DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 117 - 128, DOI: 10.33683/ddm.22.12.6 OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Storia di una ricerca

History of a research

Domingo Paola•, Riccardo Franchi•• e Lorenzo Ravera••
•Liceo Statale "G. Bruno" di Albenga – Italia
••studente del Liceo Statale "G. Bruno" di Albenga – Italia

✉ domingo.paola56@gmail.com, richi.franchi2004@gmail.com, lorenzoravera187@gmail.com

Sunto / L'attività didattica descritta ha avuto origine da un classico problema di calcolo combinatorio e probabilità che si sono posti due studenti di una quinta liceo scientifico, che sono anche due degli autori di questo articolo. Si descrivono i primi tentativi di risoluzione, l'uso della simulazione al computer per cercare di ottenere informazioni sulla soluzione, due diversi approcci per la ricerca di regolarità che aiutassero a risolvere il problema, la ricerca di conoscenze matematiche che aiutassero a dare un senso ai risultati delle simulazioni, il tentativo di spiegare alle compagne e ai compagni tutto il lungo e articolato processo di approccio al problema, che si configura come una vera e propria attività di ricerca.

Parole chiave: calcolo combinatorio; giustificazione; problem posing; problem solving; simulazione.

Abstract / The didactic activity described originated from a classic combinatorial and probabilistic problem that two fifth-year students of a scientific high secondary school, who are also two of the authors of this article, happened to deal with.
This paper describes the first attempts to solve the problem, as well as the use of computer simulation to try to get some information about the solution. Furthermore, it presents also two different approaches to the search for patterns that would help to solve the problem and the search for mathematical knowledge that would help to give meaning to the results provided by the simulation. The attempt to explain the other classmates the long and complex process of addressing the problem, which appears to be a real research activity, is also explained.

Keywords: combinatorial calculus; justification; problem posing; problem solving; simulation.

1 Introduzione

Quella che viene descritta in questo articolo si configura a pieno titolo come attività di problem posing e di problem solving, relativa a un problema classico del calcolo combinatorio, noto come *problema delle concordanze o dei punti fissi*. Per una sua trattazione si veda, per esempio, il testo di Baclawski et al. (1990, Capitolo 5). Due sono i principali motivi di interesse dell'attività che, sebbene riguardi un problema classico, è in ogni caso non usuale rispetto ai problemi in genere affrontati in classe:

– l'attività è nata da alcune domande che si sono autonomamente posti due studenti di una quinta liceo scientifico,[1] Lorenzo e Riccardo, che sono anche due tra gli autori di questo articolo e che erano del tutto ignari sia della formulazione, sia, a maggior ragione, della risoluzione del problema dei punti fissi;
– la motivazione a risolvere questo problema ha portato i due studenti a una vera e propria attività di ricerca matematica, che hanno poi voluto esporre alle compagne e ai compagni di classe: ciò ha consentito loro di avviare una riflessione assai interessante sui punti di forza delle strategie risolutive attivate e anche sul ruolo della scoperta e della giustificazione in matematica.

Le attività di problem solving e problem posing sono considerate centrali, già da alcune decadi, nei curricoli scolastici di diversi Paesi. Come precisa Silver (2013), negli USA, per esempio, i *Principles and Standards for School Mathematics*, pubblicati nel 2000 dal National Council of Teachers of Mathematics, affermano che il curricolo scolastico dovrebbe offrire occasioni agli studenti per formulare problemi interessanti e coinvolgenti, basati su varie situazioni che favoriscano attività di produzione di congetture e successiva validazione. Sempre Silver (2013) porta come ulteriore esempio il *National Statement on Mathematics for Australians Schools*, pubblicato nel 1991 dall'Australian Education Council, in cui si afferma che gli studenti dovrebbero essere impegnati in attività matematiche che incoraggino il problem posing, il pensiero divergente, la riflessione consapevole e critica sulle proprie conoscenze e sulle strategie intraprese per risolvere problemi. Anche in Italia l'attenzione verso il problem posing e il problem solving sta crescendo: ne sono testimonianza alcuni passi delle indicazioni nazionali curricolari dei vari livelli scolari, ma anche il progetto PP&S del MIUR[2] che ha fra i suoi proponenti l'AICA, il CNR, Confindustria, il Politecnico e l'Università di Torino.

