

Riflessioni sulle risposte degli studenti ad alcune domande delle prove INVALSI

Reflections on students' answers to some items of INVALSI tests

Domingo Paola

Liceo "G. Bruno" – Albenga (Savona), Italia

Sunto / Si propongono alcune riflessioni di carattere didattico sulle risposte degli studenti del secondo anno di scuola secondaria di secondo grado ad alcune domande delle prove INVALSI italiane. Queste riflessioni riguardano anche pratiche piuttosto diffuse nell'insegnamento-apprendimento della matematica, in particolare nel segmento relativo al completamento dell'obbligo scolastico. Dall'analisi dei risultati delle risposte degli studenti ad alcune domande delle prove emerge che esistono diverse criticità legate a conoscenze e competenze fondamentali per una formazione matematica significativa. Si avanza l'ipotesi che una possibile causa delle difficoltà dimostrate dagli studenti nel rispondere ad alcune domande delle prove INVALSI sia di carattere didattico e dipenda da un'eccessiva attenzione prestata agli aspetti finalizzati all'acquisizione di padronanza nel calcolo simbolico, con un addestramento fine a se stesso e non consapevole.

Parole chiave: variazioni percentuali; stime numeriche; pendenza di funzioni lineari; formulare; controesempio; soluzione di un'equazione.

Abstract / This article presents some didactic reflections on the answers of 9th grade students (second year in upper secondary school) to INVALSI tests in Italy. These reflections also concern common practices in Maths teaching, particularly regarding compulsory education. The analysis of the answers given by students to some items indeed reveals several criticalities related to basic knowledge and skills for meaningful Maths education. The paper suggests that a possible cause of students difficulties in answering to some INVALSI test items is of an educational nature and depends on an excessive attention devoted to mastery in symbolic calculation, leading to unaware training of merely mechanical skills.

Keywords: percentage variations; numerical estimates; slope of a linear function; formulate; counter-examples; solution to an equation.

1 Premessa

Il dibattito sull'utilità e sui rischi dei test standardizzati per misurare gli apprendimenti è molto acceso in Italia, probabilmente a causa della mancanza di una tradizione consolidata sulle problematiche della valutazione e della difficoltà ad accettare come ineludibile la richiesta che il sistema di formazione e istruzione renda conto dei suoi punti di forza e di debolezza al Paese. In alcuni casi, luoghi e momenti, la reazione alle prove INVALSI è stata addirittura di rifiuto e boicottaggio da parte di studenti, genitori, docenti.

Si ritiene che molte delle perplessità relative allo svolgimento dei test INVALSI potrebbero essere superate o discusse in modo più meditato e produttivo per il bene del sistema di formazione se si tenessero ben presenti alcuni limiti che i test standardizzati

inevitabilmente hanno (Sbaragli & Franchini, 2014). Conoscere meglio e più a fondo i punti di criticità molto probabilmente aiuterebbe a utilizzare in modo più proficuo le informazioni che le prove INVALSI possono fornire.

Sul notiziario dell'Unione Matematica Italiana del giugno 2017 (UMI, 2017), nella risposta che la Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) ha dato alla lettera della professoressa Rossella Latempa che, fra altre questioni, chiedeva un confronto sul rapporto tra personalizzazione dell'insegnamento e standardizzazione della valutazione, entrambe richieste dalla riforma, si legge:

«Con una metafora (...) potremmo dire che le analisi mediche sono opportune per avere alcune informazioni, standardizzate, sul nostro stato di salute: queste informazioni, però, devono essere lette e analizzate da uno specialista che deve interpretarle alla luce di molte altre valutazioni, per nulla standardizzate, ma fondate su un'anamnesi che raccolga dirette informazioni sul paziente. Senza questa fase, soggettiva (ma non arbitraria) non è possibile effettuare una diagnosi significativa e accurata. Fuor di metafora, le informazioni fornite dalle valutazioni nazionali standardizzate sono utili per dare una visione d'insieme del sistema di formazione e istruzione, mentre costituiscono solo una piccola parte di quelle informazioni che devono essere acquisite per valutare uno studente e che solo l'insegnante può raccogliere, prendendo in considerazione aspetti che appartengono alla sfera cognitiva, ma anche a quella metacognitiva e non cognitiva. Le prove standardizzate hanno inevitabili limiti nella valutazione di alcune competenze: per esempio, non possono in alcun modo valutare il conseguimento di traguardi di competenza fondamentali per una buona formazione matematica come:

- è in grado di produrre dimostrazioni all'interno delle teorie matematiche apprese;
- è in grado di assumere un punto di vista storico-critico per leggere e interpretare i rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico che sono stati oggetto di indagine e studio negli anni di scuola media superiore;
- ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Attualmente non sono in grado di valutare il conseguimento del traguardo "Utilizza in modo pertinente gli strumenti tecnologici disponibili per effettuare esplorazioni, osservazioni e testare congetture" e difettano anche nel valutare la competenza di risolvere problemi di una certa complessità o di costruire modelli matematici che non siano elementari.

Le prove standardizzate hanno quindi limiti che devono essere tenuti ben presenti, sia per quanto riguarda le competenze e le conoscenze che possono rilevare, sia per quel che riguarda le informazioni che possono essere ottenute solo attraverso altre forme di interazione con l'alunno».

(UMI, 2017, p. 10)

La CIIM evidenzia con estrema precisione che il rapporto tra personalizzazione dell'insegnamento e standardizzazione della valutazione può essere risolto solo comprendendo che si tratta di due processi complementari, da portare avanti con equilibrio e sistematicità. La standardizzazione consente comparazioni altrimenti difficilmente

realizzabili, per esempio sui risultati di studenti appartenenti a contesti socio-economico-culturali simili, oppure riflessioni sul valore aggiunto del contesto scolastico. La personalizzazione dell'insegnamento e la conseguente personalizzazione della valutazione che, ricordiamolo, non ha solo la funzione di classificare in livelli la preparazione degli studenti, ma anche quella di promuovere competenze, è invece fondamentale per raggiungere gli obiettivi formativi prefissati.

In questo articolo si propongono alcune riflessioni di carattere didattico sulle risposte degli studenti ad alcune domande delle prove INVALSI. Considerazioni simili a quelle proposte, condotte dall'insegnante con i propri studenti, possono favorire l'apprendimento e aiutare l'azione di insegnamento (vedi Botta & Sbaragli, 2016).

