DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 45 - 68, DOI: 10.33683/ddm.22.12.3

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Analisi del discorso di classe sul riconoscimento di altezze di un triangolo

Classroom discourse analysis on the identification of a triangle's heights

Giulia Lisarelli• e Elisa Miragliotta°
•Dipartimento di Matematica, Università di Pisa – Italia
°Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia – Italia

giulia.lisarelli@dm.unipi.it, elisa.miragliotta@unipv.it

Sunto / L'articolo presenta l'analisi del discorso matematico degli studenti di una classe II di scuola secondaria di primo grado, intrapreso durante una lezione sul riconoscimento di altezze di un triangolo. La lezione si è svolta dopo un percorso didattico durante il quale il discorso sull'oggetto matematico *altezza* si è costruito a partire da diverse realizzazioni possibili. Obiettivo principale di questo studio è documentare quali tra queste realizzazioni del significante *altezza* compaiono nel discorso di classe, descriverne le caratteristiche e osservare quali continuità o discontinuità presentano rispetto alle realizzazioni più comuni descritte dalla letteratura in didattica della matematica. L'analisi del discorso, accompagnata dalla costruzione e confronto tra l'albero di realizzazione atteso e l'albero della classe, consentiranno di mettere in luce sia la ricchezza del discorso di classe sia le interazioni tra realizzazioni diverse. Infine, si discuteranno le implicazioni teoriche e didattiche dello studio.

Parole chiave: albero di realizzazione; analisi del discorso; altezze; triangolo.

Abstract / This paper focuses on the mathematical discourse of a classroom of 7th-grade students, during a lesson concerning the identification of the heights of a triangle. The lesson took place after a sequence of activities during which the discourse on the mathematical object *height* has been constructed with students starting from its different possible realizations. The main goal of this study is to identify which of these realizations of the signifier *height* appear in the mathematical discourse of the classroom, to describe them, and to observe possible similarities or differences in relation to the most common realizations that the literature in Mathematics Education has reported on. The discourse analysis, combined with the construction and comparison of the expected realization tree and the students' realization tree, allows us to highlight both the richness of the mathematical discourse of the participants and the interactions between different realizations. Finally, we discuss possible theoretical and didactical implications of the study.

Keywords: realization tree; discourse analysis; heights; triangle.

1 Introduzione

Molte ricerche in didattica della matematica si sono occupate delle difficoltà degli studenti nel tracciare e riconoscere le altezze di un triangolo. Tali difficoltà, documentate da un gran numero di studi (Dreyfus, 2017; Gutiérrez & Jaime, 1999; Hershkowitz, 1987, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1980), sono ricorrenti, trasversali ai diversi livelli scolari e persistenti. Sebbene sia un tema di cui la ricerca nazionale ed internazionale si è tradizionalmente occupata, indagare le costruzioni personali degli studenti sviluppate attorno all'oggetto matematico "altezza" resta un problema affascinante e molto attuale, come dimostra la vivacità del dibattito anche in anni recenti (Sbaragli, 2017). Lo studio che presentiamo in questo articolo intende dare un contributo a questo filone di ricerche attraverso un'analisi del discorso di classe sul riconoscimento di altezze di un triangolo, adottando un punto di vista teorico inedito per questo tema di ricerca e, in generale, per studiare l'insegnamento-apprendimento della geometria.

1.1 Letteratura su altezze

La difficoltà nel riconoscere e tracciare altezze di un triangolo è largamente riconosciuta dalla ricerca in didattica della matematica. Il tema è stato tradizionalmente affrontato dal punto di vista cognitivo. Il riferimento principale è rappresentato dai lavori volti a riconoscere l'uso da parte degli studenti di *attributi critici* e *non-critici* per tracciare e riconoscere altezze (Hershkowitz, 1987, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1980). In generale, un concetto ha alcune caratteristiche rilevanti che derivano dalla sua definizione e sono quegli *attributi critici* che una sua rappresentazione deve avere per essere riconosciuta come istanza di quel concetto; un concetto possiede anche attributi *non-critici*, ovvero caratteristiche che solo alcune rappresentazioni del concetto possiedono. Ad esempio, nel caso dell'altezza di un triangolo, la perpendicolarità tra la retta su cui giace il lato del triangolo rispetto all'altezza relativa a quel lato è un attributo critico, mentre l'organizzazione spaziale del disegno del triangolo con una base orizzontale e la rispettiva altezza verticale rivela nella "verticalità dell'altezza" un attributo non-critico che tuttavia può diventare un elemento determinante per riconoscere una istanza di altezza.

Le difficoltà più comuni riguardano il caso dei triangoli ottusangoli e di quelli rettangoli e sono principalmente riconducibili all'influenza di due fenomeni strettamente intrecciati, noti come *effetto orientamento* (Fisher, 1978) ed *effetto prototipo* (Hershkowitz, 1989; Mariotti, 1995). Il primo riguarda l'influenza delle due direzioni verticale e orizzontale che gli studenti percepiscono come privilegiate (Mesquita, 1998). Tale concettualizzazione è frutto sia dell'interazione dell'individuo con l'ambiente esterno (per esempio, forza di gravità, misura della propria altezza appoggiandosi ad uno stipite, asse verticale del proprio corpo) sia delle esperienze scolastiche (per esempio, organizzazione del foglio di carta bianco o a quadretti). Il secondo riguarda l'influenza di particolari rappresentazioni di un concetto che diventano popolari e comuni al punto da diventare "*il concetto*" stesso (Hershkowitz, 1989, p. 67). Gli studi di Hershkowitz (1989) mostrano come solitamente il prototipo sia l'esempio che realizza l'elenco più lungo di caratteristiche, cioè tutti gli attributi critici del concetto e quegli attributi non-critici che hanno forti caratteristiche visive, come ad esempio le posizioni rispettivamente verticale e orizzontale dei cateti di un triangolo rettangolo.

Di conseguenza, l'altezza viene spesso pensata come un segmento interno al triangolo, verticale, non coincidente con un lato del triangolo. Oltre alla possibile difficoltà nel tracciare altezze di triangoli rettangoli e ottusangoli, troviamo in letteratura esempi di altezze sistematicamente disegnate come assi o mediane (Hershkowitz, 1989). Tali difficoltà e caratteristiche descritte si dimostrano trasversali rispetto ai livelli scolari (Gutiérrez & Jaime, 1999), sebbene via via meno pronunciate (Hershkowitz, 1989).

Nel panorama italiano Sbaragli (2017) sottolinea come, al termine della scuola primaria,[1] gli studenti sviluppino un concetto di altezza di un poligono fortemente legato a rappresentazioni stereotipate. Tali concezioni sono spesso frutto di una definizione di altezza univoca. Per esempio, la definizione più comunemente presentata a livello di scuola primaria è: «l'altezza è il segmento che "parte" da un vertice e "cade" perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento» (Sbaragli, 2017, p. 233).
Spesso tale definizione è «accompagnata a rappresentazioni stereotipate di tale concetto che non permettono di riconoscere rappresentazioni non convenzionali di altezze di poligoni» (Sbaragli, 2017, p. 233). In particolare, si osserva che segmenti non verticali o non passanti per alcun vertice non vengono considerati, o accettati, come possibili istanze di altezza.
Questo è abbastanza evidente guardando le illustrazioni di molti libri di testo o pensando alle rappresentazioni dell'altezza di triangoli che sfruttano manipolativi quali il filo a piombo. In generale, sia la pratica didattica più tradizionale che le esperienze spaziali collezionate durante le attività di tutti i giorni possono portare a una concettualizzazione dello spazio *spontanea* che potrebbe essere incoerente rispetto alla concettualizzazione geometrica (Mariotti, 2005). Nel caso delle altezze questo conduce spesso gli studenti a pensare i segmenti "perpendicolari" necessariamente disposti nella direzione verticale ed orizzontale, che è coerente con una concettualizzazione dello spazio spontanea ed esperita nel mondo fisico, ma non pienamente coerente con una concettualizzazione dello spazio euclideo in cui non si hanno direzioni privilegiate (Mariotti, 2005).
A partire da questo scenario, la nostra ricerca intende indagare gli effetti di un percorso di introduzione al concetto di altezza del triangolo, proposto a studenti del secondo anno di scuola secondaria di primo grado.[2] In particolare, l'insegnante ha lavorato in sinergia con le ricercatrici alla progettazione di tale percorso, condividendone i principi di base. Per operare proprio sulle criticità messe in luce dalla ricerca, si è deciso di offrire più di una caratterizzazione di altezza, accompagnate da molteplici rappresentazioni e con una grande attenzione a evitare il riferimento agli stereotipi più comuni, sfruttando il più possibile la discussione matematica collettiva intenzionalmente progettata e orchestrata dall'insegnante per favorire la costruzione da parte degli studenti del significato matematico di altezza.

1.2 Domande di ricerca generali

In questo articolo presentiamo e discutiamo le analisi di una lezione in cui è stato proposto agli studenti un adattamento di un noto quesito INVALSI[3] (rilevazione 2012-2013, grado 6) sul riconoscimento di altezze di un triangolo ottusangolo (si veda il par. 3.2), al termine del percorso didattico. La lezione è un espediente per cogliere nel discorso degli studenti gli elementi caratterizzanti il concetto di altezza al termine del percorso didattico, con l'ulteriore scopo di osservare quali delle caratteristiche presentate durante il percorso sono entrate a far parte dell'immaginario comune della classe. In particolare, l'articolo intende indagare:

- Quali elementi caratterizzanti il percorso didattico è possibile rintracciare nella discussione di classe, durante la risoluzione di un problema sul riconoscimento di altezze di un triangolo?
- Quali caratteristiche dell'altezza fanno parte dell'immaginario della classe?
- Quali stereotipi legati al concetto di altezza, che sono riportati in letteratura, sono persistenti e quali assenti?