2 Il problema e il primo approccio risolutivo

Una mattina, nella nostra classe formata da 28 studenti, si doveva stabilire l'ordine delle interrogazioni programmate per il mese successivo. Per evitare lunghe discussioni, si è deciso di stabilire l'ordine con un'estrazione casuale, senza rimpiazzo, simulata mediante un foglio di calcolo: ottenuto il risultato, ci siamo accorti che il decimo studente che avrebbe dovuto essere interrogato era proprio lo studente che si trovava nella decima posizione dell'elenco del registro di classe.
Ci siamo chiesti allora quale fosse la probabilità di questo evento, cioè che il decimo studente dell'elenco fosse il decimo a essere interrogato; la risposta è sembrata relativamente semplice: immaginiamo di estrarre, a partire dal primo studente dell'elenco, successivamente e senza rimpiazzo, bigliettini numerati da 1 a 28 per stabilire l'ordine degli interrogati. Se vogliamo che il decimo studente dell'elenco estragga il numero 10, i primi nove studenti possono estrarre qualunque numero tranne il 10

1. In Italia, il liceo scientifico è una scuola secondaria di secondo grado; quest'ultima dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e agli anni di scuola media superiore o scuole professionali nel Cantone Ticino.
2. https://miur.gov.it/progetto-pp-s

e il decimo studente deve estrarre il numero 10. Questa successione di eventi, poiché le estrazioni avvengono senza rimpiazzo, ha probabilità $\frac{27}{28}\cdot\frac{26}{27}\cdot\frac{25}{26}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{23}{24}\cdot\frac{22}{23}\cdot\frac{21}{22}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}=\frac{1}{28}$.
Molto più interessante porsi un problema maggiormente sfidante: qual è la probabilità che, considerato un elenco ordinato di numeri da 1 a 28, dopo averli mischiati a caso, si ottenga un nuovo elenco in cui sia presente almeno un numero nella stessa posizione dell'elenco iniziale?
Il problema può essere riformulato chiedendosi qual è la probabilità che, estraendo a caso fra tutte le permutazioni di 28 oggetti, se ne ottenga una che lasci fisso almeno uno degli oggetti.
Per esempio, nell'elenco di 5 numeri, 1, 2, 3, 4, 5, una permutazione che fa parte dei *casi favorevoli* è $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&2&4\end{pmatrix}$, perché lascia inalterati il primo e il terzo numero, mentre non lo è la permutazione $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$ che modifica la posizione di tutti i numeri.
Il problema è sembrato subito molto complesso per poter essere affrontato utilizzando le tecniche di calcolo combinatorio trattate in classe, che riguardavano essenzialmente il calcolo delle permutazioni di n elementi, quello delle disposizioni semplici e con ripetizione di classe k e quello delle combinazioni semplici di classe k. Per questo motivo abbiamo pensato a un primo approccio risolutivo fondato sulla simulazione. Perché, ci siamo chiesti, non provare ad avere una risposta e poi, eventualmente, provare a spiegare il *perché* della risposta fornita dalla simulazione? In fondo si tratta di un procedimento che caratterizza certi momenti delle scienze sperimentali: quando possibile, si esegue un esperimento e si cerca poi di comprendere il *perché* del risultato dell'esperimento. La simulazione consente, talvolta, di operare in questo modo anche in matematica.
Uno di noi, Lorenzo, avendo un po' di esperienza con la programmazione in Python, ha scritto il seguente programma:

```python
from random import shuffle
n = int(input("Quanti numeri? "))
m = int(input("Quanti tentativi? "))
sum = 0
list_r = []
for l in range(n):
   list_r.append(l)
for i in range(m):
   shuffle(list_r)
   for k in range(n):
       if k == list_r[k]:
           sum += 1
           break
print("La probabilità empirica è all'incirca di " + str(sum/m))
```

Il programma si basa sull'idea di ripetere diverse volte il seguente esperimento:
- creare una lista di numeri;
- permutarla casualmente;
- verificare se la permutazione mantiene almeno un elemento fisso.

Al termine di un congruo numero di esperimenti, si esegue il rapporto fra il numero delle permutazioni che mantengono almeno un elemento fisso (*casi favorevoli*) e il numero totale delle permutazioni (*casi possibili*).
All'aumentare del numero di ripetizioni dell'esperimento ci si attende, in media, una stima sempre migliore della probabilità dell'evento.
Le prime istruzioni del programma permettono all'utente di inserire il numero n di elementi da permutare e il numero m di esperimenti da realizzare. Il primo ciclo *for* consente di creare la lista di n elementi; il comando *shuffle* consente di realizzare le permutazioni degli elementi della lista. In seguito,