2 Esempi di uso didattico delle prove INVALSI

In questo articolo si farà riferimento alle prove INVALSI di matematica del grado 10, cioè del secondo anno di scuola media superiore,¹ ma è chiaro che un lavoro simile può essere condotto per tutti gli altri gradi scolari.

Per considerazioni più ampie e generali, anche se meno dettagliate dell'uso didattico delle prove INVALSI, si rimanda alle guide che ogni anno l'istituto pubblica sul suo sito (INVALSI, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017).

Si sono classificati per temi gli esempi di domande che verranno discusse: si tratta di nodi cruciali dal punto di vista della formazione matematica di uno studente che completa l'obbligo scolastico e quindi particolarmente adatti a essere presentati agli studenti per favorire una riflessione sulla loro preparazione.

2.1 Variazioni percentuali

Le difficoltà degli studenti a operare con le percentuali sono note a tutti gli insegnanti. I test INVALSI confermano la presenza di queste difficoltà, in particolare per quel che riguarda il calcolo di variazioni percentuali. Si riportano, come esempi paradigmatici, due domande con risposta a scelta multipla somministrate in anni differenti. Non sono le uniche: in certi anni, in uno stesso fascicolo, è comparsa più di una domanda sulle variazioni percentuali. Il numero di risposte corrette a domande su questo argomento è in genere inferiore al 25% e solo nell'undicesima domanda del fascicolo 1 del 2016 raggiunge il 35%. Il numero di risposte mancanti è in genere elevato solo nel caso in cui la domanda preveda una risposta aperta. Le percentuali di risposte corrette, errate e mancanti o non valide che si riportano nella **Tabella 1**, tratte dall'archivio prove INVALSI (INVALSI, n.d.),² sono relative al campione italiano globale, cioè senza distinzione tra diverse tipologie di istituti (licei, istituti tecnici e istituti professionali), per la domanda 14 del 2012 (Figura 1).

1. Allievi di 15-16 anni.

2. L'archivio prove Invalsi è consultabile alla pagina web <http://www.gestinv.it>.

La seguente tabella riporta il numero di occupati in Italia in ciascuno degli anni dal 1995 al 2005.

Anni	Occupati (in migliaia)
1995	20240
1996	20326
1997	20384
1998	20591
1999	20847
2000	21210
2001	21604
2002	21913
2003	22241
2004	22404
2005	22563

a. Quale tra le seguenti espressioni dà come risultato l'aumento percentuale del numero di occupati nel 2001 rispetto al numero di occupati nel 2000?

- A. ☐ $\frac{21604}{21210} \times 100$
- B. ☐ $\frac{394}{21210} \times 100$
- C. ☐ $\frac{21210}{21604} \times 100$
- D. ☐ $\frac{394}{21604} \times 100$

Figura 1
Domanda 14 della prova
del 2012.

Percentuale di risposte corrette	20,8%
Percentuale di risposte errate	71,7%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	7,5%

Tabella 1
Percentuali relative al tipo
di risposte alla Domanda
14 della prova del 2012.

Si osservi che agli studenti non veniva chiesto di calcolare un aumento percentuale, ma solo di scegliere, tra quattro espressioni, quella che consente di calcolare l'aumento percentuale richiesto. Uno studente che abbia ben compreso che cosa si intenda con aumento percentuale ha a disposizione almeno due procedure:

- calcolare l'incremento assoluto del numero di occupati come differenza tra il dato del 2001 e quello del 2000; calcolare il rapporto tra l'incremento assoluto determinato e il dato del 2000; moltiplicare il risultato per 100;
- calcolare il rapporto tra il dato del 2001 e quello del 2000; moltiplicare per 100 questo rapporto e sottrarre 100 al risultato ottenuto.

Dovrebbe essere abbastanza immediato osservare che le quattro espressioni proposte sembrano derivare da una procedura di tipo a); è inoltre possibile scartare immediatamente le opzioni A e C che al numeratore non presentano la differenza tra il dato del 2001 e quello del 2000. Ci si potrebbe attendere che le risposte quindi si concentrino sulle scelte B (corretta) e D (errata, perché prende come base di calcolo il dato del 2001 e non quello del 2000).

Invece la distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni è abbastanza uniforme (Tabella 2; non si riporta più il dato delle risposte mancanti o non valide):

Tabella 2
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 14 della prova del 2012.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
29,3%	20,8%	23,8%	18,6%

Ciò può suggerire che molti studenti non abbiano idea di che cosa si intenda con aumento percentuale e di come possa essere calcolato.

La successiva domanda, proposta nella prova INVALSI del 2013 (Figura 2), conferma in parte questa supposizione, dato che le risposte corrette sono circa il 20%: un'analisi più puntuale su come si distribuiscono le risposte errate (Tabella 3 e Tabella 4) consente però di avanzare un'ipotesi su possibili accorgimenti didattici che possano essere attuati per aiutare gli studenti ad affrontare le difficoltà relative al calcolo di variazioni percentuali.

Considera un quadrato di lato a .

a. Se si aumenta il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b . Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di b ?

- A. ☐ $20 a$
 B. ☐ $1,20 a$
 C. ☐ $a + 20$
 D. ☐ $a + 0,20$

b. Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a ?

- A. ☐ Del 20%
 B. ☐ Del 40%
 C. ☐ Del 44%
 D. ☐ Del 120%

Figura 2
Domanda 7 della prova del 2013.

Item a.

Percentuale di risposte corrette	19,8%
Percentuale di risposte errate	75,5%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	4,7%

Tabella 3
Percentuali relative al tipo di risposte all'item a della Domanda 7 della prova del 2013.

Item b.

Percentuale di risposte corrette	14,9%
Percentuale di risposte errate	79,0%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	6,1%

Tabella 4
Percentuali relative al tipo di risposte all'item b della Domanda 7 della prova del 2013.

Possiamo limitare l'analisi alle risposte fornite all'item a. È indubbio, infatti, che chi non sa rispondere all'item a difficilmente potrà fornire una risposta corretta all'item b, che richiede di determinare come un incremento percentuale sul lato di un quadrato influisce sull'incremento percentuale dell'area del quadrato stesso.

La distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni dell'item a è la seguente (Tabella 5):

Tabella 5
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte all'item a della Domanda 7 della prova del 2013.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
10,7%	19,8%	18,8%	46%

È interessante osservare che l'opzione D è quella che raccoglie il maggior numero di consensi (quasi il 50%). Si tratta ovviamente di una risposta errata, ma gli studenti che hanno scelto questa opzione hanno compreso di dover aggiungere al valore iniziale l'incremento e che la notazione 20% indica lo stesso numero indicato dalla rappresentazione decimale 0,20.

