DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 93 - 116, DOI: 10.33683/ddm.22.12.5

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

I bambini e le rappresentazioni degli "oggetti" della geometria

Children and the representations of the "objects" of geometry

Ines Marazzani
Nucleo di Ricerca Didattica della matematica, Università di Bologna – Italia

marazzaniines@gmail.com

Sunto / Nell'articolo vengono descritte alcune esperienze didattiche effettuate nella scuola dell'infanzia (con bambini di quattro e cinque anni) e nella scuola primaria (con alunni di classe prima, quarta e quinta) sia per conoscere le rappresentazioni di oggetti della geometria scelte e usate spontaneamente dai bambini, sia per favorire la visualizzazione e il passaggio dal modo di vedere *iconico* al modo di vedere *non iconico* richiesto in geometria.

Parole chiave: visualizzazione; rappresentazioni; vocabolario tecnico; interazione sociale; attività geometriche classiche.

Abstract / The article describes some didactic experiences carried out in kindergarten (with four and five year old children) and primary school (with first, fourth and fifth grade students) both to learn about the representations of geometrical objects chosen and used spontaneously by children and to encourage visualization and the transition from the *iconic* way of seeing to the *non-iconic* way of seeing required in geometry.

Keywords: visualization; representations; technical vocabulary; social interaction; classical geometric activities.

1 Premessa

Come sappiamo, rispetto ad altre forme di conoscenza, la matematica ha una sua specificità: è impossibile poter entrare in contatto in modo diretto con l'oggetto matematico perché gli oggetti della matematica non sono accessibili percettivamente (Duval, 1993). In un famoso articolo che aprì la strada, anche in senso critico, a molte successive riflessioni, Chevallard (1991) definisce un *oggetto della matematica* come

> «[...] un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli, …), vale a dire, registro della scrittura».
>
> (Chevallard, 1991, p. 8, traduzione dell'autore)

In base a questo, la sola possibilità di avvicinamento a un oggetto matematico avviene attraverso artefatti e segni che, in situazione di insegnamento-apprendimento in una *comunità di pratica* (D'Amore, 2005; D'Amore & Godino, 2006), vengono scelti da chi è preposto a operare una *trasposizione didattica* (D'Amore, 1999) e proposti a chi è in fase di apprendimento. Non possiamo pensare, però, che chi si trova in fase di apprendimento non abbia la possibilità di ricorrere a rappresentazioni semiotiche spontanee per esprimere l'immagine che si è già costruito relativamente all'oggetto matematico di cui si discute. Potrebbe essere un'immagine completa, un'immagine parziale, un'immagine iniziale, un'immagine che possiamo conoscere, come dicevamo, grazie alle rappresentazioni che l'allievo può usare spontaneamente per comunicare le proprie idee relativamente a un oggetto della matematica. Didatticamente, quindi, appare di fondamentale importanza conoscere le rappresentazioni spontanee scelte e usate dagli allievi e basare su queste le proposte didattiche volte a far emergere l'oggetto matematico sia se si tratta delle rappresentazioni che ogni singolo allievo sceglie fra tutte quelle che vengono proposte da altri (ad esempio dagli insegnanti) e condivise in una classe intesa come comunità di pratica, sia se si tratta delle rappresentazioni che ogni singolo allievo propone come sue proprie rappresentazioni dell'oggetto.
Possiamo, quindi, dire che, per rappresentare esternamente gli oggetti della matematica, abbiamo a disposizione artefatti e segni, chiamati *mezzi semiotici di oggettivazione* della conoscenza (gesti, parole, simboli matematici, grafici ecc.) (Radford, 2008), i quali permettono di percepire l'oggetto matematico a diversi livelli di generalità – in base al mezzo semiotico che oggettiva il significato culturale che l'oggetto rappresenta – solo grazie a situazioni didattiche ricche e significative e nella continua interazione sociale con gli altri. È importante inoltre tener presente che individui in fase di apprendimento non sempre dimostrano di ricorrere spontaneamente alle rappresentazioni disponibili e non sempre riconoscono l'oggetto matematico in gioco se rappresentato attraverso l'uso di diversi registri semiotici contemporaneamente.
In linea con tali considerazioni, uno degli scopi delle esperienze didattiche proposte sia a bambini di quattro e cinque anni sia a bambini di sei-sette anni (classe prima) e di nove e dieci (classi quarta e quinta) e qui descritte è, quindi, quello di conoscere le rappresentazioni di oggetti della geometria scelte e usate spontaneamente dai bambini per poter basare l'azione didattica su ciò che ognuno ha costruito nel *fare matematica in modo ingenuo* (D'Amore, 2021) e per continuare a farlo collettivamente.
Le esperienze didattiche descritte sono state proposte a distanza di anni e a gruppi diversi di bambini delle età indicate: l'analisi delle prime esperienze realizzate ha portato a progettare ulteriori esperienze didattiche che man mano si sono articolate grazie all'analisi delle risposte date dai bambini coinvolti che via via venivano raccolte. Allo sviluppo delle esperienze proposte ha inoltre contribuito

un'analisi delle potenzialità offerte dalle costruzioni con riga e compasso, artefatti storico-sociali che mediano il pensiero (Radford, 2008), nell'avviare i bambini al ragionamento matematico e in particolare alla dimostrazione (Asenova, 2018; Asenova & Marazzani, 2020). Le esperienze realizzate, basandosi sulle rappresentazioni spontanee scelte dai bambini, hanno avuto due ulteriori scopi: favorire la visualizzazione intesa «come un modo di rappresentare esternamente, cioè al di fuori di noi, gli oggetti matematici» (Fandiño Pinilla & D'Amore, 2020, p. 43) e promuovere il passaggio dal modo di vedere iconico al modo di vedere non iconico richiesto in geometria (Duval, 2005).

2 Processi di oggettivazione e modi di vedere in geometria

I processi di oggettivazione, teorizzati all'interno della teoria dell'oggettivazione, «una teoria dell'apprendimento e dell'insegnamento» (Radford, 2015, p. 549, traduzione dell'autore), e l'approccio relativo alle condizioni cognitive all'apprendimento della geometria di Duval (2005) hanno guidato le analisi delle rappresentazioni spontanee usate dai bambini e le progettazioni delle successive esperienze didattiche proposte nelle classi sia della scuola dell'infanzia, sia della scuola primaria.

2.1 Processi di oggettivazione

Per entrare nell'idea di *processo di oggettivazione*, inteso, nella teoria dell'oggettivazione, come trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza, seguiamo la definizione che ne dà Radford:

> «Il termine oggettivazione è composto di due parole: *ogget+tivazione*. La prima viene da *obietare*, che significa "mettere qualcosa davanti a qualcuno". *Facere* significa "fare", di modo che, etimologicamente oggettivazione significa "far mettere qualche cosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire". Nel nostro contesto, oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione».
>
> (Radford, 2005, p. 203)

Il *processo di oggettivazione* ci permette, quindi, di mostrare un oggetto della matematica a qualcuno che, nel nostro caso, è in fase di apprendimento, affinché possa entrare in contatto e interagire con questo e apprendere.
Seguendo Radford (2008) pensiamo l'apprendimento come un processo legato alle pratiche sociali culturalmente mediate dai mezzi semiotici di oggettivazione, un processo grazie al quale è possibile entrare in contatto con oggetti della matematica, rappresentare oggetti della matematica, acquisire sempre più familiarità con essi per entrare di nuovo in contatto con questi a livelli diversi di generalità in processi in continua evoluzione, in processi di trasformazione attiva di oggetti culturali in oggetti di coscienza. Tali azioni, dunque, determinano processi di apprendimento chiamati *processi di oggettivazione* (Radford, 2002, 2005).
L'oggettivazione è un *processo* incompiuto e senza fine, che effettuiamo *con gli altri*, «indipendentemente dal fatto che gli altri siano presenti, faccia a faccia, o a distanza, virtualmente, o attraverso il linguaggio, o artefatti (libri o altri elementi culturali mediatori)» (Radford, 2015, p. 551, traduzione dell'autore), nel corso del quale chi è in fase di apprendimento viene progressivamente a conoscenza di significati culturali e forme di ragionamento e di azione storicamente costituiti, in un continuo dia-

logo tra soggetto e oggetto che si modificano reciprocamente. A proposito di quest’ultimo elemento, Radford (2015) precisa quanto segue:

> «Nel corso dell’apprendimento, il soggetto entra in contatto con il sapere culturale e, così facendo, da un lato incide sul sapere culturale attraverso l’evento sempre nuovo della sua attualizzazione e, dall’altro arriva a conoscere e riconoscersi in un processo riflessivo che chiamiamo soggettivazione. La soggettivazione è il farsi del soggetto, la creazione di una particolare (e unica) soggettività resa possibile dall’attività in cui si realizza l’oggettivazione».
>
> (Radford, 2015, p. 553, traduzione dell’autore)