si controlla se vi è almeno un elemento della lista permutata che è nella stessa posizione della lista originaria; in caso positivo si aggiorna il contatore *sum*, in caso negativo, si procede con l'esperimento fino a raggiungere il valore *m* assegnato dall'utente. Alla fine, il programma esegue il rapporto $\frac{sum}{m}$ che dà, in media e al crescere di *m*, una stima della probabilità dell'evento considerato.
Si osservi che il comando *break* è utile per evitare che una permutazione, che lascia più elementi fissi, venga contata più volte: il comando, infatti, blocca la ricerca di elementi della lista permutata che si trovano nella stessa posizione della lista originaria non appena ne sia stato trovato uno.
All'aumentare del numero *m* degli esperimenti e del numero *n* degli elementi della lista il programma fornisce un numero che tende, in media, a stabilizzarsi su 0,63.
Questo è il risultato dell'esperimento, ma come essere sicuri che le cose stiano proprio in questi termini e che all'aumentare di *n* la convergenza si mantenga? Ma, soprattutto, se le cose stanno così, *perché* stanno così?
Come suggerisce Impedovo (2005), da un numero fornito da una simulazione si può essere motivati a cercare di capire perché la simulazione fornisca proprio quel risultato e arrivare, gradualmente, a considerazioni teoriche che gli studenti possono intuire e scoprire anche da soli.
Si osservi che la proposta del problema è del tutto autonoma e non è legata ad attività esplicitamente attinenti al percorso scolastico; sembra, invece, più vicina alle attività di carattere ludico e, comunque, motivate dalla ricerca di questioni sfidanti, che impegnino nella ricerca di una soluzione che non si vede immediatamente.
Uno degli obiettivi di questo articolo è anche quello di mostrare come sia possibile, in classe, cogliere spunti spontaneamente suggeriti dagli studenti per favorire attività di ricerca autonoma da parte degli studenti stessi. Naturalmente, soprattutto quando il problema è di elevata difficoltà e complessità, il coinvolgimento attivo degli altri studenti non è un obiettivo facilmente conseguibile; però, e non è poco, un'attività di questo tipo mostra che anche gli studenti possono condurre attività di risoluzione di problemi e costruzione di conoscenze matematiche indipendentemente da indicazioni specifiche del docente. È bene precisare che, nell'affrontare il problema descritto in questo articolo, i due studenti hanno lavorato del tutto autonomamente, sia in fase di proposta, sia in fase di risoluzione del problema. Anche la descrizione alle compagne e ai compagni di classe del problema che Lorenzo e Riccardo si erano posti, delle strategie risolutive messe in atto per affrontarlo e della soluzione ottenuta è stata condotta in modo del tutto autonomo: il docente si è limitato ad assecondare la loro richiesta di presentare alla classe il problema, invitandoli, però, a non limitarsi a presentare la soluzione, ma a descrivere in dettaglio tutto il processo risolutivo.

3 Inizia la ricerca: i primi approcci strutturati per capire *perché* è così

La ricerca delle ragioni che verifichino la correttezza della soluzione fornita dall'esperimento e ne spieghino i motivi non può essere condotta senza modalità di conteggio organizzate, perché il problema è complesso. Può, intanto, essere di aiuto una riformulazione del problema, suggerita dalla considerazione che, in casi come questi, è in genere più semplice calcolare la probabilità dell'evento contrario. Si tratta di una strategia che era stata utilizzata più volte nella risoluzione di problemi di probabilità proposti in classe, come, per esempio, il classico problema dei compleanni.
Quindi, è meglio chiedersi qual è la probabilità *p* che, estraendo a caso una permutazione dall'insieme delle permutazioni di 28 oggetti, se ne ottenga una che non lasci fisso alcun elemento e poi calcolare $1 - p$. La riformulazione del testo è uno dei suggerimenti che Polya (1945/2016) dà per elaborare un buon piano di risoluzione di un problema.
Se si pensa all'approccio alla probabilità come rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi

possibili (in questo caso i casi possibili sono equiprobabili), appare chiaro che la difficoltà del problema consiste nel conteggio dei casi favorevoli: è infatti immediato affermare che il numero di quelli possibili è 28!, che ha, come ordine di grandezza, 10^{29}. Tra l'altro, appare altresì chiaro che ragionare su permutazioni di 28 oggetti o, più in generale, su permutazioni di n oggetti non comporta grandi cambiamenti o semplificazioni. Anzi, forse il passaggio al caso generale aiuta a liberarsi da quello che si potrebbe chiamare il "labirinto del concreto" e a cercare tecniche di conteggio efficaci, magari di carattere ricorsivo. Questa osservazione porta a una seconda riformulazione del testo del problema: qual è la probabilità che, estraendo a caso una permutazione fra l'insieme delle permutazioni di n oggetti, se ne trovi una che non lascia fisso alcun oggetto?
Ora il testo del problema sembra formulato in modo abbastanza chiaro per avviare le prime vere e proprie strategie risolutive.
Stabilito che si tratta di individuare strategie efficaci ed efficienti di conteggio per il numero dei casi favorevoli, può essere conveniente ritornare a considerare casi particolari, con piccoli numeri, gestibili, ma con l'obiettivo ormai chiaro che è necessario individuare regolarità che suggeriscano come utilizzare il conteggio relativo al caso di k oggetti, per risolvere il problema di contare nel caso in cui gli oggetti diventino $k + 1$.
Vengono qui presentate due strategie, una utilizzata da Riccardo e l'altra utilizzata, indipendentemente, da Lorenzo. In entrambi i casi viene subito dato un nome alle permutazioni che non lasciano fisso alcun elemento: *dismutazioni* (*derangements*, in inglese).
In realtà, solo molto tempo dopo la proposta del problema gli studenti hanno saputo che queste permutazioni sono chiamate dismutazioni e, come prima si è già accennato, che il problema che avevano affrontato e risolto è un classico problema di calcolo combinatorio. Attribuire un nome agli oggetti di un discorso è, però, di grande aiuto per articolare in modo più chiaro e comprensibile il discorso e quindi verrà già utilizzato nella descrizione delle strategie risolutive messe in atto da Riccardo e Lorenzo.
Nel prosieguo, inoltre, si indicano con $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ gli elementi su cui agiscono le permutazioni, mentre $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ indicano le posizioni, dalla prima all'n-esima.
Infine, con lo stesso simbolo D_n, si indica sia una dismutazione di n elementi, sia il numero delle dismutazioni di n elementi.
Un'avvertenza, per meglio comprendere i due paragrafi successivi: la ricerca di strategie risolutive di un problema complesso è spesso un processo tortuoso, sicuramente non lineare.
Nei due paragrafi seguenti si è cercato di dare un'idea, più che della soluzione del problema, dei processi risolutivi messi in atto da Riccardo e Lorenzo. Il lettore che dovesse ritenere non del tutto chiari certi passaggi, potrebbe giovarsi della scelta di passare prima alla lettura del par. 3.3 relativo alla dimostrazione della formula ricorsiva e poi ritornare alle strategie risolutive attuate dai due studenti.

