

Funzioni e grafici in ambienti digitali dinamici

Functions and graphs in dynamic digital environments

Giulia Colacicco^{*}, Giulia Lisarelli[^] e Samuele Antonini[•]

^{*}Centrum Wiskunde & Informatica – Amsterdam, Olanda

[^]Dipartimento di Matematica e Informatica “U. Dini” – Università di Firenze, Italia

[•]Dipartimento di Matematica “F. Casorati” – Università di Pavia, Italia

Sunto / In questo articolo riportiamo uno studio sui processi di formazione di significati relativi alla nozione di funzione e alla sua rappresentazione grafica in ambienti di geometria dinamica e presentiamo un’attività didattica sulle funzioni centrata sulla gestione di diverse rappresentazioni grafiche e verbali di funzioni reali di variabile reale. I software di geometria dinamica rendono possibile la realizzazione di grafici dinamici in cui la relazione di dipendenza funzionale si concretizza attraverso due tipi diversi di movimento, diretto e indiretto, dei punti che rappresentano rispettivamente le variabili indipendente e dipendente. Il continuo sforzo degli studenti di descrivere i grafici dinamici e le loro osservazioni durante il trascinamento ha portato all’uso di particolari termini e in generale di segni che sono stati condivisi nella classe e che sono stati messi tra loro in relazione per costruire espressioni via via più complesse e significati matematici sempre più evoluti.

Parole chiave: funzioni; grafici dinamici; ambienti di geometria dinamica; verbalizzazione.

Abstract / In this paper we present a study on the formation of meanings about the notion of mathematical function and graphic representations in dynamic geometrical environment; we also describe a didactic activity on functions centered on the management of different graphics and verbal representations of real functions of real variable. The dynamic geometry environments allow the construction of dynamic graphics (dynagraphs) and the realization of functional dependency by means of two different kinds of movement, direct and indirect, of points that represent independent and dependent variables. The continuous effort of students in describing the dynamic graphics and their observations during their dragging promoted the use of particular terms and, in general, of signs that were shared in the classroom and were linked to each other in order to formulate progressively more complex expressions and more advanced mathematical meanings.

Keywords: functions; dynagraphs; dynamic geometry environment; verbalization.

1 Introduzione

Uno dei concetti basilari della matematica moderna è quello di funzione, che negli ultimi secoli ha avuto un’importante e imponente evoluzione e ha permesso di rileggere conoscenze matematiche sotto una nuova luce e di aprire ricchi campi di ricerca dalle molteplici ed efficaci applicazioni in ogni area (scientifica, umanistica, socio-economica ecc.). Leggere un grafico e saperne ricavare informazioni, così come rappresentare informazioni attraverso un grafico, gestendo adeguatamente le variabili, la loro relazione e la relazione tra le variazioni, sono competenze essenziali per il cittadino, e sono parte degli obiettivi di quell’educazione matematica che, per usare la felice espressione del volume Matematica 2003 (UMI et al., 2003, p. 6) dedicato alla “matematica per il cittadino”, contribuisce «alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica».

Nella scuola italiana le funzioni e i loro grafici vengono approfondite in matematica in modo particolare nell'ambito dell'analisi e le Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010), nelle linee generali e competenze, inseriscono le «funzioni elementari dell'analisi e le prime nozioni del calcolo differenziale e integrale» tra i «gruppi di concetti e metodi di cui lo studente saprà dominare attivamente» (MIUR, 2010, p. 22), dove non possiamo non richiamare l'attenzione sull'uso impegnativo del verbo “*dominare*” e dell'avverbio “*attivamente*”. Già al primo biennio, è tra gli obiettivi specifici di apprendimento quello di saper usare il linguaggio degli insiemi e delle funzioni per “*rappresentare*” fenomeni e ottenere informazioni (MIUR, 2010, p. 24). Si richiede inoltre allo studente di essere «in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati» (MIUR, 2010, p. 24).

Sulla stessa linea la comunità scientifica, che nell'introduzione al documento Matematica 2003 (UMI et al., 2003) dichiara:

«Uno dei maggiori obiettivi didattici di questo nucleo [relazioni e funzioni] è, infatti, l'acquisizione da parte degli alunni di un “pensiero funzionale”.¹

Come lo si può favorire? Con una forte connessione fra il grafico di una funzione, l'interpretazione dell'andamento, il collegamento di questo con l'espressione algebrica della funzione, gli aspetti numerici, e l'analisi di momenti particolari di questo andamento che corrispondono agli zeri (cioè alle equazioni), al segno (cioè alle disequazioni) (...). Ciò non vuol dire che non si possa parlare di equazioni e sistemi indipendentemente dallo studio delle funzioni, ma che, laddove possibile, si cerchi di favorire l'interazione con la rappresentazione geometrica. Momenti particolari dell'andamento del grafico sono anche i massimi e i minimi, la crescita e la decrescita, il comportamento in prossimità di valori particolari; questa non è l'analisi matematica, perlomeno non è l'analisi matematica in senso classico. È lo studio qualitativo di un fenomeno. La considerazione dei fenomeni a livello qualitativo deve diventare un'abitudine mentale degli alunni e degli insegnanti, se si vuole fare in modo che le tecniche che l'alunno imparerà nel corso degli anni non siano mai oggetto di applicazione meccanica, ma frutto di riflessione sui significati nei diversi contesti proposti».

(UMI et al., 2003, p. 206)

Dal punto di vista didattico è però opportuno tenere in considerazione che l'area concettuale inerente alle funzioni e alla loro rappresentazione presenta complessità cognitive significative che, se ignorate, possono contribuire a creare ostacoli di apprendimento tutt'altro che banali.

2 Quadro concettuale generale

Difficoltà molto comuni in analisi matematica possono essere interpretate con la nozione di *concept image* di funzione, che comprende l'idea stessa che un soggetto ha di

1. In nota del testo viene precisato che «questo termine fu usato da Felix Klein come parola d'ordine per la sua proposta di riforma curricolare europea degli inizi del '900».

funzione e che rischia a volte di rimanere schiacciata in una formula algebrica o nel suo grafico (Tall, 1991; Vinner, 1983). La conseguenza è che solo una parte ristretta delle funzioni viene presa in considerazione dagli studenti e restano escluse alcune funzioni non rappresentabili tramite espressioni algebriche o tramite curve del piano. Non è in gioco qui soltanto la costruzione di una galleria di esempi, comunque certamente decisiva, ma il nocciolo stesso del concetto matematico (si veda anche Antonini, 2011). Anche il grafico può essere visto come un'immagine in cui si perdono gli elementi essenziali della relazione funzionale. A questo proposito, Carlson e Oehrtman (2005) mostrano che il grafico rischia di essere pensato come un'immagine statica, un disegno che rappresenta una situazione fisica più che una mappatura tra due insiemi, e che questo porta seri ostacoli nell'analisi e nell'interpretazione delle informazioni che si possono trarre dai grafici.