Il calcolo con le percentuali e in particolare la determinazione di variazioni percentuali comporta difficoltà per gli studenti, che molto probabilmente nascono già al momento di definire e comprendere che cosa si intenda con rapporto percentuale. In uno dei libri di testo a mio avviso più validi che siano mai stati scritti per il biennio della scuola media superiore, il rapporto percentuale viene così introdotto:

«Siano a e b due grandezze omogenee, e sia k il loro rapporto; il numero $100k$ si chiama il loro rapporto percentuale. Se con K si denota il numero $100k$, allora il rapporto $\frac{a}{b}$ si può scrivere nella forma $\frac{a}{b} = \frac{K}{100}$. Com'è noto in luogo del rapporto $\frac{K}{100}$ si scrive anche $K\%$ (e si legge " K per cento"), onde si ha $\frac{a}{b} = K\%$ ».

(Villani & Spotorno, 1979, p. 25)

È normale che uno studente si trovi in difficoltà a orientarsi in un concetto così complesso, a meno che non si pianifichi un intervento didattico sistematico e ricco di esempi significativi. Invece, spesso, ci si accontenta che gli studenti calcolino percentuali ricorrendo alle proporzioni e alla notazione additiva, tecniche e rappresentazioni poco adatte ad affrontare problemi di calcolo di variazioni percentuali.

La preferenza degli studenti per la notazione additiva si evidenzia in modo molto chiaro nel 46% di preferenze per l'opzione D.

Se il valore a aumenta del 20%, vuol dire che passa da a al valore $a + 0,20a$.

Si ritiene che per aiutare gli studenti ad affrontare le difficoltà che incontrano con le variazioni percentuali sia molto importante investire tempo e risorse didattiche per passare dalla notazione additiva, $a \rightarrow a + 0,20a$, a quella moltiplicativa, $a \rightarrow 1,20a$. L'equivalenza delle due notazioni può essere dimostrata con la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Il passaggio alla notazione moltiplicativa risulta assai utile per risolvere problemi di calcolo di percentuali composte, come quello di montanti in regime di interesse composto o dell'inflazione su più anni.

2.2 Ordini di grandezza e stime

Valutare ordini di grandezza e stimare con almeno una o due cifre significative una grandezza sono competenze fondamentali per una partecipazione informata, consapevole e critica alla cittadinanza, visto che molte informazioni sono ormai ricche di dati espressi in forma quantitativa e che, per prendere decisioni meditate, il cittadino deve sapere valutare la sensatezza e l'affidabilità delle informazioni che riceve.

Le prove INVALSI suggeriscono che molti studenti abbiano diverse difficoltà nel valutare la plausibilità di dati quantitativi o nello stimare ordini di grandezza.

Come per le variazioni percentuali, vengono considerate solo due delle varie domande che sono state somministrate dal 2011 a oggi. La prima viene presentata nella Figura 3, mentre le relative percentuali di risposta nella Tabella 6.

Le dimensioni di una piazza rettangolare di una grande città sono circa $620 \text{ m} \times 120 \text{ m}$. Le stime comparse sui giornali sul numero di partecipanti a una manifestazione che ha riempito la piazza variano da 100 000 a oltre 1 000 000.

a. Sapendo che diverse fotografie scattate durante la manifestazione evidenziano una densità di circa 4 persone al metro quadro, che cosa si può concludere circa l'effettivo numero dei partecipanti?

- ☐ A. Le stime dei giornali sono tutte errate perché dalle informazioni disponibili i partecipanti non potevano essere più di 20 000.
- ☐ B. Una stima ragionevole è di circa 300 000 partecipanti.
- ☐ C. Ha ragione chi ha parlato di più di un milione di partecipanti.
- ☐ D. La piazza non può contenere molte persone più di uno stadio, quindi c'erano meno di 150 000 partecipanti.

b. Mostra i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.

.....

.....

Figura 3
Domanda 23 della prova del 2011.

Tabella 6
Percentuali relative al tipo di risposte all'item a della Domanda 23 della prova del 2011.

Percentuale di risposte corrette	46,3%
Percentuale di risposte errate	36%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	17,7%

La distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni è la seguente (Tabella 7 e 8):

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
18,9%	46,3%	7,1%	10%

Tabella 7
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte all'item a della Domanda 23 della prova del 2011.

Tabella 8
Percentuali relative al tipo di risposte all'item b della Domanda 23 della prova del 2011.

Percentuale di risposte corrette	34,8%
Percentuale di risposte errate	21,6%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	43,6%

I risultati possono sembrare a una prima analisi non del tutto sconcertanti: in fondo quasi il 50% degli studenti sceglie l'opzione corretta per quel che riguarda l'item a. Se però consideriamo la distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni e il dato relativo alle risposte non date o non valide, osserviamo che circa il 42% di studenti sceglie risposte errate per un ordine di grandezza o non risponde.

Per quel che riguarda l'item b aumentano considerevolmente le risposte non date, ma questa è una caratteristica tipica (e preoccupante) degli studenti italiani del secondo anno della scuola media superiore, già rilevata anche nelle indagini internazionali: gli studenti dimostrano una fortissima resistenza a fornire anche semplici e brevi descrizioni o giustificazioni delle strategie utilizzate per rispondere a una domanda.

Una domanda molto simile alla 6 del 2013 qui di seguito riportata con i suoi risultati (Figura 4 e Tabella 9) era stata proposta anche nella prova del 2011 e aveva ottenuto percentuali di risposte simili.

Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa m_p è all'incirca $2 \cdot 10^{-27}$ kg, e un elettrone la cui massa m_e è all'incirca $9 \cdot 10^{-31}$ kg.
Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè $m_p + m_e$)?

- A. ☐ $2 \cdot 10^{-27}$ kg
B. ☐ $11 \cdot 10^{-31}$ kg
C. ☐ $11 \cdot 10^{-58}$ kg
D. ☐ $18 \cdot 10^{-58}$ kg

Figura 4
Domanda 6 della prova del 2013.

Percentuale di risposte corrette	18%
Percentuale di risposte errate	76%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	6%

Tabella 9
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 6 della prova del 2013.

La distribuzione delle risposte relativamente alle quattro opzioni è la seguente (Tabella 10):

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
18%	9,4%	33,3%	33,3%

Tabella 10
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 6 della prova del 2013.