3.1 La strategia di Riccardo

Per $n = 2$ si ha una sola dismutazione: $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

Per $n = 3$ si hanno due dismutazioni $D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$, che si possono rappresentare, più sinteticamente, con la Tabella 1.

1	2	3
a_2	a_3	a_1
a_3	a_1	a_2

Tabella 1. Dismutazioni di 3 elementi.

Per $n = 4$, si hanno nove dismutazioni: lo si può verificare, ancora abbastanza agevolmente, in modo diretto, scrivendole tutte. Oppure le si può contare più agevolmente aiutandosi con la **Tabella 2**, che aiuta a organizzare il conteggio.

Nella seconda, terza e quarta cella della prima colonna sono stati inseriti, rispettivamente, gli elementi che possono comparire in prima posizione: a_2, a_3, e a_4 (cioè tutti tranne a_1, che non può comparire nella prima posizione, se si vogliono delle dismutazioni).

Si fissi ora l'attenzione sul caso in cui è l'elemento a_2 che si trova in prima posizione (seconda riga della tabella, evidenziata in grigio): ci sono tre possibili dismutazioni con a_2 in prima posizione. Lo stesso ragionamento lo si può ripetere nei due casi in cui siano gli elementi a_3 e a_4 a trovarsi in prima posizione (ultime due righe della tabella). Quindi le dismutazioni di 4 elementi sono $3 \cdot 3 = 9$.

1	2	3	4
a_2	a_1, a_3, a_4	a_1, a_4	a_1, a_3
a_3	a_1, a_4	a_1, a_2, a_4	a_1, a_2
a_4	a_1, a_3	a_1, a_2	a_1, a_2, a_3

Tabella 2. Dismutazioni di 4 elementi.

La scrittura dell'elenco delle dismutazioni di cinque elementi inizia a essere piuttosto complessa: si rischia di dimenticarne qualcuna. L'uso di una rappresentazione come quella della **Tabella 3** può essere d'aiuto. Analogamente a quanto già visto nella **Tabella 2**, nella seconda, terza, quarta e quinta cella della prima colonna sono stati inseriti gli elementi che possono comparire in prima posizione: a_2, a_3, a_4, a_5.

1	2	3	4	5
a_2				
a_3				
a_4				
a_5				

Tabella 3. Per rappresentare le dismutazioni di 5 elementi.

Però, come suggerisce la **Tabella 4**, il numero delle dismutazioni di cinque elementi, in cui l'elemento a_2 è stato inserito nella prima posizione, è dato dalla somma delle dismutazioni dei tre elementi a_3, a_4, a_5 (terza, quarta e quinta cella delle prime due righe della **Tabella 4**), dove a_1 è stato inserito nella seconda posizione e delle dismutazioni dei quattro elementi a_1, a_3, a_4, a_5 (celle evidenziate in grigio nella **Tabella 4**) dove a_1 può essere inserito in ciascuna posizione, tranne che, ovviamente, nella prima e nella seconda. Si osservi, inoltre, che il contenuto delle celle evidenziate in grigio nella **Tabella 4** è lo stesso contenuto della **Tabella 2**, se in luogo delle dismutazioni degli elementi a_1, a_2, a_3, a_4 si considerano le dismutazioni degli elementi a_1, a_3, a_4, a_5.