2.2 Modi di “vedere” in geometria: modo *iconico*

Se i processi di oggettivazione sono focalizzati ad oggetti geometrici, occorre considerare quelli che Duval (2005) chiama “modi di vedere” in geometria. Le prime esperienze geometriche che permettono agli allievi di riconoscere oggetti bidimensionali, nominarli, descriverli notando somiglianze e differenze, e identificando alcune loro caratteristiche avvengono a livello percettivo e richiedono all’alunno un modo *iconico* (Duval, 2005) di vedere in geometria. Tale modo di vedere si caratterizza con l’operazione di riconoscimento delle forme a partire da qualità visuali come, ad esempio, quella di un contorno. Infatti, a guidare lo sguardo in quella che Duval (2005) chiama *visualizzazione iconica* sono gli aspetti topologici, legati alla percezione delle forme degli oggetti nella realtà, e gli aspetti metrici. Per fare un esempio, nel quadrato, la congruenza dei lati può essere verificata solo se se ne conosce la misura e attira l’attenzione di chi osserva non per dedurre altre caratteristiche del quadrato, ma solo perché, grazie a questa, è possibile conoscere la misura del perimetro e della superficie.
Il lungo processo storico di oggettivazione delle figure geometriche passa anche attraverso la necessità pratica, legata alla vita di tutti i giorni, di misurare: misura di distanze, misura dell’estensione della superficie di terreni, misura dell’ampiezza di angoli per poter ricostruire confini distrutti da inondazioni di fiumi, misura della lunghezza dei lati di una figura disegnata come schema per la costruzione di templi ecc.
Le esperienze *sensuali* e *pratiche* (Radford, 2008) di misurazione hanno accompagnato l’uomo fin dalle più antiche civiltà, si sono saldate nel linguaggio e hanno contribuito da sempre a sostenere le argomentazioni nella risoluzione di problemi pratici. Ne abbiamo esempi nelle tavolette babilonesi e nei papiri egizi (D’Amore & Sbaragli, 2017).
Fra le attività scolastiche proposte anche ad alunni molto piccoli ci sono quelle che prevedono l’apprendere a misurare; per esempio, capire che cosa significa “unità di misura”, capire “come” si misura, “che cosa” si può misurare ecc. Tra queste troviamo anche quelle attività che trattano la scelta della procedura e dello strumento più adatto a seconda del tipo di misurazione considerata (D’Amore et al., 2021).
Ma in attività che richiedono di misurare (la lunghezza dei lati di un quadrato, ad esempio), le proprietà delle figure vengono mobilizzate come «criteri di selezione per le misurazioni da effettuare. Sono utili solo se si riferiscono a una formula che consente un calcolo» (Duval, 2005, p. 9, traduzione dell’autore) e non per dedurre altre proprietà.
La modalità di *visualizzazione iconica* non permette, quindi, di stabilire relazioni tra le differenti proprietà degli oggetti geometrici. È per questo che, secondo Duval (2005), tale modo di vedere non può essere considerato proprio della geometria, anche se le forme osservate sono chiamate “euclidee”. Tuttavia, per l’importanza che racchiudono le riflessioni topologiche e metriche, possiamo considerare il modo *iconico* di vedere in geometria come un primo passaggio, fondamentale per la costruzione di competenze geometriche; competenze che non possono essere legate, però, alla sola visualizzazione iconica. Infatti, se le richieste di azioni sulle figure fossero sempre e solo relative alla visualizzazione del contorno delle figure, gli alunni si troverebbero in difficoltà nella gestione delle proprietà concettuali e matematiche degli oggetti della geometria.

È per questo che al modo di vedere iconico deve presto essere affiancato il modo di vedere in geometria che Duval (2005) chiama *non iconico* che non focalizza lo sguardo sugli aspetti topologici o metrici, ma sulle proprietà delle figure. È, infatti, possibile proporre esperienze didattiche che guidano lo sguardo verso la *visualizzazione non iconica* (Duval, 2005) anche a bambini di giovane età in quanto tale modo di vedere non è legato all'età degli allievi, poiché «è il compito che il soggetto deve svolgere a imporre la necessità di interpretare gli oggetti geometrici in un modo determinato o in un altro» (Asenova, 2018, p. 177).

2.3 Modi di "vedere" in geometria: modo *non iconico*

Il modo *non iconico* (Duval, 2005) di vedere in geometria «non richiede particolari competenze matematiche, esso è, al contrario, secondo Duval, un passaggio obbligato per accedere a tali conoscenze» (Asenova, 2018, p. 179).

Tale modo di vedere in geometra richiede un processo di decostruzione dimensionale delle figure geometriche in unità figurali di dimensione inferiore e permette di focalizzare lo sguardo sulle proprietà geometriche delle figure che, a loro volta, guideranno lo sguardo nell'attività di ricostruzione della figura stessa.

Per esempio, il quadrato, oggetto 2D che osserveremo anche negli esempi delle attività proposte ai bambini, può essere decostruito in enti di dimensione inferiore come proposto in Figura 1. I vertici sono enti 0D: punti ottenuti come intersezioni di rette. Le diagonali sono enti 1D: segmenti appartenenti a rette, enti 1D, e il loro punto d'intersezione è il punto medio. Gli assi di simmetria sono enti 1D: segmenti appartenenti a rette, enti 1D. I lati sono enti 1D: segmenti appartenenti a rette, enti 1D, parallele a due a due e perpendicolari fra loro.

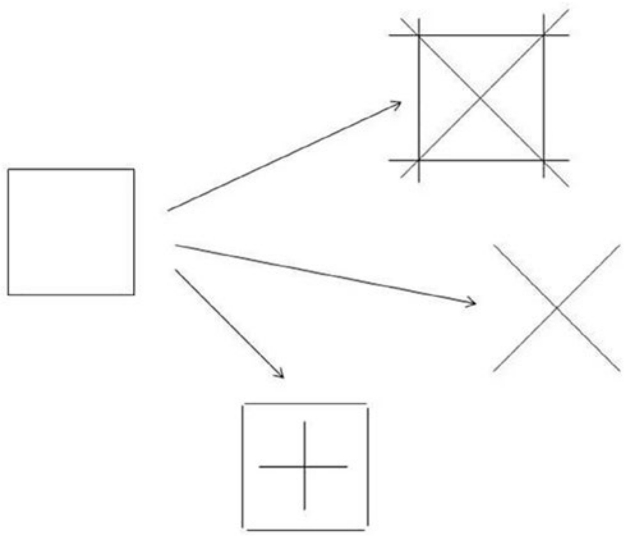

Figura 1. Decostruzione dimensionale del quadrato.

Inoltre, nella «rete di linee tracciate ci sono tante forme quanti sono i contorni chiusi possibili» (Duval, 2018, p. 217, traduzione dell'autore), riconoscibili sia per sovrapposizione sia per giustapposizione, che permettono alla figura stessa di svolgere un ruolo euristico nella risoluzione di un problema.

Continuando con il nostro esempio: la decostruzione dimensionale del quadrato ci permette di scomporre il quadrato stesso in quattro quadrati che possono essere riconfigurati in un rettangolo (Duval, 2018), oppure di scomporlo in due triangoli che possono essere riconfigurati in un parallelogrammo, oppure in otto triangoli che possono essere riconfigurati in un trapezio, oppure in quattro triangoli che possono essere riconfigurati in un triangolo (Figura 2).

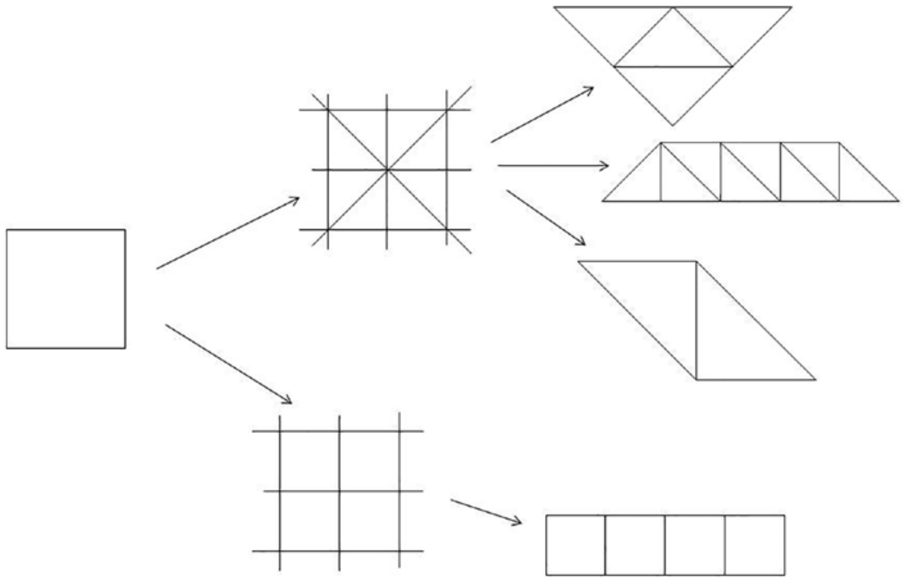

Figura 2. Possibili riconfigurazioni del quadrato.

Per fare in modo che l'allievo adotti il modo *non iconico* di vedere in geometria occorre, innanzi tutto, permettergli di cimentarsi in attività di decostruzione delle figure geometriche in tracciati principali e ausiliari che si possono disegnare con strumenti e in attività di descrizione dell'ordine delle azioni necessarie per poter ricostruire tali figure.

Ciò è possibile perché le figure geometriche, con le quali gli alunni di giovane età (intendiamo: fin dalla scuola dell'infanzia) si rapportano, corrispondono a figure euclidee elementari e a configurazioni di figure elementari, e possono essere costruite grazie a determinati strumenti [*artefatti storico-sociali* (Radford, 2008)]: la riga (non graduata) e il compasso (con i più piccoli il compasso Bullseye Safe-T e il compasso per scultura), artefatti senza i quali sarebbe impossibile verificare le proprietà delle figure. Il compasso, per esempio, è un artefatto che «media il concetto di circonferenza in quanto incorpora strumentalmente e culturalmente la sua definizione sintetica come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro» (Asenova et al., 2020, p. 13).

