

Dalle sagome alle figure geometriche. Un itinerario didattico sui quadrilateri

From shapes to geometric figures.
An educational itinerary on quadrilaterals

Paola Vighi

già Dipartimento di Matematica e Informatica – Università di Parma, Italia

A Clara Bozzolo
un'amica e una maestra

Sunto / Il presente lavoro è rivolto agli insegnanti di scuola elementare, allo scopo di fornire loro un esempio di un percorso didattico che, nato casualmente e sviluppato attraverso semplici attività, si è tuttavia rivelato ricco di spunti e potenzialità. L'itinerario didattico, sperimentato con bambini di 9-10 anni, è incentrato sulla manipolazione di sagome di carta colorata, aventi la forma di particolari triangoli rettangoli, e sulla loro giustapposizione per rappresentare altre figure geometriche, soprattutto triangoli e quadrilateri. Dopo aver descritto il quadro teorico, si illustrano le tappe seguite, commentando i compiti assegnati agli allievi ed i relativi risultati. Si allegano anche protocolli, esaminandoli dal punto di vista didattico.

Parole chiave: pensiero geometrico; visualizzazione; costruzione di figure; giustapposizione; quadrilatero.

Abstract / This paper is addressed to primary school teachers, in order to provide an example of a didactic path which, casually born and developed through simple activities, appeared rich of suggestions and potentiality. The didactic itinerary, experimented with 9-10 years old children, is focused on the manipulation of coloured templates, with the shape of particular right-angled triangles, and on their juxtaposition to represent other geometrical shapes, mainly triangles and quadrilaterals. After the description of the theoretical background, I illustrate its phases, with comments on the students' tasks and the related results.

Keywords: geometrical thought; visualization; construction of shapes; juxtaposition; quadrilateral.

1 Premessa

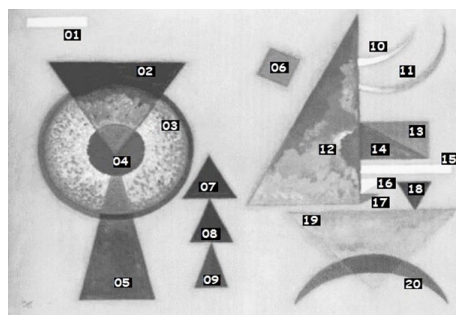
L'esperienza didattica qui descritta prende le mosse da un'osservazione sorta in occasione di un'attività di ricerca, svolta con bambini di 5-6 anni nella scuola dell'infanzia (Vighi, 2016a) e (Vighi, in corso di stampa). La consegna era quella di riprodurre un quadro di Kandinsky, intitolato *Soft Hard* (Figura 1), in cui compaiono 20 figure geometriche, collocando opportunamente su di un foglio le sagome di ciascuna di esse. La ricerca aveva lo scopo di indagare sul riconoscimento e sulla manipolazione delle forme, sulle preconcezioni relative alle trasformazioni geometriche e sul concetto di spazio nei bambini di quell'età. L'analisi dei risultati della sperimentazione ha mostrato incertezze e difficoltà soprattutto relativamente alla manipolazione dei triangoli rettangoli, indicati con i numeri 12, 13 e 14 nella Figura 2. In particolare, è risultata problematica l'attività dell'accostare i due triangoli n° 13 e n° 14 per ottenere un rettangolo. L'analisi dei video realizzati durante la sperimentazione ha

mostrato che alcuni bambini hanno cercato tra le sagome fornite dall'insegnante un rettangolo 'bicolore', molti si sono limitati ad accostare i due triangoli senza verificare il risultato finale, altri hanno fatto numerosi tentativi, ma senza successo. Una spiegazione sta nel fatto che i triangoli con cui si lavora usualmente nella scuola dell'infanzia sono equilateri e di conseguenza 'reversibili', nel senso che comunque si presentino basta ruotarli per ottenere la configurazione richiesta. I triangoli in oggetto invece non sono 'reversibili', talvolta devono essere ribaltati e non solo ruotati. Questo costituisce una difficoltà, talvolta insormontabile, per alcuni bambini, che, per esempio, appoggiano sul foglio il triangolo n° 12 così come si presenta e se non è orientato correttamente non pensano di ribaltarlo. La ricerca documenta ampiamente questo problema (Grenier & Laborde, 1988; Bulf et al., 2013; 2014a; 2014b).



Figura 1
"Soft-Hard"
(Kandinsky, 1927).

Figura 2
Analisi ed organizzazione
delle figure.



Proprio a partire dalla constatazione della difficoltà descritta sopra, si è pensato di proporre un'attività sui poligoni basata sulla giustapposizione di due triangoli aventi le stesse caratteristiche di quelli in oggetto. Si è così realizzata una sperimentazione focalizzata sui quadrilateri (per un approfondimento si veda il [link](#)), che è argomento del presente scritto. Non si tratta di un lavoro di ricerca, ma di un esempio di un'attività sperimentale che, originata dall'osservazione di una particolare difficoltà, prende sostegno dalle ricerche in didattica della matematica, sia relativamente ai temi trattati che alle modalità seguite.

2 Quadro teorico

Le ricerche condotte negli ultimi tempi sullo sviluppo del pensiero geometrico hanno modificato gli obiettivi dell'insegnamento della geometria nella scuola elementare: non più una "geometria euclidea in miniatura", ma una conoscenza dello spazio e delle situazioni spaziali, che prepari il terreno all'apprendimento della geometria che si realizzerà nei livelli scolastici successivi. In altre parole, si è compreso che il pensiero geometrico ha origine dal ragionamento spaziale, che consiste nel 'vedere' ed osservare oggetti dello spazio, immagini, relazioni tra di essi ed eventuali trasformazioni degli uni negli altri (Clements & Battista, 1992).

In questo contesto, una pietra miliare è costituita dalla teoria di van Hiele (1986), che organizza in diversi livelli la comprensione dei concetti geometrici. Descriviamo qui brevemente i primi tre livelli, che riguardano soprattutto la scuola elementare. Il livello-

lo iniziale è quello *visuale*, che costituisce un fondamentale passo verso lo sviluppo del pensiero spaziale: il bambino identifica le figure sulla base del loro aspetto, considerandole come un tutto e senza osservarne le proprietà; usa inoltre un linguaggio informale. Nel secondo livello, quello *descrittivo*, gli allievi sono in grado di riconoscere le figure e di caratterizzarle in base alle loro proprietà geometriche. Le relazioni tra le diverse proprietà di una figura nonché tra figure compaiono al livello successivo, quello *razionale*. Il passaggio da un livello all'altro è stato oggetto di ricerca: in particolare, Gutierrez et al. (1991) hanno studiato i "gradi di acquisizione" di un livello e le condizioni di passaggio al successivo. La teoria di van Hiele ha inciso notevolmente sia sulla ricerca relativa al pensiero geometrico che sui percorsi scolastici:

«Il modello ha fortemente influenzato i curricula di geometria in tutto il mondo per l'enfasi sull'analisi delle proprietà e la classificazione delle figure nei livelli (per esempio, associato alla classificazione di triangoli o quadrilateri)».

(Swoboda & Vighi, 2016, p. 9)

Secondo Duval (2005, p. 2), le figure di cui a scuola si richiede la conoscenza corrispondono «a forme che sono percettivamente notevoli e culturalmente familiari», ma in generale la principale caratteristica delle figure geometriche è quella di «(...) non essere iconiche, cioè di non assomigliare ad un oggetto visto e conosciuto nella realtà» (Duval, 2005, p. 3).

Secondo lo stesso autore, è necessario promuovere il passaggio dalla "visualizzazione iconica" a quella "non iconica" delle figure; quest'ultima, tipica della geometria, è un riconoscimento delle forme che comporta la loro decomposizione in "unità figurali". In altre parole, il modo naturale di vedere le figure consiste in un riconoscimento percettivo di oggetti bidimensionali (2D nella notazione di Duval), mentre il modo matematico si focalizza sulle rette e sui segmenti tracciati per disegnare la figura (1D, 'unidimensionale') e sulle loro intersezioni, i punti (0D, 'zero dimensionale'). Occorre dunque favorire un modo di vedere che, andando oltre la percezione visiva, conduca alla 'visualizzazione', che sta alla base della formazione dei concetti geometrici.