1	2	3	4	5
a_2	a_1	a_4	a_5	a_3
	a_1	a_5	a_3	a_4
a_2	a_3	a_1, a_4, a_5	a_1, a_5	a_1, a_4
a_2	a_4	a_1, a_5	a_1, a_3, a_5	a_1, a_3
a_2	a_5	a_1, a_4	a_1, a_3	a_1, a_3, a_4

Tabella 4. Traccia del calcolo del numero di dismutazioni di 5 elementi.

Il ragionamento appena fatto nel caso in cui a_2 è stato inserito nella prima posizione, può essere ripetuto negli altri tre casi, in cui, rispettivamente, a_3, a_4 e a_5 sono inseriti nella prima posizione.
Quindi $D_5 = 4 \cdot (D_4 + D_3) = 4 \cdot (9 + 2) = 44$.
A questo punto si può quindi congetturare che, per ogni $n \geq 2$, valga la formula ricorsiva

$$\begin{cases} D_2 = 1 \\ D_3 = 2 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$

3.2 La strategia di Lorenzo

Inizialmente si potrebbe pensare che sia sufficiente organizzare i dati come nella **Tabella 5**, per individuare una regola di calcolo per le dismutazioni, ma le attese sono destinate ad andare presto deluse: i numeri crescono troppo rapidamente e dopo i quattro elementi è in pratica impossibile evitare di sbagliare nel conteggio.

Elenco iniziale	Numero di elementi	Dismutazioni	Numero di dismutazioni
a_1	1	/	0
a_1, a_2	2	a_2, a_1	1
a_1, a_2, a_3	3	a_2, a_3, a_1; a_3, a_1, a_2	2
a_1, a_2, a_3, a_4	4	a_2, a_3, a_4, a_1 ; a_2, a_1, a_4, a_3 a_2, a_4, a_1, a_3; a_3, a_1, a_4, a_2 a_3, a_4, a_2, a_1; a_3, a_4, a_1, a_2 a_4, a_1, a_2, a_3; a_4, a_3, a_1, a_2 a_4, a_3, a_2, a_1	9
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5	5	Troppe!	...

Tabella 5. Alla ricerca del numero di dismutazioni.

Il fallimento di questa strategia ha portato a cercare una legge ricorsiva. La ricerca non è stata lineare, ma, anzi, lunga e tortuosa. Qui di seguito si cerca di dare un'idea del processo che ha portato Lorenzo a formulare la legge ricorsiva per il calcolo del numero delle dismutazioni di n elementi.
Si consideri il caso $n = 5$, cioè il numero delle dismutazioni dei cinque elementi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
Una dismutazione è, per esempio, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1; in ogni caso, qualunque dismutazione si consideri l'elemento a_1 non potrà mai comparire nella prima posizione. A questo punto, qualunque sia la

dismutazione considerata, si scambia l'elemento a_1 con quello che si trova in prima posizione. Nell'esempio preso in considerazione si avrebbe a_1, a_3, a_4, a_5, a_2. Qualunque cinquina si ottenga, si potrà tornare, con la sostituzione inversa di quella appena effettuata, alla dismutazione originaria; nel caso dell'esempio, si potrà tornare ad a_2, a_3, a_4, a_5, a_1.
È però necessario comportarsi in modo diverso a seconda di quello che si ottiene:

a) se solo l'elemento a_1 ritorna nella posizione iniziale (come nell'esempio considerato) allora si hanno dismutazioni di quattro elementi e questo ragionamento fatto per l'elemento a_1 può essere ripetuto tale e quale per ciascuno degli altri quattro elementi a_2, a_3, a_4, a_5;
b) può invece capitare che, oltre ad a_1, ci sia anche un altro elemento che torna nella posizione originaria. Ciò accade, per esempio, nel caso in cui si consideri la dismutazione a_5, a_3, a_4, a_2, a_1, quando si sposta a_1 in prima posizione scambiandolo con a_5. Si ottiene a_1, a_3, a_4, a_2, a_5, in cui due elementi sono nella posizione originaria. In questo caso si hanno le dismutazioni di tre elementi e questo ragionamento fatto ora per l'elemento a_1 si può ripetere per gli altri quattro elementi.

Mettendo insieme le considerazioni ai punti a) e b) precedenti, si può concludere che:
$D_5 = 4 \cdot (D_4 + D_3) = 4 \cdot (9 + 2) = 44$. Infine, è possibile congetturare che la formula ricorsiva

$$\begin{cases} D_2 = 1 \\ D_3 = 2 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$

valga per ogni $n \geq 2$.