In questo caso il contesto, ben poco familiare per gli studenti del secondo anno di scuola media superiore, non aiuta. Non si tratta solo del fatto che le misure si riferiscono a oggetti che non sempre sono studiati in questo segmento scolastico: la difficoltà maggiore è probabilmente dovuta a misure che risultano del tutto avulse dall'esperienza. Non è facile dare un senso a potenze di 10 con esponenti negativi così grandi in valore assoluto. Se si osserva la distribuzione delle risposte rispetto alle opzioni possibili, emerge però chiaramente che la grande maggioranza degli studenti (67% circa) sceglie le risposte meno plausibili, cioè le opzioni C e D, in cui i dati disponibili vengono trattati senza alcuna logica: per determinare l'ordine di grandezza di una somma di masse, nell'opzione C si addizionano i fattori che moltiplicano le potenze di 10 e si moltiplicano le potenze di 10; nell'opzione D si moltiplicano sia i fattori sia le potenze di 10. Probabile che emergano anche difficoltà con le proprietà delle potenze, anche se ciò è piuttosto singolare, visto che le proprietà delle potenze sono uno degli argomenti a cui in genere si dedica più attenzione nella prassi didattica: basti pensare al numero di esercizi presenti sui libri di testo più adottati, sia nel calcolo numerico, sia in quello letterale.

2.3 Pendenza

Il concetto di pendenza di una funzione lineare è uno dei concetti più importanti dell'intero percorso scolastico nella scuola media superiore. Uno studente che non lo possieda completamente al termine del primo biennio avrà ben pochi strumenti concettuali per comprendere il concetto di pendenza locale di una funzione su cui si basa l'intero percorso di analisi matematica.

Nonostante ciò, le varie domande che riguardano il concetto di pendenza di una funzione lineare sono tra quelle che comportano maggiori difficoltà per gli studenti, come ad esempio quella mostrata nella Figura 5 (percentuale di risposte nella Tabella 11).

Considera la funzione definita da: $y = 3x + 1$.

a. Quale dei seguenti grafici può rappresentare questa funzione?

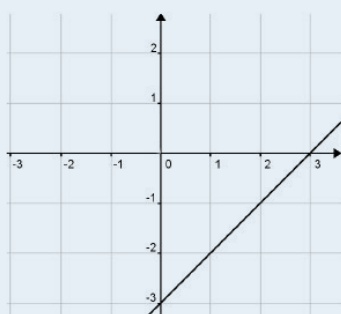


Grafico 1

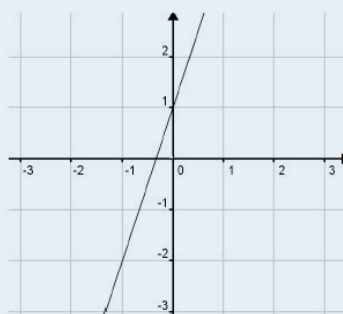


Grafico 2

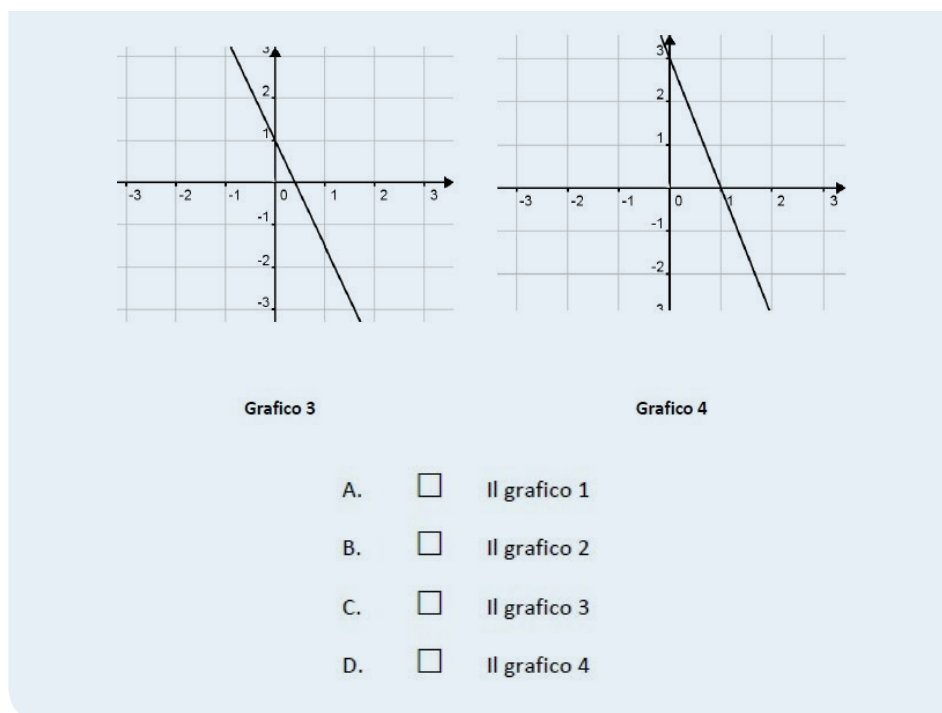


Figura 5
Domanda 8 (item a) della
prova del 2013.

Tabella 11
Percentuali relative
al tipo di risposte alla
Domanda 8 (item a)
della prova del 2013.

Percentuale di risposte corrette	31,1%
Percentuale di risposte errate	60,6%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	8,3%

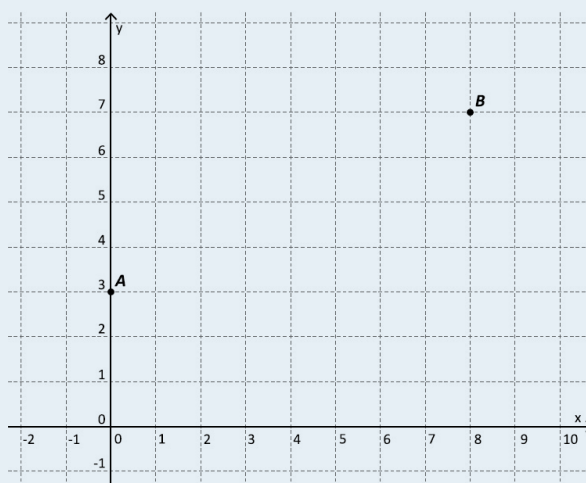
La distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni è la seguente (Tabella 12):

Tabella 12
Percentuali relative alla
distribuzione delle risposte
alla Domanda 8 (item a)
della prova del 2013.