L'aspetto su cui vogliamo soffermarci in questo articolo riguarda in particolare alcuni significati relativi alla nozione di funzione e alla loro rappresentazione tramite il grafico. Ed è proprio la distinzione tra funzione e rappresentazione che viene ad assumere un'importanza fondamentale. Scrive Duval:

«Da un punto di vista epistemologico c'è una differenza basilare tra la matematica e altri ambiti della conoscenza scientifica. Gli oggetti matematici, a differenza dei fenomeni dell'astronomia, fisica, chimica, biologia ecc., non sono mai accessibili alla percezione né per mezzo di strumenti (microscopi, telescopi, strumenti di misura). L'unico modo per avere accesso agli oggetti matematici e per poterli gestire consiste nell'usare segni e rappresentazioni semiotiche. Questo significa che abbiamo un solo accesso alla conoscenza degli oggetti invece che uno doppio come nel caso di altri ambiti e che consiste in un accesso principale e non semiotico e un accesso secondario semiotico. Questa specifica situazione epistemologica della matematica cambia radicalmente l'uso cognitivo dei segni. Qualsiasi allievo si confronta con due esigenze opposte nell'addentrarsi nel pensiero matematico:

- Per svolgere qualsiasi attività matematica è necessario avvalersi di rappresentazioni semiotiche, anche se c'è la possibilità di scegliere il tipo di rappresentazione.
- L'oggetto matematico non deve mai essere confuso con le rappresentazioni semiotiche utilizzate».

(Duval, 2006, p.107, traduzione degli autori)

Le implicazioni sono di portata notevole, in particolare:

«Anche se l'uso di un unico registro di rappresentazione fosse sufficiente da un punto di vista matematico, da un punto di vista cognitivo l'attività matematica coinvolge la mobilitazione simultanea di almeno due registri di rappresentazione, o la possibilità di passare in ogni momento da un registro ad un altro. In altre parole, la comprensione concettuale in matematica comporta una sinergia di due registri, e talvolta una sinergia di tre registri».

(Duval, 2006, p. 126, traduzione degli autori)

Ci concentreremo in questo articolo sulla gestione di due registri, il registro verbale e il registro grafico; a sua volta nel registro grafico prenderemo in considerazione diverse rappresentazioni delle funzioni, in particolare attraverso l'uso di strumenti digitali

che, come precisato in (MIUR, 2010, p. 23), si rivelano particolarmente adeguati per *rappresentare* e *manipolare* oggetti matematici. L'uso di strumenti è qui considerato in accordo con la *teoria della mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), secondo la quale, nel corso di attività con particolari artefatti relativamente ad una specifica consegna, i soggetti coinvolti producono *segni* (disegni, testi, parole, gesti, ecc.) che rivestono due funzioni cognitive: da una parte vengono prodotti proprio per perseguire l'obiettivo del compito, dall'altra parte per comunicare con gli altri individui che stanno collaborando. L'utilizzo di artefatti stimola dunque la produzione di segni che possono risultare legati sia all'artefatto sia al contenuto matematico e che si intende fare evolvere verso *segni matematici*. Centrali nel processo semiotico di evoluzione di tali segni sono la *verbalizzazione*, che nella concezione vygotskiana sul rapporto dialettico e sinergico tra pensiero e linguaggio è vista come un processo strettamente connesso al pensare, al comprendere e al costruire significati (Vygotskij, 1990) e la *discussione matematica* (Bartolini Bussi & Boni, 1995), che è, come scrive Bartolini Bussi (2010, p. 50) «il modello privilegiato di produzione collettiva di segni». In particolare, i segni prodotti individualmente dagli studenti impegnati in una discussione matematica diventano progressivamente segni matematici grazie all'orchestrazione del docente.

In questo articolo vogliamo descrivere un'attività didattica progettata allo scopo di promuovere la formazione e lo sviluppo di significati matematici relativi alla nozione di funzione e competenze relative all'interpretazione e alla produzione di grafici attraverso la gestione di diverse rappresentazioni grafiche e verbali.

3 La rappresentazione grafica delle funzioni reali di variabile reale

Le funzioni reali di variabile reale vengono comunemente rappresentate, in un piano cartesiano, attraverso un grafico, che è l'insieme dei punti di coordinate $(x, f(x))$ al variare di x nel dominio della funzione. Dunque un punto del grafico è un punto del piano le cui due coordinate assumono il ruolo della variabile indipendente, usualmente indicata con la x , e dipendente, indicata con la $f(x)$.

Il grafico di una funzione è una rappresentazione estremamente efficace e offre una visione immediata e molto ampia di quello che si indica comunemente con l'espressione "andamento della funzione", con cui solitamente si fa riferimento alla monotonia (intendendo anche una monotonia a tratti), periodicità, massimi e i minimi assoluti e locali, asintoti ecc. La lettura, l'interpretazione, la manipolazione di un grafico e la transizione tra la rappresentazione grafica e altre rappresentazioni delle funzioni coinvolgono processi particolarmente delicati da un punto di vista cognitivo. Se un grafico è un sottoinsieme del piano, la lettura di un grafico come rappresentazione di una funzione richiede la ricostruzione, a partire dall'insieme dei suoi punti P di coordinate (x, y) , della relazione tra due variabili (che appartengono allo stesso insieme dei numeri reali): la variabile indipendente x e dipendente $f(x)$. Dunque un punto P del grafico è un punto del piano che rappresenta la relazione funzionale tra DUE numeri (x e y) appartenenti allo stesso insieme dei numeri reali ma che corrispondono a DUE punti appartenenti a DUE rette diverse, rispettivamente all'asse delle ascisse e all'asse delle ordinate. I due assi rappresentano dunque lo stesso insieme numerico $\mathbb{R}$, ed è proprio il fatto che l'insieme dei numeri reali venga rappresentato due volte, sia per così

dire “sdoppiato”, dall’asse delle ascisse e dall’asse delle ordinate, che risulta possibile tracciare il grafico.

Questa sottile complessità, se può passare inosservata a chiunque abbia dimestichezza con funzioni e grafici, per alcuni studenti rischia di mettere in ombra i significati matematici relativi alle funzioni. Ne mostriamo alcuni esempi nel prossimo paragrafo.

4 Tre episodi paradigmatici

Riportiamo in questo paragrafo tre episodi paradigmatici di alcune difficoltà degli studenti nell’interpretare e gestire il grafico di una funzione.

Episodio 1

Nel corso della prova orale per l’ammissione alla scuola di specializzazione per l’insegnamento secondario, Giulio, laureato in materie scientifiche, traccia il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ (vedi Figura 1) e sostiene che per x che tende all’infinito la funzione tenda all’infinito^x. Accompagna il suo discorso con un gesto della mano, mostrando che la funzione procede verso destra e “va sempre più lontano...”

