessaria per identificare le sotto-figure della figura data, cioè per riconoscere il quadrato e i due semicerchi. Inoltre, i docenti hanno individuato la necessità di una comprensione operativa della figura geometrica; più specificamente, hanno affermato che gli studenti dovrebbero eseguire modifiche mereologiche o semplici trasformazioni della figura per rendersi conto che i due semicerchi formano un cerchio. Alcuni insegnanti hanno affermato che gli studenti potrebbero non essere in grado di ricordare la formula per l'area del quadrato e del cerchio. Alcuni hanno anche affermato che il concetto di contratto didattico potrebbe fungere da possibile barriera, spiegando che gli studenti potrebbero provare a trovare l'area di ciascun semicerchio separatamente invece di trovare direttamente l'area del cerchio.

T2. Due triangoli congruenti vengono posizionati su un rettangolo con i lati 3 e 4, come mostrato nelle figure seguenti.
(i) Calcolare l'area della superficie colorata nella figura (α).
(ii) Nella figura (β), i triangoli sono posizionati diversamente. Quale parte del rettangolo è ricoperta dai triangoli? Per favore, spiega il modo in cui hai lavorato.

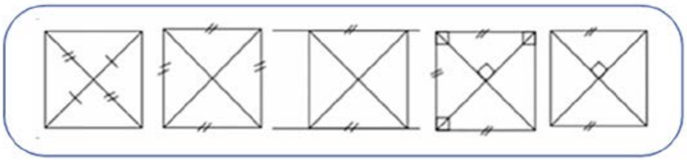


In entrambe le parti (i) e (ii) del quesito T2, sono necessarie la comprensione percettiva e quella operativa della figura. Per quanto riguarda la comprensione operativa, la modifica dell'orientamento della figura è necessaria affinché lo studente si renda conto che i due triangoli coprono ¼ dell'area del rettangolo in entrambe le parti (i) e (ii) del quesito. In questo quesito intervengono anche le abilità spaziali, soprattutto per la parte (ii) dove i due triangoli cambiano posizione.
Inizialmente tutti gli insegnanti hanno menzionato che la comprensione percettiva è necessaria affinché gli studenti si rendano conto delle lunghezze dei due lati dei triangoli. Inoltre, tutti gli insegnanti hanno riconosciuto che la comprensione operativa della figura geometrica, e più specificamente la modifica mereologica della figura, è necessaria affinché gli studenti realizzino che i due triangoli coprono ¼ dell'area del rettangolo. Per quanto riguarda la parte (ii) del quesito, gli insegnanti hanno notato che gli studenti potrebbero pensare che l'area colorata cambi e che anche questo abbia a che fare con la comprensione percettiva della figura geometrica data. La maggior parte degli insegnanti hanno anche affermato che intervengono pure le abilità spaziali, nel senso che gli studenti dovrebbero capire che nonostante i due triangoli cambino posizione dalla figura (α) alla figura (β), l'area non cambia.

T3. Quanti triangoli ci sono nella figura qui sotto?

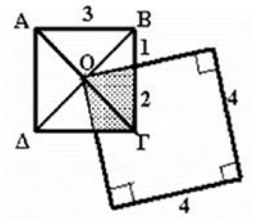
Per la risoluzione di questo quesito, sono necessarie la comprensione percettiva e quella operativa della figura. La modifica mereologica della figura darebbe allo studente l'opportunità di dividere e riunire le sotto-figure e quindi contare correttamente il numero totale di triangoli presenti. La maggior parte degli insegnanti hanno risposto che è attraverso la comprensione percettiva che gli studenti possono inizialmente identificare i triangoli più "evidenti" nella figura data. Quindi, la maggior parte degli insegnanti hanno concordato sul fatto che interviene la comprensione operativa della figura geometrica, poiché gli studenti devono eseguire modifiche mereologiche per identificare le sotto-figure e anche per dividerle e riunirle. Dovranno cioè spezzare i quadrati in triangoli e anche riunire le sotto-figure per crearne di nuove. Alcuni docenti hanno anche affermato che le abilità spaziali e la visualizzazione spaziale sono necessarie affinché gli studenti possano identificare anche i triangoli più grandi, cioè quelli che si possono identificare unendo 4 triangoli piccoli.

T4. Con riferimento all'immagine seguente, agli studenti vengono poste due domande:
a) Quali informazioni vengono fornite per ciascuna delle figure?
b) Indicare, dove possibile, l'esatta natura del quadrilatero.

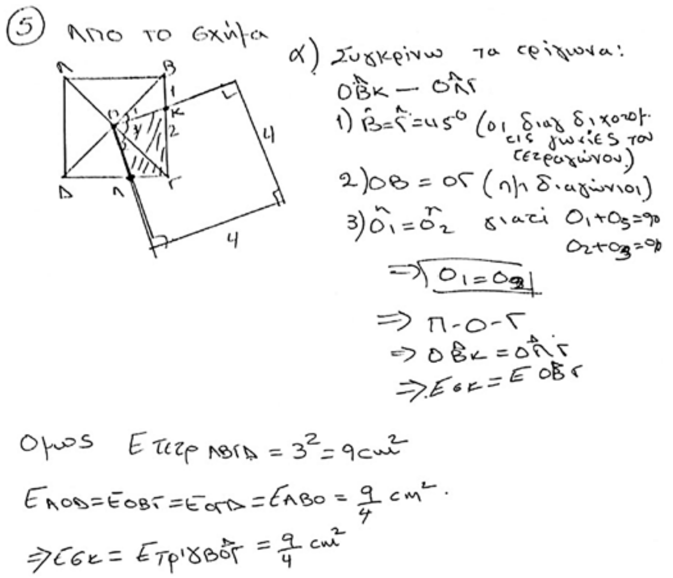


Sebbene per questo quesito sia necessaria la comprensione percettiva, è attraverso la comprensione discorsiva che lo studente può risolverlo correttamente. Questo perché gli studenti hanno bisogno di dimostrare la natura di ciascuna figura data utilizzando la loro conoscenza delle proprietà di un quadrilatero, invece di utilizzare solamente la loro comprensione percettiva.
Risolvendo il quesito T4, la maggior parte degli insegnanti hanno osservato che i concetti di comprensione percettiva e discorsiva intervengono nella sua soluzione. In altre parole, gli insegnanti hanno ritenuto che la difficoltà più probabile possa essere che gli studenti prendano in considerazione la rappresentazione della figura e non le proprietà presentate. Pertanto, gli studenti non dimostrerebbero la natura di ciascun quadrilatero utilizzando proprietà e teoremi matematici ma, invece, trarrebbero conclusioni utilizzando esclusivamente la loro comprensione percettiva. Ad esempio, un docente ha menzionato il fatto che, per il primo quadrilatero, gli studenti potrebbero capire dall'immagine che gli angoli delle figure sono retti mentre questo non dovrebbe essere dedotto dalla figura ma, invece, dovrebbe essere dimostrato. Nel complesso, la maggior parte degli insegnanti hanno osservato con successo che la comprensione discorsiva e quella percettiva della figura sono necessarie affinché gli studenti possano stabilire collegamenti tra ciascuna figura e le rispettive proprietà del rettangolo.