Un altro aspetto che Duval (2003) evidenzia è il fatto che gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili, ma possono essere conosciuti solo attraverso rappresentazioni. In particolare, gli oggetti geometrici sono rappresentati da oggetti concreti di cui osserviamo solo le caratteristiche spaziali o da disegni, ma una figura geometrica è, secondo Fischbein (1993), un'immagine visiva che «(...) include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali». Nella scuola elementare occorre dunque un «lavoro con materiali che favorisca lo sviluppo di immagini e rappresentazioni mentali» (Chamorro, 2006, p. 415), cominciando dalle 'forme' per arrivare poi alle 'figure'. Ma, che cos'è una forma? Una possibile risposta è la seguente:

«Una forma è un contorno chiuso che si distacca dallo sfondo. Se lo sfondo è omogeneo, questo contorno è determinato da tratti o appare come il bordo di una macchia, cioè di una zona di colore diverso dallo sfondo. Il problema del riconoscimento visuale delle forme inizia quando non c'è una sola forma isolata, ma almeno due che possono essere separate, giustapposte, parzialmente sovrapposte, o una inscritta nell'altra».

(Duval, 2016, p. 214)

Il presente lavoro prende le mosse proprio dalla giustapposizione (o 'accostamento') di coppie di 'forme' per costruire quelle che chiameremo 'sagome' di figure geometriche. L'uso della parola 'sagoma' è dettato dalla necessità di distinguere l'oggetto concreto dalla figura geometrica che esso rappresenta. Di fatto, durante l'attività in classe spesso si è parlato di 'figure', come si fa solitamente, allo scopo di semplificare il linguaggio e la trattazione.

3 Metodologia

Nell'ambito di un corso di formazione per insegnanti di scuola elementare tenutosi presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Parma, nell'a.a. 2016/2017 (la cui docente responsabile è l'autrice di questo articolo), è stato ideato e progettato un itinerario didattico sulla "famiglia dei quadrilateri". Si è pensato di organizzare un'attività basata sull'accostamento (o giustapposizione)¹ di coppie di triangoli rettangoli aventi le stesse caratteristiche di quelli utilizzati da Kandinsky nel dipinto *Soft Hard* (Figura 1) (per un approfondimento si veda [link](#)). Si è osservato che si tratta di triangoli rettangoli particolari, che, oltre all'angolo retto, hanno angoli di 30° e di 60°; i triangoli n° 13 e n° 14 sono congruenti, il triangolo n° 12 (Figura 2) è simile ad essi, nel senso matematico del termine; in altre parole, i triangoli n° 12, n° 13 e n° 14 hanno angoli congruenti e lati in proporzione. Si sono ritagliati numerosi triangoli di colori diversi, con le stesse proprietà geometriche di quelli del dipinto, i cui lati avessero all'incirca le seguenti misure: ipotenusa di 10 cm, un cateto di 5 cm e l'altro di 8,66 cm circa. D'ora in poi, per intenderci, li chiameremo "triangoli-base".

1

Di seguito si presenta innanzitutto un'attività preliminare (paragrafo 4), sperimentata in diverse classi del secondo ciclo (allievi di 8-10 anni), i cui risultati hanno suggerito l'opportunità di proseguire nel lavoro. Si descrive poi dettagliatamente l'itinerario didattico (paragrafo 5) progettato e sperimentato nella classe IV A della scuola elementare "Padre Lino Maupas" di Vicofertile (PR), formata da 25 alunni, in presenza dell'insegnante G. Barantani e dell'autrice del presente articolo. L'attività in classe è stata svolta con cadenza quindicinale, dal mese di febbraio al mese di maggio. Tutte le sessioni di lavoro sono state videoregistrate. Quando è iniziata la sperimentazione, l'insegnante aveva già introdotto i poligoni, in particolare aveva trattato in modo approfondito i triangoli, e aveva appena introdotto alcuni tipi di quadrilatero.

4 L'antefatto

L'idea iniziale è stata quella di fornire a ciascun allievo due triangoli-base di colori diversi ed un foglio di formato A4, chiedendo di costruire con essi una figura a pia-

1. Osserviamo, per inciso, che le prove standardizzate, come le Prove Invalsi, presentano spesso quesiti basati su figure ottenute accostando figure tradizionali e non.

cere, di incollarla sul foglio e di contare i suoi lati. L'attività è stata implementata in diverse classi di Parma e provincia, con allievi dagli 8 ai 10 anni. Qui si presenta la sperimentazione attuata nella classe terza dell'insegnante Rossana Ficini, I.C. "P.L. Belloni", di Colorno (PR).

Si è osservato che su 17 protocolli, 12 presentavano poligoni convessi e 5 poligoni concavi; 15 poligoni erano poi ottenuti per giustapposizione, 2 per sovrapposizione. Di seguito alcuni esempi:

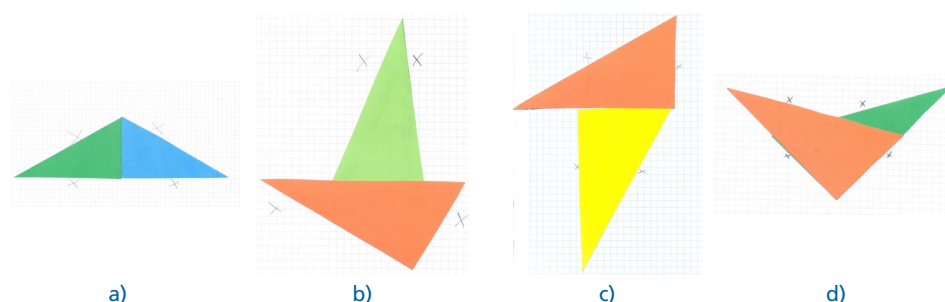


Figura 3
Giustapposizione di triangoli: alcuni esempi.

Il primo protocollo (Figura 3a) presenta la sagoma di un poligono convesso, gli altri (Figure 3b, 3c, 3d) di poligoni concavi. Nei primi tre protocolli i due triangoli-base sono stati giustapposti, mentre nel quarto si è fatto ricorso ad una sovrapposizione. Forse in Figura 3b si è voluto costruire un oggetto, una barca: come già detto, secondo Duval (1995) il primo modo di vedere le figure è la cosiddetta "visualizzazione iconica", che si realizza attraverso la percezione, mediante la somiglianza con un oggetto reale. Anche nella ricerca descritta nella premessa, si è notato che i bambini tendevano a denominare "barca" o "nave" la configurazione costituita dai triangoli n° 12 e n°19 (Figura 2). Infine il criterio usato per costruire la Figura 3d potrebbe essere la ricerca di simmetria (presente per altro anche in Figura 3a).

A una prima lettura, la richiesta di contare i lati potrebbe sembrare banale, ma le crocette usate per indicarli fanno riflettere. Se osserviamo le sagome con 'gli occhi della geometria', notiamo che in Figura 3a, i lati sono tre, ma l'allievo ne conta quattro, probabilmente perché vede due lati di due diversi colori; ciò non si verifica invece in Figura 3d, in cui il 'lato bicolore' è considerato come un unico lato. In Figura 3b, i lati sono sei, ma l'allievo ne conta quattro, così pure in Figura 3c i lati sono cinque, ma le crocette quattro. È interessante interrogarsi su questo comportamento, che conduce ad errato conteggio dei lati, e che si è riscontrato in quattro su cinque dei protocolli con rappresentazione di poligoni concavi. L'analisi dei protocolli impone inoltre una riflessione sul concetto di lato. Probabilmente il problema è insito nell'attività proposta: il bambino non esegue quel processo mentale di "fusione delle forme" che porta a vedere la sagoma nella sua globalità, proprio perché ha costruito la sagoma con le sue mani e sa che essa è composta da due triangoli, che per di più sono di colori diversi.

Nella tradizione scolastica spesso si usa la parola 'lato' senza darne una definizione, sottintendendo che si tratta del segmento congiungente due vertici consecutivi.² Si dice per esempio che "un triangolo ha tre lati" e nel contarli si indicano; ci si riferisce inoltre quasi sempre a poligoni convessi per i quali il conteggio dei lati è più semplice. Nel caso dei poligoni concavi, per poter contare i lati occorre individuare prima i vertici, è necessario cioè passare a quell'attività che Duval (2005) chiama "decomposizione in unità figurali" o "decostruzione dimensionale delle forme in unità 1D e 0D", che, come già detto, l'autore ritiene fondamentale per il passaggio al corretto modo di 'vedere' in geometria, cioè alla "visualizzazione non iconica". Nel caso della **Figura 3a**, il conteggio del numero dei lati può fornire risposte diverse a seconda che si osservino la 'sagoma' ed i suoi colori (visualizzazione iconica) oppure la 'figura geometrica' rappresentata da quella sagoma (visualizzazione non iconica), che è, con buona approssimazione, un triangolo isoscele. Alla fine della lezione, si è fatta chiarezza sul concetto di lato, tramite una discussione in classe relativa agli elaborati degli allievi.