Opzione A (Grafico 1)	Opzione B (Grafico 2)	Opzione C (Grafico 3)	Opzione D (Grafico 4)
8,2%	31,1%	12,5%	39,9%

Due delle opzioni possibili (C e D) potevano essere immediatamente scartate perché propongono grafici di funzioni lineari decrescenti, che quindi hanno pendenza negativa, a differenza della retta descritta dall'equazione fornita. Anche il Grafico 1 (opzione A) poteva essere scartato immediatamente da chi possiede il concetto di pendenza come rapporto di variazioni: appare evidente, infatti, che la pendenza della retta rappresentata nel Grafico 1 è uguale a 1. È interessante notare che l'opzione più scelta (anche rispetto alla risposta corretta, la B) è stata la D, in cui l'intersezione della retta con l'asse x ha ascissa 1 e quella con l'asse y ha ordinata 3, cioè gli stessi numeri che compaiono nell'equazione della retta. Ciò suggerisce che molti studenti non abbiano la minima idea di quello che è il concetto di pendenza di una funzione lineare o che comunque non riescano a metterlo in relazione con un'espressione algebrica. Questa ipotesi è corroborata dalla seconda domanda che propongo sullo stesso argomento (Figura 6 e Tabella 13).

Sul piano cartesiano in figura sono assegnati i punti *A* e *B* di coordinate intere.



Il coefficiente angolare della retta *AB* è

Figura 6
Domanda 17, fascicolo 1,
della prova del 2016.

Tabella 13
Percentuali relative al tipo
di risposte alla Domanda
17, fascicolo 1, della prova
del 2016.

Percentuale di risposte corrette	18,4%
Percentuale di risposte errate	40%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	41,6%

In questo caso non vi sono distrattori che possano catturare l'attenzione degli studenti più deboli e il calcolo è particolarmente semplice; le espressioni $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{2}$, 0,5 e altre scritture equivalenti (anche espresse in forma percentuale) sono tutte accettate. In questo caso è possibile affermare che risponde correttamente chi conosce come si calcola la pendenza di un segmento e risponde in modo errato o non risponde chi invece non lo sa. Tra l'altro in questa domanda è stata utilizzata l'espressione "coefficiente angolare", con cui in genere si parla della pendenza di una funzione lineare, anche se non sempre a proposito (viene utilizzato anche in sistemi non monometrici e talvolta addirittura quando le variabili sull'asse *x* e *y* non rappresentano grandezze omogenee). Più dell'80% degli studenti che completano la scuola dell'obbligo non è in grado di calcolare la pendenza di un segmento.

2.4 Mettere in formula

Una delle competenze matematiche più importanti dal punto di vista culturale e per il prosieguo degli studi è quella di padroneggiare diversi registri di rappresentazione e di effettuare conversioni dall'uno all'altro, cioè saper passare da un registro di rappresentazione a un altro (Duval, 1993; D'Amore, 1998). In particolare, è importante che uno studente sappia dare significato al linguaggio simbolico e che, per esempio, sia capace di descrivere con una formula semplici modelli lineari.

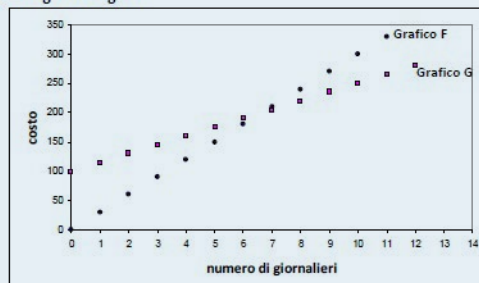
Nelle prove INVALSI sono state proposte diverse domande che richiedono di scrivere una formula che rappresenti una determinata situazione in cui esiste una relazione lineare tra due variabili. Se ne presentano qui due (Figure 7 e 8; Tabelle da 14 a 22) che sono particolarmente indicative delle difficoltà in genere incontrate da molti studenti.

Mario va in vacanza in una località sciistica. Per usufruire degli impianti di risalita (seggiovie, funivie ...), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale.

Offerta A: costo iniziale fisso di 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita).

Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.

Osserva la seguente figura.



a. Quale, fra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A?

- A. ☐ Il grafico F
- B. ☐ Il grafico G

b. Completa la seguente tabella, relativa all'offerta B.

Numero di giorni in cui Mario usufruisce degli impianti di risalita	Costo in euro
1	30
2	
3	

c. Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?

Risposta:

d. Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B, che esprimano il costo c al variare del numero di giornali g .

Offerta A: $c = \dots\dots\dots$

Offerta B: $c = \dots\dots\dots$

e. A partire da quale numero di giornali il costo dell'offerta B diventa una volta e mezza il costo dell'offerta A?

Risposta:

Figura 7
Domanda 2
della prova del 2012.

Tabella 14
Percentuali relative al tipo
di risposte alla Domanda 2 (item a) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	82,4%
Percentuale di risposte errate	16,1%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	1,5%

Tabella 15
Percentuali relative al tipo
di risposte alla Domanda 2 (item b) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	85,6%
Percentuale di risposte errate	10%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	4,4%

Tabella 16

Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item c) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	83,1%
Percentuale di risposte errate	4,4%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	12,5%

Tabella 17

Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item d) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	47,8%
Percentuale di risposte errate	19,4%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	32,8%

Tabella 18

Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 2 (item e) della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	12,9%
Percentuale di risposte errate	41%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	46,1%

I primi due item (a, b) richiedevano di utilizzare competenze relative alla lettura di semplici grafici o tabelle, che gli studenti già possiedono dalla scuola secondaria di primo grado (scuola media). All'item è possibile rispondere aiutandosi con i grafici disponibili oppure eseguendo semplici calcoli numerici a partire dal testo. Come si può vedere dalle risposte fornite, più dell'80% degli studenti risponde correttamente ai primi tre item e la percentuale delle risposte mancate o non valide sono in tutti i casi molto contenute. Questo dimostra, tra l'altro, che gli studenti sono motivati a rispondere agli item.

Gli stessi studenti incontrano però forti difficoltà nell'affrontare l'item d, in cui si chiede di esprimere con una semplicissima formula quello che hanno dimostrato di aver compreso rispondendo ai primi tre item: si tratta solo di scrivere $c = 100 + 15g$ e $c = 30g$ (naturalmente si accettavano come corrette anche le risposte che utilizzavano un nome di variabile diverso da g o anche scritture del tipo $y = 30x$ e $y = 100 + 15x$, eventualmente espresse a parole e non in simboli).