T5. Nella figura seguente, O è il punto di intersezione delle diagonali del quadrato ΑΒΓΔ.
Trova l'area della regione colorata.



T5 è stato un quesito con un basso tasso di successo sia nella soluzione sia nell'interpretazione. È risultato il quesito più difficile tra i cinque del primo gruppo e il terzo più difficile tra gli otto quesiti dell'intero questionario. T5 richiede la comprensione percettiva, quella operativa (in particolare la modifica dell'orientamento della figura) e quella discorsiva della figura geometrica. Innanzitutto, gli insegnanti hanno affermato che la comprensione percettiva potrebbe interferire portando gli studenti a non essere in grado di identificare quali triangoli occorre confrontare. Inoltre, gli insegnanti hanno affermato che per risolvere questo quesito è necessaria la comprensione operativa, e più specificamente la modifica mereologica. I docenti hanno identificato come possibile difficoltà il fatto che gli studenti non sarebbero in grado di riconoscere la congruenza tra i due triangoli più piccoli e quindi non riuscirebbero a proseguire con la soluzione. Ciò ha anche a che fare con la modifica dell'orientamento della figura; alcuni insegnanti l'hanno menzionata, ma invece di usare il termine «modifica dell'orientamento» l'hanno descritta come «cambiamento di posizione». Tuttavia, l'osservazione cruciale che dà immediatamente la soluzione al quesito è la congruenza dei due triangoli ΟΒΚ e ΟΛΓ, come mostrato dalla soluzione di un docente nella Figura 3. Questa congruenza dei due triangoli però risulta evidente da una rotazione mentale del triangolo ΟΒΚ in modo tale che coincida con il triangolo ΟΛΓ.



Traduzione:

Dalla figura, a) confronto i triangoli: ΟΒΚ – ΟΛΓ
1) angolo Β = angolo Γ = 45° (le diagonali bisecano gli angoli del quadrato)
2) ΟΒ = ΟΓ (diagonali)
3) angolo O_1 = angolo O_2 perché $O_1 + O_3 = 90°$ e $O_2 + O_3 = 90°$
→ angolo O_1 = angolo O_2
→ lati – angoli adiacenti congruenti
→ triangolo ΟΒΚ = triangolo ΟΛΓ
→ Area della regione colorata = Area di ΟΒΓ.

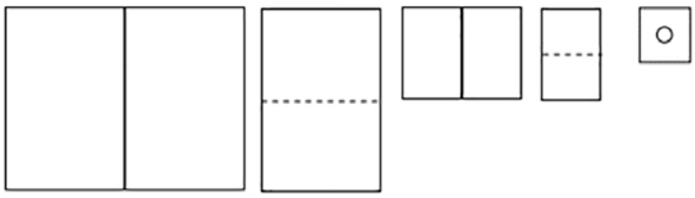
Tuttavia, l'area del quadrato ΑΒΓΔ = 3² = 9 cm².
Area di ΑΟΔ = Area di ΟΒΓ = Area di ΟΓΔ = Area di ΑΒΟ = $\frac{9}{4}$ cm².
→ Area of shaded region = Area of triangle ΒΟΓ = $\frac{9}{4}$ cm².

Figura 3. Un esempio di soluzione corretta elaborata da un docente.

Pertanto, sono necessarie anche le abilità spaziali, e più specificamente la visualizzazione spaziale e la flessibilità nel percepire complete figure parzialmente sovrapposte, affinché gli studenti possano immaginare rotazioni di oggetti (sotto-figure) e quindi identificare rispettivamente le sotto-figure necessarie alla soluzione. D'altra parte, il concetto di contratto didattico potrebbe anche intervenire in due modi diversi, ma pochi insegnanti li hanno individuati e spiegati correttamente. Innanzitutto,

molti insegnanti si sono occupati della dimostrazione geometrica della congruenza dei due triangoli basandosi sui dati riportati in figura. Ma un numero significativo di loro non si è accorto che questa congruenza è evidente da una rotazione della forma in modo che un triangolo possa sovrapporsi con l'altro. In secondo luogo, pochi insegnanti hanno affermato che la lunghezza del lato del quadrato più grande (4 cm) non è necessaria per la soluzione del problema, ma nessuno si è reso conto che tali dati metrici non sono compatibili con il resto dei dati forniti dal problema. Tuttavia, alcuni di loro hanno provato a risolvere il problema ignorando la lunghezza di 4 cm.
Alcuni insegnanti hanno anche fatto riferimento alle abilità spaziali come a un concetto che interviene nella soluzione spiegando che gli studenti dovrebbero modificare mentalmente la figura data per identificare che l'area colorata è ¼ dell'area totale. Alcuni insegnanti hanno menzionato anche il concetto di contratto didattico che interviene nella soluzione. Gli insegnanti lo hanno spiegato in due modi: a) gli studenti proverebbero a utilizzare tutti i dati forniti mentre non tutti i dati sono necessari per raggiungere una soluzione, b) gli studenti proverebbero a calcolare l'area colorata sottraendo l'area del quadrato piccolo dall'area del quadrato grande solo per l'interesse di eseguire un'operazione.

T6. Maria piega un foglio di carta a metà e poi ripete lo stesso procedimento altre 3 volte. Quindi crea un foro sul pezzo di carta. Se distende nuovamente il pezzo di carta, quanti buchi avrà il foglio? Mostra il tuo procedimento e spiega come hai ottenuto la tua risposta.