Una volta introdotto il quadro teorico di questo studio, daremo una riformulazione più puntuale delle domande di ricerca e, nella metodologia, spiegheremo come abbiamo cercato risposte a esse.

1. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
3. Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

2 Quadro teorico

Abbiamo scelto di inquadrare questo studio dal punto di vista teorico all'interno dell'approccio discorsivo proposto da Sfard (2008). Partendo dall'assunzione che la comunicazione e la visualizzazione sono due processi fondamentali per l'apprendimento della matematica, e in particolar modo della geometria, abbiamo ritrovato in questo quadro teorico efficaci strumenti sia per la progettazione della ricerca sia per l'analisi dei dati.
A differenza di altri quadri cognitivi (Fischbein, 1993; Tall & Vinner, 1981) in cui i ricercatori costruiscono strumenti analitici per fare inferenze sulle *immagini mentali* e *concettualizzazioni* costruite e richiamate dagli studenti a partire dalle loro produzioni (verbali, diagrammatiche, gestuali) che sono manifestazioni "esterne" di processi "interni", l'approccio di Sfard ripensa queste due ultime dimensioni come una sola. Il discorso e il suo sviluppo vengono analizzati di per sé, come principali oggetti di ricerca piuttosto che come mezzi per esplorare altri costrutti.
Secondo l'approccio discorsivo, i processi cognitivi individuali e i processi di comunicazione interpersonale sono manifestazioni diverse di un fenomeno che è di fatto il medesimo. Il pensiero, infatti, è descritto come una versione individualizzata della comunicazione interpersonale e l'apprendimento è un processo per cui gli studenti diventano gradualmente capaci di comunicare su un determinato oggetto.
A nostro avviso, questa visione ha una ricaduta molto importante sulla nostra ricerca perché suggerisce di analizzare la "comunicazione" – e noi siamo proprio interessati al "discorso di classe" – cercando di rimanere il più possibile oggettivi e lasciando meno spazio possibile all'interpretazione.
Andiamo subito a chiarire alcuni termini alla luce del nostro quadro teorico.[4] La *comunicazione* è intesa come una struttura di azioni collettive in cui l'azione di un individuo è seguita da un'altra azione di un altro individuo e tali azioni/reazioni provengono da un repertorio ben definito.
Il discorso matematico è un tipo speciale di comunicazione, inter- e intra-personale, che si distingue per il suo repertorio di azioni e reazioni ammissibili. Secondo questa teoria, un oggetto matematico è quindi un oggetto discorsivo.
Uno dei principali elementi caratterizzanti il discorso matematico di una classe sono le *narrazioni*, cioè enunciati (scritti o parlati) formulati come descrizioni di oggetti, di relazioni fra oggetti o di processi, che sono soggetti a possibile approvazione o rifiuto. Le narrazioni condivise dalla classe sono quelle considerate vere e possono essere diverse da quelle accettate dalla comunità scientifica.
Inoltre, nel discorso matematico si fa uso di specifiche *routine*, ossia di modelli ripetitivi, che Sfard e i suoi colleghi hanno descritto operando una distinzione tra *rituali* ed *esplorazioni* (Lavie et al., 2018; Sfard & Lavie, 2005). Lo studente partecipa al discorso con una routine di tipo *rituale* quando riproduce rigidamente una procedura che ha osservato, con l'obiettivo principale di compiacere gli altri. Diversamente, la partecipazione costituita dall'esecuzione di routine *esplorative* si verifica quando lo studente produce le proprie narrazioni sugli oggetti matematici. L'obiettivo dello studente in questo caso è quello di risolvere un problema, non si limita quindi a riprodurre qualcosa che ha già visto o a manipolare simboli matematici, ma diventa lui stesso il protagonista dell'azione discorsiva.
A differenza dei discorsi colloquiali, in cui spesso la comunicazione è mediata da immagini di oggetti concreti (per esempio, l'affermazione "come è faticosa questa salita" verosimilmente è mediata dalla presenza di una strada caratterizzata da una pendenza notevole), un altro aspetto specifico del discorso matematico è che tale mediazione avviene attraverso oggetti di natura simbolica, iconica, gestuale (per esempio, l'affermazione "come è pendente questa retta" verosimilmente è mediata dalla presenza di un grafico cartesiano o dell'espressione algebrica di una retta con coefficiente angolare

4. Se non diversamente specificato nel testo, tutte le definizioni riportate di seguito si riferiscono alla Teoria della *Commognition* e sono riprese da Sfard (2008).

di valore assoluto significativamente maggiore di 0). Tali oggetti ai quali ci riferiamo nel discorso matematico sono chiamati *mediatori visivi*. Ad esempio, in ambito geometrico può essere un mediatore visivo il disegno di una figura sia in ambiente carta e penna che in ambienti di geometria dinamica.
Inoltre, la comunicazione matematica comporta continue transizioni dai *significanti*, che sono parole o simboli che hanno il ruolo di sostantivo negli enunciati del discorso, ad altre entità che chiamiamo *realizzazioni dei significanti*. La realizzazione di un significante può essere di natura linguistica, iconica, simbolica, gestuale, grafica ed è tale che è possibile tradurre ogni discorso su di essa in un discorso sul relativo significante. Per esempio, nel caso del significante "funzione", l'espressione algebrica, il grafico cartesiano, la tabella input-output sono tutte sue possibili realizzazioni. Per sottolineare il riferimento ad uno stesso significante, Sfard propone di organizzare le sue realizzazioni in *alberi di realizzazione* (Figura 1).

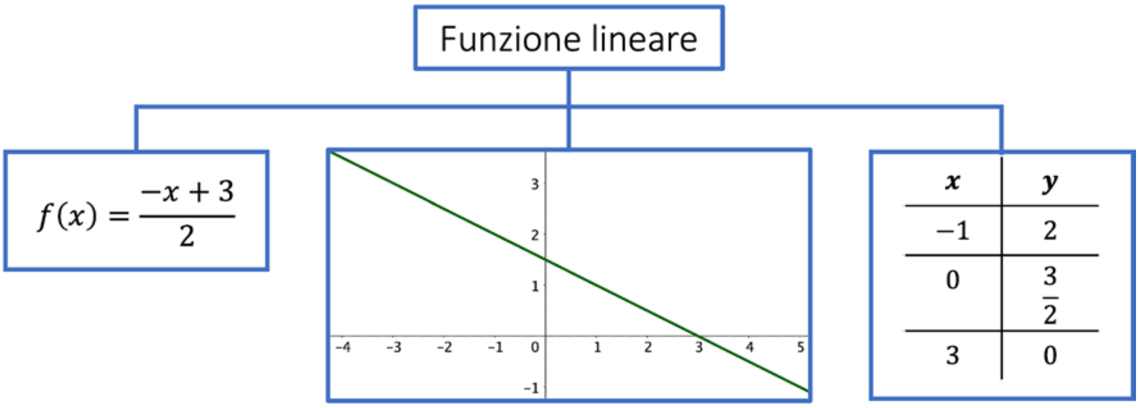


Figura 1. Esempio di albero di realizzazione del significante funzione lineare.

In questo articolo ci focalizzeremo su alberi di realizzazione del significante *altezza rispetto a un lato del triangolo*.
Durante le fasi iniziali dell'apprendimento di un oggetto matematico, gli studenti spesso usano separatamente diverse realizzazioni di uno stesso significante e solo più tardi arrivano a riferirsi ad esse all'interno di uno stesso discorso matematico, trattando ciascuna come possibile realizzazione delle altre. Questo processo, in cui gli studenti arrivano ad associare un significante a molte realizzazioni è chiamato *saming*[5] (Sfard, 2008).
I risultati delle ricerche che si sono esplicitamente occupate delle altezze di triangoli possono essere riletti alla luce del quadro teorico scelto.

2.1 Una proposta di lettura della letteratura di riferimento sulle altezze dei triangoli attraverso la lente teorica scelta

La ricerca nazionale ed internazionale in didattica della matematica riconosce alcune realizzazioni del significante *altezza di un triangolo* come più comuni, frequenti e privilegiate dagli studenti. Le riassumiamo di seguito.

5. Sfard (2008, p. 165) chiarisce come la possibilità di riconoscere in diverse realizzazioni istanze dello stesso oggetto matematico possa richiamare la nozione di catene di significazione in un approccio semiotico. Tuttavia l'uso di "alberi" piuttosto che "catene" vuole sottolineare la complessità e la gerarchia della struttura, piuttosto che restituire l'idea di linearità del processo che l'uso della parola "catene" può suggerire. Inoltre, il punto di vista è differente: per *rappresentazione* si intende generalmente una "incarnazione" materiale di un'entità astratta fondamentalmente intangibile (oggetto matematico), mentre la *realizzazione* appartiene alla stessa categoria ontologica del significante ovvero la categoria delle entità percettivamente accessibili (Sfard, 2008, p. 155). Per ulteriori approfondimenti si rimanda a Baccaglini-Frank et al. (2022).

L'altezza:

a. deve partire da un vertice (Sbaragli, 2017);
b. è interna al triangolo (Fischbein & Nachlieli, 1998; Hershkowitz, 1987, 1989; Sbaragli, 2017; Vinner & Hershkowitz, 1980);
c. è necessariamente o preferibilmente verticale (Fisher, 1978; Gutiérrez & Jaime, 1999; Sbaragli, 2017).

In quesiti in cui si chiede di tracciare l'altezza relativa ad un dato lato, le maggiori difficoltà si riscontrano nel caso di triangoli ottusangoli o rettangoli (Hershkowitz, 1989). Questo risultato è coerente con la caratterizzazione di altezza come segmento sempre interno al triangolo: nel caso del triangolo ottusangolo, la difficoltà nasce dalla necessità di tracciare o riconoscere un'altezza che "cade fuori" dal triangolo; nel caso del triangolo rettangolo la difficoltà risiede nel riconoscere l'altezza quando coincide con uno dei due cateti. In **Figura 2** riportiamo alcuni risultati relativi al triangolo ottusangolo in cui possiamo osservare come una realizzazione di altezza che sembra essere comune tra studenti di 14 anni è quella di un segmento che passa per un vertice ed è contenuto (almeno in parte) all'interno del triangolo.