3.3 La dimostrazione della formula ricorsiva

Si osservi che le due strategie risolutive proposte da Riccardo e Lorenzo possono essere ricondotte, anche se non immediatamente, al seguente ragionamento che costituisce una dimostrazione della formula ricorsiva ottenuta dai due studenti.
Si considerino le dismutazioni che operano sugli n elementi a_1, a_2, a_3, a_4, …, a_n. Si osservi, innanzitutto, che l'elemento a_1 può stare solo in seconda, terza, quarta … n-esima posizione. Si supponga di inserirlo nella n-esima posizione e di pensare a dove posizionare ora l'elemento a_2, tenendo ben presente che esso non potrà essere inserito nella seconda posizione. Si hanno due possibilità:

a) l'elemento a_2 sta nella prima posizione
b) l'elemento a_2 sta nella terza, quarta, …, $(n-1)$-esima posizione (l'n-esima è già occupata dall'elemento a_1).

Nel caso a) si sono già fissati due elementi su n; quindi si è ricondotti alle dismutazioni di $n-2$ elementi.
Nel caso b) è stato fissato solo l'elemento a_1; quindi si è ricondotti alle dismutazioni di $n-1$ elementi.
Questo stesso ragionamento lo si può fare per ciascuna delle $n-1$ posizioni in cui può stare l'elemento a_1.
Quindi $D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2})$.

Possiamo quindi dare la formula ricorsiva
$$\begin{cases} D_2 = 1 \\ D_3 = 2 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$
per ogni $n \geq 2$ o, equivalentemente,

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 1 \\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{cases}$$

per ogni $n \geq 1$.

3.4 Il confronto con la simulazione

Le soluzioni proposte da Riccardo e da Lorenzo non solo sono convincenti perché portano allo stesso risultato, ma anche perché sono state ottenute con strategie controllabili, che, una volta comprese, danno adito a pochi dubbi. Eppure, come sa bene chi è esperto nella risoluzione di problemi, spesso dietro alle convinzioni più profonde si nascondono insidie esiziali, difficili da individuare, in particolare nei problemi di probabilità. È così nata l'esigenza di un'ulteriore verifica di correttezza della congettura, mediante il confronto del risultato fornito dalla formula ricorsiva con il risultato fornito dalla simulazione al computer. È stato quindi costruito un foglio di calcolo che restituisse, al variare di n, il numero $1-\frac{D_n}{n!}$; ciò ha consentito di verificare una forte coerenza con il risultato della simulazione: già con $n = 11$ le prime sei cifre decimali si stabilizzano e si ottiene, a meno di 10^{-6}, il numero 0,632121.

4 Alla ricerca di una formula chiusa per D_n

La convinzione della correttezza di una congettura è spesso condizione importante per essere motivati a dimostrarla: prima ci si convince e poi si dimostra, cioè si spiega perché quella congettura funziona e si precisa il nesso di conseguenza logica tra quella congettura e le conoscenze già disponibili. L'attività di risoluzione del problema è servita proprio a convincersi, sia mediante considerazioni di carattere teorico, sia mediante veri e propri esperimenti, che consistono nelle simulazioni al computer, della correttezza della soluzione trovata. Ci sono quindi tutte le condizioni per essere motivati a spiegare, ancora più approfonditamente, che cosa sta dietro alla soluzione numerica restituita dalle simulazioni. Naturalmente la spiegazione va ricercata nel sapere teorico: è proprio nella teoria che si possono dare risposte alle domande del tipo *perché* è così?

Non sempre, però, l'attività dimostrativa ha successo nello spiegare *perché* una congettura funziona. Per esempio, in questo caso, la dimostrazione della formula ricorsiva fornita nel par. 3.3 e proposta dall'insegnante nella fase di presentazione alla classe (vedere par. 5) come sistemazione delle strategie risolutive proposte da Lorenzo e Riccardo, non ha aggiunto molto alla comprensione del procedimento che ha portato i due studenti a congetturare la legge ricorsiva. Quindi non ha soddisfatto, a detta degli studenti della classe, l'esigenza di capire meglio, sia le strategie risolutive messe in atto da Lorenzo e Riccardo per trovare la formula ricorsiva, sia *perché* il numero fornito dalla simulazione è una corretta approssimazione della soluzione trovata. In fondo, parafrasando Thurston (1995), i progressi nella conoscenza matematica non si ottengono solo grazie al processo di costruzione di definizioni, teoremi, dimostrazioni: è molto più importante la produzione di congetture, la loro validazione e spiegazione con tecniche che non sono solo legate al pensiero deduttivo. Insomma, ciò che è importante, per il progredire della conoscenza matematica, è capire e farsi capire.

Per esempio, Lorenzo e Riccardo, per *capire meglio* sia il risultato fornito dalla simulazione al computer, sia la formula ricorsiva costruita, sentivano l'esigenza di trovare una formula che definisse esplicitamente D_n in funzione di n; per questo motivo hanno pensato di utilizzare la rete per la ricerca di conoscenze di calcolo combinatorio che consentissero di affrontare in altro modo il problema.