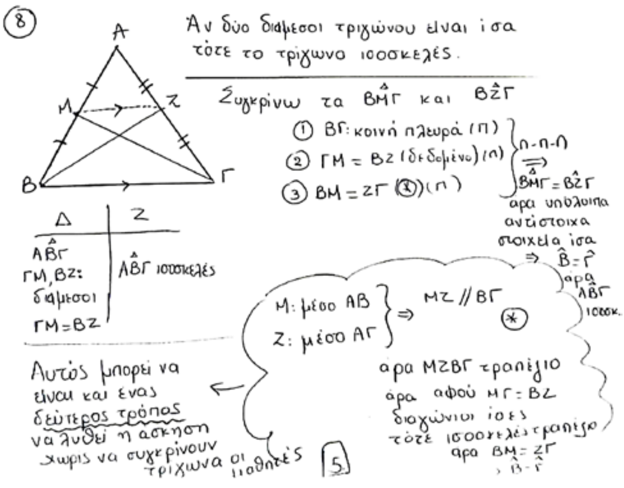


Nel quesito T6 sono necessarie la comprensione percettiva e quella sequenziale della figura insieme alle abilità spaziali e, più nello specifico, alla visualizzazione spaziale. La maggior parte degli insegnanti hanno affermato che gli studenti potrebbero incontrare difficoltà in due operazioni: riconoscere la simmetria e modificare mentalmente la figura. Alcuni hanno associato questa difficoltà ai concetti di abilità spaziali e visualizzazione spaziale, mentre altri l'hanno descritta come una difficoltà nella comprensione sequenziale e in quella discorsiva. Pochi docenti hanno previsto che gli studenti potrebbero risolvere il quesito attraverso un approccio algebrico, cioè utilizzando una successione geometrica.

4.1.2 Parte B
La parte B della prova scritta consisteva nelle seguenti tre domande:

TR1. Possiamo sostenere che un triangolo è isoscele se due delle sue altezze sono uguali?
TR2. Possiamo sostenere che un triangolo è isoscele se due delle sue mediane sono uguali?
TR3. Possiamo sostenere che un triangolo è isoscele se due delle sue bisettrici sono uguali?
Confronta le tre domande sulla base di quanto sia difficile per gli studenti dimostrare ognuna di esse e spiega le ragioni per cui, se presenti, ci sono delle differenze nelle possibili difficoltà. Quali concetti didattici intervengono?

Tutti e tre i quesiti della Parte B riguardavano processi di dimostrazione. Per TR2 e TR3, che sono risultati i quesiti con le percentuali di successo più basse sia nella soluzione sia nell'interpretazione, presentiamo prima un esempio di soluzione corretta da parte di un docente e poi analizziamo i quesiti. La **Figura 4** e le **Figure 5a-5b** presentano un esempio della soluzione corretta di un insegnante rispettivamente di TR2 e TR3.



Traduzione della soluzione del quesito TR2:

Confronto i triangoli ΒΜΓ e ΒΖΓ.
1) ΒΓ: lato comune
2) ΓΜ = ΒΖ (come dato)
3) ΒΜ = ΖΓ*
*: poiché Μ è il punto medio di ΑΒ e Ζ è il punto medio di ΑΓ, allora ΜΖ è parallelo a ΒΓ e allora ΜΖΒΓ è un trapezio. Quindi, poiché ΜΓ = ΒΖ, le diagonali sono uguali allora è un trapezio isoscele e quindi ΒΜ = ΖΓ e angolo Β = angolo Γ.

Poiché 1), 2), 3) sono veri, dalla congruenza dei tre lati si deduce che triangolo ΒΜΓ = triangolo ΒΖΓ e quindi angolo Β = angolo Γ, quindi il triangolo ΑΒΓ è isoscele.

Figura 4. Un esempio della soluzione corretta del quesito TR2 elaborata da un insegnante.

Poiché il quesito TR3 richiede una soluzione complessa e lunga, nelle **Figure 5a-5b** sottostanti mostriamo solo la figura costruita da un docente e presentiamo direttamente la traduzione della sua soluzione.

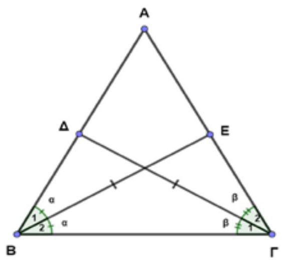


Figura iniziale costruita.

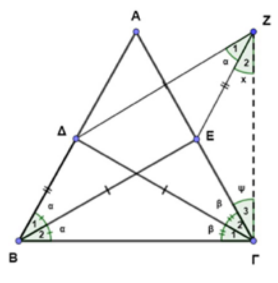
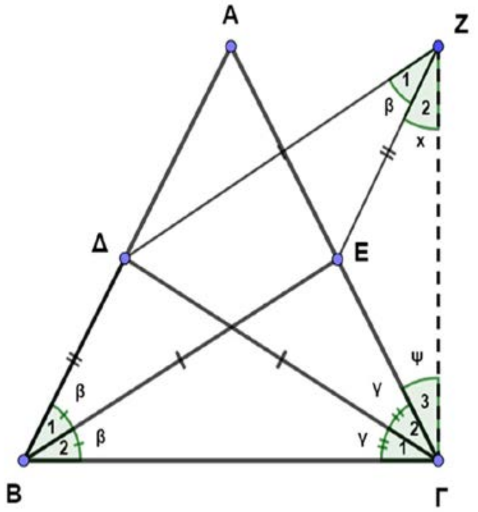


Figura finale modificata.

Figura 5a. La trasformazione della figura iniziale del triangolo nel quesito TR3.



Nel triangolo ΑΒΓ, considero le bisettrici ΒΕ e ΓΔ degli angoli Β e Γ. Le bisettrici sono congruenti ΒΕ = ΓΔ.
ΒΕ bisettrice, quindi $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \beta$.
ΓΔ bisettrice, quindi $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \gamma$.

Costruisco il punto Ζ in modo tale che ΔΒΕΖ sia un parallelogramma. Dalle proprietà del parallelogramma:
– I lati opposti sono congruenti ΒΔ = ΕΖ e ΔΖ = ΒΕ = ΓΔ.
– Gli angoli opposti sono congruenti, $\Delta\hat{B}E = \Delta\hat{Z}E = \alpha$.
Ipotizziamo che il triangolo ΑΒΓ non sia isoscele e che Β < $\hat{\Gamma}$. Poi,
$\hat{B} = 2\beta < 2\gamma = \hat{\Gamma}$ e così $\beta < \gamma$.

Supponiamo che $\hat{Z}_2 = x$ e $\hat{\Gamma}_3 = \psi$.
Il triangolo ΔΖΓ è isoscele perché ΔΖ = ΔΓ e quindi gli angoli della sua base sono congruenti → $\Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{Z}\Gamma \rightarrow \gamma + \psi = \beta + x$.

Siccome abbiamo ipotizzato che $\beta < \gamma$ allora dovrebbe essere vero che $x > \psi$ perché anche $\gamma + \psi = \beta + x$ sia vero. Ciò significherebbe che ΕΓ > ΕΖ e siccome da ΕΖ = ΒΔ allora ΕΓ > ΒΔ.