5 Itinerario didattico

5.1 Consegna n° 1: costruzione libera di figure

L'insegnante fornisce a ciascun allievo due triangoli dello stesso colore, con la seguente consegna:

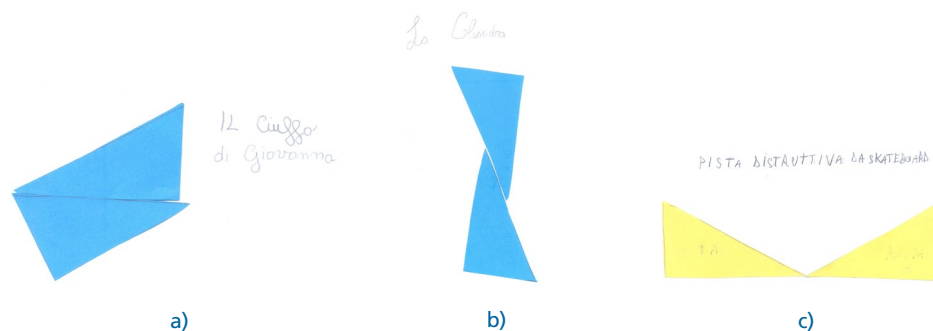
"Con questi due triangoli costruisci la figura che vuoi, incolla sul foglio i triangoli che la compongono e dai un titolo alla configurazione ottenuta".

Commento: lo scopo dell'attività è quello di lasciare spazio alla fantasia ed alla creatività degli allievi e di motivare al lavoro successivo attraverso un approccio graduale. Nella sua 'Teoria del modello generico', Hejny (2004) pone come prima e irrinunciabile tappa verso l'apprendimento la motivazione, che descrive come la tensione che si crea nella mente come risultato del divario tra lo stato di conoscenza esistente e quello auspicato. La consegna data, né impegnativa né difficile, ha proprio lo scopo di essere motivante.

Analisi dei risultati: i 25 protocolli presentano sagome ottenute per giustapposizione dei due triangoli iniziali secondo le seguenti modalità: accostamento totale di lati (5 protocolli, tra cui 3 triangoli e 2 parallelogrammi), avvicinamento parziale di lati (11 protocolli), accostamento di vertici con lati (7 protocolli), accostamento di vertici (2 protocolli). Si osserva inoltre che 13 sagome presentano centri o assi di simmetria. Ecco alcuni esempi:

2. Forse si pensa che possa emergere in modo naturale dalla definizione introdotta precedentemente di 'linea poligonale' o 'linea spezzata'.

Figura 4
Giustapposizione
di triangoli dello stesso
colore: alcuni esempi.



Nella **Figura 4a**), intitolata "La barca stramba movimentata", sono accostati l'ipotenusa di un triangolo con il cateto maggiore di un altro; la giustapposizione è ovviamente parziale, anche se le lunghezze 'differiscono di poco'. Interessante è il titolo che, in un'altra classe, un allievo ha attribuito ad una composizione simile a questa: ha scritto infatti "Quasirettangolo", forse nell'intento di usare una nomenclatura il più possibile vicina a quella della geometria, rispettando nel contempo l'immagine suggerita dalla sagoma. Dalla discussione in classe è emerso che la sagoma di **Figura 4a** rappresenta un poligono concavo con 5 lati, anche se "un lato è molto piccolo". La **Figura 4b**, ottenuta accostando parzialmente le ipotenuse, è intitolata "La clessidra"; dal punto di vista teorico, rappresenta un poligono concavo con 6 lati, che ha un centro di simmetria. Infine la "Pista distruttiva di skateboard" (**Figura 4c**) pone un interessante quesito: si tratta di un poligono o dell'unione di due triangoli? Per una possibile risposta, si rimanda alla approfondita analisi della definizione di poligono fatta da Villani (2006, pp. 240-250), che è stata oggetto di lettura e di discussione con gli insegnanti durante la fase di analisi dei protocolli.

5.2 Consegna n° 2: costruzione di figure in base ad un criterio

La consegna è la seguente:

"Con questi due triangoli (dello stesso colore) costruisci una figura, facendo in modo che due lati si accostino perfettamente".

Commento: lo scopo è quello di escludere i poligoni concavi e di promuovere la costruzione di poligoni convessi. Con la locuzione 'accostare perfettamente', scelta dall'insegnante per comunicare la consegna, si intende una giustapposizione di lati completa e non parziale. Si sarebbe potuto anche parlare di 'lati coincidenti', ma il concetto di coincidenza (così come quello di uguaglianza) in matematica è complesso, per questo si è preferito in questo caso evitarlo, non essendo gli allievi abituati all'uso di questo termine. Per maggiore chiarezza, la consegna è stata spiegata mostrando esempi di coppie di triangoli-base i cui lati sono "perfettamente accostati", e altri controesempi.

Analisi dei risultati: L'esame dei 22 protocolli raccolti ha fornito i seguenti risultati: 11 deltoidi (ottenuti accostando le ipotenuse) (**Figura 5a**, intitolata *Il tlu-tlu giallo con il fiocco* e **Figura 5e**, intitolata *L'aquilone disperso*), 7 triangoli equilateri (ottenuti accostando i cateti maggiori) (**Figura 5b**, intitolata *Il diamante*), 1 triangolo isoscele (ottenuto accostando i cateti minori dei due triangoli-base) (**Figura 5c**, intitolata *L'astronave azzurra*), 2 parallelogrammi (ottenuti accostando i cateti maggiori), (**Figura**

5d), e un poligono concavo e non rispettante la consegna, in quanto non presenta una completa giustapposizione di lati (Figura 5f, intitolata *Il razzo nello spazio*).

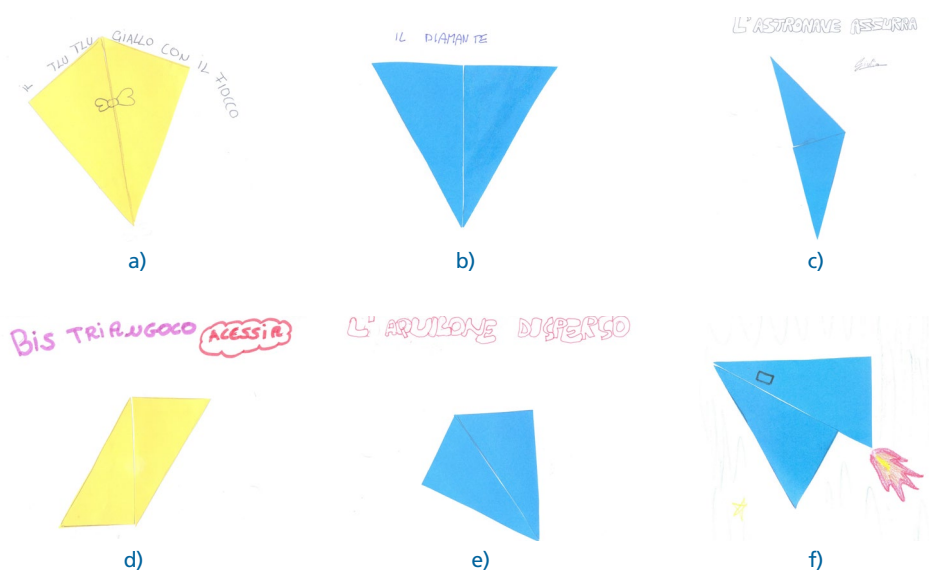


Figura 5
Giustapposizione
di triangoli in modo che
due lati 'coincidano':
alcuni esempi.

Nessun allievo ha realizzato un rettangolo, come fatto da Kandinsky accostando in triangoli n° 13 e n° 14 (Figura 2); una possibile interpretazione, emersa da una conversazione con gli insegnanti, è la seguente: il rettangolo è una figura "usuale", "statica", "poco piacevole", "meno accattivante di figure con 'punte' o simmetrie evidenti". Non è un caso che, nonostante non fosse stato richiesto, i bambini abbiano dato un titolo alla propria creazione: è una conseguenza della consegna precedente, ma è anche testimonianza della volontà di realizzare una figura piacevole e per loro significativa.

5.2.1 Il problema della nomenclatura delle figure

L'insegnante ha raccolto i protocolli ed ha proposto di organizzarli in base alle forme. Si sono confrontate le sagome allo scopo di individuarne le tipologie e di classificarle. L'attività di confronto è risultata importante e significativa in quanto ha condotto all'osservazione di tutte le sagome prodotte dagli allievi e al riconoscimento della presenza di figure congruenti (o "uguali" come dicono i bambini), anche se diversamente orientate rispetto ai bordi del foglio.