Anche questa fase è stata condotta autonomamente: l'intervento del docente si è realizzato solo nella fase di presentazione alla classe per sistemare o precisare alcuni passaggi dell'esposizione con l'obiettivo di aiutare le compagne e i compagni di Lorenzo e Riccardo a comprendere meglio il valore e il contenuto dell'attività.

È proprio in questa ricerca che Lorenzo e Riccardo si sono imbattuti nel concetto di dismutazione e hanno trovato la formula $D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$, che può essere dimostrata per induzione, come per esempio propone Modica (2008, pp. 45–46) oppure utilizzando il principio di inclusione ed esclusione, come per esempio propone Foschi (2012, pp. 19–20).

Quando Lorenzo e Riccardo hanno presentato alle compagne e ai compagni i processi che hanno messo in atto per affrontare e risolvere il problema, hanno anche accennato al principio di inclusione ed esclusione per giustificare la formula che dà D_n in funzione di n. Però ciò che maggiormente ha catturato l'attenzione, sia degli studenti che ascoltavano il racconto dell'esperienza, sia dei due stessi autori, è stato il riconoscere, nella formula trovata, un collegamento del tutto inatteso con uno degli argomenti da poco introdotti in classe. Naturalmente, dal fatto che il numero di permutazioni di n elementi è $n!$, segue immediatamente che $\frac{D_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$. La sommatoria a secondo membro ha rinviato allo sviluppo in serie di e^x, studiato proprio pochi giorni prima della risoluzione del problema. Infatti, $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, quindi, per n che tende a infinito, il rapporto $\frac{D_n}{n!}$ (che fornisce la probabilità che, estraendo a caso una permutazione fra l'insieme delle permutazioni di n oggetti, se ne trovi una che non lascia fisso alcun oggetto) è uguale a e^{-1}.
Quindi $1 - e^{-1} \approx 0{,}632121$ a meno di 10^{-6}, è la probabilità che, estraendo a caso una permutazione fra l'insieme delle permutazioni di n oggetti, se ne trovi una che lascia fisso almeno un oggetto. Insomma, tutto torna!

5 Condividere soddisfazione e bellezza: la presentazione alla classe

La scoperta che la probabilità cercata, espressa come $\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n!}$, converge a e^{-1}, i collegamenti di un problema, che appariva così lontano dalla prassi didattica, con gli argomenti svolti in classe proprio poco prima della risoluzione del problema, la matematica scoperta e appresa per risolverlo, hanno causato stupore, meraviglia che, insieme alla soddisfazione per il successo ottenuto, hanno portato all'esigenza di condividere con le compagne e i compagni di classe questa piccola attività di ricerca matematica.
Il passo successivo è stato quindi quello di riorganizzare il processo di scoperta e di risoluzione del problema in modo da renderlo comprensibile a tutte le compagne e i compagni di classe. Come già detto, anche la preparazione della presentazione è stata autonomamente condotta dagli studenti. L'insegnante si è limitato a suggerire di non limitarsi a presentare la soluzione del problema, ma a descrivere nei dettagli tutto il processo risolutivo, riorganizzandolo in una sequenza logica piuttosto che temporale, con l'obiettivo di aiutare i compagni a comprendere. Ciò ha richiesto una profonda riflessione critica sulle varie strategie adottate e anche sulle modalità più adeguate a rendere comprensibile e coinvolgente il racconto.
Per esempio, nella presentazione, si è deciso di partire dalla strategia risolutiva messa in atto da Riccardo, perché è stata ritenuta più semplice da spiegare e da essere compresa: si è insistito molto sulla costruzione di tabelle strutturate, evitando l'uso di diapositive, ma realizzando le tabelle alla lavagna, in modo tale che tutti gli studenti potessero vedere e seguire con calma la costruzione passo-passo.
Si è deciso che si sarebbe presentata, dopo quella di Riccardo, la strategia risolutiva di Lorenzo, mettendo in evidenza le differenze di approccio rispetto alla precedente. Per coinvolgere gli studenti della classe è stato chiesto loro, fin dall'inizio della presentazione, di seguire attentamente per dare poi una valutazione su quale delle due strategie ritenessero più semplice da seguire e da capire. Tra l'altro, quasi tutte le compagne e i compagni hanno ritenuto più semplice e chiara la strategia risolutiva adottata da Riccardo, confermando l'efficacia della scelta progettuale di partire dalla presentazione di questa strategia risolutiva.
L'insegnante ha poi proposto la dimostrazione della congettura di Lorenzo e Riccardo, nel modo in cui è stata presentata nel par. 3.3, ma, come già accennato in precedenza, la dimostrazione non ha avuto molto successo per aiutare le studentesse e gli studenti della classe a capire meglio *perché* la congettura funziona.
Per ultimo si è deciso di descrivere la simulazione e la successiva ricerca di una formula chiusa, anche

se la fase di simulazione era stata realizzata quasi all'inizio dell'attività di risoluzione del problema da parte di Lorenzo. Per catturare l'attenzione delle studentesse e degli studenti si sono riportati, su un file Excel, diversi valori della successione $\frac{D_n}{n!}$ e si è chiesto agli studenti di avanzare ipotesi sul numero a cui sembrava convergere al crescere di n.
La parte più coinvolgente, per la sorpresa che ha creato, è stato il collegamento del problema e del risultato della simulazione con lo sviluppo in serie di e^x, argomento affrontato pochi giorni prima della presentazione della risoluzione del problema.