Se osserviamo i triangoli ΔΒΓ e ΕΒΓ abbiamo:
– ΒΓ lato comune
– ΒΕ = ΓΔ (dato)
– ΕΓ > ΒΔ (χ).
Da quanto sopra e poiché il lato ΕΓ è maggiore di ΒΔ, allora è vero che $\beta > \gamma \rightarrow 2\beta > 2\gamma \rightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}$, il che ci porta a una contraddizione poiché inizialmente avevamo ipotizzato $\hat{B} < \hat{\Gamma}$. Sono stato portato a una contraddizione a causa del presupposto falso che ho fatto secondo cui un triangolo con due bisettrici congruenti non può avere anche due angoli congruenti. Pertanto, il triangolo ha due angoli congruenti ed è quindi isoscele.

Figura 5b. Una soluzione del quesito TR3 (direttamente tradotta dagli autori).

Il quesito TR1 richiede la comprensione percettiva, quella sequenziale e quella discorsiva delle figure geometriche mentre i quesiti TR2 e TR3 richiedono tutte le forme di comprensione cognitiva delle figure geometriche (percettiva, sequenziale, operativa e discorsiva), nonché un'ottima conoscenza delle proprietà e dei teoremi geometrici. La comprensione sequenziale è necessaria affinché gli studenti possano costruire una figura corretta. La comprensione percettiva li aiuterebbe a identificare quali figure possono utilizzare per trovare un percorso risolutivo, mentre la comprensione operativa consentirebbe loro di modificare la figura costruita e soprattutto di costruire linee ausiliarie. Naturalmente, senza la comprensione discorsiva e un'eccellente conoscenza delle proprietà geometriche e della teoria, gli studenti non riuscirebbero a stabilire le connessioni richieste e a costruire l'argomentazione necessaria per una procedura di dimostrazione riuscita.
I quesiti TR1, TR2 e TR3 differiscono per difficoltà sebbene la loro formulazione non lo riveli direttamente. Quasi tutti gli insegnanti hanno concordato sul fatto che la dimostrazione del quesito TR3 sia risultata la più difficile mentre la dimostrazione del quesito TR1 sia stata la meno difficile. TR1 può essere dimostrato direttamente combinando i dati forniti dal problema con la teoria geometrica in gioco (congruenza dei triangoli). TR2 può essere risolto direttamente attraverso la congruenza tra triangoli; tuttavia, è necessario utilizzare un teorema aggiuntivo che si riferisce alla congruenza delle tre mediane di un triangolo. TR2 può essere risolto anche utilizzando opportune linee ausiliarie. Tuttavia, per la soluzione di TR3 gli studenti devono costruire correttamente la figura, quindi modificarla disegnando linee ausiliarie appropriate e utilizzare il metodo della dimostrazione per assurdo. È vero che gli studenti hanno più familiarità con i processi di dimostrazione diretta rispetto alla dimostrazione per assurdo.
Secondo le risposte dei partecipanti, il concetto di rappresentazione della figura interviene in tutti e tre i quesiti. Gli insegnanti hanno convenuto che gli studenti potrebbero avere difficoltà a costruire correttamente la figura, sia mentalmente sia su carta (comprensione sequenziale). Inoltre, le loro risposte hanno mostrato la convinzione che la comprensione percettiva sarebbe necessaria affinché gli studenti identifichino quali sotto-figure confrontare. Anche la comprensione operativa è stata citata come potenziale difficoltà dello studente a causa della modifica mereologica necessaria per la costruzione della figura (soprattutto per il quesito TR3). Ciò è chiaramente mostrato qui sopra nella Figura 5a, che presenta la necessaria trasformazione della figura, a partire dalla sua costruzione iniziale per arrivare a quella che permette di risolvere il problema.
Dalle Figure 5a-5b, è evidente che gli studenti dovrebbero tradurre correttamente la formulazione del quesito TR3 in una figura ma dovrebbero anche rendersi conto che non potrebbero risolvere il compito se non modificassero la figura iniziale. Questa modifica è piuttosto complessa in quanto prevede il disegno di linee ausiliarie esterne alla figura costruita. Secondo Leikin ed Elgrabli (2015) due fattori determinano la difficoltà nelle costruzioni ausiliarie: la posizione delle linee ausiliarie (all'interno o all'esterno della figura) e il numero di linee necessarie per identificare una soluzione.

4.2 Analisi quantitativa delle soluzioni e delle previsioni

Per analizzare e confrontare le soluzioni e le interpretazioni degli insegnanti, abbiamo utilizzato due metriche e le rispettive percentuali. La prima metrica è la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nella risoluzione da loro proposta a un dato quesito. Quindi, per fare un esempio, nel quesito T1 tutti gli insegnanti (42 in totale) hanno dato una risposta pienamente corretta e quindi hanno ricevuto 1 punto intero sulla scala a 5 punti (0; 0,25; 0,5; 0,75; 1). Ciò ha dato un "punteggio cumulativo" di 42, che è stato poi convertito in una percentuale di successo (in questo esempio, 100%). Un altro esempio è quello del quesito T2 in cui i punteggi hanno raggiunto una somma cumulativa di 41,75 che dà una percentuale di successo del 99,4% (calcolata come $\frac{41{,}75}{42} \times 100$). L'altra metrica utilizzata è stata la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nell'interpretazione dei quesiti; questa metrica è stata nuovamente convertita in una percentuale di successo. Nei prossimi paragrafi utilizzeremo quindi i termini "somma cumulativa – soluzione", "somma cumulativa – interpretazione", "tasso di successo – soluzione" e "tasso di successo – interpreta-

zione" per aiutare il lettore a seguire l'analisi.
L'analisi quantitativa delle soluzioni degli insegnanti ha mostrato che, in media, il tasso di successo, come sopra definito, nella risoluzione dei quesiti è stato dell'86,6%. Se consideriamo separatamente le due parti della prova scritta, ovvero la parte A composta da sei quesiti (codificati come T1, T2, T3, T4, T5 e T6) e la parte B composta da tre quesiti (codificati come TR1, TR2 e TR3), osserviamo che gli insegnanti hanno risposto meglio nei primi sei quesiti (parte A) rispetto agli ultimi tre quesiti (parte B), con rispettivamente il 95% e il 69,6% di successo. Vale la pena notare che le domande nella parte B riguardavano processi di dimostrazione. La **Figura 6** presenta il "tasso di successo – soluzione" per quesito. È importante notare che nella maggior parte dei quesiti gli insegnanti hanno ricevuto un punteggio pari a 0 o 1 sulla scala a 5 punti.