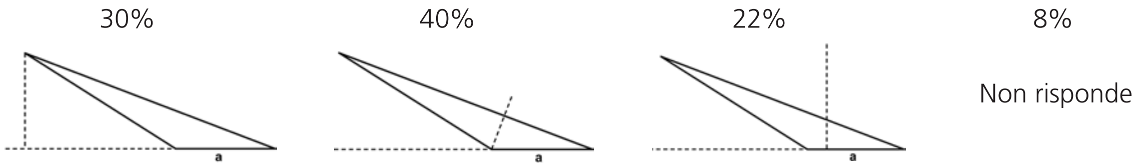
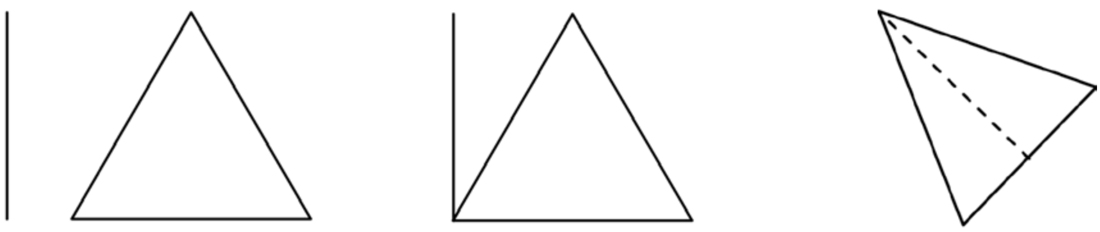


Figura 2. Risposte date da studenti israeliani di 14 anni coinvolti nello studio di Hershkowitz (1987) citati da Zan (2007, p. 85).

Altre realizzazioni ricorrenti che vengono proposte dagli studenti sono realizzazioni di significanti diversi: Hershkowitz (1987, 1989) riporta risposte di studenti che sistematicamente identificano l'altezza relativa a un certo lato del triangolo con la sua mediana oppure con il suo asse. Gli stessi risultati sono stati trovati anche in vari altri studi (Fischbein & Nachlieli, 1998; Gutiérrez & Jaime, 1999).
In riferimento alle realizzazioni di *altezza di un triangolo* più comuni sopra elencate, dalle indagini di Sbaragli (2010) con studenti al termine della classe V di scuola primaria emerge che descrivere l'altezza come un segmento che parte da un vertice del triangolo (punto (a) dell'elenco), conduce gli studenti a non riconoscere come realizzazione di altezza un segmento come quello riportato in **Figura 3a**; la (b) invece impedisce di riconoscere come realizzazione di altezza un segmento che, pur passando per un vertice del triangolo, è in parte esterno al triangolo stesso (**Figura 3b**). Infine, gli studenti che privilegiano la realizzazione (c) non riconoscono come realizzazione di altezza un qualsiasi segmento non verticale rispetto al proprio sistema di riferimento egocentrico (**Figura 3c**).



3a 3b 3c

Figura 3. Realizzazioni di altezza proposte da Sbaragli (2010, 2017) a studenti della classe V della scuola primaria.

2.2 Riformulazione delle domande di ricerca

Alla luce del quadro teorico le domande di ricerca possono essere riformulate come segue.

1. (a) Quali realizzazioni del significante altezza di un triangolo compaiono nel discorso degli studenti?
   (b) Come compaiono tali realizzazioni?
   (c) Ci sono interazioni tra realizzazioni diverse? Se sì, in quali casi?
2. Quali similarità e/o differenze rispetto a comportamenti comuni descritti in letteratura sul riconoscimento di possibili realizzazioni del significante *altezza di un triangolo* possono essere identificate?

3 Metodologia

In questo paragrafo presenteremo e discuteremo le principali scelte metodologiche. Dopo una breve descrizione del percorso didattico, analizzeremo il quesito proposto al fine di mostrare il processo che ci ha condotte alla costruzione dell'albero di realizzazione atteso rispetto al quesito dato. Nell'ultimo paragrafo presenteremo lo schema analitico progettato per questo studio ed utilizzato per l'analisi dei dati.

3.1 Partecipanti e breve presentazione del percorso didattico

I dati sono stati raccolti in una classe seconda di scuola secondaria di primo grado (18 studenti) del nord Italia, durante una lezione sul riconoscimento di altezze di un triangolo dato (16 studenti presenti). La lezione si è svolta alla fine di un percorso didattico inserito all'interno di un progetto di ricerca-azione[6] a cui ha partecipato l'insegnante.
La scelta didattica che è stata operata consiste nell'introduzione dell'oggetto matematico altezza attraverso diverse realizzazioni possibili. Gli studenti avevano già trattato le altezze in geometria alla scuola primaria ma non ancora alla scuola secondaria di primo grado; l'insegnante ha scelto di avviare il discorso sulle altezze di poligoni con questo percorso. La scelta di usare più realizzazioni è motivata dalla condivisione con Sbaragli (2017) dell'assunto che

> «[…] la maggior parte delle misconcezioni rilevate risultano conseguenza delle proposte scolastiche avvenute in classe per questo sapere, basate su una definizione univoca data a priori e non negoziata con gli allievi e da rappresentazioni stereotipate del concetto».
>
> (Sbaragli, 2017, p. 233)

In particolare, per quanto riguarda l'altezza rispetto a un lato di un triangolo, durante il percorso sono state proposte agli studenti due realizzazioni principali che chiamiamo di *Tipo 1* e di *Tipo 2* e che riportiamo di seguito:

1. Segmento perpendicolare ad un lato o al suo prolungamento che passa per il vertice non contenuto in quel lato (opposto).
2. Altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo.

6. Istituto provinciale per la ricerca e la sperimentazione educativa (IPRASE) - "Le nuove frontiere del diritto all'istruzione. Rimuovere le difficoltà d'apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro - Fase 2", cofinanziato dal Fondo Sociale Europeo nell'ambito del PO 2014-2020 della Provincia autonoma di Trento.

La realizzazione di *Tipo 1* è molto simile alla definizione che si trova comunemente nei libri di testo. È stato tuttavia osservato in classe che tale realizzazione può essere a sua volta realizzata in due modi: come un segmento tracciato a partire dal vertice (*Tipo 1a*) o a partire dalla retta su cui giace il lato (*Tipo 1b*). L'insegnante ha anche promosso la costruzione di altezze utilizzando sia artefatti fisici (riga non graduata e una squadra da disegno) che digitali (GeoGebra). L'uso di riga e squadra ha coinvolto gli studenti in specifiche routine per disegnare altezze di triangoli. Il software GeoGebra è stato utilizzato per discutere quali possano essere comandi (per esempio, rette perpendicolari), e quindi proprietà geometriche, utili per costruire altezze al fine di promuovere la transizione tra la dimensione pragmatica dell'attività di disegnare altezze e una dimensione più teorica.
La realizzazione di *Tipo 2* è ripresa da un'idea di Ferrari (2016) che parla di altezza di un poligono in termini di altezza della "striscia" in cui si può inscrivere il poligono: «perché un poligono abbia una altezza deve verificare due condizioni: essere tutto contenuto in una striscia ed avere tutti i suoi vertici distribuiti sui lati della striscia» (Ferrari, 2016, p. 481).
Una *striscia* è determinata da due lati che sono due rette parallele: una retta contiene un lato del triangolo e l'altra il vertice che non appartiene al lato scelto (un esempio è riportato in **Figura 4**). Osserviamo quindi che nel caso specifico del triangolo è sempre possibile identificare questa striscia, che è univoca per ciascun lato.

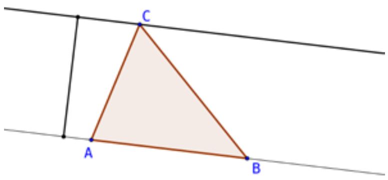


Figura 4. Altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo ABC.

Durante la lezione oggetto della nostra indagine è stato proposto agli studenti un quesito INVALSI che descriviamo nel dettaglio nel paragrafo seguente. La lezione, della durata di un'ora, è stata condotta dalla prima autrice dell'articolo e dall'insegnante di matematica ed è stata videoregistrata.

3.2 Descrizione del quesito proposto

Il quesito proposto è un adattamento del quesito assegnato durante le rilevazioni INVALSI 2012-2013 per la classe prima della scuola secondaria di primo grado.
Il quesito riporta il disegno di un triangolo ottusangolo ABC e quattro segmenti tratteggiati: CE, BD, BG e CF. Si richiede di riconoscere quali tra questi segmenti sono altezze del triangolo ABC (**Figura 5**).
Nelle intenzioni dell'estensore, la domanda è messa in relazione all'obiettivo delle *Indicazioni Nazionali* (Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca [MIUR], 2012) «Utilizzare e distinguere tra loro i concetti di perpendicolarità, orizzontalità, parallelismo, verticalità» posto al termine della scuola secondaria di primo grado. Scopo della domanda è «Riconoscere le altezze dei triangoli» e il processo prevalente è «Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica». Inoltre

> «Il quesito è utile per verificare se lo studente ha chiaro il concetto di altezza come segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto e non come segmento necessariamente verticale. Inoltre lo studente deve anche riconoscere che un'altezza in un triangolo può anche essere esterna ad esso».
>
> (INVALSI, 2013, p. 22)

La domanda originale era posta in forma chiusa a scelta multipla, chiedendo al solutore di scegliere una coppia di segmenti tra le quattro proposte: CE e CF, BD e BG, CE e BG, CF e BD. Di seguito riportiamo il nostro adattamento del quesito (Figura 5).