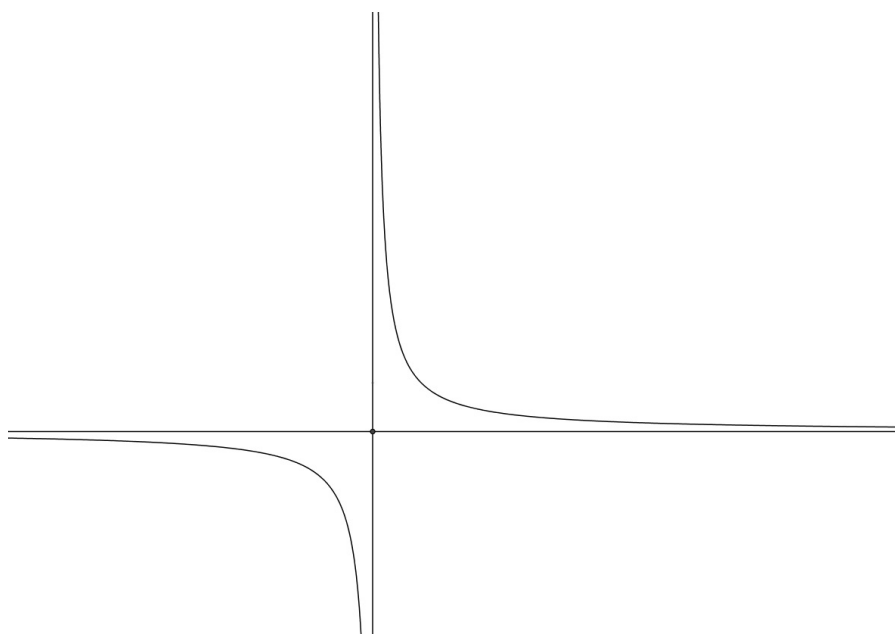


Figura 1
Il grafico della funzione
 $f(x) = \frac{1}{x}$.

Episodio 2

Luisa, studentessa del corso di laurea in farmacia, ritiene che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ tende all’infinito quando x tende all’infinito. Indicando il grafico mostra con una successione di gesti che, quando x va all’infinito (e con la mano indica verso destra il ramo di iperbole per valori grandi della x) la $f(x)$ va all’infinito (e indica verso l’alto il ramo di iperbole che si avvicina all’asse delle ordinate).

Episodio 3

Alla richiesta dell'insegnante di individuare l'insieme dei numeri reali x per cui la funzione risulta positiva, alcuni studenti di una scuola media superiore evidenziano alcuni tratti del grafico, come in Figura 2.

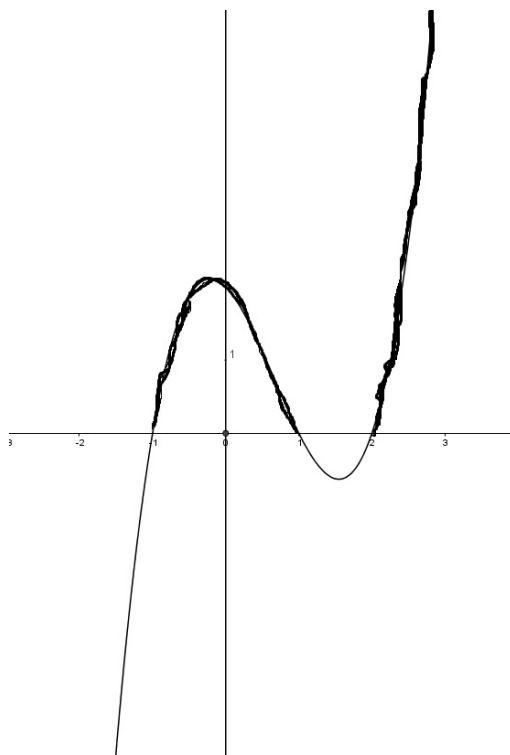


Figura 2
L'insieme dei punti x
tali che $f(x) > 0$ secondo
uno studente.

Comportamenti come questi sono piuttosto comuni e sono stati osservati durante la pratica didattica dal terzo autore del presente articolo e da insegnanti con cui collabora. Con diverse variazioni, sono estremamente frequenti e molti insegnanti di matematica ne hanno esperienza. Per quello che ci interessa in queste pagine, le risposte di questi tre studenti evidenziano una cattiva gestione (che in molti casi potrebbe rimanere latente ma non per questo inattiva e priva di conseguenze) del grafico come rappresentazione della funzione e in particolare una confusione tra il grafico e la funzione, i punti del grafico, la variabile x e la variabile $f(x)$.

5 Rappresentazioni grafiche delle funzioni

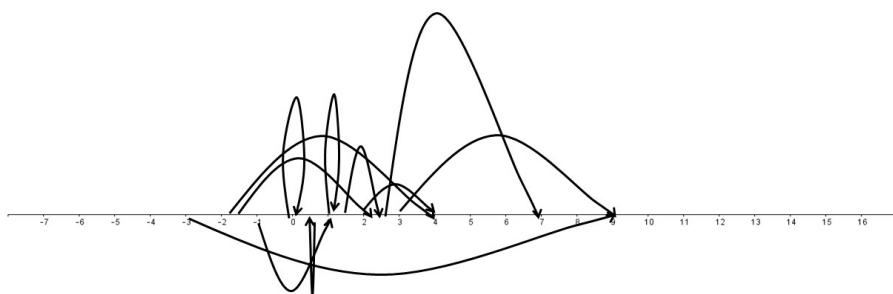
L'idea centrale del percorso proposto in questo articolo è quella di far lavorare gli studenti con rappresentazioni diverse di funzioni, che mettano maggiormente a fuoco le due variabili e la presenza di una relazione funzionale di dipendenza, al fine di costruire significati relativi al concetto di funzione e di promuovere processi significativi ed efficaci per arrivare, nell'ultima parte dell'attività, alla rappresentazione grafica tradizionale. In sintesi, l'uso di diverse rappresentazioni ha un duplice obiettivo:

- promuovere la formazione e l'evoluzione del significato matematico di funzione;
- promuovere competenze relative alla gestione (interpretazione, manipolazione) di grafici.

Volendo dare maggior risalto alle due variabili, ricordiamo innanzitutto che stiamo trattando il caso di funzioni reali di variabile reale in cui il dominio e il codominio sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Se rappresentiamo $\mathbb{R}$ con una retta, sia x sia $f(x)$ possono essere rappresentati da punti appartenenti alla stessa retta.

Il problema diventa quello di rappresentare la funzione. L'idea di tracciare delle frecce che connettano ogni punto x al corrispondente $f(x)$ (Figura 3) è possibile solo per un numero molto ridotto di punti e questo pone dei limiti a questo tipo di rappresentazione.

Figura 3
Una rappresentazione della
funzione reale
di variabile reale $f(x) = x^2$.



Un'alternativa interessante è quella dei *grafici dinamici*, più noti come *dynagraphs* (si veda Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992; Sinclair, Healy & Reis Sales, 2009; oltre che la sitografia in fondo all'articolo), in cui i due punti che rappresentano le variabili sono mobili ed è possibile spostare il punto rappresentante la variabile x e vedere di conseguenza lo spostamento del corrispondente $f(x)$. Questo tipo di rappresentazione non può essere realizzato con carta e penna e ci si deve ovviamente avvalere di opportuni supporti, come per esempio un software di geometria dinamica (vedi Hazzan & Goldenberg, 1997). In software come *Cabri* o *GeoGebra* la principale funzionalità che permette la costruzione dei grafici dinamici è il trascinamento (*dragging*) con il quale è possibile spostare gli oggetti geometrici costruiti, mantenendo invariati le relazioni stabilite nella costruzione. In questi ambienti di geometria dinamica è possibile distinguere due tipi di movimento: diretto, quando è operato direttamente su un punto base, ossia un punto che dà origine alla costruzione; indiretto, se il movimento osservato è ottenuto in seguito allo spostamento di un punto base. Data una funzione reale di variabile reale f , negli ambienti di geometria dinamica è possibile costruire una retta e due punti P e Q su di essa in modo che il punto sia P un punto liberamente trascinabile sulla retta e il punto Q sia tale che, dette x_P e x_Q le coordinate di P e Q sulla retta, risulti $x_Q = f(x_P)$. Il punto P rappresenta la variabile indipendente ed è trascinabile direttamente, il punto Q non è trascinabile direttamente ma si muove sulla retta quando P è trascinato, in modo da mantenere invariata la relazione funzionale.