La percentuale di risposte corrette crolla dai valori che superano l'80%, corrispondenti ai primi tre item, al 47,8% per il quarto item e la percentuale di risposte mancate o non date sale a circa il 33%.

La considerazione didattica che può essere fatta è che gli studenti incontrino notevoli difficoltà nel momento in cui si passi dalla richiesta di *calcolare* a quella di *scrivere formule*. Sembra di poter avanzare l'ipotesi che gli studenti che completano l'obbligo scolastico abbiano notevoli difficoltà a utilizzare il linguaggio simbolico per esprimere significati, anche quando la situazione da modellizzare sia chiara per loro. Questa ipotesi aiuterebbe a chiarire le varie difficoltà che la maggior parte degli studenti incontrano nel primo anno del secondo biennio di scuola media superiore quando affrontano il percorso di geometria analitica. Infatti in questo caso è opportuno, se non addirittura necessario, dare significato geometrico alle formule e, viceversa, saper esprimere con formule situazioni geometriche.

È piuttosto singolare che gli studenti incontrino difficoltà a utilizzare il linguaggio simbolico per esprimere semplici relazioni lineari dopo tutti gli esercizi che vengono svolti sulla trasformazione di formule nel percorso di algebra a cui in genere si dedica la maggior parte del percorso del primo biennio di scuola media superiore. In realtà

si sospetta che l'addestramento per acquisire padronanza nel calcolo simbolico rischi di essere non solo inutile, ma addirittura controproducente per la formazione matematica di molti studenti. Si ritornerà nelle conclusioni su questo punto assai delicato. Inutile prendere in considerazione l'item e, per rispondere al quale è necessario manipolare la formula richiesta nell'item precedente: ovvio che in questo caso il numero di risposte corrette si riduca ancora di più.

Considerazioni analoghe sono suggerite dalle risposte alla seguente domanda (Figura 8).

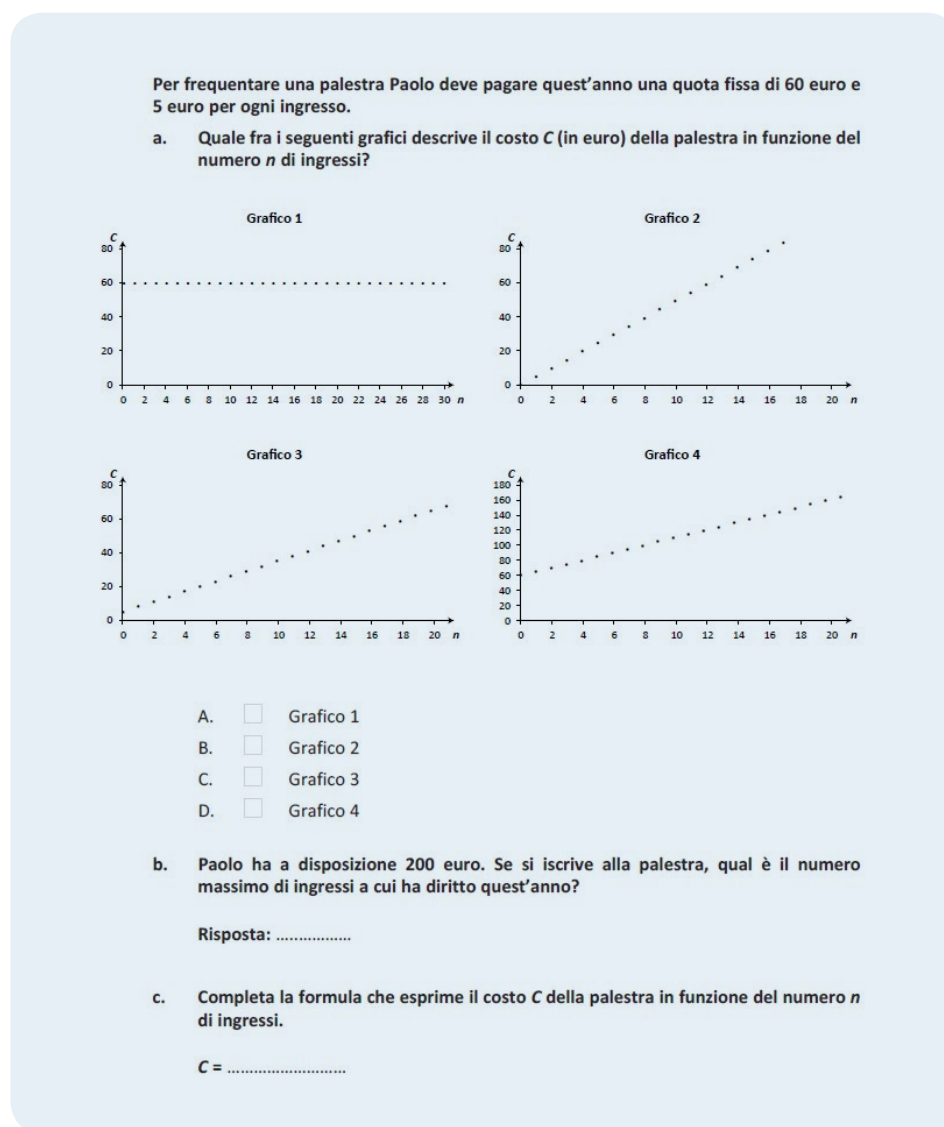


Figura 8
Domanda 4, fascicolo 1,
della prova 2014.

Tabella 19
Percentuali relative al tipo
di risposte all'item a
della Domanda 4, fascico-
lo 1, della prova 2014.

Percentuale di risposte corrette	61,2%
Percentuale di risposte errate	36,7%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	2,1%

La distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni è la seguente:

Tabella 20
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte all'item a della Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
16,8%	10,6%	9,3%	61,2%

Tabella 21
Percentuali relative al tipo di risposte all'item b della Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Percentuale di risposte corrette	58,1%
Percentuale di risposte errate	34,4%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	7,5%

Tabella 22
Percentuali relative al tipo di risposte all'item c della Domanda 4, fascicolo 1, della prova 2014.