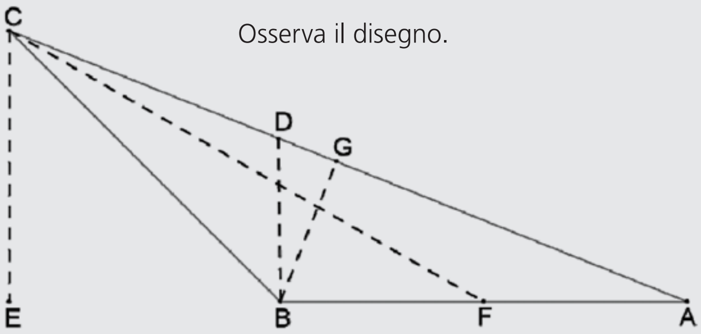


Figura 5. Traccia del quesito proposto alla classe.

Il quesito è stato proiettato sulla LIM e gli studenti hanno lavorato prima individualmente alla risoluzione, per circa 20 minuti, e poi l'insegnante ha chiesto loro di condividere opinioni e riflessioni, favorendo la discussione di classe.

La domanda è stata riformulata in modo da promuovere il riconoscimento di altezze da parte degli studenti e allo stesso tempo supportare la produzione di argomentazioni a sostegno delle proprie risposte per ogni segmento, sia esso un'altezza oppure no. Si richiede in sostanza di argomentare sia il "perché sì" che il "perché no". Questa scelta consente di osservare il discorso sulle altezze sviluppato dalla classe durante la risoluzione del quesito, per poi descrivere le realizzazioni di altezza richiamate dalla classe. Ci aspettavamo che anche il discorso attorno a segmenti come CF e BD (che non sono altezze) potesse offrire informazioni utili a descrivere le realizzazioni di altezza condivise nella classe.

3.2.1 Analisi a priori del quesito

Descriviamo adesso alcuni aspetti che pensavamo potessero emergere nel discorso di classe, stimolati dalla richiesta di risoluzione del quesito proposto. Innanzitutto, osservando il disegno (Figura 5) è possibile riconoscere che:

- CE è altezza del triangolo rispetto al lato AB;
- CF è mediana del triangolo rispetto al lato AB e non è altezza;
- BD è un segmento perpendicolare ad AB e passante per il vertice B e non è altezza;
- BG è altezza del triangolo rispetto al lato AC.

In base ai comportamenti comuni descritti dalla letteratura, è possibile che gli studenti abbiano difficoltà a riconoscere il segmento CE come realizzazione dell'altezza relativa al lato AB poiché l'estremo E è un punto esterno al triangolo. Sebbene CE sia verticale e quindi rimandi a una realizzazione comunemente accettata di altezza, gli studenti potrebbero guardare più favorevolmente al segmento CF come possibile altezza del triangolo, se legati più a realizzazioni di altezza in cui essa è interna al triangolo.

Anche il segmento BD potrebbe essere riconosciuto come realizzazione di altezza poiché è perpendicolare ad un lato del triangolo e passa per un suo vertice; inoltre, l'orientamento verticale rispetto al lato orizzontale AB potrebbe supportare ed influenzare questa interpretazione, impedendo anche il riconoscimento di BG come altezza a causa del suo orientamento. Per considerare o meno i segmenti BG o BD come realizzazioni di altezze del triangolo, diventa cruciale la scelta del lato del triangolo rispetto al quale guardare questi segmenti. Rispetto a quest'ultimo punto ci aspettavamo che l'uso di realizzazioni di *Tipo 2* potessero essere particolarmente efficaci.

3.3 Costruzione dell'albero di realizzazione atteso

Occorre osservare che, per il modo in cui il quesito è stato proposto alla classe, gli studenti hanno a disposizione un mediatore visivo comune dato dal disegno contenuto nella traccia e sempre visibile durante la discussione. Dunque, non si chiede loro di produrre realizzazioni di altezza, ma di riconoscerle. Per tale ragione nelle foglie dell'albero di realizzazione ci aspettiamo di trovare realizzazioni di altezza che coinvolgono essenzialmente i soli segmenti CE e BG. In generale, alla luce del percorso seguito dalla classe ci aspettiamo che gli studenti facciano riferimento sia a realizzazioni di *Tipo 1* che a realizzazioni di *Tipo 2*.
La Figura 6 mostra l'albero di realizzazione atteso. Nella parte sinistra dell'albero atteso sono riportate le realizzazioni di altezza di *Tipo 1* (*a*, *b*) che è possibile riconoscere nel disegno del triangolo ABC dato nel quesito. Nella parte destra dell'albero atteso sono invece riportate le realizzazioni di altezza di *Tipo 2* riconoscibili nel disegno.

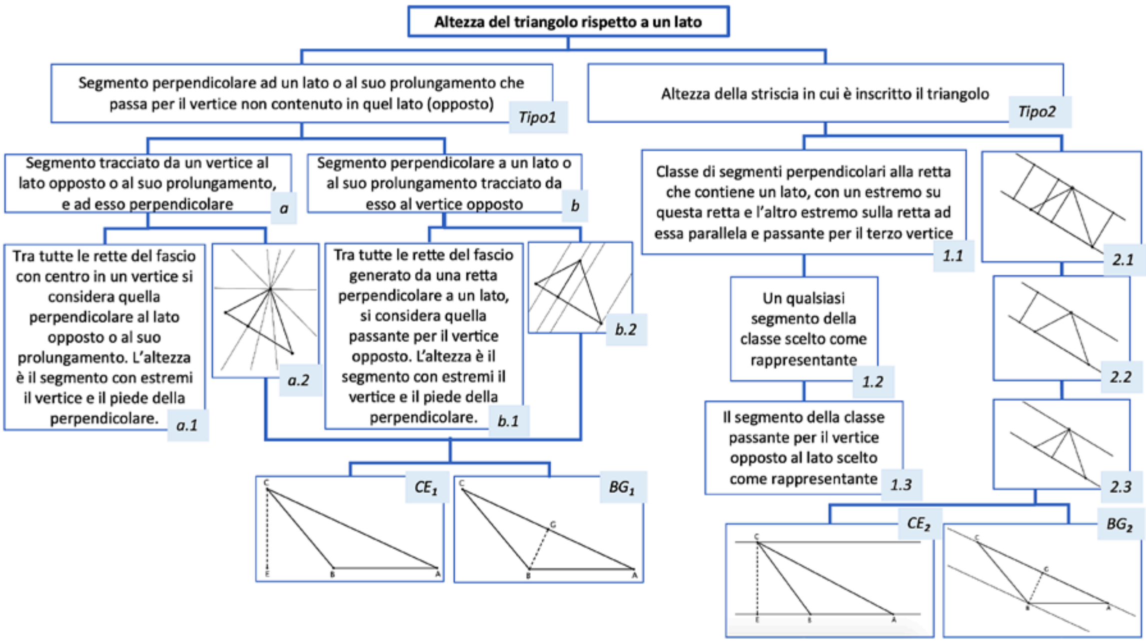


Figura 6. Albero di realizzazione atteso del significante altezza rispetto ad un lato del triangolo ABC dato dal quesito.

3.3.1 Realizzazioni di Tipo 1

Le realizzazioni di *Tipo 1a* caratterizzano l'altezza a partire da tutte le rette passanti per un vertice. Tra queste rette si sceglie quella che interseca perpendicolarmente la retta su cui giace il lato del triangolo a cui il vertice non appartiene, determinando così il secondo estremo dell'altezza. Nell'albero atteso (Figura 6), abbiamo riportato questa realizzazione in riferimento al fascio di rette centrato in un vertice del triangolo. *Rituali* di costruzione dell'altezza che viene disegnata ruotando una squadra attorno al vertice del triangolo sino a che essa non forma un angolo retto con il lato a cui il vertice non appartiene generano questa realizzazione di altezza. Nel disegno dato nella traccia del quesito è possibile distinguere segmenti passanti per vertici diversi del triangolo ABC:

– due segmenti tratteggiati passanti per il vertice C. Per riconoscere CE come realizzazione di altezza occorre tenere conto della possibilità che l'altezza intersechi il prolungamento del lato AB, ovvero la retta su cui giace AB. Il segmento CF, invece, non è un'altezza poiché, pur giacendo su una retta che appartiene al fascio proprio di rette con centro in C, non interseca perpendicolarmente il lato AB.
– Due segmenti tratteggiati passanti per il vertice B. Con considerazioni analoghe si può concludere che solo il segmento BG è un'altezza rispetto al lato AC.

Le realizzazioni di *Tipo 1b* caratterizzano l'altezza a partire dalle rette perpendicolari alla retta su cui giace un lato del triangolo e scegliendo tra queste quella passante per il vertice non adiacente al lato. Nell'albero atteso (**Figura 6**), abbiamo riportato queste realizzazioni in riferimento al fascio di rette improprio generato da una retta perpendicolare al lato scelto. Tali realizzazioni corrispondono a *rituali* di costruzione dell'altezza basati sul movimento di una squadra lungo una riga o un'altra squadra appoggiata sul lato scelto del triangolo, mantenendo la perpendicolarità durante tale movimento (**Figura 7**).

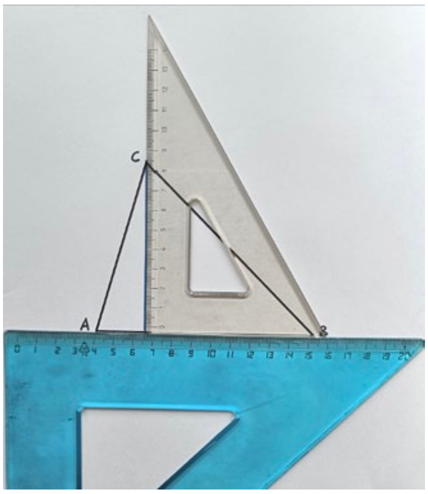


Figura 7. Costruzione dell'altezza con l'uso delle squadre.