L'attività di classificazione ha comportato l'uso di 'nomi per le figure' e ha promosso l'esigenza di una opportuna nomenclatura. In base alle conoscenze precedenti, le Figure 5b e 5c sono state chiamate immediatamente "triangolo equilatero" e "triangolo isoscele". Significativo è l'uso della locuzione "Bis triangolo" per la Figura 5d, in assenza di un nome (l'altro parallelogramma realizzato, avente le stesse caratteristiche, è stato intitolato "Faccio geometria"). Per denominare i deltoidi si è fatto ricorso spesso alla parola 'aquilone', ma anche a 'piramide', 'lancia' o 'scudo'. Si è posto dunque il problema di come chiamare le figure con il linguaggio della geometria. Per quanto riguarda la Figura 5d, inizialmente l'insegnante ha fatto osservare che ha quattro lati e che, di conseguenza, è un quadrilatero; per introdurre la parola "parallelogrammo" si è poi fatto ricorso ad una esperienza realizzata con gli stessi allievi nel primo biennio di scuola elementare: in quella occasione, allo scopo di indagare

sul linguaggio spontaneo usato dagli allievi per descrivere relazioni geometriche, era stata proposta un'attività basata su artefatti costituiti da coppie di cannucce opportunamente disposte per introdurre parallelismo e perpendicolarità tra segmenti (Vighi & Marchini, 2014) e (Vighi, 2015). Alla fine della seconda classe, gli allievi hanno mostrato di saper riconoscere visivamente, e di saper utilizzare i suddetti concetti, pur non essendone stata fornita una definizione (Vighi, 2016b). È bastato far riferimento a quell'esperienza, indicando i lati opposti di un parallelogrammo perché i bambini dicessero che "sono paralleli". Dopo aver osservato che anche gli altri due lati opposti erano paralleli, si è introdotta la parola 'parallelogramma'. Il vocabolo 'deltoide', in riferimento alle Figure 5a e 5b, è stato suggerito dal docente, con richiesta di cercare di spiegare il suo significato. Ne è scaturita una discussione sull'etimologia della parola: "perché è a forma di delta, come il deltaplano" (qui è la forma che suggerisce un'immagine) o "L'ho già sentita ... come il delta del Po" (qui è una parola che ne richiama un'altra). È stata poi aggiunta qualche osservazione sul 'muscolo deltoide' e si è precisato che talvolta un 'deltoide' viene anche chiamato 'aquilone'.

5.3 Consegna n° 3: un problema combinatorio

Nella lezione successiva è stato posto il seguente problema:

"In quanti modi è possibile accostare i due triangoli rispettando la condizione che due lati 'si accostino perfettamente'? In altre parole, le figure che avete costruito durante l'incontro precedente, hanno tutte le forme possibili?"

Commento: lo scopo è quello di individuare tutti i tipi di poligoni convessi che rispettano la consegna. Ovviamente la risposta è sei: si è infatti in presenza di tre coppie di figure, ciascuna ottenuta accostando i due triangoli-base rispettivamente lungo cateto minore, cateto maggiore o ipotenusa, in modo che siano direttamente o inversamente congruenti (Figura 6).

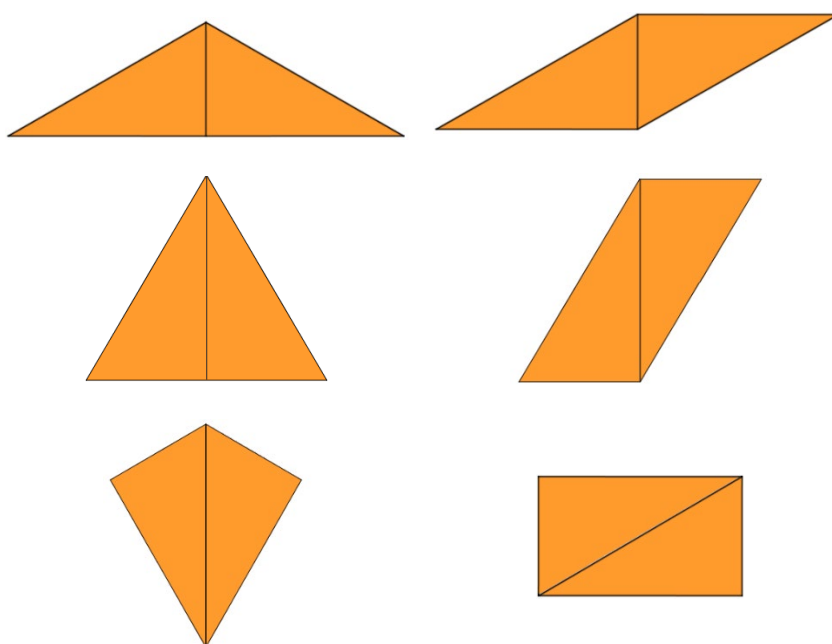


Figura 6
Le sei configurazioni
possibili.

Analisi dei risultati: In classe, il lavoro ha preso le mosse dall'analisi dei protocolli e dalla loro classificazione effettuata durante la lezione precedente. Ci si è ben presto resi conto del fatto che la consegna richiede un'organizzazione sistematica dei casi possibili, che gli allievi non erano in grado di elaborare autonomamente. Si è allora suggerita l'osservazione delle due sagome centrali di **Figura 6**, mettendo in evidenza che esse sono state ottenute accostando "gli stessi lati, ma in modo diverso". Si è proposto di procedere in modo analogo nel caso del triangolo isoscele e del deltoide. La richiesta ha promosso quell'operazione di ribaltamento di un triangolo-base di cui si è parlato nella premessa; anche per molti allievi di scuola elementare, sebbene avessero almeno quattro anni in più rispetto a quelli della scuola dell'infanzia, il ribaltamento è risultato non spontaneo e talvolta difficile da realizzare. Per facilitare il compito, si è fornito un ulteriore suggerimento: "lasciare nella stessa posizione il triangolo-base di sinistra ed operare su quello di destra". In effetti, questa è la logica con cui è stata organizzata la **Figura 6**. Solo attraverso il dialogo tra pari e tra allievi e docenti, dopo una vivace discussione in classe, si è pervenuti ad individuare tutti e sei i tipi di figure costruibili in base alla consegna.

5.4 Consegna n° 4: costruiamo un poster e posizioniamo le etichette

Nell'incontro successivo sono stati presentati agli allievi due poster di formato A3, preparati precedentemente, che mostravano le sagome di **Figura 6**. Si è anche predisposta una scatola contenente delle etichette con le seguenti diciture: TRIANGOLO SCALENO, TRIANGOLO ISOSCELE, TRIANGOLO EQUILATERO, PARALLELOGRAMMA, RETTANGOLO, DELTOIDE, TRAPEZIO, ROMBO, QUADRATO. Si è spiegato che le etichette dovevano essere collocate opportunamente sui poster e si è proceduto a estrarle a caso. La seguente figura (**Figura 7**) mostra il risultato finale dell'attività.

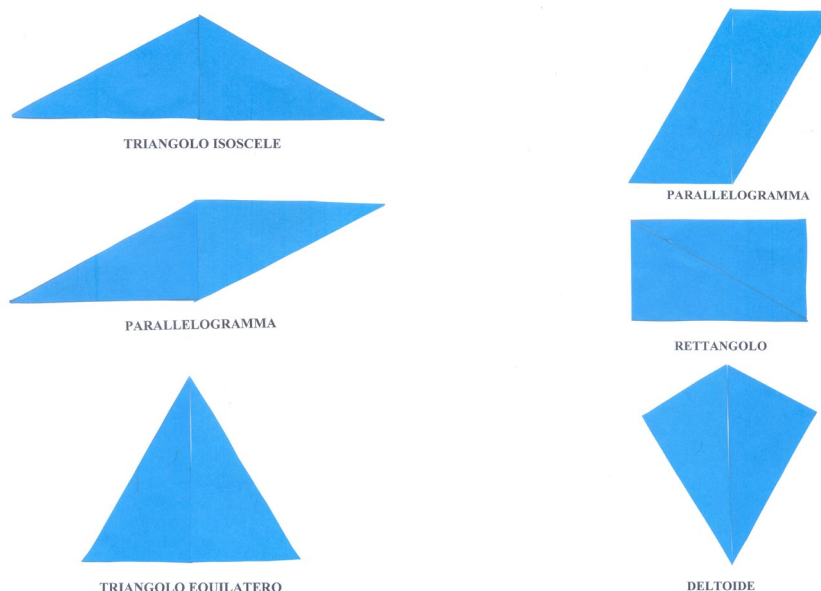


Figura 7
I poster contenenti
le figure costruite rispet-
tando la consegna.

Commento: si propone il passaggio inverso rispetto a quello effettuato durante l'attività descritta in 5.2.1. Non si tratta infatti di denominare figure, ma di 'scoprire forme' a cui assegnare nomi, associando una etichetta a ciascuna figura. Le sagome nei poster sono sei, mentre le etichette presentano nove nomi diversi: questo fa nascere l'esigenza di costruire altre figure a cui associare le etichette rimanenti.