2.4 Il vocabolario tecnico

Per poter discutere delle figure della geometria, anche a livello elementare, occorre inoltre possedere un buon *vocabolario tecnico*, formato da termini che sono oggetti della geometria, che permettono a chi li possiede di sostenere le argomentazioni. Infatti, la ricchezza di termini capaci di supportare la visualizzazione permette di affinare lo sguardo e di organizzare le ipotesi che lo accompagnano creando un processo a spirale che favorisce la visualizzazione geometrica fin dai primi anni di scolarità. È per questo che, nel lungo processo in cui la lingua (anche infantile) sostiene la visualizzazione geometrica, si collocano attività didattiche che portano all'uso di termini della geometria; ed è sempre per questo che a scuola si pone estrema attenzione sia nel (ri)proporre tali termini ai bambini, disambiguandoli e caricandoli di significati condivisi in matematica, sia nel richiedere di usarli in modo sempre più corretto e coerente da un punto di vista matematico e semantico. Sicuramente, però, «ciò non significa scimmiottare la lingua formale della matematica: che la lingua resti quella infantile» (D'Amore, 2020, p. 40).

Come sostiene Duval (2005) possiamo introdurre il vocabolario tecnico della geometria, fondamentale per poter esprimere ciò che è necessario discernere visualmente in una figura, grazie ai 23 ορoι (Euclide, 2007) che aprono il *Libro I* degli Elementi che «sembrano essere le descrizioni (non definizioni) degli oggetti di cui l'opera tratta» (D'Amore & Sbaragli, 2017, p. 241) e che «costituiscono l'inven-

tario del corpus semantico necessario per tutto il lavoro di Euclide» (Duval, 2005, p. 31, traduzione dell'autore).
I 23 οροι euclidei accompagnano lo sguardo verso le proprietà invarianti delle figure osservate lasciando da parte ciò che riguarda le grandezze misurabili. «La loro funzione è quella di sostenere l'articolazione del discorso matematico con l'organizzazione della percezione visiva delle forme» (Duval, 2005, p. 31, traduzione dell'autore).
I termini del *vocabolario tecnico* della geometria decisamente complesso vengono proposti agli alunni fin dai primi anni di scolarità ma, a volte, già fanno parte delle parole conosciute e usate in modo intuitivo dai bambini, parole che hanno appreso grazie a varie esperienze di vita (giochi con i compagni più grandi, gite con i genitori e i nonni ecc.). I bambini, per esempio, sentono e usano le parole *punto*, *retta*, *piano* ecc. anche se a volte i significati attribuiti a tali termini hanno poco a che fare con la matematica. E ancora, *lato*, *quadrato*, *angolo*, *cerchio* sono termini che i bambini usano in modo spontaneo sin dai primi tentativi condivisi per poter descrivere una figura geometrica a sé stessi e per poter discutere fra loro e con l'insegnante.

3 Attività

Le esperienze a cui facciamo riferimento in questo articolo sono il risultato di attività geometriche *classiche*, ossia fondamentali, tradizionali, di base (D'Amore et al., 2021), e di attività con software geometrici che sono state possibili grazie alle prime. Sono state scelte attività in cui si realizza il *processo di oggettivazione*: non un semplice fare qualche cosa che ha a che fare con la matematica, ma attività di problem solving e problem posing che hanno lo scopo di attualizzare la conoscenza (Radford, 2015), sapientemente progettate dall'insegnante.
Nelle varie attività gli alunni coinvolti sono passati dall'osservazione del reale e dalla manipolazione di oggetti tridimensionali, alla rappresentazione nel registro linguistico e nel registro grafico degli oggetti osservati [descrizioni orali, trascritte dagli insegnanti e/o dagli stessi bambini, disegni di oggetti tridimensionali (3D) sul foglio di carta (2D), costruzioni con riga e compasso], alla discussione, al confronto fra pari e con l'insegnante, allo scambio di idee e di interpretazioni, al parlare di geometria, alla costruzione e all'arricchimento del *vocabolario tecnico* (Duval, 2005) e, di nuovo, all'osservazione del reale che poteva essere visto con "occhi nuovi". La costruzione e l'arricchimento del vocabolario tecnico sono necessari per poter parlare di geometria, infatti, la ricchezza di termini capaci di supportare la visualizzazione ha permesso agli alunni coinvolti nelle esperienze qui descritte in parte, di affinare lo sguardo e di organizzare le ipotesi che lo accompagnano, creando quel processo a spirale che sostiene la visualizzazione geometrica fin dai primi anni di scolarità.
Per la costruzione di tale *vocabolario tecnico*, che non può essere costituito da definizioni imparate a memoria, gli alunni con i quali abbiamo lavorato, sono stati impegnati in lavori di decostruzione delle figure e di costruzione delle figure con strumenti adeguati (riga, compasso e software di geometria dinamica) nei quali ogni linea prodotta è stata accompagnata da un'espressione in lingua che ha permesso di riconoscere ciò che era stato tracciato. Le descrizioni di tracciati che hanno accompagnato il lavoro di costruzione sono diventate un gioco in classe che ha spinto gli alunni a voler giocare sempre di più con le figure della geometria.
Si è scelto di proporre delle attività matematiche che non prevedono la ripetizione mnemonica di una definizione, ma che, come dicevamo, hanno impegnato gli alunni in lavori di decostruzione delle figure e di costruzione delle figure. Le figure sono state costruite inizialmente a mano libera, poi con riga e compasso, infine con software di geometria dinamica. Ogni disegno, ogni linea tracciata, ogni costruzione sono stati accompagnati da una descrizione fatta dal bambino che eseguiva il lavoro;

ogni descrizione è stata condivisa e discussa in classe, è stata vagliata ed è stata accettata come descrizione soddisfacente per quel momento e per quel gruppo classe.

3.1 Scelte progettuali

Nelle sezioni di quattro e cinque anni della scuola dell'infanzia e nelle classi quarte e quinte della scuola primaria[1] con le quali abbiamo agito, la progettazione delle attività ha seguito un iter di lavoro indirizzato dalle *conoscenze ingenue* e dalle *strategie ingenue* messe in atto dagli alunni; tali conoscenze e strategie sono emerse dai singoli soggetti, sono state condivise e sono diventate patrimonio comune da cui evolvere nel processo di oggettivazione.
In base ai saperi ingenui osservati, sono stati selezionati alcuni problemi da proporre agli alunni delle diverse sezioni e delle diverse classi; problemi che, tenendo conto delle conoscenze ingenue pregresse dei bambini, avrebbero permesso loro di apprendere qualcosa di nuovo e avrebbero offerto la possibilità di riflettere matematicamente in modi diversi. In base alle soluzioni date ai problemi sono stati selezionati nuovi problemi da proporre, i quali, come i primi, potessero permettere un'evoluzione nel processo di oggettivazione facendo incontrare l'oggetto a un nuovo livello di generalità.
Gli insegnanti coinvolti hanno proposto il problema selezionato ai bambini e hanno affidato loro il compito di risolverlo accettando sia risposte date dal singolo, sia risposte date da gruppi costituiti e/o costituitisi in sezione/classe.
Nelle diverse esperienze fatte, spesso i bambini hanno iniziato il lavoro individualmente; poi, in modo autonomo, si sono confrontati con gli altri.
Gli insegnanti hanno seguito le discussioni chiedendo chiarimenti, ponendo domande, fornendo feedback, tentando continuamente di svincolarsi e svincolare dalle maglie del contratto didattico (Brousseau, 1980) gli alunni che rispondevano alle domande e che venivano reindirizzati dai feedback forniti.
In molti casi, sia gli alunni sia gli insegnanti coinvolti hanno contribuito a creare un clima di collaborazione e interazione volto all'accoglienza, alla cura dell'altro e alla valorizzazione dei contributi di ognuno. Essere protagonisti del lavoro in classe, modificare le proprie convinzioni e le proprie condizioni rispetto al sapere, accogliendo e facendo propri i punti di vista degli altri, essere coinvolti in discussioni nelle quali il contributo di ognuno è prezioso, ha portato alla possibilità di mostrare il proprio pensiero senza il timore di sbagliare. Per ottenere questo clima, nelle classi di scuola primaria, è stato fondamentale tentare di affrancare gli alunni dall'attesa della valutazione individuale: il "voto", richiesto da molti bambini sin dai primi giorni di scuola nelle classi prime della scuola primaria, come fosse un trofeo (se positivo) da riportare a casa perché presumibilmente atteso in famiglia, è stato man mano dimenticato.
Tuttavia, la ricerca di consenso e di stima da parte dei compagni di classe e/o dell'insegnante ha avviluppato insegnanti e alunni, mostrando che anche nella scuola dell'infanzia «il contratto didattico esiste già, legato non tanto alla necessità di valutazione positiva, quanto al desiderio di conseguire, ottenere, il consenso degli adulti o l'omologazione al resto della classe» (D'Amore, 2021, p. 31).
Alcuni alunni hanno continuato a cercare consensi degli adulti e degli altri bambini e hanno orientato su questo il loro agire. Per loro è stata forte la necessità di avere indicazioni su quali fossero le risposte valide e quali no; quali fossero gli artefatti da usare, quali no; quali le domande permesse, quali no ecc. In questi casi, la possibilità di fare matematica in modo ingenuo è venuta meno e sono venute meno le risposte spontanee, compromettendo un apprendimento significativo.

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Cantone Ticino.

4 Alcune esperienze con i bambini

In questo paragrafo si riportano alcune delle attività di problem solving e problem posing proposte: dalla costruzione del vocabolario tecnico passeremo alla descrizione di attività che hanno avuto come oggetto di discussione il quadrato, infine alla descrizione di attività che hanno avuto come oggetti di discussione il triangolo equilatero e il rombo.