Nel disegno dato nella traccia del quesito è possibile individuare segmenti con caratteristiche di seguito descritte:

– quattro segmenti che hanno un estremo sul lato AB o sul suo prolungamento. Tra questi solo CE e BD sono perpendicolari ad AB ma solo CE è un'altezza perché passa per il vertice C (che non appartiene al lato AB).
– Quattro segmenti che hanno un estremo sul lato CB. Tra questi nessuno è perpendicolare a CB, dunque, non sono realizzazioni di altezza.
– Quattro segmenti che hanno un estremo sul lato CA. Tra questi solo BG è perpendicolare a CA ed inoltre passa per il vertice B (che non appartiene al lato CA), realizzando quindi l'altezza del triangolo relativa a CA.

3.3.2 Realizzazioni di Tipo 2

Le realizzazioni di *Tipo 2* caratterizzano l'altezza rispetto ad un lato a partire dalla striscia in cui il triangolo è inscritto (Ferrari, 2016). Ciascuna altezza del triangolo coincide con l'altezza della corrispondente striscia, la quale determina una classe di segmenti. Un qualsiasi rappresentante di questa classe è una realizzazione di altezza del triangolo; tale realizzazione è sempre perpendicolare al lato del triangolo scelto, ha un estremo sulla retta che contiene il lato e ha il secondo estremo non necessariamente coincidente con il vertice opposto al lato. Quando tale vertice coincide con l'estremo dell'altezza, la realizzazione di altezza di *Tipo 2* appare simile alla realizzazione di *Tipo 1*, al netto della presenza della striscia. Per quanto riguarda il triangolo del quesito proposto, sono due le strisce in cui è possibile inscriverlo che risultano utili per riconoscere le altezze tra i segmenti tratteggiati.

– Una striscia determinata dalla retta passante per AB e dalla parallela passante per C. Appare subito evidente che l'unica realizzazione di altezza rispetto ad AB è rappresentata dal segmento CE. Il segmento CF, pur essendo contenuto nella striscia, non è una realizzazione di altezza della striscia non essendo perpendicolare alle rette che la determinano. Il segmento BD pur essendo perpendicolare ad AB non è contenuto nella striscia poiché l'estremo D non appartiene a una delle due rette che determinano la striscia.
– Una striscia determinata dalla retta passante per AC e dalla parallela passante per B. In questo caso troviamo due segmenti contenuti nella striscia: BG e BD. Tra di essi solo BG è realizzazione di altezza poiché perpendicolare alle rette che delimitano la striscia o, equivalentemente, ad AC.

Il riconoscimento di CE come realizzazione di altezza è particolarmente immediato in questo caso poiché l'orientamento del triangolo con un lato orizzontale supporta l'individuazione della striscia che contiene il triangolo. Potrebbe risultare più difficile sfruttare la striscia per riconoscere altezze rispetto a lati non orizzontali né verticali. Questo è il caso del lato AC rispetto al quale i due segmenti candidati a essere realizzazioni di altezza sono entrambi contenuti nella striscia e dunque discriminabili solo in base alla relazione di perpendicolarità.
All'interno di realizzazioni di altezza di questo tipo la scelta del segmento tratteggiato è univoca rispetto al disegno dato, ma non in generale: gli studenti potrebbero richiamare nel loro discorso altri segmenti equivalenti a quelli presenti nel disegno (con gli estremi sulla striscia ma non necessariamente coincidenti con un vertice del triangolo). Teniamo conto di questa possibilità nel ramo più a destra dell'albero.

3.3.3 Albero atteso

L'analisi appena descritta e le caratteristiche dell'attività didattica centrata sulla promozione di diverse realizzazioni di altezza del triangolo sono confluite nell'albero di realizzazione del significante "altezza del triangolo rispetto ad un lato" mostrato in **Figura 6**. Per questo studio ci siamo ispirate all'uso degli alberi di realizzazione proposto da Weingarden et al. (2019), e l'albero atteso (**Figura 6**) è costruito *a priori* sulla base delle realizzazioni di altezza di cui ci aspettiamo di trovare traccia nel discorso degli studenti.
L'albero ha radice nel significante *altezza del triangolo rispetto ad un lato* e si dipana in due rami principali: a sinistra le realizzazioni di *Tipo 1* e a destra le realizzazioni di *Tipo 2*.
Il primo livello al di sotto della radice riporta le realizzazioni promosse durante l'attività didattica svolta precedentemente. In particolare, la realizzazione di *Tipo 1* è molto comune tra gli studenti al termine della scuola primaria e promossa dalla stragrande maggioranza dei libri di testo; la realizzazione di *Tipo 2* è stata proposta per la prima volta dall'insegnante curricolare.
Percorrendo il ramo di sinistra, il nodo del primo livello si dipana in due rami che tengono conto delle due diverse realizzazioni di *Tipo 1*. Il livello sottostante riporta realizzazioni (*a.1, a.2, b.1, b.2*) che sono legate alle routine utilizzate per tracciare le altezze. Per chiarezza puntualizziamo che il riferimento al fascio di rette proprio e improprio è una nostra rilettura di queste routine di costruzione proposte e utilizzate dagli studenti per disegnare altezze.
Le foglie situate più in basso nell'albero esplicitano le realizzazioni di altezza presenti nel quesito proposto. Esse riportano realizzazioni visuali poiché il discorso della classe si sviluppa attorno al media-

tore visivo fornito dal quesito che è sempre a disposizione degli studenti, ma in realtà tengono conto anche di realizzazioni verbali come "CE" o "BG".
Percorrendo il ramo di destra, il nodo del primo livello si divide in due rami che contengono rispettivamente una realizzazione verbale e una visiva. Si può osservare come, partendo da una realizzazione in cui ci è possibile parlare di una pluralità di altezze (*1.1, 2.1*), si possa giungere ad una realizzazione del tutto simile a quella più consueta (*1.3, 2.3*). La convivenza di queste diverse realizzazioni presuppone un processo di *saming* completato, come avviene per il matematico esperto.

3.4 Schema analitico

I dati raccolti constano di video-registrazioni della discussione di classe sviluppatasi attorno al quesito prima descritto durante una lezione in presenza in cui il ricercatore era collegato da remoto su piattaforma *Google Meet*.[7] Di conseguenza i dati sono stati raccolti con una telecamera fissa.
L'analisi dei dati si è svolta ciclicamente in più fasi che di seguito descriviamo nel dettaglio.

Fase 1 - Trascrizione

La prima fase consiste nella trascrizione fedele delle produzioni verbali di tutti gli interventi dei partecipanti al discorso. Questa fase consente di esplicitare tutte le componenti (verbali e non verbali) del discorso che saranno oggetto della codifica successiva.

Fase 2 - Etichettatura

In questa fase i dati vengono analizzati più volte per identificare le realizzazioni di altezza richiamate dagli studenti e descrivere come esse compaiono nel discorso. Questa fase si sviluppa in più round di analisi con finalità diverse; il loro insieme consente di raccogliere informazioni utili a rispondere alla prima domanda di ricerca e, in particolare, ai punti (a) e (b) che attengono alla descrizione delle realizzazioni di altezza introdotte dagli studenti nel loro discorso.

– Il primo round è volto a identificare all'interno del discorso della classe le sole istanze di realizzazioni di altezza. Questo round consente di identificare i passaggi salienti della trascrizione che saranno oggetto della successiva analisi più fine.
– Il secondo round si concentra sulle parti del discorso (parole, gesti, disegni, mediatori visivi) in cui abbiamo rintracciato riferimenti a realizzazioni di altezza. L'analisi mira a identificare elementi del discorso che descrivono il tipo di realizzazione che lo studente richiama tra quelle proposte durante l'attività didattica: *Tipo 1* o *Tipo 2*. Questo round consente di descrivere qualitativamente le caratteristiche di ciascuna realizzazione e dunque fornisce informazioni utili a rispondere ai punti (a) e (b) della prima domanda di ricerca.
– Il terzo round mira a rintracciare all'interno del discorso sulle realizzazioni di altezza elementi statici o dinamici. Quest'ultimo round intende indagare il processo di oggettificazione del significante altezza: la presenza di elementi dinamici nel discorso è indice di un significante non ancora del tutto oggettificato; di contro, il significante altezza, per essere proprio di un *oggetto matematico*, dovrà essere caratterizzato dall'assenza di riferimenti ad aspetti temporali e a processi, cioè dev'essere a-temporale (come qualsiasi altro oggetto matematico). Questo round arricchisce la descrizione delle realizzazioni di altezza che compaiono nel discorso, contribuendo così a rispondere in particolare al punto (b) della prima domanda di ricerca.

Nella seguente tabella (Tabella 1) sono riportate e descritte le etichette usate per l'analisi, accompagnate da alcuni esempi.

7. Questa non è stata una scelta di design, ma una necessità dovuta alle limitazioni all'ingresso a scuola del personale non docente causate dall'emergenza sanitaria da COVID-19.