Analisi dei risultati: la prima etichetta estratta dalla scatola è stata 'PARALLELOGRAMMA'. È stato necessario riprendere il suo significato; in particolare, un bambino, ricordando le osservazioni fatte nella lezione precedente, l'ha descritta così: "È una figura che ha due lati paralleli in un verso e altri due paralleli nell'altro verso". Non si tratta certo di una definizione tradizionale, di quelle che compaiono nei libri di testo, ma è un primo passo verso una definizione vera e propria. Ulteriori precisazioni sono state rimandate al prosieguo dell'attività. Dopo aver osservato che nei poster i parallelogrammi sono due, una etichetta PARALLELOGRAMMA è stata incollata sotto la seconda figura ed un'altra sotto alla quarta (Figura 7).

Successivamente si sono posizionate le etichette 'TRIANGOLO ISOSCELE' (i bambini hanno detto subito: "è il primo") e 'TRIANGOLO EQUILATERO' ("il terzo"). Qualcuno ha espresso dubbi sul fatto che quest'ultimo triangolo fosse equilatero ("non c'è, dobbiamo mettere da parte l'etichetta"): in effetti, dovendo stimare solo "ad occhio", la perplessità è lecita. Anche questo è uno spunto da riprendere per promuovere il passaggio da visualizzazione iconica a non iconica (Duval, 2005).

L'estrazione successiva ha riguardato l'etichetta 'QUADRATO'. Un bambino, indicando il secondo poster, ha risposto subito "È l'ultimo!", ma è seguito un coro di "No!". Questo episodio ha fornito lo spunto per parlare delle proprietà del quadrato (secondo gli allievi, "Il quadrato ha i lati paralleli e tutti uguali" e "Il sesto non ha nessuno dei due") e per ricordare la parola 'deltoide', introdotta precedentemente. L'etichetta 'DELTOIDE' è stata così incollata sotto la sesta sagoma, mentre quella con la scritta 'QUADRATO' è stata messa da parte. Si è poi proceduto con l'estrazione dell'etichetta 'RETTANGOLO', prontamente incollata. A quel punto i poster erano completati e sono stati appesi ad una parete dell'aula. Nel sacchetto rimanevano le etichette 'TRIANGOLO SCALENO', 'QUADRATO', 'ROMBO' e 'TRAPEZIO'.

L'insegnante ha poi chiesto di riportare sul quaderno i risultati dell'attività, copiando i poster. Poiché il 'quaderno di matematica' era a quadretti, si è posto il problema della rappresentazione dei triangoli-base che per le loro proprietà geometriche non possono avere tutti e tre i vertici nei 'nodi' della quadrettatura. Si è allora scelto di far disegnare triangoli rettangoli diversi da quelli manipolati, con cateti di 3 e 4 'lati di quadretti', in modo che l'ipotenusa avesse una lunghezza rappresentata da un numero intero, in questo caso il 5 (si è dunque fatto ricorso alla terna pitagorica 3, 4, 5). Ecco due fotografie di quaderni (Figura 8).

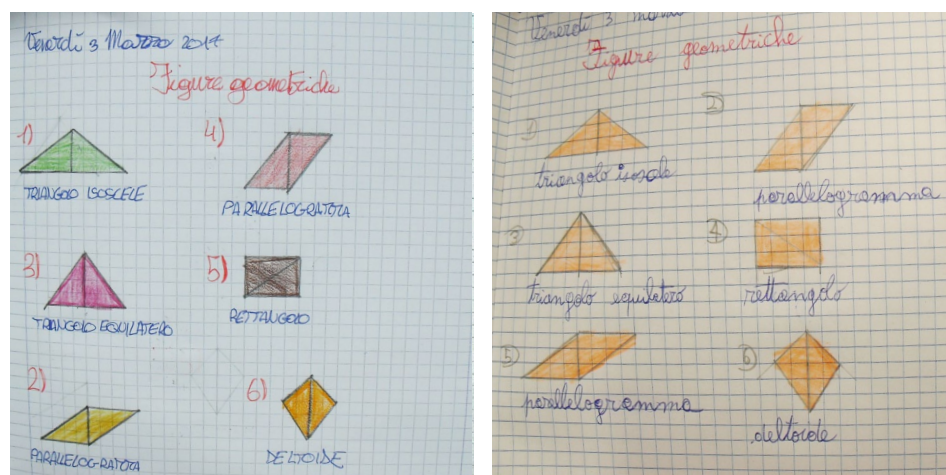


Figura 8
I quaderni.

Non si ottiene ovviamente una riproduzione in scala delle figure del poster, ma i disegni sono comunque accettabili, visti gli scopi dell'attività. Ripensandoci, sarebbe stato meglio fornire a ciascun bambino una coppia di triangoli-base e, dopo averli appoggiati opportunamente su di un foglio bianco, far disegnare i contorni delle sagome ottenute. In questo modo si sarebbero disegnate forme con le stesse caratteristiche di quelle dei poster, passando così dal disegno di oggetti bidimensionali (2D) a quello di lati (1D) e vertici (0D), come suggerito da Duval (2005).

5.5 Consegna n° 5: ricerca delle figure simmetriche

Si propone un'osservazione delle sagome in termini di simmetria, tramite la seguente consegna:

"Tra le sei figure dei poster, ci sono figure simmetriche (nel senso che hanno assi di simmetria)? Se sì, quali?"

Commento: in classe si era già parlato di 'simmetria nel caso dei triangoli', basandosi sulla piegatura che fa combaciare una parte con l'altra. In precedenza, avendo ravvisato l'importanza della manipolazione e della piegatura, erano state preparate numerose sagome di carta con le sei forme in oggetto, alcune congruenti a quelle del poster, ma anche altre di varie dimensioni, per esempio rettangoli, parallelogrammi di misure tali da poter essere manipolati più facilmente di quelli del poster (descritti dai bambini come "troppo stretti e lunghi") ecc. Le sagome di carta sono state distribuite tra gli allievi, con l'intento di consentire loro di manipolare, oltre che di osservare le figure sui poster, per poter rispondere alla domanda posta.

Analisi dei risultati: Inizialmente si è osservata la ricerca dell'asse di simmetria come 'piega che divide a metà la figura'. Nel nostro caso, i lati accostati dei triangoli-base possono aver indotto in errore, un bambino ha infatti descritto l'asse di simmetria come "la fessura tra i lati". Ne abbiamo approfittato per discutere le seguenti affermazioni: "Se una retta taglia a metà una figura, allora è un asse di simmetria" e "Se una retta è un asse di simmetria allora divide in due parti uguali una figura": la prima è falsa, mentre la seconda è vera ed è l'enunciato di un teorema. Un'altra misconcezione è emersa relativamente alla natura dell'asse di simmetria. In particolare, nel caso del triangolo isoscele l'asse di simmetria è stato descritto da un allievo come "l'altezza del triangolo":³ innanzitutto di altezza in un triangolo non ce n'è solo una, quella che solitamente viene osservata, inoltre, quando si parla di 'asse' ci si riferisce ad una retta, ma quello che i bambini vedono e descrivono è la piegatura, cioè un segmento. L'espedito a cui si è fatto ricorso è stato quello di distinguere la piega che porta una parte del triangolo sull'altra (che poteva rappresentare un'altezza), dalla piega del foglio bianco su cui il triangolo è incollato (asse), chiedendo, come spesso si fa, di immaginare che essa proseguiva al di là dei bordi del foglio. Anche in questo caso, è stato necessario riprendere l'argomento in un altro momento per parlare di questi concetti.

3

3. L'allievo si riferisce qui alla cosiddetta 'altezza relativa alla base', di cui si parla tradizionalmente. Ricordiamo che in un triangolo le altezze sono tre, ciascuna delle quali è relativa ad un lato.

L'attività di piegatura delle sagome di carta è stata fondamentale per giungere all'individuazione di simmetrie nelle figure che ne possiedono ed ha posto il 'problema del parallelogramma'. In un primo tempo, in base alla 'somiglianza' con il rettangolo, alcuni allievi hanno cercato di piegarlo lungo le mediane (segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti), ma hanno ben presto rinunciato. A quel punto è stato introdotto il "centro di simmetria" concludendo che "un parallelogramma non ha assi di simmetria, ma ha un centro di simmetria".

5.6 Consegna n° 6: costruiamo nuove figure

Ci si interroga sulla possibilità di costruire altri quadrilateri, usando i triangoli-base.

"La volta scorsa, nella scatola sono rimaste le etichette 'TRIANGOLO SCALENO', 'QUADRATO', 'ROMBO' e 'TRAPEZIO'. Queste figure si potranno costruire con i nostri triangoli-base?"