4.1 Costruzione del vocabolario tecnico

Gli alunni, osservando le costruzioni di figure geometriche che loro stessi avevano fatto, spinti dalla volontà di comunicare agli altri ciò che avevano in mente e di farlo capire nel modo da loro ritenuto più semplice possibile, hanno dato descrizioni dei termini usati; ne riportiamo alcune date da alunni di nove-dieci anni, relative alla seconda delle quattro categorie in cui Duval (2005) suddivide i termini specifici usati nelle costruzioni euclidee in base alla eterogeneità semantica e alla dimensione nella quale si trovano, ossia «termini denotativi degli oggetti di studio (elementi 1D: *retta*, *segmento*, *curva*; elementi 2D: *triangolo*, *quadrato*, *parallelogramma*, *poligono*, *circonferenza*; 3D: *piramide*, *tetraedro*, *cubo*, *prisma*, *poliedro*, *sfera*)»; inseriremo alcuni nostri commenti.
I termini che riportiamo di seguito a mo' d'esempio sono *retta*, *segmento*, *poligono*.

Retta. Il primo termine di cui riportiamo la descrizione data da un'alunna di classe quarta primaria è *retta*.

E.[2]: «È una linea dritta che posso prolungare quanto voglio».

Tale descrizione è stata accolta dalla totalità degli alunni della classe ed è stata usata nelle discussioni successive. Per questo, esaminando la successione di concezioni provvisorie relativamente al concetto di *retta* proposta da D'Amore (2001), possiamo affermare che gli alunni hanno superato la concezione provvisoria di «*retta primitiva*: segmento (le sue caratteristiche sono: l'esser dritto e sottile, e la sua indipendenza nominale dalla lunghezza)» (D'Amore, 2001, p. 311) e, per un passaggio di tipo superposizione,[3] sono nella concezione provvisoria di retta euclidea, che nell'ορος V del Libro I di Elementi viene descritta come segue: «Linea retta è quella che è posta ad uguale livello rispetto ai punti su sé stessa» (Euclide, 2007, p. 779).
C'è da notare che, come afferma Frajese nel commento agli Elementi (Euclide, 1970, p. 48), «la linea retta non viene concepita da Euclide come *attualmente* infinita, ma come infinita *potenzialmente*: cioè nel senso che qualunque retta limitata [segmento] può sempre essere prolungata» (Euclide, 1970, p. 48).
Il cammino da fare per la costruzione del concetto di *retta* è lungo. Siamo quasi alla fine della scuola primaria e molto si parlerà ancora di *retta* sia nella scuola primaria sia nei successivi ordini scolastici.

Segmento. Il secondo termine di cui riportiamo la descrizione data da un alunno, anch'egli di classe quarta primaria, è *segmento*.

G.: «È una parte della linea retta: ha un inizio e ha una fine. Quando devi disegnare un segmento con il righello puoi disegnare una linea retta e poi puoi prendere due punti, uno per l'inizio del segmento e uno per la fine del segmento. Se vuoi li puoi chiamare A e B così so che cosa vuoi dire».

2. Vengono utilizzate le lettere maiuscole per indicare il nome di bambini che hanno preso parte all'esperienza.
3. «[…] superposizione: ogni concezione provvisoria aggiunge e integra la precedente cioè la comprende e le aggiunge qualcosa sovrapponendosi ad essa» (D'Amore, 2001, p. 310).

L'alunno descrive la figura presa in esame immaginando di disegnarla e descrive il disegno immaginato nel registro della lingua per permettere a chi ascolta di rappresentare mentalmente l'oggetto della matematica di cui si sta parlando.

Poligono. Un alunno di classe quarta primaria fornisce la seguente descrizione relativa al terzo termine che riportiamo come esempio: *poligono*.

F.: «È una linea spezzata chiusa che puoi disegnare con il righello. Quando lo disegni non ti devi preoccupare… disegna linee rette che si incrociano; se vuoi puoi chiamare i vertici A, B, C, e anche D, E… finché ti servono».

Anche questo alunno descrive la figura presa in esame immaginando di disegnarla e descrive il disegno immaginato nel registro della lingua per permettere a chi ascolta di rappresentare mentalmente l'oggetto della matematica di cui si sta parlando.
La descrizione intuitiva proposta da F. ci conduce direttamente a quella euclidea.
Ορος XIX: «Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, trilatere quelle da tre, quadrilatere quelle da quattro, polilatere quelle comprese da più di quattro rette» (Euclide, 2007, p. 781).
Inoltre, grazie alla sua descrizione, possiamo ipotizzare che si stia avvicinando al superamento della prima legge dell'organizzazione e del riconoscimento percettivo delle forme, che Duval (2005, p. 23, traduzione dell'autore) indica come «la priorità immediata e stabile delle unità figurative 2D rispetto alle unità figurative 1D» e àncora lo sguardo al contorno delle figure.

> «Ciò significa non solo che si vede un parallelogrammo prima di vedere quattro lati, ma anche che tutte le linee che sono percepite all'inizio come forma del contorno della superficie, rimangono, in un certo senso, inseparabili da questo riconoscimento visivo elementare. I lati di un poligono rimangono i bordi non separabili della superficie del contorno».
> (Duval, 2005, pp. 23–24, traduzione dell'autore)

Il mancato superamento di questa fase, quindi, àncora lo sguardo al contorno della figura e «rende inconcepibile e invisibile il processo di decostruzione dimensionale delle forme» (Duval, 2005, p. 24, traduzione dell'autore), ma la descrizione data da F. e riportata sopra ci mostra che un bambino frequentante la classe quarta della scuola primaria è avviato al suo superamento.
C'è da notare, ancora, la rassicurazione che propone a chi dovrebbe/potrebbe essere impegnato nell'operazione di costruzione della figura suggerendo di disegnare linee rette che si incrociano. Consiglia, quindi, di tracciare le linee che non appartengono alla figura da costruire: i "tracciati ausiliari" (Duval, 2005) che sono di supporto, vanno tracciati e non vanno cancellati. Troviamo lo stesso suggerimento nella descrizione del *segmento* fatta da G. quando invita chiunque volesse disegnarlo a tracciare una retta, poi a prendere due punti, gli estremi del segmento.
L'analisi di tale suggerimento ci porta ad affermare che gli alunni dimostrano di non avere quella che Duval (2005, p. 17, traduzione dell'autore) indica come la «disastrosa abitudine di cancellarli, una volta ottenuta la figura da costruire».

4.2 Che cos'è un quadrato?

A bambini di quattro-cinque anni che frequentano la stessa sezione di scuola dell'infanzia è stata posta la domanda: «Che cos'è un quadrato?».
Per rispondere alla domanda alcuni bambini hanno spontaneamente usato i gesti e il movimento per rendere visibile l'oggetto in questione.

A.: «È una forma così… [alza il dito indice a tracciare nel vuoto quattro tratti di linea consecutivi a formare la figura]».

J.: «È come quello [indica un cartellone rettangolare appeso alla parete], ma un po' più "compatto" [pronunciando la parola "compatto" alza le mani portandole davanti al viso, le mette una di fronte all'altra e le avvicina senza farle toccare]».

D.: «È come questo [prende un pezzo a forma di cubo dalla scatola delle costruzioni e lo mostra agli altri]».

La stessa domanda è stata posta anche ad altri bambini di quattro-cinque anni e anche loro hanno scelto spontaneamente i gesti e il movimento per rappresentare l'oggetto quadrato, ma l'insegnante, per aiutare i bambini nel processo di oggettivazione, ha proposto una nuova situazione; si è rivolta loro dicendo: «Una mia amica ha sentito parlare di quadrato, non sa che cos'è e vorrebbe tanto saperlo; potete aiutarla?».
I gesti e il movimento sono stati giudicati dai bambini mezzi non idonei perché la persona a cui si stavano rivolgendo (l'amica dell'insegnante) non era presente, sono quindi passati a usare il disegno e il linguaggio.
F. propone due disegni e commenta:

F.: «Questo non è un quadrato [indica il primo disegno, Figura 3a]. Un quadrato ha 4 lati uguali come questo e ha 4 "punte" uguali [lo disegna di nuovo, Figura 3b]».

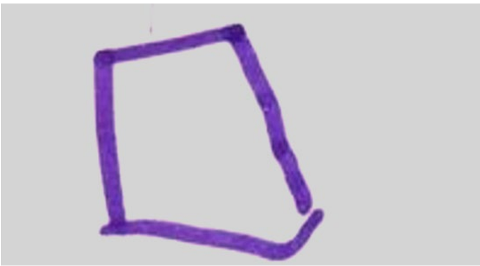

Figura 3a. Primo disegno di F.

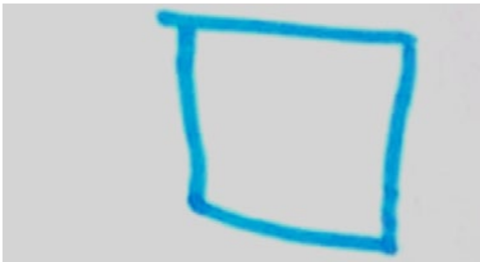

Figura 3b. Secondo disegno di F.

L.: «È un quadrato e ha 4 lati uguali [disegna quattro tratti di linea vicini, Figura 4a]. Ma questi sono diversi; allora lo disegno di nuovo» (Figura 4b).