L'uso dello strumento di trascinamento permette dunque da un lato di visualizzare i due movimenti e la relazione tra i due movimenti, cioè la relazione tra le variazioni (la *covariazione*), dall'altro di sperimentare "fisicamente", tramite l'uso manuale del mouse (o di un dito nel caso di strumenti *touchscreen*), la dipendenza di un punto da quello del punto trascinato. Sempre nel quadro teorico della mediazione semiotica, questa relazione tra il tipo di movimento e il ruolo delle variabili è uno degli aspetti centrali del lavoro sulle funzioni di Falcade, Laborde e Mariotti (2007), in cui, a differenza di quanto stiamo trattando in queste pagine, si fa riferimento a funzioni in più variabili e in particolare a una funzione dal piano alla retta.

In molti software di geometria dinamica, tra cui quelli citati, è inoltre possibile attivare la traccia di un punto in modo da visualizzare la sua traiettoria durante il trascinamento. Attivando per esempio la traccia su Q quando P viene trascinato in un intervallo $[a, b]$ resteranno visualizzate le posizioni assunte da Q , in altri termini sarà marcato un sottoinsieme della retta che rappresenta l'insieme $f([a, b])$, che è l'immagine di $[a, b]$. Un'importante applicazione della traccia sarà, come vedremo, la costruzione dello stesso grafico.

6 Grafici dinamici

Nell'ipotesi, coerente con i risultati dei lavori di Goldenberg et al. (1992) e di Falcade et al. (2007), che l'ambiente dinamico possa favorire la costruzione di significati inerenti le funzioni e i loro grafici, abbiamo sviluppato un percorso per introdurre le funzioni a partire da una rappresentazione dinamica uno-dimensionale per arrivare al grafico usuale nel piano cartesiano. Vediamo nel dettaglio le rappresentazioni dinamiche utilizzate.

La rappresentazione più essenziale è quella sopra descritta, con due punti su un'unica retta, un punto trascinabile direttamente, l'altro in relazione funzionale con il primo e che si muove soltanto di moto indiretto (Figura 4). Le due variabili sono dunque rappresentate da due punti che presentano, nella rappresentazione dinamica, un'asimmetria fondamentale in termini di movimento (diretto e indiretto), strettamente legata al loro ruolo rispettivamente di variabile indipendente e dipendente.

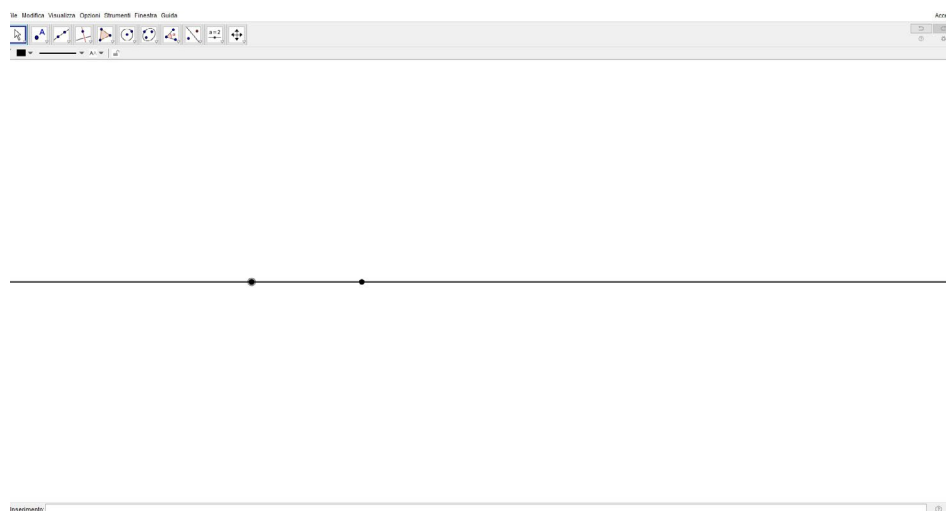


Figura 4
Grafico dinamico con una sola retta che rappresenta dominio e codominio.

La seconda rappresentazione (Figura 5) è fondamentalmente simile alla prima a parte il fatto che i due punti appartengono a due rette distinte e parallele. Entrambe le rette rappresentano l'insieme dei numeri reali. In questo modo può essere più comodo gestire alcune situazioni, per esempio quella in cui vi sono degli intervalli in cui $f(x) = x$ che, nella rappresentazione con un'unica retta potrebbe essere confusa con la situazione in cui $f(x)$ non esiste e dunque x non appartiene al dominio.



Figura 5
Grafico dinamico con rette
parallele.

Nella terza rappresentazione (**Figura 6**) entrano gli aspetti quantitativi e sono stati aggiunti a questo scopo i riferimenti numerici e la possibilità di attivare una griglia.

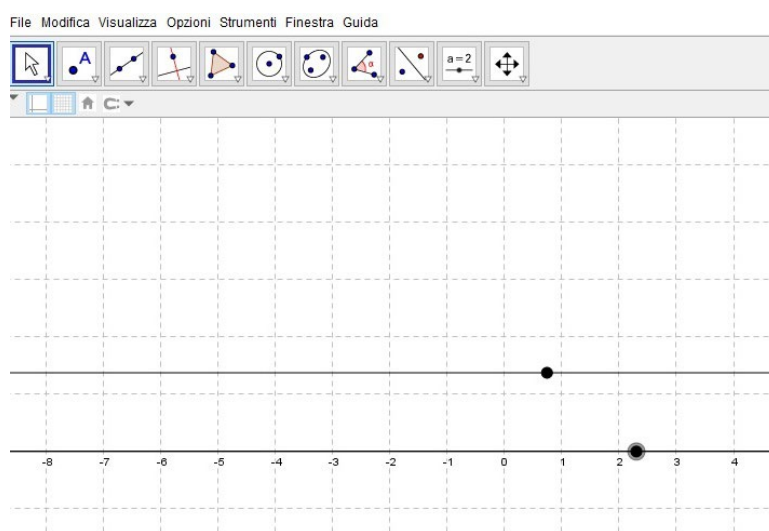


Figura 6
Grafico dinamico con rette
parallele e graduate.

La rappresentazione successiva consiste nel porre le due rette ortogonali e con le origini in comune (**Figura 7**), con diverse varianti in cui possono essere presenti riferimenti numerici di una o di due rette e una griglia.