Percentuale di risposte corrette	32%
Percentuale di risposte errate	36,3%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	31,7%

In questo caso il numero di risposte corrette ai primi due item è inferiore alle risposte corrette fornite ai primi tre item della Domanda 2 del 2012 (Figura 7). Ciò si potrebbe spiegare con due considerazioni:

- Il primo item è a scelta multipla e i distrattori tendono a catturare l'attenzione di alcuni studenti, diminuendo la percentuale di risposte corrette;
- l'item b richiede un piccolo calcolo e non solo la lettura di grafici o tabelle come nel caso dei primi tre item della Domanda 2 della prova del 2012.

In ogni caso all'incirca il 60% degli studenti risponde correttamente ai primi due item, mentre il numero di risposte corrette all'item c diminuisce fortemente, arrivando al 32%. Eppure si chiedeva solo di scrivere l'espressione $60 + 5n$ (accettando anche l'uso di nomi di variabili diversi da n).

2.5 Logica del controesempio

La conoscenza matematica si esprime attraverso un linguaggio che richiede un uso di connettivi e quantificatori che non sempre è in completo accordo con quello praticato in contesti non matematici. Alla fine della scuola dell'obbligo, se lo studente desidera procedere nell'acquisizione di una formazione matematica sempre più solida e in grado di consentire la prosecuzione negli studi scientifici, è necessario che abbia conseguito una buona padronanza nell'uso di connettivi e quantificatori del linguaggio matematico.

In questo paragrafo ci si limita a prendere in considerazione le difficoltà che molti studenti hanno nel dimostrare la falsità di proposizioni quantificate universalmente, anche quando riguardano contenuti che dovrebbero essere familiari agli studenti fin dalla scuola primaria (scuola elementare).

Diverse domande delle prove INVALSI suggeriscono la presenza di questa difficoltà. Si propone, come esempio paradigmatico, una domanda della prova del 2011 (Figura 9 e Tabella 25).

**Considera l'affermazione: “Per ogni numero naturale n , $2^n + 1$ è un numero primo”.
Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.**

.....

.....

.....

Figura 9
Domanda 4 della prova
del 2011.

Percentuale di risposte corrette	42,8%
Percentuale di risposte errate	18,3%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	38,9%

Tabella 23
Percentuali relative al tipo
di risposte alla Domanda 4
della prova del 2011.

L'elevato numero di risposte mancanti o non valide può essere dovuto al fatto che, come già rilevato, gli studenti italiani sembrano essere piuttosto restii a fornire giustificazioni anche semplici. In questo caso, però, veniva esplicitamente richiesto di limitarsi a mostrare un semplice controesempio. Sarebbe bastato notare che per $n = 3$ si ottiene 9 che non è un numero primo. Il fatto che solo il 43% circa risponde correttamente suggerisce che gli studenti abbiano difficoltà ad accettare la cosiddetta “logica del controesempio”, che afferma che in una proposizione quantificata universalmente è sufficiente esibire un caso che falsifichi la proposizione stessa per affermare la sua falsità.

Per esempio, è noto che di fronte alla proposizione “Tutti i numeri primi sono dispari” gli studenti preferiscano dire che l'enunciato è vero se si esclude 2, piuttosto che affermare la sua falsità. Gli studenti, in altri termini, preferiscono dire “tutta la verità”, come per esempio è richiesto in un'aula di tribunale o è opportuno nelle usuali conversazioni, e non “solo la verità”, come spesso avviene in matematica.

Si ritiene importante ribadire, però, che nel caso della Domanda 4 della prova del 2011 era esplicitamente richiesta solo la produzione di un semplice controesempio e la maggior parte degli studenti non sono riusciti a rispondere correttamente.

2.6 Soluzione di un'equazione

Il concetto di soluzione di un'equazione è uno di quelli che dovrebbero essere maggiormente trattati nel percorso dell'ultimo biennio della scuola dell'obbligo: basti pensare a quante e quali risorse vengano investite da insegnanti e studenti nella risoluzione di equazioni di primo o secondo grado o riconducibili al primo o secondo grado (ciò è spesso vero anche in quelle tipologie di scuole in cui le equazioni di secondo grado non sono previste dalle indicazioni curriculari nel primo biennio). Nonostante ciò, le prove INVALSI suggeriscono che gli studenti non abbiano idea di che cosa si intenda con *soluzione di un'equazione*. Si propone l'analisi delle risposte a tre domande (Figure 10, 11 e 12; Tabelle da 20 a 28).

L'equazione $x(x-1)=6$ ha fra le sue soluzioni

- A. ☐ $\frac{1}{6}$
 B. ☐ 3
 C. ☐ 6
 D. ☐ 7

Figura 10
Domanda 28 della prova del 2012.

Percentuale di risposte corrette	49,7%
Percentuale di risposte errate	43,5%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	6,8%

Tabella 24
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 28 della prova del 2012.

La distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni è la seguente:

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
14,6%	49,7%	20,7%	8,2%

Tabella 25
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 28 della prova del 2012.

In questo caso, per verificare che l'opzione corretta è la B basta sostituire alla x i diversi valori proposti nelle alternative. È immediato verificare che la A non può essere l'opzione corretta, perché sostituendo $\frac{1}{6}$ alla x il primo membro è il prodotto fra un numero positivo e uno negativo e non può quindi essere uguale a 6. Se, invece, si sostituisce 3 alla x si ottiene $3 \cdot (3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$ e quindi si ottiene subito, al secondo passo, la risposta corretta.

Il fatto che meno del 50% di studenti sia riuscito a rispondere correttamente fa supporre che molti studenti non abbiano idea di che cosa si intenda con *soluzione di un'equazione*, anche se magari sanno risolvere alcune tipologie di equazioni.

È data l'equazione $(2k-3)x + 1 - k = 0$, in cui x è l'incognita e k è un numero reale.

La soluzione dell'equazione è 1 per $k = \dots\dots\dots$

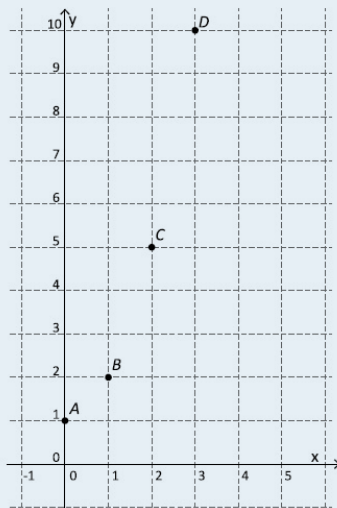
Figura 11
Domanda 17 della prova del 2014.