Round	Descrizione delle etichette
I	Realizzazioni di altezza rispetto ad un lato del triangolo: *"[Numero progressivo]"*
	Istanze nel discorso degli studenti in cui è possibile identificare una realizzazione di altezza. Ad esempio, riconosciamo una realizzazione di altezza in affermazioni come le seguenti: *«CE è altezza»*, *«Se metti il righello sulla retta di BA fai anche l'altezza E»*. *«Noi facciamo così [prende le squadre in mano], se esploriamo fino a trovare il vertice opposto»*. Eventualmente accompagnate da gesti come quelli nelle **Figure 8a** e **8b**:  **Figure 8a, 8b.** Alcuni esempi di gesti degli allievi.
II	*Tipo*: *"1" – "1a" – "1b" – "2"*
	Si esplicita il tipo di realizzazione in base alla vicinanza con una delle seguenti descrizioni di altezza. – *Tipo 1*: segmento perpendicolare ad un lato o al suo prolungamento che passa per il vertice non contenuto in quel lato (opposto). – *Tipo 1a*: segmento tracciato da un vertice al lato opposto o al suo prolungamento, e ad esso perpendicolare. – *Tipo 1b*: segmento perpendicolare a un lato o al suo prolungamento tracciato da esso al vertice opposto. – *Tipo 2*: Altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo. La vicinanza è stabilita anche sulla base di inferenze del ricercatore che conosce le narrazioni condivise e sviluppate dalla classe durante l'attività didattica. Ad esempio, un'affermazione del tipo *«è un'altezza perché va al vertice opposto»* è considerata una realizzazione di *Tipo 1*, verbale, del segmento tracciato dal lato al vertice. Il riferimento al movimento verso il vertice opposto ci consente di etichettarla come realizzazione di *Tipo 1b*. Sono invece considerate realizzazioni di *Tipo 2* tutte quelle in cui compare un riferimento alla striscia o alla retta parallela o alla classe di segmenti.
III	Dimensione statica o dinamica: *"S" – "D"*
	Si analizza il discorso riferito alla singola realizzazione per evidenziare elementi statici o dinamici. *«CE è altezza»* è un esempio di discorso con una dimensione statica. *«L'altezza va al vertice opposto»* è un esempio di discorso con una dimensione dinamica.

Tabella 1. Elenco e descrizione delle etichette utilizzate per le analisi dei dati.

Fase 3 - Albero di realizzazione della classe

Le fasi precedenti di analisi hanno consentito di compiere passi significativi verso le risposte ai punti (a) e (b) della prima domanda di ricerca. Tali risultati parziali delle analisi forniscono informazioni essenziali che saranno reinvestite nella fase 3. Essa consentirà di rispondere al punto (c) della prima domanda di ricerca.
In questa fase si parte dallo scheletro dell'albero atteso con le foglie svuotate. La trascrizione codificata viene ripercorsa e, sulla base delle precedenti fasi di analisi, le realizzazioni numerate vengono riportate nella corrispondente foglia dell'albero nella forma *"[Numero progressivo] Pseudonimo studente"*. Nel caso di realizzazioni non previste dall'albero atteso, viene aggiunta una foglia.
Al termine di questa fase di analisi potremo osservare a colpo d'occhio la distribuzione delle realizzazioni di altezza richiamate dagli studenti e le loro eventuali interazioni. Inoltre, questa fase consente di osservare quali tipi di realizzazioni di altezza sono entrate a far parte del discorso di classe e quali non ancora. In questo modo, oltre a visualizzare le realizzazioni emerse durante la discussione di classe, riusciamo a tener traccia dello sviluppo temporale della lezione e degli studenti che hanno partecipato al discorso matematico.
Infine, alla luce delle risposte date alla prima domanda di ricerca, potremo rispondere alla seconda domanda di ricerca, mettendo a confronto i nostri risultati con quelli riportati dalla letteratura. In questo senso, l'albero di realizzazione, che sarà un risultato di questa ricerca, diventa esso stesso strumento di analisi.

4 Analisi del discorso di classe e dell'albero di realizzazione

Riportiamo in **Tabella 2** un breve estratto per mostrare come abbiamo usato gli strumenti analitici appena descritti. Nell'ordine le colonne riportano: il tempo riferito al video trascritto, lo pseudonimo[8] di chi interviene nel discorso, la trascrizione delle componenti verbali e gestuali del discorso, il numero progressivo dell'istanza di realizzazione, il tipo di realizzazione, la dimensione statica o dinamica, il commento del ricercatore.

Tempo	Chi	Cosa dice [Cosa fa]	#	*Tipo*	Statico/Dinamico	Commento
14:42.14	Ettore	L'altezza relativa al lato AB è EC, perché una altezza non parte dal vertice opposto, ma parte dal lato relativo.	[26] [27]	1b	S: "è EC" D: "non parte dal", "parte dal"	Ettore spiega perché a suo parere BD non può essere una altezza rispetto al lato AB.
15:20.07	Ettore	Però se Lavinia dice che BD è l'altezza di AB non va bene.				
15:26.05	Lavinia	È una delle altezze, non è l'unica altezza.	[28]	2	S	L'altezza relativa ad un lato non è unica. Questo discorso si riferisce a realizzazioni di tipo 2 che prevedono più di una altezza per ogni lato.
15:28.27	Ins.	Non va bene perché?				Sollecita spiegazioni da parte di Ettore.
15:30.17	Ettore	Perché parte dal punto… dal vertice opposto.	[29]	1b	D: "parte dal"	L'aspetto dinamico del "partire dal lato" sembra fondamentale per Ettore per riconoscere realizzazioni di altezza.

Tabella 2. Esempio di codifica di un estratto del discorso di classe tra i minuti 14:42 e 15:30.

8. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i nomi sono stati cambiati.

L’estratto inizia quando la classe sta discutendo la possibilità che BD sia una altezza relativa al lato AB. Ettore interviene per comunicare che a suo parere il segmento CE, visibile nel disegno proiettato a tutta la classe, è l’altezza relativa al lato AB. Rintracciamo nel suo discorso una realizzazione di altezza, la numero [26] dall’inizio della discussione. Il discorso ha una dimensione inizialmente a-temporale (“l’altezza relativa al lato AB è EC”). Il contesto dell’intervento di Ettore suggerisce che la realizzazione è di *Tipo 1*. Infatti, Ettore interviene per esprimere l’idea che il segmento BD vada scartato, poiché CE è già una altezza rispetto al lato AB. Dunque, questa realizzazione verrà riportata nell’albero di classe come foglia del ramo sinistro. Nella spiegazione che segue riconosciamo una realizzazione di altezza, la [27], chiaramente di *Tipo 1b*. Il discorso ha una dimensione dinamica. Osserviamo che anche discorsi come quello di Ettore, volti a giustificare perché un segmento non sia una altezza, ci danno informazioni sulle caratteristiche delle realizzazioni di altezza che sono entrate nel discorso degli studenti. Questa realizzazione verrà riportata nell’albero di classe come foglia del ramo sinistro. Nell’intervento di Lavinia rintracciamo una nuova realizzazione di altezza. La studentessa sottolinea che è possibile considerare più di una altezza rispetto allo stesso lato. Questo è un discorso coerente all’interno di realizzazioni di *Tipo 2*, dunque all’interno dell’albero di classe verrà riportata come foglia del ramo destro. L’estratto mostra interventi tipici dell’insegnante volti a facilitare il discorso di classe e a promuovere l’esplicitazione di argomentazioni da parte degli studenti.

4.1 Analisi del discorso di classe

Discutiamo adesso alcuni spunti di riflessione di carattere generale, emersi dalle analisi, e che offrono una panoramica su ciò che è accaduto in classe.
Come ci aspettavamo sulla base del percorso intrapreso con la classe, il significante *altezza* ancora non è un oggetto matematico per tutti gli studenti. Questo aspetto lo inferiamo dal discorso di alcuni studenti che si riferiscono all’altezza come il prodotto di un processo di costruzione. Per esempio:

Ale.: «Adesso servirebbe la squadra e farla scorrere sul righello».
L.: «Se metti il righello sul segmento AB, ok, ci sei? E poi prendi la squadra. Inizi a disegnare delle altezze e BD è una di quelle tipo…».

Per questi studenti l’uso della parola altezza, e quindi il significante stesso, sembra essere legato a una routine di tipo rituale (nell’esempio, il rituale di costruzione con riga e squadra). Tuttavia, ci sono alcuni studenti che parlano in maniera oggettificata di altezza. Per esempio:

G.: «L'altezza relativa al lato AB è CE. Mentre la mediana al lato AB è CF. L'altezza relativa al lato AC è G. E la mediana relativa al lato AC è D».

L’uso delle parole e la costruzione del discorso da parte di studenti come Giulio evidenziano l’oggettificazione del significante altezza e, in questo caso, anche della mediana. Affermazioni come “l’altezza *è* CE” sono stati interpretati come indicatori di un processo di oggettificazione completato. Osserviamo inoltre che il discorso di Giulio è caratterizzato dall’assenza di una dimensione dinamica, che invece è molto evidente nel discorso di Lavinia e Alessio (“scorrere”, “prendi”, “inizi a”). La dimensione *statica* o *dinamica* che possiamo riconoscere nel discorso matematico degli studenti intorno al significante altezza apre una finestra sul loro processo di oggettificazione: per Lavinia e Alessio l’altezza è ancora legata al processo di costruzione e l’aspetto dinamico è evidente nel loro discorso; Giulio si riferisce al mediatore visivo come realizzazione dell’oggetto matematico altezza. La realizzazione proposta da Alessio, come prodotto del processo di costruzione, sembra tuttavia essere legata a una routine non puramente di tipo rituale ma in transizione verso una routine esplorativa. Infatti, la costruzione dell’altezza con riga e squadra viene richiamata dallo studente con l’obiettivo di rintracciare l’altezza muovendo la squadra lungo il lato del triangolo, non riproduce fedelmente il rituale di costruzione, ma è lui stesso il protagonista dell’azione discorsiva.

In generale, possiamo dire che la classe sta ancora costruendo delle realizzazioni del significante altezza attraverso diverse routine. Il focus iniziale del discorso di classe è principalmente sul riconoscere o meno un segmento come realizzazione di altezza riferendosi a realizzazioni sia di *Tipo 1* che di *Tipo 2*. Un esempio di realizzazione di *Tipo 2* si trova nel discorso di Ciro:

C.: «Secondo me G e B è un'altezza perché tipo se giri il disegno e consideri il metodo di Paolo metti una retta su B tipo [braccio dritto sul banco, vedi gesto riportato in Figura 8a] è un'altra altezza».