6 Conclusioni

L'esperienza ci sembra fornire spunti suggestivi su come si possa tenere conto di quelli che potremmo chiamare "bisogni educativi delle eccellenze", che rischiano di non essere adeguatamente soddisfatti se non si utilizzano spazi di produzione e di riflessione che vadano al di là dell'orario scolastico. Naturalmente un punto di forte criticità sta nel fatto che, a parte Lorenzo e Riccardo, il resto della classe è stato coinvolto solo nella fase di presentazione. Il coinvolgimento di tutta la classe in un'attività di questo tipo, però, richiede una sapiente e attenta progettazione didattica da parte del docente, che deve necessariamente partire dalla scelta di problemi di minore complessità e difficoltà, per i quali, se non la soluzione, almeno la proposta e la discussione in piccoli gruppi di strategie risolutive adeguate ad affrontarli siano alla portata della classe. Per un esempio che ci sembra interessante in tal senso si veda l'articolo di Paola (2019).
Riteniamo che l'interesse di quanto esposto non stia tanto nel problema, che è classico, anche se non del tutto usuale per quel che riguarda la prassi didattica. L'interesse ci sembra dovuto alla modalità della proposta, del tutto autonoma e, soprattutto, alle strategie di approccio, che hanno portato a successive riformulazioni del testo e a una miscela sapientemente dosata di approcci di carattere empirico e teorico, prima di sentire l'esigenza di spiegare *perché* quelle strategie funzionano. La fase di condivisione dell'attività con il resto della classe ha fatto nascere un'ulteriore questione assai interessante. Molti studenti hanno osservato che la fase di dimostrazione della correttezza della soluzione ha aggiunto poco alla loro convinzione della correttezza della soluzione o alla comprensione della soluzione stessa. La maggior parte degli studenti della classe ha apprezzato soprattutto la parte più empirica e induttiva del processo risolutivo e non ha avvertito alcuna esigenza di ulteriori spiegazioni. Lorenzo e Riccardo, sia nel processo risolutivo, sia nell'esposizione ai compagni, hanno utilizzato a loro volta proposizioni non dimostrate. In altri termini, nella fase di spiegazione del *perché* l'approccio risolutivo ha funzionato, hanno seguito un approccio simile a quello suggerito da Lakatos (1976/1979) che pensa alla dimostrazione come a un processo euristico in cui una congettura viene scomposta in altre sotto-congetture utilizzate per corroborare la congettura di partenza e in cui l'attenzione si sposta verso la logica della scoperta, più che verso la deduzione formale. In fondo, forse proprio questo è il processo di giustificazione più adatto a un contesto, quale è quello in cui lavorano studenti di una scuola secondaria di secondo grado, in cui circolano e si condividono molte conoscenze, ma quasi mai queste sono già organizzate e sistemate in una teoria esplicita e condivisa. Si può anzi dire che l'obiettivo primario di un processo giustificativo, in un contesto come questo, sia proprio quello di iniziare a fare acquisire il ruolo e il significato di una teoria come ambiente nel quale si precisi il significato stesso delle domande del tipo *perché*?

Bibliografia

Baclawski, K., Cerasoli, M., & Rota, G. C. (1990). *Introduzione alla probabilità*. Unione Matematica Italiana. Pitagora.

Foschi, L. (2012). *Alcune statistiche sulle permutazioni*, Relazione finale in Matematica Discreta, Università di Bologna. https://amslaurea.unibo.it/4996/1/foschi_lorenzo_tesi.pdf

Impedovo, M. (2005). Modelli, algoritmi, simulazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *28*(6A+B), 685–707.

Lakatos, I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*. Feltrinelli. (Titolo originale: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery* pubblicato nel 1976).

Modica, G. (2008). *Note di Calcolo Combinatorio*. http://www.dma.unifi.it/~modica/2007-08/matdiscreta/cc.pdf

Paola, D. (2019). Un'esperienza di avvio al pensiero probabilistico nella prospettiva di educare alla razionalità. In F. Morselli, G. Rosolini & C. Toffalori (A cura di), *Educare alla razionalità – Tra Logica e Didattica della Matematica*. Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.

Polya, G. (2016). *Come risolvere i problemi di matematica*. UTET Università. (Titolo originale: *How to solve it* pubblicato nel 1945).

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 157–162.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29–37.