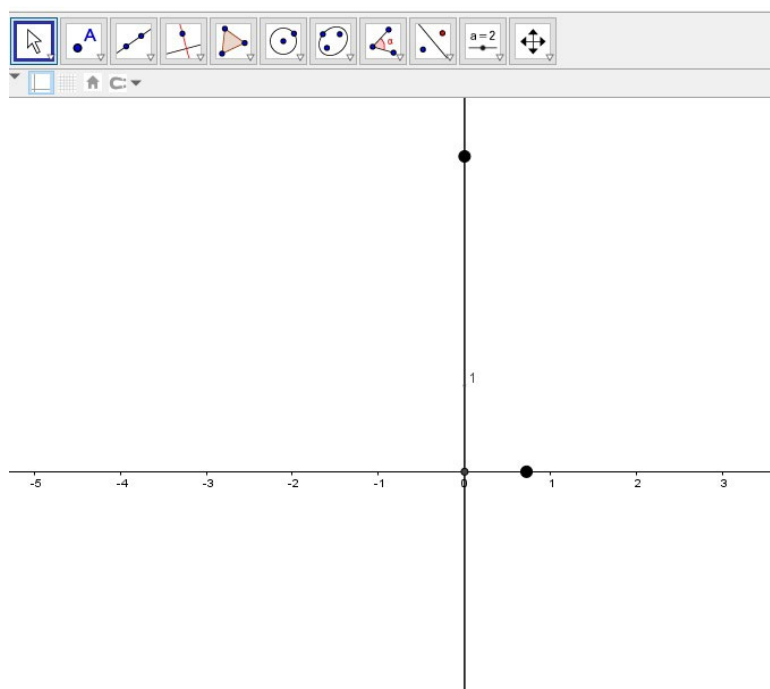


Figura 7
Rappresentazione dinamica con assi ortogonali.

Infine, costruendo il punto di coordinate $(x, f(x))$ (Figura 8) e attivando la traccia su tale punto è possibile visualizzare il grafico della funzione nel piano cartesiano, che si viene a tracciare in conseguenza del trascinamento del punto sull'asse x (Figura 9).

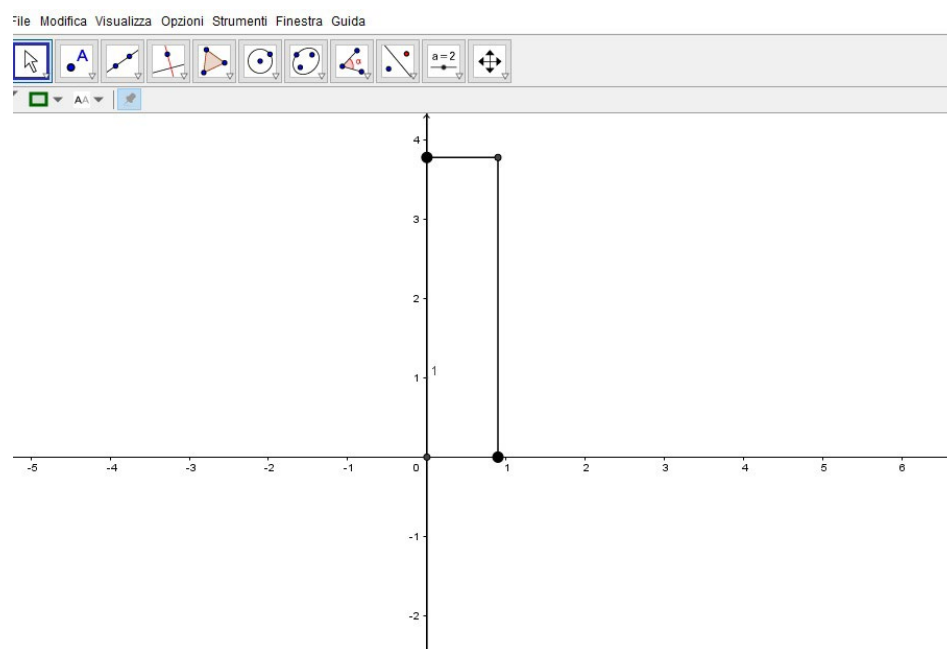


Figura 8
Grafico dinamico con il punto di coordinate $(x, f(x))$.

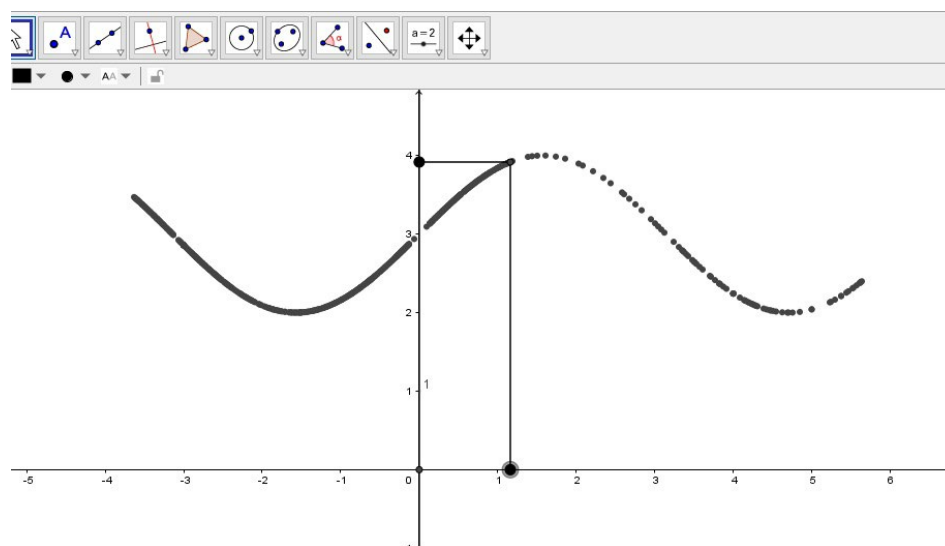


Figura 9
Grafico dinamico con traccia attiva nel punto di coordinate $(x, f(x))$ e in cui è stato trascinato il punto indipendente.

7 Una prima sperimentazione

Il lavoro che qui presentiamo, dal punto di vista della ricerca, è in fase esplorativa. Una prima sperimentazione è stata effettuata in occasione dello studio condotto per la tesi di laurea magistrale in matematica della prima autrice del presente articolo. L'attività è stata svolta in Italia nella primavera del 2016 in una classe seconda di un liceo scientifico con indirizzo ordinario, composta da 27 studenti. In classe non era stato trattato in modo esplicito il concetto di funzione, che rientrava tra gli obiettivi dell'attività, ma gli studenti avevano familiarità con il software *GeoGebra*, utilizzato nello studio della geometria analitica e per la costruzione di poligoni. Non avevano difficoltà a riconoscere una retta come rappresentazione dell'insieme dei numeri reali e avevano svolto attività con le equazioni delle rette nel piano cartesiano. Le lezioni si sono svolte nel laboratorio di informatica, in cui ogni studente aveva a disposizione un computer, secondo la seguente impostazione: dopo il lavoro in coppia, agli studenti era richiesto di produrre un testo scritto, infine il lavoro svolto veniva condiviso in una discussione collettiva guidata dall'insegnante.

Le attività, progettate e poi analizzate da tutti gli autori, sono state tutte condotte in classe sotto la guida delle due autrici. Sono state utilizzate due telecamere, una fissa e una mobile, per poter riprendere da vicino i dialoghi e le produzioni degli studenti durante le fasi di elaborazione e i lavori in gruppo. Inoltre, è stato raccolto del materiale in forma scritta, con le riflessioni e le risposte alle diverse consegne. I video e i testi scritti sono stati poi analizzati con particolare attenzione al linguaggio e ai segni prodotti dagli studenti.