Figura 6. Tasso di successo – soluzione, ovvero la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nel risolvere ciascun quesito, convertita in percentuale.

La **Figura 7** presenta il "tasso di successo – interpretazione" derivato dalla somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nell'interpretazione di ciascun quesito. In altre parole, questa metrica mostra come gli insegnanti hanno previsto correttamente le difficoltà che gli studenti avrebbero potuto affrontare, nonché i concetti e le teorie didattiche coinvolte nella risoluzione di ciascun problema.

Figura 7. Tasso di successo – interpretazione, ovvero la somma cumulativa dei punteggi ricevuti dagli insegnanti nell'interpretazione di ciascun quesito, convertita in percentuale.

La **Figura 7** mostra che in tutti i quesiti, ad eccezione di TR3, la maggior parte degli insegnanti hanno previsto con successo le difficoltà che gli studenti avrebbero incontrato nel risolverli o nel dimostrarli, nonché le teorie e i concetti didattici che sarebbero intervenuti. Nel caso del quesito T5 circa la metà degli insegnanti ha dato un'interpretazione corretta. I quesiti con il minor successo dal punto di vista dell'interpretazione sono stati TR3, T5 e TR2. Se guardiamo separatamente i risultati delle due parti della prova scritta, allora deduciamo che gli insegnanti hanno avuto più successo nell'interpretare i quesiti della prima parte rispetto alla seconda.
Confrontando le percentuali di successo sia nella risoluzione che nell'interpretazione per ciascun quesito, osserviamo risultati simili. La **Figura 8** mostra questo confronto.

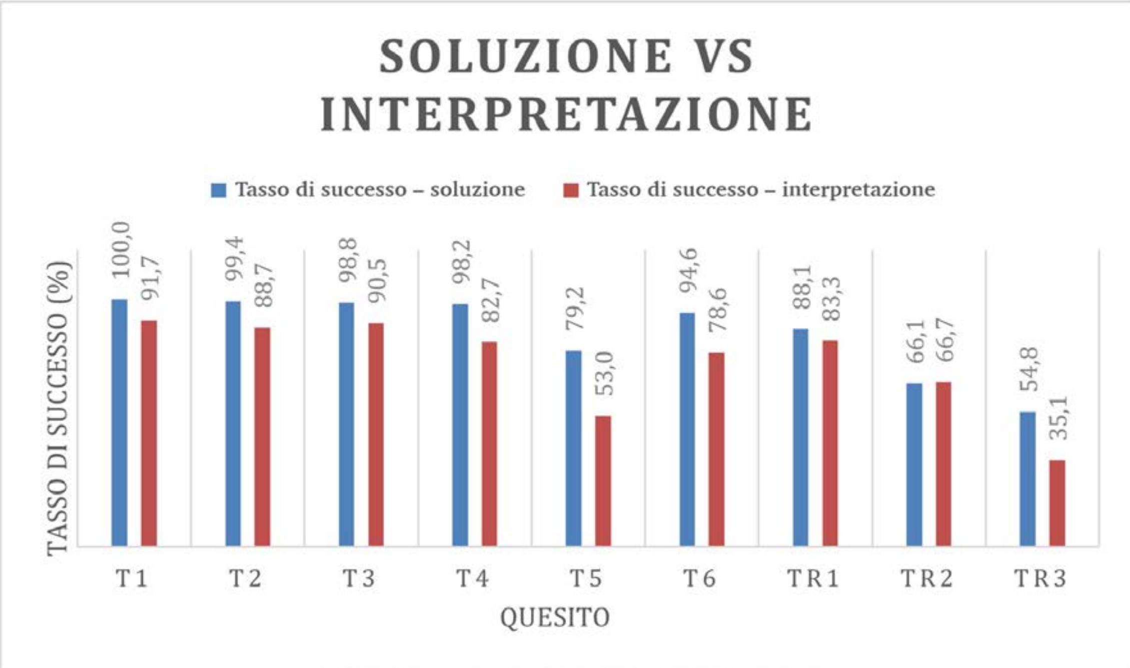


Figura 8. Tasso di successo relativo alle soluzioni per quesito rispetto al tasso di successo relativo all'interpretazione per quesito.

La **Figura 8** riassume la nostra analisi quantitativa mostrando che, ad eccezione del quesito TR2 dove i tassi di successo erano quasi uguali (66,1% e 66,7%), gli insegnanti hanno avuto più successo nel risolvere i quesiti che nell'interpretarli e nel riuscire effettivamente a prevedere le difficoltà degli studenti. TR3 è risultato essere il quesito più difficile sia da risolvere che da interpretare.
Le maggiori discrepanze tra la risoluzione e l'interpretazione dei quesiti sono state riscontrate in T5, TR3, T6 e T4. È sorprendente vedere i quesiti T6 e T4 in questa categoria perché, come risulta evidente dalla **Figura 6**, non erano problemi difficili da risolvere per gli insegnanti. Le percentuali di successo relative alle soluzioni dei quesiti T6 e T4 sono state rispettivamente del 94,6% e del 98,2%. Tuttavia, le percentuali di successo relative all'interpretazione degli stessi quesiti sono risultate del 78,6% e del 82,7%.

4.3 Analisi statistica implicativa

Per riassumere le relazioni di similarità osservate tra i quesiti, sia in termini di soluzioni che di interpretazioni fornite dagli insegnanti, osserviamo il fenomeno della compartimentazione tra i quesiti proposti agli studenti del corso. In particolare, l'albero di similarità (**Figura 9**) mostra cinque diversi gruppi di quesiti, che non sono correlati tra loro. Ciò è evidente anche nella **Tabella 1** seguente, che presenta in dettaglio la similarità tra le variabili. I primi 10 indici di similarità sembrano essere relativamente alti. Non è stata osservata alcuna tendenza generale, poiché vengono creati cinque gruppi distinti di variabili. Il primo gruppo (Gruppo 1) riguarda il successo nella risoluzione dei primi due quesiti T1 e

T2. Il Gruppo 2 mette in relazione le interpretazioni degli insegnanti in Tint1, Tint2, Tint6 con il loro successo nel risolvere il quesito T6. Il Gruppo 3 riguarda T3, T4, T5 e Tint5. Il quarto gruppo riguarda Tint3, Tint4, TR1 e TR1int. Infine, il Gruppo 5 è quello che merita maggiore attenzione per quanto riguarda la similarità delle variabili; esso mette in relazione le soluzioni dei quesiti TR2 e TR3 degli insegnanti con l'interpretazione da loro fornita per gli stessi quesiti.