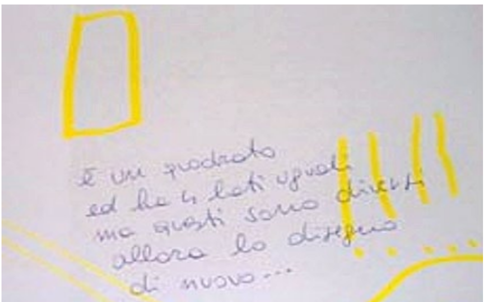

Figura 4a. Primo disegno di L.

Figura 4b. Secondo disegno di L.

P.: «Questo è un quadrato e ha 4 lati uguali e 4 angoli uguali» (Figura 5).

Figura 5. Disegno di P. in cui vengono indicati gli angoli.

R., un bambino di 4 anni, propone la sua risposta:

R. : «La tua amica non lo sa? Allora glielo spiego. Il quadrato ha quattro righine e quattro angoli uguali. Te lo disegno» (Figura 6a).

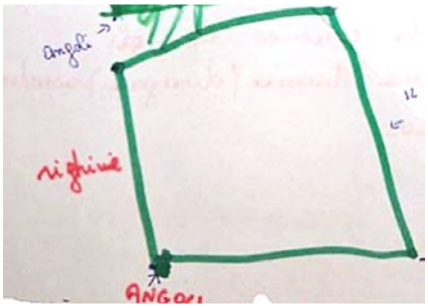

Figura 6a. Primo disegno di R. Mentre R. indica le righine e gli angoli l'insegnante scrive e indica con la freccia ciò che sta indicando il bambino.

R.: «Non è tanto bellino, vero? Le righine non sono proprio uguali. Gli angoli sono questi. Diciamo che ti faccio un quadrato, ma piccolo [disegna il "quadrato piccolo"] ecco, questo sì, è un quadrato! (Figura 6b). E questo [indica il primo disegno fatto (Figura 6a)], dì alla tua amica che un rettangolo».

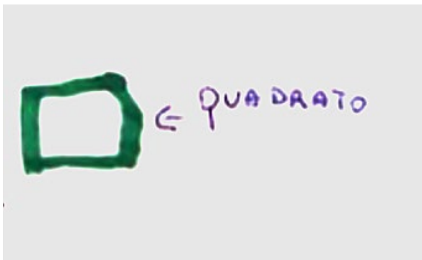

Figura 6b. Il quadrato disegnato da R.

Dalle dichiarazioni dei bambini emerge l'individuazione di alcune proprietà dell'oggetto matematico in questione, su una di queste focalizziamo l'attenzione: avere i lati della stessa lunghezza. È una proprietà del quadrato appresa in gruppi sociali diversi: la scuola, la famiglia, gli amici…, ma non appare ancora la necessità di verifica né la ricerca di strumenti idonei per farlo.

La necessità di tenere sotto controllo tale proprietà dell'oggetto geometrico *quadrato* evidenziata è emersa, nel nostro caso, in bambini dell'ultimo anno di scuola dell'infanzia, dello stesso gruppo di cui abbiamo appena riportato le dichiarazioni, perché sollecitati dall'insegnante con una nuova sfida: «Che cosa si può fare per far capire alla mia amica che i lati del quadrato sono tutti uguali?».
La soluzione scelta dai bambini è stata quella di misurare personalmente, in qualche modo, la lunghezza dei lati del quadrato (**Figure 7-10**).

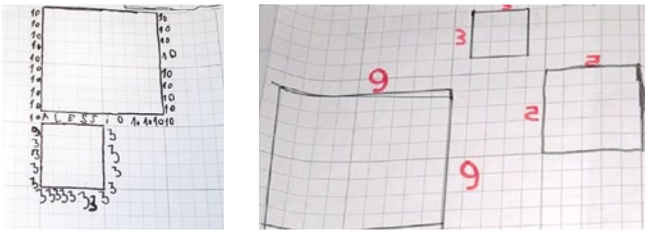

Figure 7, 8. I bambini contano i lati-quadretti del foglio usato per rappresentare il quadrato.

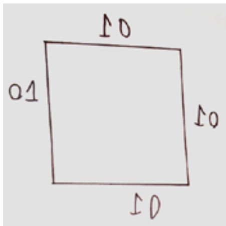

Figura 9. Il bambino chiede all'insegnante di aiutarlo a misurare i lati del quadrato e sceglie il righello come oggetto per effettuare questa misura; dopo aver misurato insieme all'insegnante, il bambino scrive il numero che corrisponde alla misura del lato.

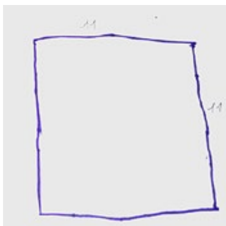

Figura 10. Il bambino segna su ogni lato del quadrato dei punti ritenendo che siano alla stessa distanza uno dall'altro, poi li conta e chiede all'insegnante di scrivere il numero che, a suo avviso, corrisponde alla lunghezza dei lati.

Misurare i lati del quadrato è stata la soluzione scelta anche dagli alunni di una classe quinta primaria a cui è stata posta la stessa domanda (**Figura 11**).

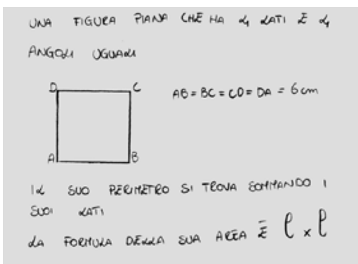

Figura 11. Risposta di un'alunna della classe quinta della scuola primaria alle domande: «Che cos'è un quadrato?», «Come si fa a capire che i lati del quadrato sono tutti uguali?».

Possiamo osservare che sia gli alunni della scuola dell'infanzia, sia gli alunni della classe quinta della scuola primaria intervistati, sono fermi al modo di vedere in geometria che, come abbiamo detto, Duval chiama *iconico*. Infatti, per gli alunni della classe quinta primaria a cui abbiamo fatto riferimento, la congruenza dei lati del quadrato non è rilevante per dedurre altre proprietà, ma solo perché conoscendone la misura è possibile misurarne il perimetro o calcolare la sua area.

4.3 Disegno di un quadrato

A bambini di cinque anni frequentanti l'ultimo anno di scuola dell'infanzia e a bambini di sei anni nei primi giorni di frequenza della classe prima primaria è stato mostrato il disegno di un quadrato costruito con riga e compasso (Figura 12) ed è stato chiesto loro che cosa vedessero.

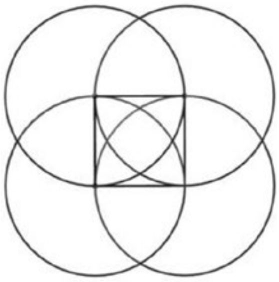

Figura 12. Disegno di un quadrato costruito con riga e compasso proposto ai bambini.

Riportiamo il confronto che ha visto protagonisti tre alunni di classe prima primaria.

M.: «C'è una stella».
A.: «Sì! È il simbolo cristallo. Vedi c'è il simbolo cristallo dentro alla forma».
G. [in risposta al commento di A.]: «È vero. È dentro al quadrato».

Dopo G., tutti i bambini hanno affermato che la forma contenente il simbolo cristallo è il quadrato; quindi, l'insegnante ha chiesto loro di colorare quello che vedevano e ha tentato di seguirli nella loro discussione che ha prodotto una storia elaborata dai bambini stessi. Si è aperto un mondo fantastico nel quale personaggi strabilianti sono in grado di fare magie con il "simbolo cristallo". In questo mondo, descritto dai bambini, la magia più spettacolare è possibile solo se si apre il "simbolo cristallo" inserendo al centro un diamante.
L'insegnante ha preso spunto dalla storia e ha chiesto a tutti i bambini di trasformarsi in "aiuto-mago" con la necessità di risolvere un problema: «Come possiamo trovare il centro del quadrato?».

Dopo alcuni tentativi i bambini sono giunti a due soluzioni (Figura 13).

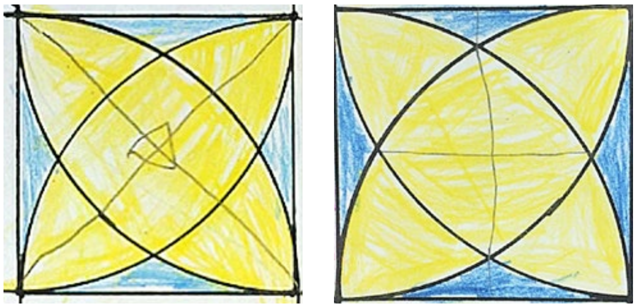

Figura 13. Le due soluzioni date dai bambini per trovare il centro del quadrato.

Fra i bambini c’è stato chi come prima soluzione ha tracciato le diagonali del quadrato, chi gli assi di simmetria, ma tutti hanno risolto il problema proponendo entrambe le soluzioni.
Una volta trovato il centro del “simbolo cristallo”, i bambini hanno ritagliato il quadrato e, seguendo le linee tracciate, lo hanno scomposto in quattro triangoli, nel primo caso, e in quattro quadrati nel secondo; poi, usando le figure ottenute come pezzi di un puzzle, le hanno ricombinate in configurazioni analoghe a quella di partenza (**Figura 14**).

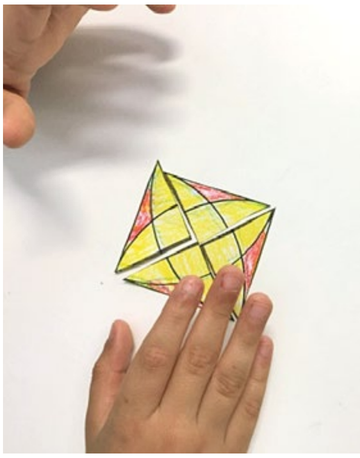

Figura 14. Esempio della prima configurazione proposta, analoga a quella di partenza.