Le attività sono state progettate per promuovere l'esplorazione da parte degli studenti delle rappresentazioni dinamiche e della transizione tra diverse rappresentazioni. Lo scopo principale era quello di promuovere la verbalizzazione degli studenti (e quindi una rappresentazione linguistica) per descrivere:

1. i punti sulla retta (o sulle rette) come variabili: il fatto che i punti possano essere trascinati e quindi le variabili possano assumere diversi valori;
2. la dipendenza della posizione di un punto dalla posizione dell'altro;
3. particolari e specifiche proprietà della relazione tra i movimenti dei due punti.

Agli studenti sono stati consegnati alcuni file con rappresentazioni dinamiche di alcune funzioni costruite dagli autori di questo articolo ma l'espressione algebrica e il fatto che si trattava di funzioni non era noto agli studenti. Al fine di promuovere la descrizione verbale da parte degli studenti, veniva loro richiesto di "Esplorare la situazione, individuare e descrivere i movimenti possibili attraverso il trascinamento e trascrivere sul quaderno le proprie osservazioni."

Alcune delle funzioni proposte hanno avuto obiettivi più specifici. Per esempio, le funzioni $|x|$ e $\sqrt{x}$ e avevano lo scopo di stimolare un confronto tra due situazioni in cui il punto dipendente, in alcune parti del dominio, non è più visibile, facendo sorgere il dubbio, discusso poi in classe, se i punti fossero sovrapposti (come nel primo caso per $x \geq 0$) oppure il punto dipendente scomparisse (come nel secondo caso per $x < 0$). Lo scopo era quello di sollecitare la necessità di una rappresentazione in cui i due punti non si confondessero e dunque fosse possibile distinguere il caso di due punti sovrapposti con il caso di un punto solo, e di giustificare in questo modo lo "sdoppiamento" della retta reale in due rette parallele (Figura 5) e la transizione alle successive rappresentazioni dinamiche.

Attraverso la rappresentazione dinamica con le rette graduate è stato possibile iniziare a descrivere il movimento dei punti anche con riferimenti numerici, continuando così a costruire ed approfondire il significato matematico di dominio, come insieme delle posizioni assunte dal punto indipendente. Successivamente è stata proposta la rappresentazione dinamica con le rette ortogonali. A questo punto gli alunni avevano fatto esperienza della dipendenza tra le due variabili e tra i loro movimenti e del legame che intercorre tra i valori da loro assunti. Attivando la traccia sul punto P di coordinate $(x, f(x))$ è stato possibile visualizzare il grafico della funzione, prodotto dal trascinamento del punto x lungo l'asse delle ascisse.

Di seguito riportiamo alcune osservazioni condotte in classe sulla formazione di alcuni significati matematici emersi durante il percorso.

8 Osservazioni

Obiettivo principale dell'attività era l'introduzione del concetto matematico di dipendenza funzionale attraverso un processo di raffinamento della descrizione verbale della relazione di movimento tra due punti legati da una relazione funzionale. Il linguaggio inizialmente impiegato dagli studenti appare legato a quello quotidiano, con descrizioni che richiamano riferimenti spaziali e temporali della posizione e velocità dei due punti con termini ricorrenti come "spostare/muovere", "destra/sinistra/sopra/sotto", "quando", "prima/dopo". Vediamo alcuni esempi (tra parentesi indicheremo la funzione di cui gli studenti stanno descrivendo il grafico e il tipo di rappresentazione dinamica):

"I due punti sulla retta si muovono in direzioni opposte. Si può spostare con il mouse solo un punto, però spostandolo si muove in direzione opposta anche l'altro". [$f(x) = 5 - x$; grafico dinamico con una retta].

"Date due rette e in ognuna un punto, il punto mobile si trova in quella sottostante. Al muovere del punto sottostante a destra e sinistra di un punto K non individuato, il punto soprastante

può assumere due posizioni: a destra se il punto sottostante è a destra, a sinistra se il punto sottostante è a sinistra". [$f(x)=1$ se $x > 0$, $f(x)=-1$ altrimenti; grafico dinamico con due rette parallele].

Un esempio di descrizione più complessa è il seguente:

"Una volta che si incontrano in questo punto, il punto che viaggia di più sarà sempre più lontano da questo punto rispetto al punto che viaggia di meno. Quello che va più veloce è sempre più lontano dal punto in cui si sovrappongono rispetto al punto che non si può muovere". [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

Riteniamo che i processi promossi dalla richiesta di descrivere verbalmente (oralmente e per iscritto) le rappresentazioni proposte siano stati particolarmente significativi nella costruzione di particolari significati. Vediamone i principali.

- **Distinzione dei due punti:** ben presto gli studenti realizzano che entrambi i punti si muovono (a parte il caso della funzione costante!), ma solo uno dei due può essere trascinato direttamente. L'asimmetria della situazione sollecita gli studenti alla ricerca di un linguaggio adeguato per distinguere i due punti nel momento in cui si deve descrivere il loro movimento. I due punti sono stati etichettati in vari modi: A e B , x e y , e alla fine del percorso, x e fx ;

"quello che posso muovere" e "quello che non posso muovere";

"punto mobile (trascinante, indipendente)" e "punto fisso";

"punto sottostante" e "punto soprastante" (nelle rappresentazioni con due rette parallele, la retta con il punto indipendente era generalmente in una zona più bassa dello schermo rispetto all'altra).

La distinzione linguistica dei due punti è il primo passo nella formazione del significato di variabile dipendente e indipendente e di relazione funzionale e ha comunque richiesto un certo lavoro per passare dall'identificazione dei diversi comportamenti a una loro soddisfacente descrizione. Tale distinzione è stata resa necessaria dalla richiesta di descrivere il movimento dei punti ed è avvenuta in modi diversi: oltre ad una distinzione linguistica, come sopra riportato, gli studenti hanno autonomamente applicato delle modifiche con *GeoGebra*, provando a colorare, ingrandire o rinominare i due punti, per poterli meglio distinguere e in particolare per verificare se fossero sovrapposti o se uno dei due sparisse.

- **Relazione tra i due punti:** diventa ben presto fondamentale nella descrizione delle rappresentazioni esprimere che vi è una relazione tra un punto e l'altro e che questa relazione non è simmetrica. Gli studenti hanno descritto la relazione tra i due punti in termini di causalità, esprimendo il fatto che è il movimento di uno dei due punti a causare il movimento dell'altro e mai viceversa, utilizzando espressioni del tipo "quando..., allora...", "se... allora...". Il fatto che la retta su cui sono vincolati i due punti non sia inizialmente numerata contribuisce a portare l'attenzione sui movimenti possibili e ad evitare di concentrarsi sulla relazione numerica tra le variabili. Degno di nota il conflitto che è sorto nel momento in cui la variabile dipendente è stata chiamata il "punto fermo", quando è evidente che il punto non è fisso ed è possibile fare in modo che si muova (indirettamente). La discussione in

classe sull'uso delle parole ha stimolato gli studenti a prendere consapevolezza di cosa loro stessi intendessero con "punto fermo" e a rendere esplicito che la distinzione fondamentale è che uno dei due punti si muove "solo in conseguenza" del movimento dell'altro. Come scrive uno studente, "uno non si muove con il mouse, ma si muove quando muovo quell'altro".

Nei discorsi degli studenti, si osserva che nel tempo i riferimenti a quella che chiamiamo relazione di dipendenza sono via via più frequenti. Sotto ne verranno portati altri esempi.