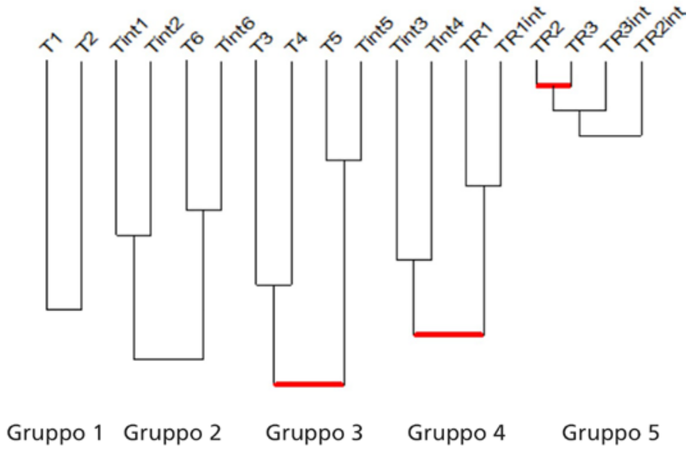


Figura 9. Albero di similarità.

Livello di classificazione	Quesiti o Variabili	Similarità
1	(TR2 TR3)	0,969504
2	((TR2 TR3) TR3int)	0,90235
3	(((TR2 TR3) TR3int) TR2int)	0,821246
4	(T5 Tint5)	0,790061
5	(TR1 TR1int)	0,745479
6	(T6 Tint6)	0,59841
7	(Tint1 Tint2)	0,549653
8	(Tint3 Tint4)	0,539743
9	(T3 T4)	0,515061
10	(T1 T2)	0,5
11	((Tint3 Tint4) (TR1 TR1int))	0,128707
12	((Tint1 Tint2) (T6 Tint6))	0,107071
13	((T3 T4) (T5 Tint5))	0,0749481
14	((T1 T2) (((TR2 TR3) TR3int) TR2int))	0,00451588
15	(((T1 T2) (((TR2 TR3) TR3int) TR2int)) ((Tint3 Tint4) (TR1 TR1int)))	0,000212095
16	(((Tint1 Tint2) (T6 Tint6)) ((T3 T4) (T5 Tint5)))	3,81905e-05

Tabella 1. Livelli di similarità (l'intervallo di valori dell'indice di similarità è compreso tra 0 e 1).

Infatti, i quesiti TR2 e TR3 presentano le maggiori difficoltà rispetto a tutti gli altri quesiti perché la loro soluzione richiede una trasformazione della figura originale utilizzando linee ausiliarie. Inoltre, a seconda della soluzione seguita dai docenti (e/o quella immaginata per gli studenti), è richiesta la conoscenza dei criteri di congruenza dei triangoli o conoscenze anche più specifiche, come la proprietà dell'intersezione delle mediane del triangolo (TR2) o il metodo della dimostrazione per assurdo (TR3). Il secondo gruppo di quesiti più importante è il Gruppo 4 ((Tint3 Tint4) (TR1 TR1int)), che mette in relazione la soluzione che gli insegnanti danno al TR1 con le interpretazioni che danno ai quesiti TR1, T3 e T4. Infine, secondo le risposte dei docenti, la soluzione dei quesiti non è direttamente correlata alle variabili di interpretazione; basta osservare le coppie di variabili (T6, Tint6), (T5, Tint5), (TR1, TR1int) e il Gruppo 5 di variabili (((TR2 TR3) TR3int) TR2int).
Un fenomeno simile di compartimentazione è osservato nel grafico implicativo, presentato nella Figura 10.

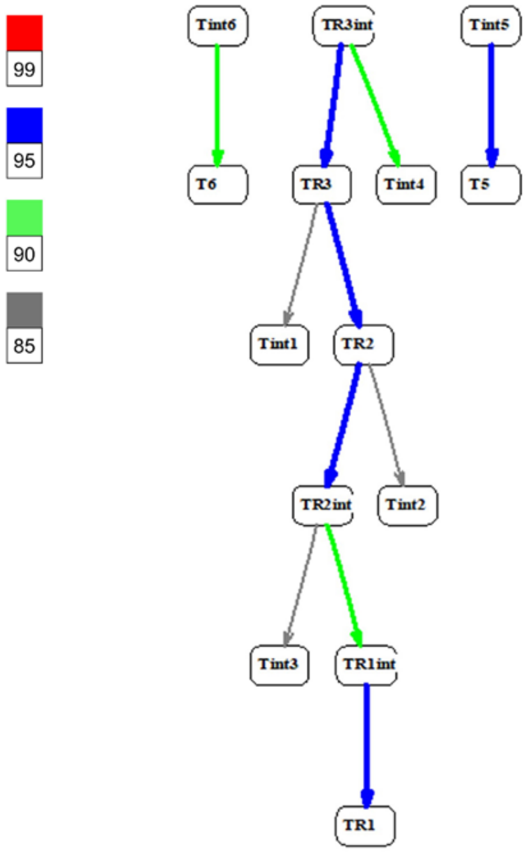


Figura 10. Grafico implicativo (i numeri a lato indicano la significatività delle frecce).

Ci sono tre catene di implicazioni; le prime due sono analoghe ai gruppi di similarità presentati in precedenza Tint6 → T6, Tint5 → T5. Il loro significato è che gli insegnanti che danno una buona interpretazione delle potenziali difficoltà degli studenti in questi quesiti, daranno una soluzione corretta agli stessi. È possibile che gli insegnanti che danno una spiegazione ragionevole delle potenziali difficoltà degli studenti legate a un quesito forniscano una soluzione corretta a tale quesito. Questa tendenza riguarda soprattutto i quesiti legati ai triangoli, cioè i quesiti della seconda parte del test piuttosto che i sei quesiti della prima parte. La terza catena del grafico implicativo presenta il gruppo più importante delle relazioni implicative, ossia il gruppo che inizia con l'interpretazione del quesito T3 (TR3int) all'estremità superiore del grafico. Questa catena è molto importante perché comprende 10 variabili: 6 variabili sono relative ai quesiti del triangolo isoscele, TR1, TR2, TR3, TR1int, TR2int, TR3int; è altrettanto importante che siano incluse altre quattro variabili legate alle interpretazioni degli insegnanti, Tint1, Tint2, Tint3 e Tint4. Per spiegare in modo semplice la **Figura 10**, se un insegnante interpreta correttamente il quesito T3, ciò implica che lo stesso insegnante fornisca una soluzione e un'interpretazione corretta di vari altri quesiti. Un ulteriore risultato che emerge dal grafico sopra è che all'estremità superiore di tutte e tre le catene implicative troviamo variabili relative alle interpretazioni e non alle soluzioni dei quesiti.