L'espressione "metodo di Paolo" è stata culturalmente sviluppata all'interno della classe ed è quindi una narrazione condivisa sulle altezze all'interno di realizzazioni di *Tipo 2*. In sostanza si tratta del rituale che consente di tracciare le altezze del triangolo come altezze della striscia entro cui il triangolo è inscritto.
L'interazione tra le realizzazioni di *Tipo 1* e di *Tipo 2* viene promossa a un certo punto da un altro studente, Roberto, e accolta dal discorso della classe. Questo è un momento cruciale nello sviluppo del discorso di classe: l'intervento di Roberto, che discuteremo nel dettaglio nel par. 4.3, ha stimolato un'evoluzione nel discorso degli studenti che dalla dicotomia essere/non essere altezza si è spostato sulle caratteristiche che renderebbero un certo segmento un'altezza. In particolare, gli studenti descrivono le caratteristiche utili a rendere il segmento BD una realizzazione possibile di altezza del triangolo ABC relativa al lato BA. Ritroviamo evidenza di questo passaggio, molto interessante dal punto di vista matematico, nel discorso di Alice:

Ali.: «Allora CE è una altezza del lato BA. E praticamente se vuoi farne un'altra che parta dal punto B, praticamente devi fare una retta parallela al punto BA, cioè al segmento BA, parallela a BA, deve passare per il punto C. […] E quindi BD non può essere una altezza, perché deve arrivare almeno fino a... all'intersezione».

La Figura 9 mostra il disegno ottenuto aggiungendo gli elementi grafici suggeriti da Alice che consentono di modificare il segmento BD affinché sia un'altra realizzazione dell'altezza relativa al lato AB.

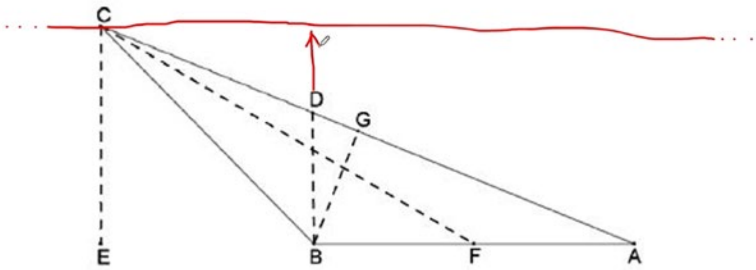


Figura 9. Disegno fatto alla lavagna dal ricercatore secondo le indicazioni di Alice.

Infine, osserviamo come la scelta di introdurre nel percorso didattico realizzazioni di *Tipo 2* si rifletta nel discorso degli studenti, i quali considerano non necessariamente "un segmento" ma "una classe di segmenti" come realizzazione di altezza relativa a un certo lato del triangolo. Nel primo esempio riportato in questo paragrafo già si può notare come Lavinia parli di altezze al plurale ("delle altezze", "una di quelle"), vediamo altri due interventi della stessa studentessa:

L.: «Allora BA è il segmento. Tu hai presente che puoi fare un sacco di altezze infinite?»
L.: «I segmenti, puoi fare un sacco di segmenti, ok? Non devono andare al vertice opposto».

Da questi brevi estratti non solo emerge che l'altezza relativa a un lato del triangolo non è unica e se ne possono tracciare infinite, ma la studentessa sottolinea anche che tra tutti i segmenti che identificano l'altezza della striscia in cui è inscritto il triangolo si possono considerare realizzazioni di altezza anche quelli che non hanno un estremo coincidente con un vertice del triangolo.

4.2 Confronto tra l'albero della classe e l'albero atteso

Analizzando il discorso di classe e seguendo lo schema analitico descritto nel **par. 3.4**, abbiamo ricostruito l'albero di realizzazione mostrato in **Figura 10**.

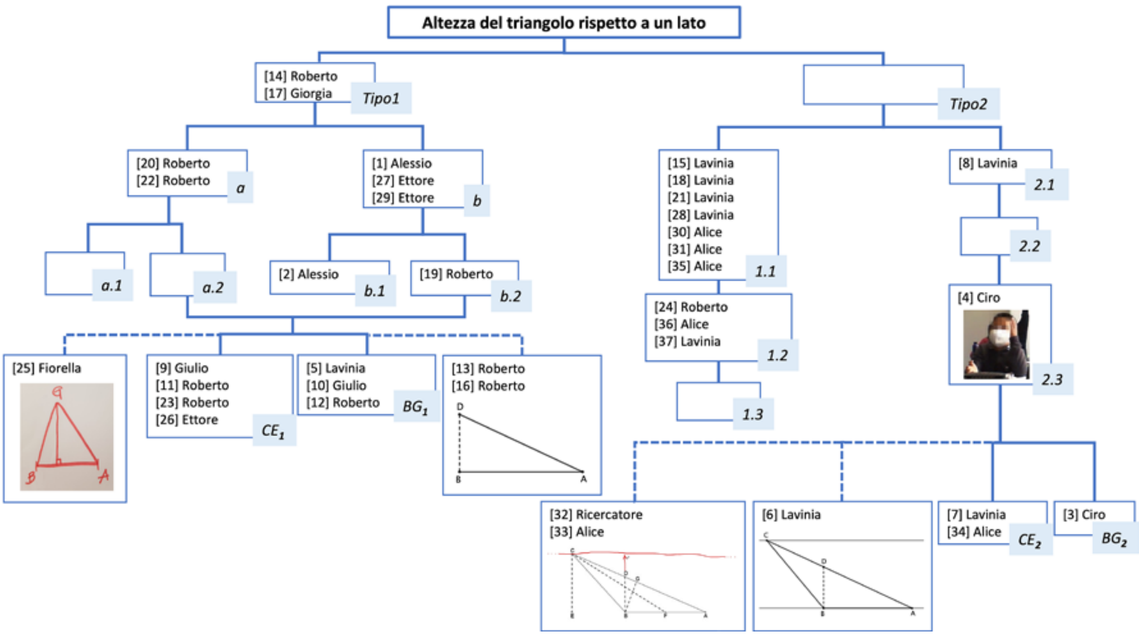


Figura 10. Albero di realizzazione della classe del significante altezza rispetto ad un lato del triangolo ABC dato dal quesito.

Il primo aspetto che si nota osservando l'albero della classe è che non compaiono alcune delle realizzazioni presenti nell'albero atteso (**Figura 6**) e, allo stesso tempo, che sono emerse nuove foglie (si vedano i rami tratteggiati in **Figura 10**) con possibili realizzazioni del significante altezza secondo gli studenti.
Rispetto alle realizzazioni attese ma non presenti nel discorso di classe, osserviamo in particolare l'assenza della coppia di realizzazioni costituita dal fascio proprio centrato nel vertice del triangolo (di *Tipo 1a*). Gli studenti fanno riferimento a realizzazioni di altezza tracciate a partire dal vertice verso il lato del triangolo, per esempio Roberto ([20] e [22] in **Figura 10**):

R.: «Perché deve partire da questo, deve partire dal vertice un'altezza Lavinia».
R.: «Sai come si fa una altezza? Devi mettere un righello con la squadra, dal vertice opposto devi tracciare una linea al lato opposto o al suo prolungamento, per questo c'è il lato CE».

Tuttavia, nel discorso dello studente non rintracciamo elementi che facciano pensare alla scelta della perpendicolare tra le molte rette passanti per il vertice. Questo aspetto può essere giustificato dallo stretto legame tra la realizzazione di altezza e il suo processo di costruzione per mezzo di riga e squadra (nella quale è insita la perpendicolarità), presentato dalla docente durante l'attività didattica. All'interno delle realizzazioni di *Tipo 1*, il rituale di costruzione sposta gran parte dell'attenzione della classe su realizzazioni che implicitamente coinvolgono il fascio improprio, profondamente legato alle

rette tra loro parallele che è possibile disegnare con riga e squadra. Infatti, guardando l'albero di realizzazione della classe (Figura 10), possiamo osservare che il ramo corrispondente a realizzazioni di *Tipo 1b* contiene realizzazioni richiamate da diversi studenti: Alessio, Ettore e Roberto.
Rispetto a nuove realizzazioni non attese, troviamo realizzazioni di altezza rispetto al lato AB diverse dal segmento CE e realizzazioni di altezze di triangoli diversi da ABC dato.
Nel primo caso l'attenzione è rivolta in particolare al segmento BD, attorno a cui si sviluppa il discorso di diversi studenti. Questo discorso viene introdotto da Lavinia ([6] in Figura 10) che si riferisce a una realizzazione di *Tipo 2*, con il triangolo inscritto nella striscia, e considera BD come una possibile altezza relativa al lato BA. Roberto riprende la proposta di Lavinia di considerare BD come possibile altezza ma si riferisce al sotto-triangolo ABD, come si può leggere di seguito ([13] e [16] in Figura 10):

R.: «Ma... se noi guardiamo il triangolo ABD, BD è l'altezza».
R.: «Secondo me tu stai guardando tipo un triangolo nascosto ABD e pensi che BD sia una altezza».

Questo intervento ha portato all'inserimento nell'albero di un'ulteriore realizzazione promossa dallo studente, che si inserisce nel ramo delle realizzazioni di *Tipo 1* in quanto nel suo discorso lo studente non fa riferimento alla striscia. La realizzazione proposta da Lavinia viene raffinata da Alice che propone un'altra realizzazione di altezza ([33] in Figura 10) all'interno delle realizzazioni di *Tipo 2*. Supportati dal ricercatore che arricchisce il mediatore visivo su indicazione di Alice, gli studenti propongono una nuova realizzazione di altezza relativa al lato AB coerente con realizzazioni di *Tipo 2* che ammettono l'esistenza di più di un'altezza relativa allo stesso lato.
Un'ultima realizzazione inattesa è quella proposta da Fiorella. La studentessa considera un sotto-triangolo: disegna alla lavagna il triangolo BAG riportato nell'albero ([25] in Figura 10). In particolare, la studentessa usa questo nuovo mediatore visivo per giustificare la possibilità che il segmento BD possa essere accettato come realizzazione di un'altezza, ma, in linea con ciò che aveva espresso Roberto, sottolinea la necessità di cambiare il triangolo di riferimento. Tuttavia, Fiorella non sembra essere d'accordo col compagno rispetto a quale triangolo debba essere considerato.