Percentuale di risposte corrette	31,8%
Percentuale di risposte errate	28,1%
Percentuale di risposte mancanti o non valide	40,1%

Tabella 26
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 17 della prova del 2014.

Quanto ipotizzato in precedenza viene confermato dai risultati di risposta alla domanda: il 68% circa degli studenti sbaglia o non risponde. Eppure, se si facesse riferimento al concetto di *soluzione di un'equazione*, sarebbe immediato scrivere $2k - 3 + 1 - k = 0$ da cui si ottiene $k = 2$.

Sul seguente piano cartesiano sono rappresentati i punti $A(0; 1)$, $B(1; 2)$, $C(2; 5)$, $D(3; 10)$.



Il grafico della funzione f passa per i punti A , B , C , D . Quale tra le formule seguenti individua la funzione f ?

- A. ☐ $f(x) = x^3 + 1$
 B. ☐ $f(x) = 2^x$
 C. ☐ $f(x) = -x^2 + 1$
 D. ☐ $f(x) = x^2 + 1$

Figura 12
Domanda 28, fascicolo 1, della prova del 2016.

Tabella 27
Percentuali relative al tipo di risposte alla Domanda 28, fascicolo 1, della prova del 2016.

Percentuale di risposte corrette	46%
Percentuale di risposte errate	41,7%
Percentuale di risposte mancate o non valide	12,3%

La distribuzione delle risposte sulle quattro opzioni è la seguente:

Tabella 28
Percentuali relative alla distribuzione delle risposte alla Domanda 28, fascicolo 1, della prova del 2016.

Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
18,1%	9,7%	13,9%	46%

Anche in questo caso il 54% circa degli studenti o sbaglia o non risponde; eppure, anche qui era abbastanza immediato scartare l'opzione A (se $x = 2$ si ottiene $y = 8$), l'opzione B (se $x = 2$ si ottiene $y = 4$) e l'opzione C (se $x = 2$ si ottiene $y = -3$). Quindi l'opzione corretta è la D. Anche in questo caso il possesso del concetto di

soluzione di un'equazione (qui in due variabili) avrebbe consentito di rispondere correttamente e in breve tempo.

3 Conclusioni

Le riflessioni proposte sulle risposte date dagli studenti italiani ad alcune domande delle prove INVALSI suggeriscono la presenza di diverse criticità, che riguardano conoscenze e competenze essenziali per la formazione matematica degli studenti che completano l'obbligo scolastico: percentuali e variazioni percentuali, concetto di pendenza, di soluzione di un'equazione, determinare ordini di grandezza ed effettuare stime, mettere in formula, gestire sul terreno logico-linguistico matematico l'uso dei connettivi e dei quantificatori.

Queste criticità mettono in evidenza la necessità di riequilibrare l'attenzione tra aspetti semantici e sintattici del lavoro in matematica che, nella prassi didattica, almeno se si guarda ai libri di testo più adottati nelle classi, sembra eccessivamente rivolta agli aspetti sintattici.

Non si vuole qui sostenere che la padronanza del linguaggio simbolico, la competenza di trattamento all'interno del registro simbolico siano secondarie nella formazione matematica: sembra però emergere dall'analisi delle risposte degli studenti ai test INVALSI che l'attenzione data, nella tradizionale prassi didattica, a questi aspetti non favorisca la costruzione di significato per gli oggetti di studio e l'acquisizione di competenze utili ad affrontare e risolvere quesiti anche molto elementari. Si potrebbe dire che *nonostante* le enormi risorse destinate all'acquisizione di padronanza nel calcolo simbolico il significato evapori dalle formule piuttosto che condensarsi in esse. È possibile che tutto ciò accada *soprattutto* per l'eccessiva attenzione data agli aspetti puramente sintattici, finì a se stessi.

L'addestramento fine a se stesso è uno strumento formidabile per la formazione di una buona cultura matematica quando si tratti di scelta autonoma e consapevole da parte dello studente; invece rischia di essere del tutto inutile e anzi di ostacolo al conseguimento di una buona formazione se viene semplicemente imposto dall'insegnante.

D'altra parte un grande matematico come Bruno de Finetti si era spesso espresso contro l'eccessiva attenzione della didattica tradizionale verso pratiche di addestramento finì a se stesse: erano altri tempi, ma richiamare oggi un suo intervento può ancora essere utile:

«Posso credere una cosa senza capirla: è tutta questione di addestramento! Questa frase (...) mi torna sempre in mente, come una sensazione paurosa di sconcerto, perché mi sembra esprima integralmente la fondamentale e chissà quanto eliminabile stortura che sta effettivamente, anche se non dichiaratamente, alla base di tutta l'imperversante concezione della didattica tradizionale: abituare a imparare e credere senza capire».

(de Finetti, 1965, p. 568)

Bibliografia

- Botta, E., & Sbaragli, S. (2016). Il caso dell'altezza. Un sapere fondante, *Nuova Secondaria*, 1, 112-116.
- D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli, *L'educazione matematica*, 1, 7-28.
- De Finetti, B. (1965). La matematica e il profano, *Scuola e Città*, 9-10, 566-573.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- INVALSI (2012). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in <http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/guide/2012-2SUP-GUIDA-MATEMATICA.pdf> (consultato il 15/07/2017).
- INVALSI (2013). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in http://www.invalsi.it/snv2013/documenti/strumenti/2013-II_Sec_Secondo_grado_GUIDA_MATEMATICA.pdf (consultato il 15.07.2017).
- INVALSI (2014). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/10_GUIDA_MATEMATICA.pdf (consultato il 15.07.2017).
- INVALSI (2015). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/attach/2015_GUIDA_L10_DICEMBRE.pdf (consultato il 15.07.2017).
- INVALSI (2016). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in <https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2016-GUIDA-L10.pdf> (consultato il 15.07.2017).
- INVALSI (2017). *Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda. Scuola secondaria di secondo grado*. Disponibile in <https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2017-GUIDA-L10.pdf> (consultato il 15.07.2017).
- INVALSI (n.d.), Gestinv 2.0, Archivio interattivo delle prove Invalsi. Disponibile in <http://www.gestinv.it> (consultato l'8.8.2017).
- Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Locarno: Dipartimento formazione e apprendimento.
- UMI (2017). *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, 6, 5-13.
- Villani, V., & Spotorno, B. (1979). *Idee e Metodi*, vol. 1. Firenze: La Nuova Italia.

Autore / Domingo Paola

Liceo "G. Bruno" – Albenga (Savona), Italia
domingo.paola56@gmail.com