5 Discussione

Attraverso il presente studio abbiamo indagato se un gruppo specifico di insegnanti di matematica, partecipando a un corso pedagogico intensivo, riuscisse a implementare vari concetti o teorie didattiche nell'interpretazione dei problemi geometrici scolastici, in particolare riguardanti dimostrazioni geometriche. Il nostro obiettivo è stato quello di esaminare il loro successo nel risolvere i quesiti in relazione alla loro capacità di prevedere e interpretare le rispettive difficoltà degli studenti. Ritenevamo che le loro conoscenze e abilità sull'apprendimento delle figure geometriche dovessero essere esaminate in relazione alla loro capacità di prevedere e interpretare possibili errori e incomprensioni degli studenti. Una particolarità della nostra ricerca è di aver proposto i quesiti TR1, TR2, TR3 che hanno una formulazione analoga. Sebbene non sia immediatamente evidente dalla formulazione dei quesiti, TR1, TR2 e TR3 differiscono per difficoltà. Quasi tutti gli insegnanti hanno concordato sul fatto che TR3 fosse il quesito più difficile da dimostrare, mentre TR1 fosse il meno difficile da dimostrare. Per tutti e tre i quesiti gli insegnanti hanno convenuto che interviene il concetto di comprensione delle figure geometriche. Per essere più precisi, gli insegnanti hanno previsto che gli studenti avrebbero difficoltà a costruire mentalmente la figura e quindi nel riuscire a costruirla correttamente su carta (comprensione sequenziale). Perciò, tutti gli insegnanti hanno convenuto che la comprensione percettiva sarebbe necessaria affinché gli studenti identifichino quali sotto-figure confrontare. È stata inoltre messa in evidenza la comprensione operativa come una possibile difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare nel dover modificare mereologicamente la figura costruita. Più specificatamente, la comprensione operativa, cioè la modifica della figura, è più difficile per il quesito TR3. In altre parole, sembra che gli insegnanti si siano resi conto dell'importanza della teoria della comprensione delle figure geometriche.
Come risulta evidente dall'analisi quantitativa delle soluzioni e delle previsioni degli insegnanti presentata nel **par. 4.2**, sebbene gli insegnanti possano risolvere un quesito, potrebbero non essere in grado di prevedere correttamente la difficoltà che uno studente potrebbe incontrare nel risolverlo o le teorie e i concetti didattici che intervengono nel suo processo di risoluzione.
Inoltre, dall'analisi statistica implicativa delle soluzioni e delle previsioni degli insegnanti presentate nel **par. 4.3**, possiamo dedurre che se un insegnante interpretasse correttamente il quesito T3, il più difficile, cioè se prevedesse correttamente le possibili difficoltà degli studenti nonché le teorie e i concetti della didattica che intervengono nella risoluzione di questo quesito, ciò implica che lo stesso insegnante darebbe una soluzione corretta e una buona interpretazione di vari altri quesiti. In altre parole, la capacità degli insegnanti di fornire dimostrazioni nei tre problemi classici TR1, TR2, TR3 della geometria euclidea è fortemente correlata alle loro interpretazioni non solo di questi tre quesiti, ma anche nelle interpretazioni di altri quattro quesiti. Inoltre, come già accennato nella sezione dei risultati (si veda il **par. 4**), all'estremità superiore di tutte e tre le catene implicative troviamo variabili legate alle interpretazioni e non alle soluzioni dei quesiti. Ciò potrebbe significare che un insegnante in grado di interpretare correttamente un quesito potrebbe anche fornire soluzioni corrette. Infatti, il successo delle sei variabili legate a TR1, TR2 e TR3 è fortemente correlato al successo di altre quattro variabili legate alle interpretazioni degli insegnanti.
I risultati hanno indicato che i docenti si rendono conto dell'importanza della teoria della comprensio-

ne delle figure geometriche e la applicano per analizzare i quesiti geometrici assegnati sia rispetto alle possibili difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare, sia rispetto ai concetti e alle teorie didattiche che intervengono nella soluzione di ciascun quesito. Tuttavia, l'analisi qualitativa delle risposte degli insegnanti ha mostrato che non tutti gli insegnanti danno le stesse risposte. In alcuni quesiti, alcuni docenti vedono difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare che non sono in accordo né con gli studi correlati né con il punto di vista della maggior parte degli insegnanti che hanno partecipato a questo studio. In entrambe le analisi si può osservare il fenomeno della compartimentazione nelle risposte dei partecipanti, poiché si formano vari gruppi di similarità e varie catene implicative. Ciò può essere in parte spiegato dalla differenza di difficoltà tra il primo gruppo di quesiti (da T1 a T6) e il secondo gruppo di quesiti (TR1, TR2 e TR3). Infatti, nel processo di soluzione dei primi sei quesiti, era richiesta la comprensione percettiva in tutti i quesiti, la comprensione operativa in quasi tutti i quesiti e la comprensione discorsiva di base solamente in alcuni quesiti. Tuttavia, in tutti i quesiti del secondo gruppo era richiesta una comprensione discorsiva più approfondita. I tre quesiti della Parte B della prova scritta comprendono tre affermazioni geometriche relative a due altezze congruenti di un triangolo (TR1), o due mediane congruenti (TR2) o due bisettrici congruenti (TR3), che richiedono una dimostrazione geometrica. Inoltre, sebbene i tre quesiti sembrino quasi identici nella loro formulazione (congruenza semantica), la loro difficoltà aumenta man mano che si passa dal primo, al secondo e al terzo quesito. Il successo nei quesiti TR1, TR2 e TR3, che hanno a che fare con il triangolo isoscele, implica il successo in quattro variabili di interpretazione (cioè nella previsione corretta delle difficoltà dello studente così come dei concetti e delle teorie della didattica che intervengono nella soluzione). La nostra attenzione al modo in cui gli insegnanti comprendono e mettono in pratica teorie e concetti della didattica della matematica nell'analisi delle attività degli studenti ha evidenziato due punti rilevanti: da un lato, tale attenzione può far luce su vari aspetti dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria, dall'altro mostra l'importante ruolo della formazione sull'insegnamento della matematica e sullo sviluppo del pensiero cognitivo e matematico. Se ne potrebbe dedurre che gli insegnanti che prevedono correttamente le potenziali difficoltà degli studenti possono organizzare il proprio insegnamento in modo più efficiente scegliendo, ad esempio, attività più appropriate. Inoltre, un importante risultato del nostro studio ha dimostrato che un insegnante che dà una soluzione corretta a un problema geometrico non ha necessariamente una profonda comprensione e conoscenza delle teorie e dei concetti didattici sottostanti. Questo risultato potrebbe essere preso in considerazione nella preparazione dei futuri insegnanti di matematica. Consideriamo il nostro studio come un primo passo importante verso l'investigazione della comprensione da parte degli insegnanti delle teorie e dei concetti della didattica della matematica e di come ciò potrebbe influenzare l'insegnamento della geometria e l'apprendimento degli studenti e principalmente l'insegnamento e l'apprendimento delle dimostrazioni geometriche. Occorre analizzare in profondità come gli approcci didattici potrebbero essere migliorati in modo che gli studenti possano sviluppare una comprensione più sicura delle dimostrazioni e del processo dimostrativo. Un ulteriore studio che includa più quesiti geometrici, risolti e interpretati da un campione più ampio di futuri insegnanti di matematica, si rivelerebbe una preziosa aggiunta non solo alla letteratura esistente sull'insegnamento della matematica, ma anche all'insegnamento e all'apprendimento della geometria.