- **Aspetti specifici della relazione funzionale:** Si tratta di alcune proprietà che sono specifiche della particolare funzione analizzata e che emergono dall'esplorazione delle rappresentazioni dinamiche e non sorprende che vengano quasi sempre espresse in termini di relazioni spaziali e temporali come per esempio le seguenti:

"Quando B si trova tra i numeri negativi A sta sopra al -1 . Quando B si trova tra i numeri positivi, A sta sopra all' 1 ". (B è la variabile indipendente) [$f(x)=1$ se $x > 0$, $f(x)=-1$ altrimenti; grafico dinamico con due rette parallele graduate].

"Finché A è da 0 in poi B esiste, quando A diventa un numero negativo B scompare in quel momento". (A è la variabile indipendente) [$f(x)=\sqrt{x}$; grafico dinamico con due rette parallele].

"I due punti si muovono contemporaneamente nello stesso verso". [$f(x)=2x$; grafico dinamico con una retta].

Un altro aspetto centrale nella definizione di funzione è quello di dominio. Per promuovere la formazione di significati relativi all'oggetto matematico "dominio di una funzione" sono state proposte funzioni con domini diversi. Nella costruzione del grafico dinamico di una funzione con dominio non coincidente con l'intero insieme dei numeri reali, il punto indipendente è libero di muoversi sull'intera retta e il punto dipendente scompare nel momento in cui il primo non appartiene al dominio. Questo comportamento è risultato del tutto inaspettato e anomalo agli occhi degli studenti, ed è stato utilizzato per sollecitare una discussione con lo scopo di preparare il terreno per la formazione del significato di dominio di una funzione.

A questo scopo sono state assegnate consegne con grafici dinamici di funzioni aventi come dominio una semiretta o degli intervalli o insiemi convessi con l'esclusione di alcuni punti, come la funzione $\frac{1}{x-4}$. L'esplorazione di queste rappresentazioni ha portato gli studenti a fare osservazioni come (la funzione è $f(x)=\sqrt{x}$ e B è il punto indipendente) "finché B è da 0 in poi A esiste, quando B diventa un numero negativo A scompare in quel momento" e a descrivere il dominio in base alla presenza del punto dipendente con espressioni come le seguenti:

"I valori di A per cui B esiste".

"Quello di sopra si muove solo in un certo arco di movimento del punto di sotto".

"Insieme di tutti i valori che permettono all'elemento di esistere".

"Gli elementi di B che esistono, A esiste a prescindere".

Oltre a queste, si ritrovano tracce di quelle che possiamo riconoscere come proprietà particolarmente interessanti delle funzioni reali di variabile reale. Molti esempi in que-

sto senso riguardano la crescita, riconoscibile nell'utilizzo di parole come "destra, sinistra, cresce, rallenta" le quali, sia in termini di spazio che di velocità, descrivono il comportamento della funzione e il suo andamento. Spesso gli studenti usano espressioni che fanno riferimento alle direzioni, concordi e discordi, dei due punti e possiamo riconoscere la crescita e la decrescenza negli intervalli in cui i punti hanno, rispettivamente, la stessa direzione oppure direzioni opposte.

Riportiamo, come esempio, alcune espressioni che gli studenti hanno utilizzato per descrivere il movimento dei due punti nel grafico dinamico della funzione $f(x) = 2x$:

"I due punti si muovono contemporaneamente nello stesso verso". [$f(x) = 2x$; grafico dinamico con una retta].

"Quando il punto B si sposta il punto A lo segue nella stessa direzione". (B indipendente, A dipendente) [$f(x) = 2x$; grafico dinamico con una retta].

Entrambe le descrizioni fanno riferimento al movimento concorde dei due punti e dunque alla crescita della funzione. Osserviamo che solo nella seconda affermazione i punti vengono distinti inserendo un riferimento alla dipendenza. Le frasi seguenti entrano ancora di più nel dettaglio e offrono una descrizione che potrebbe porre le premesse per la costruzione del significato di derivata.² Anche in questo caso si può notare il diverso trattamento linguistico dei due punti, omogeneo nel primo caso, di dipendenza nel secondo:

"Il punto A si muove più velocemente e quindi supera il punto B . Il punto A è sempre più lontano dal punto dove si incontrano rispetto al punto B ". (B indipendente) [$f(x) = 2x$; grafico dinamico con una retta].

"Man mano che il punto B si muove, A accelera fino a sorpassarlo". (B indipendente) [$f(x) = 2x$; grafico dinamico con una retta].

Le funzioni decrescenti (come $f(x) = 5 - x$, oppure $f(x) = |x|$ nella semiretta dei reali negativi) sono descritte in termini di opposte direzioni e con la simmetria tra i punti, utilizzando come riferimento il punto d'incontro tra i due punti e descrivendo il loro movimento come simmetrico rispetto a questo punto:

"I due punti si muovono contemporaneamente lungo la retta in modo tale che, muovendosi in senso opposto, sono simmetrici rispetto al loro punto di incontro". [$f(x) = 5 - x$; grafico dinamico con una retta].

"Se si trascina B verso destra, A viaggia in senso opposto". (B indipendente) [$f(x) = 5 - x$; grafico dinamico con una retta].

Con espliciti riferimenti alla velocità, alcuni studenti arrivano a dare descrizioni fini dell'andamento delle funzioni:

2. Non essendo tra gli obiettivi della sperimentazione, questo aspetto non è stato approfondito.

“Se il punto B si sposta verso sinistra A si muove più lentamente invece verso destra più velocemente”. (B indipendente) [$f(x) = \frac{1}{x-4}$, grafico dinamico con due rette parallele].

La funzione è $\frac{1}{x-4}$ e lo studente sta osservando il movimento dei punti quando la variabile indipendente si muove (nelle due direzioni) nella semiretta $(-\infty, 4)$. Nella seguente espressione, la funzione è $f(x) = \sqrt{x}$ (il fatto che quanto affermato dallo studente sia vero solo per $x \geq 1$ non riduce l'importanza della sua osservazione):

“Al movimento di B verso destra, A ha una velocità costante minore rispetto a B ”. (B indipendente) [$f(x) = \sqrt{x}$; grafico dinamico con una retta].

Molto accurate le seguenti descrizioni di due studenti della rappresentazione dinamica della funzione $f(x) = 2x$ in cui si valuta il rapporto tra le velocità dei due punti (nella seconda il rapporto tra velocità è stabilito numericamente):

“In questo caso il punto A ha una maggiore velocità quindi dopo che si sono sovrapposti ‘supera’ il punto B ”. (B indipendente) [$f(x) = 2x$; grafico dinamico con una retta].

“La velocità di A è il doppio di quella di B ”. (B indipendente) [$f(x) = 2x$; grafico dinamico con una retta].

In conclusione, le numerose e variegata descrizioni prodotte dagli studenti (*segni*, nel quadro della mediazione semiotica) possono diventare la base su cui costruire attività didattiche mirate alla costruzione di significati matematici relativi alle funzioni e alla gestione delle variabili nel grafico delle funzioni.

9 Attività da sperimentare

Attività da progettare in linea con le considerazioni teoriche e gli obiettivi sopra esplicitati sono numerose e possono riguardare diverse nozioni relative alle funzioni e ai loro grafici. Si tratta innanzitutto di andare a individuare come le proprietà classiche vengano rappresentate nelle diverse rappresentazioni.