Infine, complici i personaggi del mondo fantastico e le loro avventure, i bambini hanno ricombinato i pezzi in configurazioni diverse da quella di partenza (**Figura 15**).

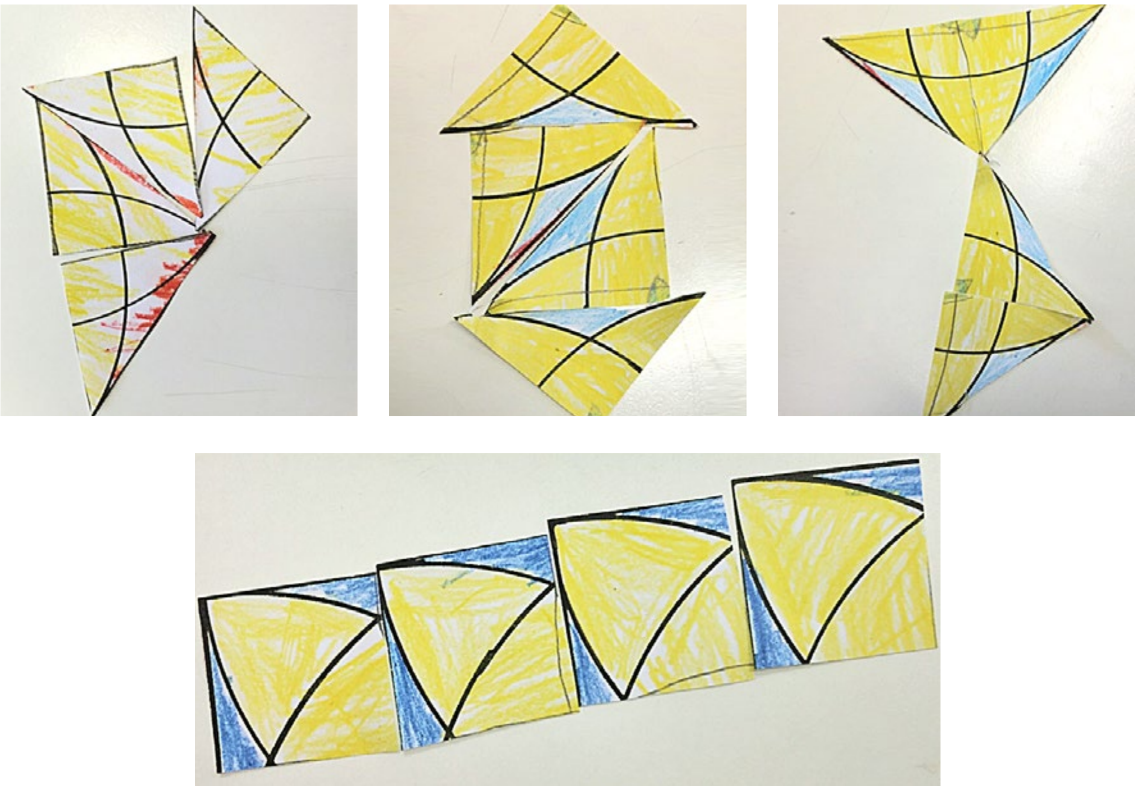

Figura 15. Alcune configurazioni realizzate dai bambini.

4.4 Descrivere e costruire un quadrato

Agli stessi bambini, frequentanti l'ultimo anno di scuola dell'infanzia e la classe prima primaria (si veda il par. 4.3), e a bambini di classe seconda della scuola primaria è stato proposto di osservare e descrivere il quadrato costruito sovrapponendo opportunamente 4 fogli di carta da lucido in ognuno dei quali era stata disegnata una circonferenza di stesso raggio (Figura 16).

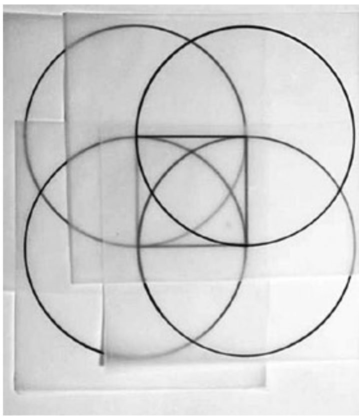

Figura 16. Costruzione del quadrato con i 4 fogli di carta da lucido sovrapposti.

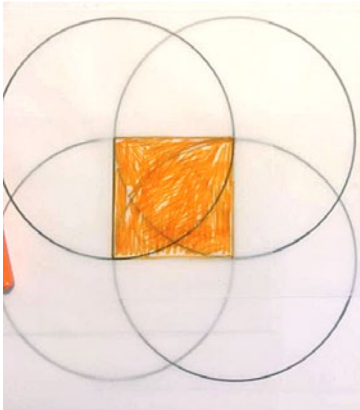

Figura 17. Quadrato colorato da un bambino di 6 anni.

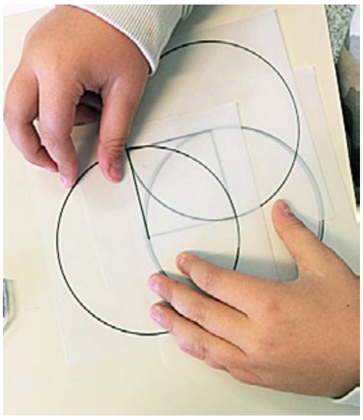

Figura 18. Costruzione del quadrato da parte di un bambino di classe 2ª primaria.

Alcuni bambini di cinque-sei anni hanno posizionato un nuovo foglio di carta da lucido sopra la costruzione e hanno colorato il quadrato (Figura 17). La stessa strategia per individuare il quadrato è stata trovata da alcuni bambini di classe seconda primaria.
Hanno poi smontato la costruzione e l'hanno rimontata diverse volte (Figura 18).
Inizialmente non è stato semplice ricostruire il quadrato. Per risolvere i problemi di costruzione, alcuni bambini hanno preso il foglio di carta da lucido usato per colorare il quadrato e l'hanno usato come base su cui posizionare correttamente le 4 circonferenze, poi lo hanno tolto, giungendo a una conclusione: «Per fare un quadrato i cerchi non li puoi mettere come ti pare, li devi mettere con i lati "a quadrato"».
Lato, *quadrato*, *angolo*, *cerchio* sono termini che i bambini hanno usato in modo spontaneo sin dalle prime descrizioni condivise.

4.5 I lati del quadrato sono uguali: verifica

In una classe prima della scuola primaria l'insegnante ha chiesto di disegnare un quadrato verificando l'uguaglianza dei lati.

R.: «Per disegnare un quadrato posso fare con le mani» (Figura 19).

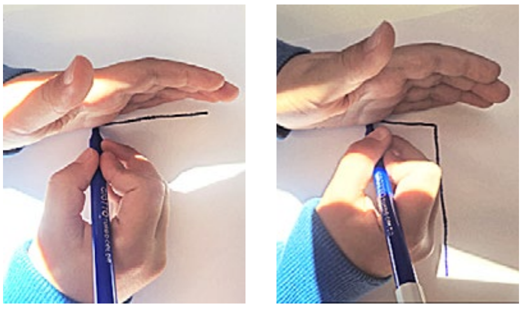

Figura 19. Il bambino, usando la mano sinistra come riga, traccia due "lati".

R.: «Però così non so se i lati sono uguali. Per saperlo devo fare in un modo che so io».

L’insegnante chiede spiegazioni e il bambino, con la mano sinistra aperta a mo’ di compasso, punta il pollice su un’estremità del segmento disegnato e l’indice sull’altra estremità, poi muove la mano tracciando una circonferenza con il dito indice (**Figura 20**) e dichiara: «È così, a modo mio. Però non è proprio giusto, perché la mano un po’ si muove e non va più bene. Io non riesco a farla stare proprio ferma e non so se sono lunghi uguale».

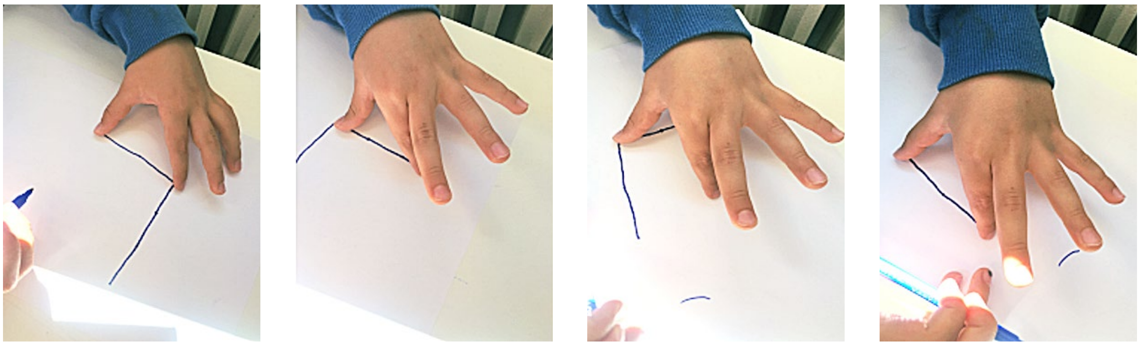

Figura 20. Immagini, in sequenza, del movimento che il bambino fa compiere alla mano mentre verifica l’uguaglianza dei “lati” disegnati.