Commento: l'obiettivo è quello di allargare l'orizzonte sulla 'famiglia dei quadrilateri' e di completare la casistica (anche relativamente alla 'famiglia dei triangoli').

Analisi dei risultati: Una bambina ha risposto che "un quadrato si può fare con 4 triangoli". I compagni, cogliendo il suo suggerimento, hanno lavorato in coppia, cimentandosi con la manipolazione di quattro triangoli-base. Alcuni risultati sono documentati dai protocolli riprodotti in Figura 9.

Su 10 protocolli, si sono ottenuti 6 rombi (Figura 9a), un solo trapezio (Figura 9b) (le due bambine che l'hanno costruito, essendo state le uniche a farlo, ne erano molto fiere), due rettangoli (Figura 9c) e anche una figura pentagonale (Figura 9d), che i bambini hanno proposto di chiamare "ventaglio". Questo ha consentito di precisare che in geometria solo alcune 'figure notevoli' hanno un nome, ma la maggior parte delle figure no. Si osservi che tutti e quattro i tipi di sagome costruite hanno assi di simmetria, forse per le caratteristiche della consegna, ma probabilmente anche per motivi di carattere culturale (Weyl, 1962).

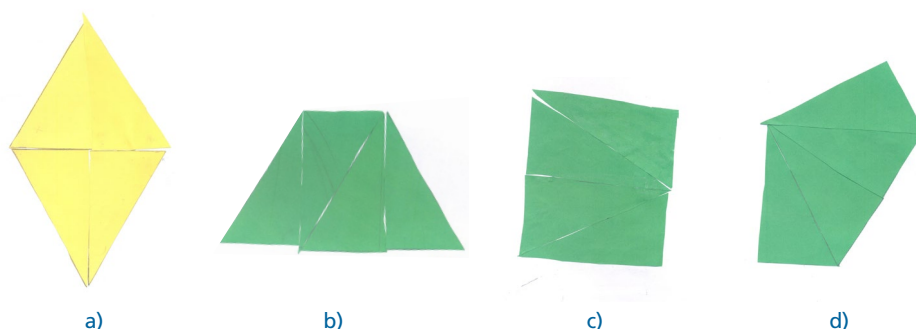


Figura 9
Costruzione di altre figure:
alcuni esempi.

A questo punto rimanevano due etichette: 'TRIANGOLO SCALENO' e 'QUADRATO'. Per realizzare un TRIANGOLO SCALENO due bambini hanno pensato bene di prendere un solo triangolo-base ("C'abbiamo messo un po' perché abbiamo provato altre forme") e hanno usato il righello per verificare che lo è, dicendo: "ha un lato lungo, uno molto corto e questo qui è il medio" (in riferimento rispettivamente a ipotenusa, cateto minore e cateto maggiore). In seguito avremmo sfruttato questa nomenclatura (paragrafo 5.8).

Precisiamo che la **Figura 9c** è stata costruita nel tentativo di ottenere un quadrato da una coppia di bambini, che hanno affermato: “è un quadrato, l’abbiamo anche misurato, è di 10 cm da tutti e due i lati”; dunque, per perseguire il loro intento, hanno ‘forzato le misure’ (in realtà i lati misurano all’incirca 10 cm e 8,7 cm). In effetti la **Figura 9c** non ricorda i ‘soliti’ rettangoli con lati di misure decisamente diverse, qui le lunghezze dei lati non differiscono di molto. Il problema sarà ripreso più avanti (paragrafo 5.8). Durante la discussione in classe, un bambino commenta così: “Ci hanno imbrogliato gli angoli retti! Questa figura ha tutti gli angoli retti come il quadrato, ma per essere un quadrato dovrebbe avere anche tutti i lati uguali”. In questo modo comincia a realizzarsi quella osservazione delle proprietà delle figure che fa passare dal livello visuale a quello descrittivo (van Hiele, 1986); inoltre il quadrato comincia ad essere visto come particolare rettangolo. Un episodio analogo si è verificato relativamente al rombo (**Figura 9a**), che è stato descritto dai bambini prima come un “parallelogramma”, poi come “parallelogramma speciale perché è equilatero, mentre quelli dei poster (**Figura 7**) hanno due lati uguali e due lati uguali” (si intende far riferimento alle coppie di lati opposti uguali). Infine è stato detto che “un rombo non è un quadrato perché deve anche avere tutti gli angoli retti, mentre nel rombo due sono ottusi e due acuti”. Il riconoscimento di analogie e differenze è un primo passo verso l’individuazione di proprietà e la classificazione, dunque verso il ‘livello razionale’ di van Hiele (1986).

Di fatto, con i triangoli-base non si può costruire un quadrato, per ragioni di carattere teorico. Solo dopo aver consegnato coppie di triangoli rettangoli isosceli, il ‘problema impossibile’ ha avuto soluzione (**Figura 11 b**). Un’osservazione di carattere didattico: si è scelto di cambiare colore per il nuovo tipo di triangolo (con angoli di 90° , 45° e 45°), in modo tale da evidenziare la differenza rispetto ai triangoli-base usati in precedenza. Come si vede nelle figure seguenti, alcuni bambini hanno usato i ‘nuovi’ triangoli rettangoli isosceli per costruire un triangolo isoscele (seconda e unica altra possibilità con quel materiale), ma ... non c’erano più etichette da incollare! Al termine dell’attività sono stati costruiti due nuovi poster (**Figura 10**).

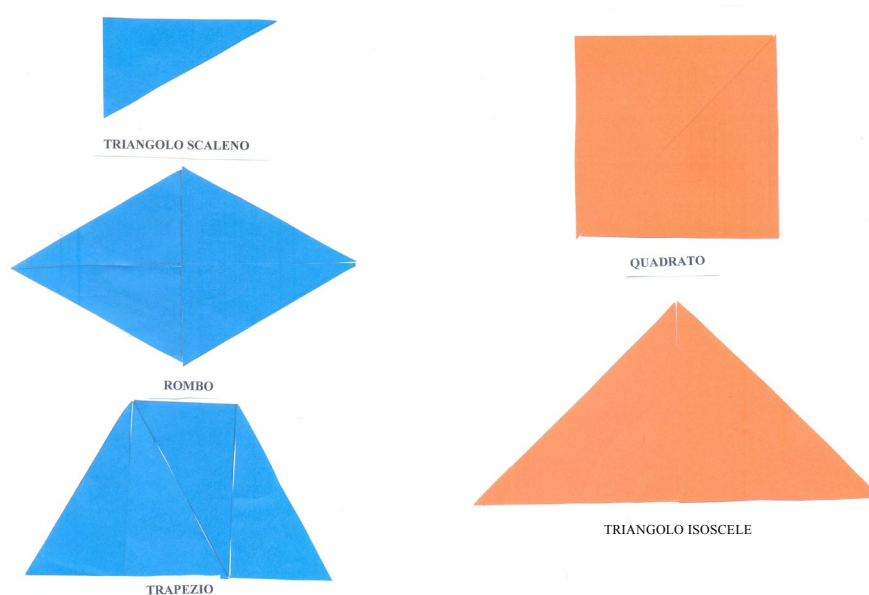


Figura 10
Costruiamo
due nuovi poster.

5.7 Consegna n° 7: confrontiamo le aree

A distanza di circa un mese, sono stati ripresi i poster di **Figura 7** ed è stato presentato in classe un nuovo quesito:

“Osserva le figure dei primi due poster: ce n’è qualcuna più grande?”

Commento: La domanda è posta in modo volutamente ambiguo e fuorviante, mediante l’uso dell’aggettivo ‘grande’. Un primo obiettivo è quello di far comprendere che la forma non determina l’area di una figura e di mettere in guardia rispetto all’influenza della forma e alle suggestioni di carattere percettivo. Si vuole inoltre pervenire all’osservazione dell’equestensione delle sagome, motivata dal fatto che tutte e sei sono state costruite accostando coppie di triangoli ‘tutti uguali fra di loro’ (o meglio ‘triangoli congruenti’).

Il problema del rapporto tra forma e area è stato studiato a fondo da Chamorro (2002, p. 63):

«A nostro giudizio, la componente dominante della nozione di superficie⁴ è, di fatto, la forma: è impossibile concepire una superficie senza la forma. Quando gli allievi identificano una superficie, lo fanno in primo luogo attraverso la forma, ecco perché qualsiasi cambiamento in essa comporta l’idea che si sia ottenuta una superficie differente che non conserva alcuna relazione con la prima, per cui, se il cambiamento della forma è stato rilevante, l’allievo non riconosce la conservazione della superficie».