Per esempio i massimi e i minimi locali, in un grafico dinamico con rette parallele (distinte o coincidenti) corrispondono a cambi di direzione durante il moto del punto rappresentante la variabile dipendente. Trascinando la variabile indipendente sull'asse x da sinistra a destra, se osserviamo che la variabile dipendente ha inizialmente lo stesso verso e a un certo punto “cambia verso”, “torna indietro” o “mette la retromarcia” per usare alcune espressioni degli studenti, possiamo concludere che quello è un punto di massimo (da stabilire poi se relativo o assoluto).

L'iniettività di una funzione corrisponde al fatto che il punto dipendente non passa più di una volta da una stessa posizione al variare del punto trascinabile direttamente, mentre nel grafico statico è necessario osservare il numero dei punti di intersezione tra il grafico stesso e ogni retta parallela all'asse delle ascisse. Il passaggio tra queste due rappresentazioni dell'iniettività è estremamente interessante e richiede ulteriori ricerche e osservazioni.

Risulta particolarmente interessante anche la composizione di funzioni. Possiamo prendere in considerazione la rappresentazione di due funzioni (in una o più delle modalità qui riportate) e chiedere di anticipare verbalmente l'andamento della funzione che si ottiene andando a sostituire la variabile dipendente della prima al posto della variabile indipendente della seconda. Se ognuna delle due funzioni è rappresentata con grafico dinamico, lo studente dovrà con il mouse trascinare le due variabili indipendenti in modo opportuno per esplorare la relazione andando a considerare la variabile indipendente della seconda solidale con la variabile dipendente della prima.

Particolarmente efficaci potranno essere quelle consegne in cui si chiede di anticipare una certa situazione. Per esempio, dopo aver esplorato un grafico dinamico con le rette parallele o perpendicolari, si chiede di prevedere quale può essere l'effetto della traccia attivata in certi punti al variare di altri (potrebbero essere la variabile indipendente, dipendente o il punto con le due variabili come coordinate). Interessanti e attualmente in studio sono le consegne per promuovere la transizione tra due rappresentazioni diverse, come la seguente: uno studente ha accesso ad un grafico dinamico con due rette parallele e interagisce solo verbalmente con uno studente che deve costruire il grafico in un piano cartesiano. I due studenti possono parlare ma il secondo non può vedere il grafico dinamico così come il primo studente non vede il disegno grafico del secondo. Possiamo anche forzare gli studenti a non vedersi tra loro in modo da ridurre l'intera comunicazione al registro verbale e far diventare la rappresentazione verbale dei due grafici un mediatore per tradurre uno nell'altro.

10 Conclusioni

L'attività didattica qui presentata ha avuto lo scopo di stimolare la produzione di segni legati a un particolare compito³ e di farli evolvere verso *segni matematici* relativi alle funzioni e alle loro rappresentazioni. Le scelte delle funzioni e delle consegne sono state ridiscusse e analizzate dopo ogni intervento in classe in modo da intrecciarle opportunamente al processo di evoluzione dei significati che via via emergevano nei testi degli studenti e nel corso delle discussioni in classe.

Le esplorazioni degli studenti hanno portato a descrizioni dettagliate molte delle quali, soltanto nella fase iniziale, si discostavano dagli aspetti matematici legati all'obiettivo, come per esempio il fatto che una certa retta non fosse trascinabile.

Come ci aspettavamo, gli studenti hanno in generale incontrato significative difficoltà ad esprimersi, dovute alla mancanza di termini specifici a loro disposizione e di strutture linguistiche adeguate. Alcuni studenti hanno poi identificato punti di riferimento dando anche delle etichette o costruendo nuovi oggetti geometrici con l'uso degli strumenti del software, al fine di rendere più efficace la comunicazione. Il continuo sforzo di verbalizzazione ha portato all'uso di particolari parole e in generale di segni che sono stati condivisi nella classe e che sono stati messi tra loro in relazione per costruire espressioni via via più complesse.

Certamente lo studio qui presentato è ancora a livello esplorativo e sono necessarie ulteriori ricerche su diversi fronti che sembrano suggerire potenzialità didattiche e di

3

3. Nella teoria della mediazione semiotica si indicano con il termine *segni situati*.

ricerca interessanti. In particolare dovremo analizzare gli effetti di un percorso didattico che a partire da quello presentato arrivi fino alla formulazione delle definizioni matematiche dei concetti in gioco. I risultati, al momento parziali, mostrano che gli studenti riportano tracce di pensiero dinamico nella formulazione e nell'interpretazione delle definizioni e sembrano essere particolarmente incoraggianti dal punto di vista dell'insegnamento-apprendimento.

Nonostante gli aspetti da chiarire e da approfondire, riteniamo che quanto presentato possa già essere fonte di un certo interesse (si veda anche Lisarelli, in stampa) e soprattutto possa essere utile agli insegnanti portando un punto di vista e un approccio da sperimentare e su cui riflettere.

Siti web di riferimento

NCTM: Teaching Students about Functions with Dynagraphs. <http://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teaching-in-Middle-School/Blog/Teaching-Students-about-Functions-with-Dynagraphs/> (consultato il 25.09.2017).

Technologically Embodied Geometric Functions <http://geometric-functions.org/curriculum/dynagraphs/introducing-dynagraphs/index.shtml> (consultato il 25.09.2017).

Bibliografia

- Antonini, S. (2011). Generating examples: focus on processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 43(2), 205-217.
- Bartolini Bussi, M. G. (2010). Quadro di riferimento. In F. Martignone (a cura di), *Scienze e tecnologie in Emilia-Romagna. Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna*, Napoli: Tecnodid Editrice, 40-55.
- Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A(3), 221-256.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic Mediation in the mathematics classroom. Artifact and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 746-805.
- Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Research Sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function. In *MAA Notes Online, Professional Development, Teaching and Learning, Research Sampler*. Disponibile in <https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function> (consultato il 25.09.2017).
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

- Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 317-333.
- Goldenberg, E. P., Lewis, P., & O'Keefe, J., (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington DC: MAA, 235-260.
- Hazzan, O., & Goldenberg, E. P. (1997). Student's understanding of the notion of function. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(3), 263-290.
- Lisarelli, G. (in stampa). Students' use of movement in the exploration of dynamic functions. In *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education*, Dublin, Ireland.
- MIUR (2010). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali". Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/decreto_indicazioni_nazionali.pdf (consultato il 25.09.2017).
- Sinclair, N., Healy, L., & Reis Sales, C., (2009). Time for telling stories: Narrative thinking with Dynamic Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41(4), 441-452.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers [Mathematics Education Library].
- UMI, MIUR, SIS, & MATHESIS (2003). *Matematica 2003*. Lucca, Italia: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza [edizione critica a cura di L. Meccacci].

Autori / Giulia Colacicco^{*}, Giulia Lisarelli[^] e Samuele Antonini[•]

^{*}Centrum Wiskunde & Informatica – Amsterdam, Olanda

[^]Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini" – Università di Firenze, Italia

[•]Dipartimento di Matematica "F. Casorati" - Università di Pavia, Italia

g.colacicco@cwi.nl, giulia.lisarelli@unifi.it, samuele.antonini@unipv.it