L’insegnante propone un compasso per scultura spiegando come funziona e lui: «Ecco! Mi serve questo qui!».
Usa il compasso per verificare l’uguaglianza dei due segmenti (**Figura 21**) e conclude: «Ecco! Non sono uguali. Ora ne sono sicuro».

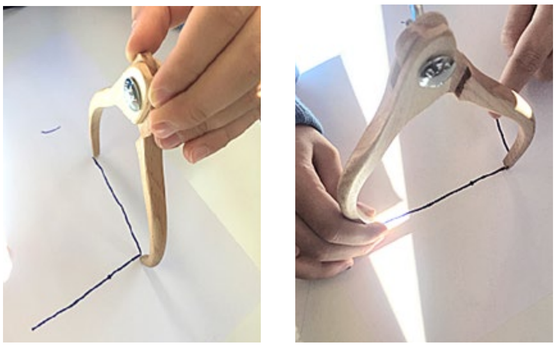

Figura 21. Indagini, in sequenza, del movimento che il bambino fa compiere al compasso.

I pennarelli, il compasso da scultura, i fogli di carta da lucido «sono artefatti che mediano il pensiero. Non sono solo aiuti: il loro ruolo di mediazione è tale da orientare e materializzare il pensiero e, in tal modo, diventare parte integrante di esso» (Radford, 2008, p. 219, traduzione dell’autore).

4.6 Triangolo equilatero e rombo

Riportiamo due discussioni interessanti avvenute in una classe quarta primaria relativamente alla costruzione del triangolo equilatero con riga e compasso. Il primo momento di discussione verte sul triangolo equilatero e ha coinvolto l’intera classe in seguito alla costruzione riprodotta. Il secondo momento di discussione, invece, si è svolto con un allievo che era stato assente durante la prima discussione e si è focalizzata, a partire dalla costruzione e dalle sue proposte, sul rombo.

4.6.1 Il triangolo equilatero

La costruzione del triangolo equilatero con riga e compasso è stata riprodotta sulla lavagna dall'insegnante con Cabri-Géomètre seguendo le istruzioni contenute in Asenova (2018) e riadattate: sono state proposte in forma orale e comunicate una dopo l'altra alla classe mentre veniva fatta la costruzione.

Gli alunni erano liberi di intervenire in qualsiasi momento e di porre domande.

Proponiamo, di seguito, la successione delle operazioni di costruzione fatte sulla lavagna così come è stata vista dagli alunni e alcune domande poste dagli alunni stessi durante il lavoro di costruzione.

> Ins.: «Prendiamo due punti A e B a piacere [gli alunni hanno scelto i punti da prendere] e disegniamo il segmento AB» (Figura 22).

Figura 22. Punti A e B scelti dai bambini e segmento AB.

> Ins.: «Disegniamo la circonferenza con centro in A e raggio AB, poi la circonferenza con centro in B e raggio BA» (Figura 23).

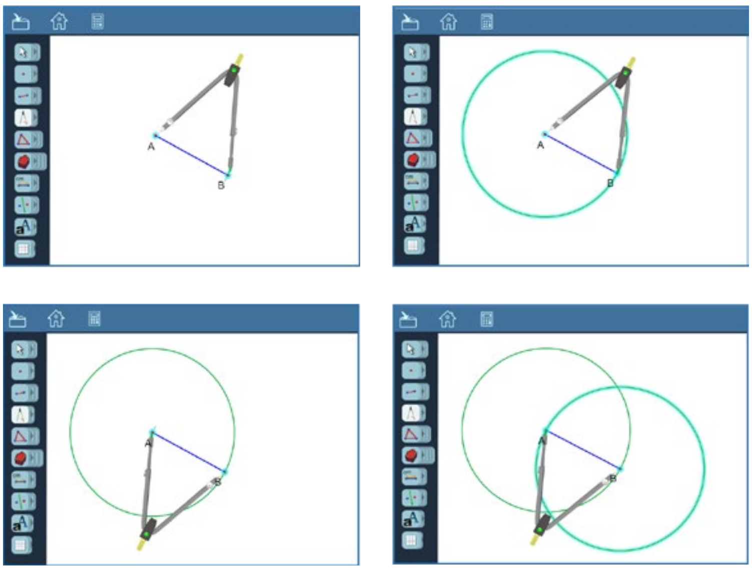

Figura 23. Disegno della circonferenza con centro in A e raggio AB e della circonferenza con centro in B e raggio BA.

Ins.: «Chiamiamo C uno dei due punti di intersezione delle due circonferenze» (**Figura 24**).
Ins.: «Disegniamo i segmenti AC e CB» (**Figura 25**).

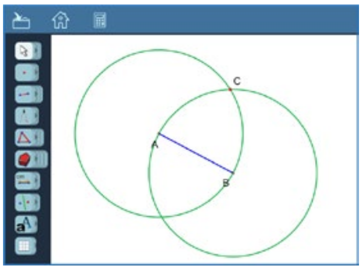

Figura 24. Individuazione del punto C.

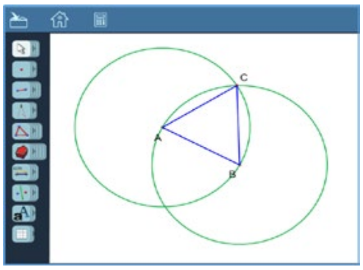

Figura 25. Disegno del segmento AC e del segmento CB.

Al termine della costruzione, gli alunni hanno chiesto: «Che cosa vuol dire *punto di intersezione*?» e l'insegnante ha proposto loro di dare una risposta a questa stessa domanda, descrivendo ciò che vedevano sulla lavagna. Riportiamo la descrizione data da F., descrizione che è stata accolta da tutti gli altri alunni.

F.: «È il punto dove si incontrano le due circonferenze. È il punto dove c'è la circonferenza uno e dove c'è anche la circonferenza due. È un punto, ma ci sono due circonferenze. È come il punto dove si incontrano due rette quando sono perpendicolari; anche lì c'è solo un punto, ma ci sono due rette».

Successivamente, gli alunni hanno posto un'altra domanda: «Che cosa significa *raggio*?». Tale domanda ha dato l'avvio a una discussione in classe trascritta fedelmente e riportata di seguito.
Anche in questo caso l'insegnante non ha fornito una risposta e, dopo aver posto agli alunni la stessa domanda, ha lasciato loro piena libertà di discussione, intervenendo solo nel momento finale.

Ins.: «Ditemi voi. Secondo voi che cosa significa *raggio*?».
A.: «Tu dici *raggio*, ma è un segmento».
B.: «Non è vero che è un segmento. È una linea. Il segmento è un'altra cosa. Qui non c'è nessuna retta».
A.: «Non c'è nessuna retta disegnata, ma se tu la immagini vedi una retta e quello è un segmento perché tu immagini una retta e prendi due punti della retta e quelli sono A e B e allora quello è un segmento».
B.: «Ma quale retta? Non ci sono rette».
A.: «Te la devi immaginare».
C.: «Se tu prolunghi da A per dritto e se tu prolunghi da B per dritto vedi il disegno che facevamo l'anno scorso. Te lo ricordi?».
B.: «Se è un segmento, perché lo chiama *raggio*?».
A.: «Per non confondersi».
D.: «È come con l'altezza che è un segmento, ma lo chiamiamo *altezza*».
C.: «Ma questo è un'altezza?».
B.: «Sarà l'altezza del cerchio».
D.: «Di quale cerchio? Ce ne sono due».
C.: «Di tutti e due. È la stessa apertura del compasso».
A.: «Possiamo farne altre [altezze]? Possiamo scrivere D sull'altro punto dove si incontrano le due linee dei cerchi e unire D con A e D con B. Possiamo farlo, così disegniamo un triangolo uguale a quello di prima».

A.: [disegna i segmenti AD e BD sulla lavagna interattiva] (**Figura 26**).
B.: «Allora possiamo unire anche C con D».
A.: «Perché? Non è un segmento come gli altri perché non è della stessa apertura del compasso».
B.: «Allora no!».
A.: «Possiamo disegnarlo lo stesso, ma sappiamo che non è la stessa apertura [mentre parla A. disegna sulla lavagna interattiva il segmento CD, **Figura 27**]».

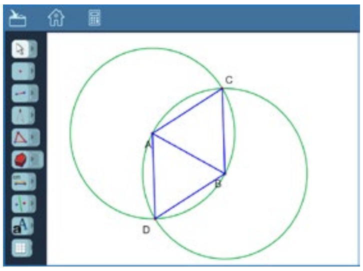

Figura 26. Disegno fatto sulla lavagna da A.

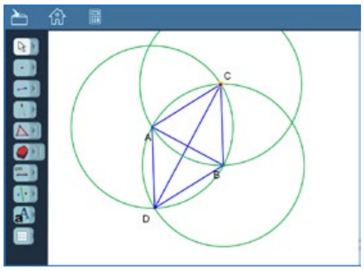

Figura 27. Disegno del segmento CD fatto sulla lavagna interattiva da A.