Bibliografia

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433–456). Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Battista, M. T., Frazee, L. M., & Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. In K. Mix & M. Battista (Eds.), *Visualizing Mathematics. Research in Mathematics Education* (pp. 195–228). Springer.

Bergstrom, C., & Zhang, D. (2016). Geometry interventions for K-12 students with and without disabilities: A research synthesis. *International Journal of Educational Research*, *80*, 134–154.

Brousseau, G. (1989). Obstacles epistemologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. In N. Bednarz & C. Carnier (Eds.), *Construction des savoirs* (pp. 277–285). Agence d'Arc.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situation in Mathematics: Didactique des Mathématiques 1970-1990.* Kluwer Academic Publisher.

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2008). A study on the left behind students for enhancing their competence of geometry argumentation. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 305–312). PME.

Chinnappan, M., White, B., & Trenholm, S. (2018). Symbiosis between subject matter and pedagogical knowledge in Geometry. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 145–161). Springer.

Cirillo, M. (2011). I'm the Sherpa guide: On the learning to teach proof in school mathematics. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 241–248). PME.

Cirillo, M. (2018). Engaging students with non-routine geometry proof tasks. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 283–300). Springer.

Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, *5*, 37–65. (Tradotto in spagnolo per fini educativi da F. Hitt e A. M. Ojeda, Departamento de Matemáticas Educativa CINVESTAV-IPN, México).

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142–157). Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37–51). Kluwer Academic.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1–16.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in School* (pp. 135–161). Brill.

Fuglestad, A. B., & Goodchild, S. (2009). I thought it was a proof. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 379). PME.

Fujita, T., & Jones, K. (2014). Reasoning and proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, *64*, 81–91.

Fujita, T., Jones, K., & Kunimune, S. (2010). Students' geometrical construction and proving activities: A case of cognitive unity?. In M. F. Pinton & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 9–16). PME.

Gagatsis, A. (2015). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la Matemática – Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 231–248). Universidad de la Sabana.

Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z. Deliyianni, E., & Gridos, P. (2022). How could the Presentation of a Geometrical Task Influence Student Creativity?. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, *5*(1), 93–116. https://doi.org/10.31756/jrsmte.514

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem-solving processes on functions compartmentalized in students' thinking?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue 2006*, 197–224.

Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021). A multidimensional approach to students' creativity in geometry: spatial ability, geometrical figure apprehension and multiple solutions in geometrical problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 5–16.

Gagatsis, A., Michael-Chrysanthou, P., Deliyianni, E., Panaoura, A., & Papagiannis, C. (2015). An insight to students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought. *Communication & Cognition*, *48*(3–4), 89–128.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.

Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C., & Guillet, F. (Eds.) (2013). *L'analyse statistique implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités.* Cépaduès Editions.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical Implicative Analysis. Theory and Applications.* Springer Berlin.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques [About strategies used to train primary school teachers in mathematics]. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 289–322.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2001). Pretty (good) didactical provocation as a tool for teachers' training in Geometry. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of CERME2* (pp. 292–304). Praha Charles University.

Hunte, A. (2018). Opportunities for reasoning and proving in Geometry in secondary school textbooks from Trinidad and Tobago. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 39–58). Springer.

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in Geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *20*(3), 109–114.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutierrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 109–149). Sense.

Kuzle, A. (2022). The teaching of geometry in primary education: Is geometry still neglected in school mathematics?. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 734–741). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Leikin, R., & Elgrabli, H. (2015). Creativity and expertise: The chicken or the egg? Discovering properties of geometry figures in DGE. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1024–1031). ERME.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 349–371.

Lesseig, K. (2016). Conjecturing, generalizing and justifying: building theory around teacher knowledge and proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *17*(3), 1–31.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions to a problem: A tool for assessment of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)* (pp. 776–785). *Institut national de recherche pédagogique*.

Manizade, A., & Martinovic, D. (2018). Creating profiles of geometry teachers' PCK. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME -13 Monographs* (pp. 127–144). Springer.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4/1), 165–180.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2016). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*, 223–239.

Mwadzaangati, L., & Kazima, M. (2019). An exploration of teaching for understanding the problem for geometric proof development: the case of two secondary school mathematics teachers. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *23*(3), 298–308.

Panaoura, G., Gagatsis, A., & Lemonides, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 7, Geometrical Thinking* (pp. 1062–1072). ERME.

Panaoura-Maki, G. (2007). *Students' geometric knowledge and skills at the end of the primary education: a comparison of the geometric thinking at the age of primary and secondary education.* Unpublished PhD thesis. University of Cyprus.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4–14.

Stylianides, G. (2018). Secondary students' proof constructions in mathematics: the role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education*, *7*(1), 158–182.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2009). Factors limiting configural reasoning in geometric proof. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 477). PME.

Tso, T., & Liang, Y. N. (2002). The study of interrelationship between spatial abilities and Van Hiele levels of thinking in geometry of eight-grade students. *Journal of Taiwan Normal University*, *46*(2), 1–20.

Verschaffel, L., Greer, B., & DeCorte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356–366.

Winer, M. L., & Battista, M. T. (2022). Investigating students' proof reasoning: Analyzing students' oral proof explanations and their written proofs in high school geometry. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *17*(2), 1–21.

Yavuz, A., Aydin, B., & Avci, M. (2016). The effect of the success in teaching geometry of basic level education mathematics. *European Journal of Education Studies*, *2*(8), 60–71.

Zazkis, D., & Zazkis, R. (2013). Prospective teachers' conceptions of proof comprehension: Revisiting a proof of the Pythagorean theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 777–803.