4

La stessa autrice individua un vero e proprio ostacolo didattico nell’uso esclusivo di superfici disegnate ed evidenzia nella presentazione di superfici ritagliate una variabile didattica (Brousseau, 1994) fondamentale. Nel nostro caso, questo problema dovrebbe essere superato, poiché le sagome sono state costruite attraverso manipolazioni dei triangoli-base. L’attività svolta suggerisce anzi un metodo per confrontare le aree, quello basato sulla ‘scomposizione in parti uguali’.

Analisi dei risultati: Come previsto, in un primo tempo gli allievi hanno cercato di individuare la ‘figura più grande’ usando solo la vista e la loro idea personale di ‘più grande’. Alcuni hanno scelto il triangolo isoscele (probabilmente privilegiando la larghezza), altri il deltoide (badando invece all’altezza), altri ancora il triangolo equilatero. Sicuramente la prima e immediata reazione alla domanda posta è stata dettata dalla percezione che, come la *teoria della Gestalt* documenta (Arnheim, 1962), svolge un ruolo fondamentale nel vedere le figure. Tuttavia, è stato sufficiente che, dopo le prime risposte, si chiedesse: “Ma vi fate imbrogliare così facilmente?”, perché gli allievi capissero che la domanda era ingannevole, dato che grande è un termine generico che può significare vari aspetti e, dopo una breve riflessione, riconoscessero l’equestensione delle sei sagome. Una discussione finale ha permesso di fare chiarezza sull’uso ambiguo di locuzioni come ‘più grande’ e sull’importanza di usare espressioni come ‘... ha la stessa area di ...’ oppure ‘... sono equestese’. Nel caso specifico delle sagome di **Figura 6**, si è concluso dicendo che esse sono equestese.

4. Chamorro utilizza in questa citazione il termine superficie come sinonimo di area.

5.8 Consegna n° 8: confrontiamo i perimetri

Il quesito successivo è relativo al confronto dei perimetri delle sei sagome contenute nei primi due poster (Figura 7):

"Ci sono figure che hanno contorni della stessa lunghezza? Rispondi senza usare il righello".

Commento: l'intento è quello di far confrontare i contorni senza misurare, tenendo conto delle caratteristiche dei triangoli che compongono le sagome, allo scopo di comunicare che due contorni possono essere confrontati in vari modi, non necessariamente calcolandone la lunghezza. Si vuole anche cogliere l'occasione per lavorare sulla distinzione tra il concetto di perimetro e quello di area. Secondo Duval (2005), sarebbe proprio la visualizzazione iconica delle figure a provocare confusione tra i due concetti, in quanto l'osservazione globale delle forme non porta ad osservarne i contorni e le relative proprietà.

Analisi dei risultati: i bambini hanno subito pensato al perimetro, inteso come misura del contorno e, di conseguenza, avrebbero voluto ricorrere al righello. Per raggiungere il nostro intento è stato necessario portare l'attenzione sul confronto delle lunghezze dei lati dei 'triangoli-base', che avevano tanto manipolato in precedenza. La consegna ha promosso un'investigazione visiva dei lati dei triangoli (da 2D a 1D, nella notazione di Duval): riprendendo le locuzioni usate da una coppia di bambini (paragrafo 5.6) i cateti sono stati chiamati rispettivamente 'lato corto' e 'lato medio', mentre l'ipotenusa è stata denominata 'lato lungo'. L'osservazione dei contorni e la loro descrizione 'a parole' non hanno tuttavia prodotto i risultati attesi. Si è allora proposto di organizzare tramite una tabella il 'calcolo' delle lunghezze dei contorni.

La **Tabella 1** mostra il risultato finale. Si deve precisare che in un primo tempo è stata completata solo la seconda colonna, percorrendo con un dito il contorno di ciascuna sagoma e scrivendo di volta in volta quanto osservato. Il passaggio alla terza colonna, ha sviluppato una sorta di pre-algebra consistente in semplici addizioni e passaggi di calcolo letterale. I dati ottenuti nella terza colonna, completata successivamente, hanno reso evidente che le sagome sono a due a due isoperimetriche. I bambini hanno poi argomentato sul confronto arrivando a spiegare perché $2l+2m$ è maggiore di $2l+2c$ che a sua volta è maggiore di $2m+2c$. In questo modo, hanno potuto apprezzare i vantaggi del 'linguaggio delle lettere' rispetto a quello verbale. Si sarebbe potuta aggiungere una quarta colonna, dopo aver osservato che c è la metà di l in quanto "ogni triangolino è la metà di un triangolo equilatero"; abbiamo preferito evitarlo poiché la soluzione del problema posto era già stata individuata (volendo, si sarebbe potuta sfruttare questa occasione per fare ancora un po' di semplice calcolo letterale).

Figura 1	$l+l+m+m$	$2l+2m$
Figura 2	$l+m+l+m$	$2l+2m$
Figura 3	$l+l+c+c$	$2l+2c$
Figura 4	$l+c+l+c$	$2l+2c$
Figura 5	$c+m+c+m$	$2m+2c$
Figura 6	$c+c+m+m$	$2m+2c$

Tabella 1
Confronto di perimetri
usando un po' di calcolo
letterale.

A questo punto, ho proposto di riprendere il problema posto dalla **Figura 9c**: “Per capire se è un rettangolo o un quadrato senza usare il righello, possiamo usare le lettere”. I lati del quadrilatero misurano rispettivamente $c + c = 2c$ e m , saranno uguali? I bambini sono pervenuti alla risposta solo attraverso la manipolazione ed il confronto diretto dei lati della sagoma (dal punto di vista teorico si sa che è $l = 2c$ e che $l \neq m$). Successivamente hanno verificato le loro congetture anche usando il righello.

5.9 Consegna n° 9: ragioniamo sugli angoli

Anche questa consegna si riferisce ai primi due poster (**Figura 7**).

“Utilizzando il goniometro, misurate gli angoli acuti di ciascun triangolo-base. Stabilite poi le misure degli angoli delle sei figure”.

Commento: Gli allievi hanno usato in precedenza il goniometro e sanno già che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180° . L’obiettivo è di condurre a scoprire che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è 360° .

Analisi dei risultati: I bambini hanno eseguito la consegna e verificato che gli angoli acuti di ciascun triangolo-base misurano 30° e 60° . Iniziando poi dal triangolo isoscele, che si trova in alto a sinistra nel poster (**Figura 7**), hanno scritto $30^\circ + (60^\circ + 60^\circ) + 30^\circ = 180^\circ$; a questo punto, ricordando quanto appreso in precedenza, hanno detto subito che anche nel triangolo equilatero, che si trova nel poster (**Figura 7**), la somma degli angoli è 180° e si sono concentrati sui quattro quadrilateri rimanenti. Hanno iniziato dalla seconda figura, un parallelogramma con angoli di $30^\circ + (60^\circ + 90^\circ) + 30^\circ + (60^\circ + 90^\circ) = 360^\circ$; questa attività ha consentito anche di osservare che gli angoli opposti hanno la stessa ampiezza. Procedimenti analoghi sono stati seguiti per l’altro parallelogramma e per il deltoide, mentre nel caso del rettangolo gli allievi hanno calcolato $90^\circ \times 4 = 360^\circ$, probabilmente usando una proprietà già osservata in precedenza. Alla fine dell’attività hanno notato che la somma delle ampiezze degli angoli di tutti e quattro i quadrilateri è 360° e si sono accorti del fatto che avrebbero potuto rispondere più velocemente calcolando $180^\circ \times 2$ in quanto ciascun quadrilatero è formato da due triangoli-base. L’insegnante ha posto allora il seguente problema: “E per un quadrilatero qualunque quale sarà la somma delle ampiezze degli angoli?”. Si è arrivati velocemente alla generalizzazione e all’estensione del risultato precedente, dopo aver usato l’espedito di ‘dividere ciascun quadrilatero in due triangoli’, mediante il tracciamento di una diagonale. In questo modo, si è enunciato il teorema (che verrà ripreso nella scuola media-superiore): “In ogni quadrilatero la somma delle ampiezze degli angoli interni è un angolo giro”.

5.10 Consegna n° 10: L’indovinello

È stato proposto ai bambini il seguente indovinello:

“Io penso ad un quadrilatero e voi dovete indovinare qual è, facendo domande”.

Commento: si vuole stimolare a ragionare in termini di proprietà, per esempio, sono

possibili domande come le seguenti: “ha tutti i lati uguali?” oppure “ha angoli retti?”. Una volta tanto è il bambino che fa domande, e non l’insegnante!