Eseguire la costruzione del triangolo equilatero sulla lavagna nel modo descritto ha portato a riflessioni su alcuni termini non conosciuti dagli alunni ma necessari per descrivere oralmente gli oggetti geometrici che venivano visualizzati nella successione delle operazioni di costruzione. La scelta fatta dall'insegnante è stata quella di non dare definizioni, ma di accogliere le descrizioni fatte dagli alunni stessi, descrizioni che evidenziano che la costruzione e l'arricchimento del vocabolario tecnico sono basilari per la decostruzione dimensionale delle figure e, allo stesso tempo, la decostruzione dimensionale delle figure è possibile grazie all'acquisizione di un vocabolario tecnico adeguato a descrivere gli oggetti geometrici.
Il lavoro costante di costruzione del vocabolario tecnico unito al lavoro di decostruzione dimensionale delle figure ha offerto agli alunni la possibilità di dare un significato condiviso a termini non noti e di risolvere problemi che man mano emergevano dalle loro osservazioni durante la discussione in classe.
Dopo qualche giorno, è stato chiesto agli alunni di costruire un triangolo equilatero con riga e compasso e, per ricordare i vari momenti della costruzione, è stato consegnato agli alunni il testo con le istruzioni utilizzate dall'insegnante per la costruzione del triangolo equilatero fatta sulla lavagna interattiva.
Durante il lavoro in classe F. ha dichiarato di non poter costruire il triangolo equilatero per uno scambio di compassi, argomentando sull'impossibilità di costruire il triangolo come richiesto.

F.: «Non posso costruire il triangolo equilatero perché io ho disegnato i punti A e B e ho disegnato il segmento AB, poi ho aperto il compasso come c'è scritto e ho disegnato la circonferenza. Poi ho prestato il compasso a S. e quando dovevo disegnare l'altra circonferenza S. non aveva finito, allora mi ha prestato il compasso E., io ho disegnato la circonferenza, però… guarda!» (**Figura 28**).

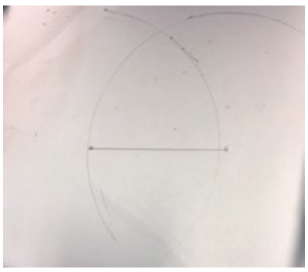

Figura 28. Costruzione di F.

F.: «Si può disegnare un triangolo, ma non è equilatero perché il compasso di E. aveva un'apertura diversa e questo triangolo non è equilatero».

F. cerca una soluzione al suo problema e per dichiarare che non sta disegnando un triangolo equilatero punta l'attenzione sull'apertura del compasso. Non usa il termine *raggio* perché non fa parte del suo vocabolario tecnico, ancora in costruzione, ma le sue parole ci portano a osservare che vede i lati del triangolo come i raggi di due circonferenze aventi lo stesso raggio i cui centri sono coincidenti con gli estremi del segmento che ha disegnato all'inizio della costruzione.
La soluzione finale scelta da F. è stata quella di ricominciare la costruzione dall'inizio, ma la situazione che si era creata è stata usata per risolvere problemi nuovi: «Se si cambia l'apertura del compasso dopo aver tracciato il segmento, è possibile costruire un triangolo? Come sarà questo triangolo?».

4.6.2 Il rombo

Con G., un alunno assente il giorno della costruzione sulla lavagna, il lavoro è stato impostato in modo un po' diverso. Dopo aver ripercorso le istruzioni e la costruzione, l'insegnante ha colto l'occasione per chiedergli di osservare il disegno con il quale si era conclusa la discussione finale alla quale G. non aveva partecipato (**Figura 29**).

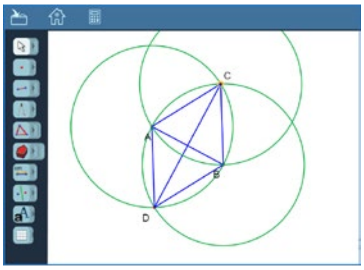

Figura 29. Costruzione fatta sulla lavagna interattiva e proposta a G.

Ins.: «Che cosa vedi?».
G.: «La figura disegnata alla lavagna è un rombo. Perché si vede che è un rombo».
Ins.: «Non capisco che cosa vuoi dire. "Si vede che è un rombo", che cosa significa? Perché è un rombo? Fammi capire».
G.: «È un rombo perché è un quadrilatero con le diagonali perpendicolari che si dividono a metà».
Ins.: «I lati sono uguali?».
G.: «Sì!».
Ins.: «Come puoi esserne sicuro?».
G.: «Il segmento AC e il segmento AD sono della stessa lunghezza perché sono stati disegnati con la stessa apertura del compasso perché i punti A, C e D stanno sullo stesso cerchio. Anche i segmenti DB e BC sono della stessa lunghezza perché sono stati segnati con la stessa apertura del compasso perché i punti B, C e D stanno sullo stesso cerchio. Poi, i segmenti AC e BD sono uguali perché non è stata modificata l'apertura del compasso per fare i due cerchi perché i punti C e D stanno in tutti e due i cerchi».

Per poter spiegare all'insegnante che il quadrilatero che lui vede disegnato sulla lavagna interattiva (**Figura 29**) è un rombo, G. non tenta di misurare i lati e non si riferisce a una figura o a un oggetto della realtà al quale può assomigliare, non si basa, cioè, sugli aspetti metrici o topologici della figura che sta osservando, ma la descrive focalizzando lo sguardo sulle proprietà della figura.
G. è di fronte alla lavagna e mentre descrive la figura muove la mano sopra la figura toccando man

mano gli oggetti di cui parla. Descrive i lati mettendone in relazione due alla volta: sia la prima, sia la seconda coppia di lati vengono descritte come i raggi di una circonferenza il cui centro coincide con uno dei tre punti presi in esame. Inizia descrivendo i segmenti AC e AD: mentre parla appoggia il pollice della mano destra sopra il punto A indicandolo come centro della circonferenza, poi allunga l’indice inizialmente verso il punto C e, in un secondo momento, verso il punto D. Propone la stessa descrizione per i segmenti BC e BD: appoggia il pollice della mano destra sopra il punto B che indica come centro della circonferenza, allunga l’indice verso il punto C e, in un secondo momento, verso il punto D.
Successivamente analizza i segmenti AC e BD poiché li visualizza come coppia di raggi non appartenente alla stessa circonferenza e ne dichiara la congruenza: afferma che i punti C e D sono punti della stessa circonferenza e appoggia il pollice sopra il punto A indicandolo come centro della circonferenza e conclude affermando che, per questo, i lati sono uguali.
Come F., G. non usa il termine *raggio*, ma *apertura del compasso*, ma come F. nel descrivere la figura geometrica che sta analizzando, focalizza lo sguardo sulle sue proprietà geometriche e non sui suoi aspetti metrici o topologici, utilizzando un modo di vedere *non iconico* in geometria.

5 Conclusioni

Il lavoro descritto ha preso l’avvio dalla necessità di conoscere le rappresentazioni di oggetti della geometria scelte e usate spontaneamente dai bambini per poter basare su queste le successive proposte di esperienze didattiche necessarie per favorire la visualizzazione e il passaggio dal modo di vedere *iconico* al modo di vedere *non iconico* richiesto in geometria.
Le risposte date dagli alunni hanno mostrato che proporre esperienze didattiche che allontanano lo sguardo dagli aspetti metrici e topologici delle figure e lo focalizzano sulle loro proprietà geometriche rende possibile superare la visualizzazione iconica e rende possibile avviare gli alunni di giovane età a adottare il modo di vedere *non iconico* richiesto in geometria. Grazie alle risposte date dagli alunni possiamo affermare, in linea con l’inquadramento teorico presentato, che senza un lavoro di decostruzione dimensionale delle figure in unità figurali di dimensione inferiore, di descrizioni delle figure, di costruzione e arricchimento del vocabolario tecnico necessario per descriverle, di costruzione delle figure con riga e compasso questo non sarebbe stato possibile.
Viene da ipotizzare l’importanza di rendere questo tipo di esperienze costanti nel tempo, al fine di rendere naturale per i bambini, anche di giovane età, il ricorrere alla coppia di artefatti riga-compasso per disegnare oggetti della geometria (nei nostri esempi: quadrato, triangolo equilatero e rombo) e al vocabolario tecnico costruito, ampliato e arricchito nel tempo per descriverli.
Concludiamo dicendo che le competenze costruite dai bambini attraverso le attività proposte, e qui descritte in parte, hanno portato i bambini a discutere di oggetti della geometria con un linguaggio ricco di termini sempre più vicini al *senso teorico* che gli adulti (matematici) hanno assegnato loro nel corso di un lungo processo storico che ha consegnato a noi l’oggetto e il senso.

Bibliografia

Asenova, M. (2018). Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 173–210.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 7–61.

Asenova, M., & Marazzani, I. (2020). Discussioni fra alunni della scuola primaria sul concetto di altezza di un poligono. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace.* Atti del Convegno Incontri con la matematica XXXIV, 6-8 novembre 2020, Castel San Pietro Terme (Bo) (pp. 43–44). Pitagora.

Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie*, *101*(3–4), 107–131.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Pitagora.

D'Amore, B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001.* Pitagora.

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività della classe intesa come società. *La matematica e la sua didattica*, *19*(3), 325–336.

D'Amore, B. (2020). *Matematica: didattica, storia, epistemologia e arte.* Pitagora.

D'Amore, B. (2021). Riflessioni sull'apprendimento della Matematica nella Scuola dell'Infanzia … e anche prima. *Bambini*, *37*(5), 28–33.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Marazzani, I. (2021). *Attività e giochi con la geometria per la scuola primaria.* Pitagora.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punto di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco.* Vol. I. Edizioni Dedalo.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2018). Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 211–245.

Euclide. (1970). *Elementi.* A cura di A. Frajese & L. Maccioni. UTET.

Euclide. (2007). *Tutte le opere.* A cura di F. Acerbi. Bompiani.

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2020). *Geometria. Storia, epistemologia e didattica per la scuola di base.* Pitagora.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 191–213.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 215–234). Sense Publishers.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 547–567.