Analisi dei risultati: a parte domande non accettabili, anche se lecite in base alla consegna, del tipo “è un rettangolo?”, si è osservato che gli allievi, motivati dall’idea dell’indovinello, hanno partecipato con entusiasmo. In un secondo tempo il gioco è stato condotto a turno da un bambino, che ha preso il ruolo del docente. Significativo il fatto che un allievo abbia scelto come oggetto dell’indovinello un ‘quadrilatero qualunque’, in modo tale da poter rispondere negativamente a tutte le domande poste dai compagni, che alla fine, hanno compreso il ‘trucco’ usato dal loro interlocutore.

6 Conclusioni

In uno scritto di Clara Bozzolo sui quadrilateri, pubblicato nel 1999 e ancora nel 2017 in occasione della sua scomparsa, tra le possibili “Aperture”, intese come sviluppi dell’attività, si legge: «I rettangoli si trasformano: scomposizione di un rettangolo e ricomposizione delle parti ottenute per formare altri poligoni» (Bozzolo, 2017, p. 41). Il lavoro qui descritto rientra proprio in quest’ottica. In ogni caso, mi ha stupito questa coincidenza tra la scomposizione di un rettangolo nei due triangoli individuati da una sua diagonale, da cui ha preso spunto l’itinerario descritto, e la frase di Clara. Per questo motivo ho deciso di dedicarle questo articolo, oltre che per l’argomento comune ‘quadrilateri’.

L’itinerario fornisce un esempio del ruolo dell’osservazione didattica come strumento di ricerca e come strumento per l’insegnante. L’osservazione delle lezioni, sia durante il loro svolgimento sia mediante la successiva visione ed analisi dei filmati realizzati in classe, ha consentito di evidenziare atteggiamenti, errori, misconcezioni, difficoltà, problemi inerenti agli argomenti trattati, in funzione dei quali programmare le attività da proporre. Come già detto inizialmente, non si sono formulate ipotesi di ricerca, ma si è semplicemente cercato di fornire un esempio di “ingegneria didattica”.⁵ Si tratta di un’esperienza didattica realizzata con oggetti molto particolari (i triangoli-base), ma sia la descrizione dell’itinerario in sé, che i commenti e le analisi che l’accompagnano possono mostrare utili spunti agli insegnanti. Precisiamo che le attività proposte sono state pensate di volta in volta, in base al comportamento degli studenti ed ai risultati e alle osservazioni emerse in ciascuna sessione di lavoro. Il percorso didattico può essere proposto gradualmente a partire dalla classe terza, così com’è, oppure può essere preso come esempio da cui trarre spunti per attività analoghe.

A proposito dell’insegnamento della geometria nella scuola elementare, Chamorro (2006, p. 415) evidenzia due “poli opposti”, entrambi criticabili: da una parte un insegnamento basato su espressioni linguistiche che spesso risultano prive di signifi-

5. Per ‘ingegneria didattica’ si intende «... un insieme di sequenze d’aula concepite, organizzate e articolate nel tempo in forma coerente dal maestro-ingegnere per costruire un progetto d’apprendimento adibito ad una certa popolazione di allievi» (Douady, 1993).

cato per l'allievo, dall'altra un lavoro con materiali che rischia di ridursi a "bricolage" e che si ferma alle soglie della geometria. L'itinerario qui presentato, pur partendo dalla manipolazione di oggetti concreti, va al di là del bricolage e consente di sviluppare gradualmente sia il ragionamento geometrico, che il relativo linguaggio. È un percorso atipico, che porta alla costruzione di particolari figure geometriche, tuttavia la generalizzazione a 'quadrilateri qualunque' si potrà realizzare in seguito, ripartendo dal lavoro fatto, probabilmente senza particolari difficoltà.

Il lavoro in classe è andato quindi ben al di là della manipolazione e costruzione di figure. In altre parole, non abbiamo dimenticato quanto sostenuto da Duval (2016, p. 219), in base al quale per «comprendere e fare geometria» non occorre imparare a costruire figure, ma a «decostruire dimensionalmente le forme». Nel nostro caso, la manipolazione è un punto di partenza irrinunciabile, che fornisce l'opportunità di riflessioni ed argomentazioni di carattere geometrico, ma che viene gradualmente superato con il passaggio da aspetti pratici e visivi a considerazioni di carattere teorico. Nel prossimo anno scolastico si cercherà di procedere oltre, attuando il passaggio dalla 'costruzione' alla 'decostruzione', con individuazione di vertici, lati e proprietà geometriche, come già descritto.

Ringraziamenti.

Si ringraziano l'insegnante Giovanna Barantani e gli allievi della classe quarta A per aver consentito la sperimentazione dell'itinerario e per la collaborazione.

Un 'grazie' particolare al dott. Igino Aschieri per i preziosi consigli e suggerimenti.

Bibliografia

- Arnheim, R. (1962). *Arte e percezione visiva*. Milano: Feltrinelli.
- Bozzolo, C. (2017). I quadrilateri. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 40A(1), 39-70.
- Brousseau, G. (1994). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2013). Le triangle-acrobate: un jeu géométrique sur les isométries en CE1. Intérêts et limites. *Grand N*, 91, Grenoble: Irem, 4370.
- Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2014a). Analisi di un gioco sulle isometrie nella scuola primaria: il triangolo-acrobata, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 37A(1), 7-33.
- Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2014b). Preconcetti sulle isometrie nella scuola primaria. Un case-study condotto in Francia e in Italia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 37A(2), 107-132.
- Chamorro, M. C. (2002). Le difficoltà nell'insegnamento/apprendimento delle grandezze nella scuola di base (parte seconda), *La Matematica e la sua Didattica*, Bologna: Pitagora, 58-77.
- Chamorro, M. C. (2006). Matematica per la mente e le mani: l'insegnamento della geometria nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, 20, 3, 401-424.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouwn (Ed.) *Handbook of research on Mathematics Teaching*, N.C.T. M.-Macmillan, 420-464.

- Douady, R. (1993). *L'ingénierie didactique*. Cahier de DIDIREM n°19, Paris: Université de Paris VII.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.
- Duval, R. (2000). Costruire, vedere e ragionare in geometria: quali rapporti?, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 41, 9-24.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. In M. Iori (Ed.). *La matematica e la sua Didattica. Mathematics and Mathematics education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore*. Bologna: Pitagora, 213-220.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.
- Grenier, D., & Laborde, C. (1988). Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale. In G. Vergnaud, G. Brousseau, & M. Hulin (Eds.). *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres Mai 1987*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 65-86.
- Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortunity, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for research in mathematics education*, 22(3), 237-251.
- Hejny, M. (2004). Understanding and structure. *Proceedings CERME3, WG 3*, 1-9.
- Kandinsky, W. (1968). *Punto, linea, superficie*. Milano: Adelphi.
- Klein, F. (1889). Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti. *Annali di Matematica Pura e Applicata*, 17, 307-343.
- MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile in http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot-7734_12 (consultato il 10.11.2017).
- Platone (1989). *Tutte le opere*. (a cura di G. Pugliese Carratelli). Firenze: Sansone.
- Swoboda, E., & Vighi, P. (2016). *Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries*. New York Springer [ICME13 Topics Surveys Series]
- Rovelli, C. (2017). *L'ordine del tempo*. Milano: Adelphi.
- Van Hiele, P. (1986). *Structures and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.
- Vighi, P., & Marchini, C. (2014). Geometrical speaking of children: the slanting giraffe's neck. In Pytlak M. (Ed.) *Communication in the mathematical classroom*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, University of Rzeszow (Poland), 108-122.
- Vighi, P. (2015). Language for learning: spontaneous vs specific geometrical language. In J.

Novotna, & H. Moraova (Eds.) *Developing mathematical language and reasoning*, Prague (Czech Republic).

Vighi, P. (2016a). Arte e pensiero geometrico nella scuola dell'infanzia. In M. Iori (Ed.) *La matematica e la sua Didattica. Mathematics and Mathematics education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore*. Bologna: Pitagora, 513-523. Disponibile in <https://rsddm.dm.unibo.it> (consultato il 10.11.2017).

Vighi, P. (2016b). From speaking to learning of parallelism and perpendicularity relations. *Proceedings Cerme 9*, 341-349. HAL archives-ouvertes.fr, Id: hal-01288529v2, Id: hal-01288529v2.

Vighi, P. (in corso di stampa). Abstract paintings, objects and actions: how to promote geometrical understanding. *Proceedings Mathematical Transgressions II*, Krakow.

Vighi, P. (in corso di stampa). From abstract art to geometrical understanding. *ICME-13 Proceedings*.

Villani, V. (2006). *Cominciamo dal punto*. Bologna: Pitagora Editrice.

Weyl, H. (1962). *La simmetria*. Milano: Feltrinelli.

Sitografia

<http://www.wassilykandinsky.net/work-637.php>

Autore / Paola Vighi

già Dipartimento di Matematica e Informatica – Università di Parma, Italia

paola.vighi@unipr.it