4.3 Gestione del passaggio da realizzazioni di *Tipo 1* a realizzazioni di *Tipo 2*

I numeri progressivi assegnati agli interventi degli studenti in cui abbiamo ritrovato istanze di realizzazioni del significante altezza consentono di osservare la distribuzione, all'interno dell'albero, delle realizzazioni di *Tipo 1* o di *Tipo 2*.
Ciascuno studente sembra rimanere legato ad un certo tipo di realizzazione. Infatti, nel corso della lezione il focus del discorso è su una realizzazione di *Tipo 1*, come nel caso di Alessio, Roberto e Giulio, oppure di *Tipo 2*, come nel caso di Lavinia e Ciro. In altre parole, uno stesso studente non sembra passare nel suo discorso da una realizzazione di *Tipo 1* a una realizzazione di *Tipo 2*, o viceversa.
Dopo aver riconosciuto CE e BG come due altezze del triangolo ABC, e aver scartato CF, la discussione in classe si accende sul segmento BD. Abbiamo descritto nel par. 4.1 come a innescarla sia Lavinia la quale, sostenendo che BD sia un'altezza, ne parla riferendosi a sue realizzazioni di *Tipo 2* ([15] in Figura 10). Sebbene anche Lavinia introduca la squadra per descriverne l'uso guidato dalla routine rituale al fine di disegnare l'altezza, osserviamo come nella sua descrizione venga utilizzata per tracciare "delle altezze" (realizzazione di *Tipo 2*) e non segmenti che individueranno un'altezza solo quando intercetteranno il vertice del triangolo (realizzazione di *Tipo 1b*).
I compagni in generale sostengono invece che BD non sia un'altezza, portando argomentazioni che si basano su realizzazioni di *Tipo 1* di altezza. A tale proposito è interessante lo scambio tra Lavinia e Roberto:

L.: «Allora BA è il segmento. Tu hai presente che puoi fare un sacco di altezze infinite?»
R.: «Ma se non vanno al vertice opposto».
L.: «Ma cosa c'entra! Non devono andare!»

La svolta nel discorso della classe avviene quando Roberto cambia prospettiva e passa dalla parte sinistra dell'albero alla parte destra, cioè quando nel suo discorso entra la realizzazione di altezza che si basa sulla striscia ([24] in Figura 10). Questo passaggio è molto evidente guardando l'albero della classe: a colpo d'occhio vediamo come tra le battute etichettate con [23] e [24] Roberto cambi ramo dell'albero. Di seguito il discorso corrispondente:

R.: «Sai come si fa una altezza? Devi mettere un righello con la squadra, dal vertice opposto devi tracciare una linea al lato opposto o al suo prolungamento, per questo c'è il lato CE».
R.: «Se vuoi fare proprio una altezza qua [indica un punto su AB], almeno devi usare il metodo di Paolo».

Il riferimento al "metodo di Paolo" è l'elemento del discorso di Roberto che sposta l'attenzione della classe sulle realizzazioni di *Tipo 2*. Infatti, dopo l'intervento di Roberto troviamo una serie di interventi che fanno riferimento a realizzazioni di *Tipo 2*: [28], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36] e [37] in Figura 10. Roberto a questo punto cerca di convincere Lavinia che, anche riferendosi a realizzazioni di *Tipo 2*, affinché il segmento BD sia altezza gli mancano alcune caratteristiche, ad esempio il punto D non intercetta il bordo della striscia.

R.: «E grazie, ma allora DB non è una altezza se non arriva là».

Dunque, le realizzazioni proposte da Roberto in un primo momento mettono in evidenza la caratteristica dell'altezza come quel segmento che ha gli estremi in un vertice e sul lato opposto. Infatti, troviamo i suoi interventi tutti nel ramo sinistro dell'albero. Poi lo studente sembra includere nel suo albero di realizzazione di altezza, attraverso un processo di *saming*, anche dei segmenti che non passano per alcun vertice del triangolo, e questo accade quando inizia a partecipare al discorso di Lavinia, che ritroviamo nel lato destro dell'albero. Quindi è proprio il passaggio dalla realizzazione di *Tipo 1* alla realizzazione di *Tipo 2* che sembra giocare un ruolo fondamentale nel discorso di classe. Rimanendo ancorati a un discorso che coinvolge solo realizzazioni di altezza *Tipo 1*, gli studenti non riescono a convincere Lavinia che BD non sia accettabile. Solo quando il focus del discorso di Roberto si sposta sulle realizzazioni di *Tipo 2*, gli altri studenti diventano dei partecipanti al discorso di Lavinia e iniziano ad usare le stesse parole e gli stessi mediatori visivi. L'albero di realizzazione mostra come, dopo l'intervento "ponte" di Roberto, anche Alice partecipa al discorso sulle altezze richiamando realizzazioni di *Tipo 2*, appoggiata da altri componenti della classe. I discorsi di Lavinia e Roberto trovano una sintesi nella realizzazione costruita dal ricercatore sotto la guida di Alice (Figura 9).

5 Discussione e conclusioni

5.1 Risposta alle domande di ricerca

Alla luce delle analisi possiamo rispondere alle nostre domande di ricerca.
Le analisi del discorso della classe ci consentono di concludere che, durante la discussione, gli studenti richiamano spontaneamente sia realizzazioni di *Tipo 1* che realizzazioni di *Tipo 2*. L'albero di realizzazione della classe permette di cogliere, a colpo d'occhio, la ricchezza e vivacità del discorso della classe che ha toccato diverse realizzazioni di altezza: gli studenti hanno fatto riferimento a gran parte delle realizzazioni attese e ne hanno introdotte di nuove. Osserviamo che ciascuno studente è rimasto essenzialmente legato a un tipo solo di realizzazione; di conseguenza, non osserviamo nel discorso

del singolo studente interazioni tra tipi diversi di realizzazioni; possiamo invece osservare come l'interazione sia promossa dal tentativo di conciliare discorsi che fanno riferimento a realizzazioni diverse. Questo è evidente nel discorso che si sviluppa tra Roberto e Lavinia: la ricerca di una narrazione condivisa sulla possibilità di rendere BD un'altezza a partire da due realizzazioni diverse promuove l'interazione tra realizzazioni. Possiamo notare che il cuore di tale interazione sta proprio nella dinamica del discorso che si sviluppa tra gli studenti. Nella transizione tra i due tipi di realizzazione gioca un ruolo chiave Roberto: sebbene sia partito da realizzazioni di *Tipo 1*, riesce a muoversi verso realizzazioni di *Tipo 2*, con lo scopo di trovare un terreno comune con Lavinia su cui confrontarsi, e ad accompagnare la classe verso questa prospettiva.

Sebbene durante la lezione sia stata sempre proiettata l'immagine riportata in Figura 5, che ha quindi giocato il ruolo di mediatore visivo nel discorso degli studenti, abbiamo potuto cogliere diverse differenze nel modo in cui gli studenti hanno sfruttato tale mediazione e hanno richiamato le varie realizzazioni di altezza. In particolare, in alcuni casi il discorso è caratterizzato da affermazioni, parole e gesti statici («Se metti il righello su BA hai anche l'altezza CE»), mentre in altri casi tali aspetti sono di natura più dinamica («L'altezza relativa al lato AB è EC, perché un'altezza non parte dal vertice opposto, ma parte dal lato relativo»). In maniera simile, ritroviamo nel discorso istanze di dinamismo legate alla routine di costruzione del segmento altezza con la squadra e la riga richiamata come rituale o come esplorazione.

I riferimenti nel discorso degli studenti alla "squadra" e al "metodo di Paolo" mettono in luce narrazioni condivise che fanno riferimento a rituali che sono stati culturalmente costruiti dalla classe e sono legati rispettivamente a realizzazioni di *Tipo 1* e *2*. Come abbiamo messo in evidenza nelle analisi, la presenza di elementi dinamici nel discorso della classe evidenzia come il processo di oggettificazione del significante altezza non sia ancora completo per tutti gli studenti.

Per quanto riguarda la seconda domanda di ricerca, non sono emerse dall'analisi del discorso di classe molte delle difficoltà comuni descritte in letteratura e riportate nel par. 2.1. Per esempio, gli studenti non si riferiscono all'altezza come un segmento che deve necessariamente partire da un vertice (Sbaragli, 2017). Infatti, questa realizzazione viene richiamata esplicitamente solo da uno studente ([20] e [22] in Figura 10). In particolare, esemplificativo di questo punto è lo scambio tra Roberto e Lavinia riportato nel par. 4.3.

Inoltre, nel discorso di classe non emerge affatto la realizzazione di altezza come segmento tutto contenuto nel triangolo (Fischbein & Nachlieli, 1998; Hershkowitz, 1987, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1980). Un risultato a nostro avviso molto incoraggiante e positivo rispetto agli effetti delle scelte didattiche operate riguarda il riconoscimento immediato del segmento CE come realizzazione dell'altezza relativa al lato AB ([9], [11], [23] e [26] in Figura 10). Sebbene CE sia disegnata come un segmento verticale e quindi rimandi a una realizzazione comunemente accettata di altezza (Fisher, 1978; Gutiérrez & Jaime, 1999; Sbaragli, 2017), l'estremo E, e di fatto tutto il segmento, sono esterni al triangolo. Dalla letteratura sappiamo che altezze come CE sono difficili da riconoscere per la maggior parte degli studenti;[9] invece, nel discorso di classe da noi analizzato il riconoscimento di CE come altezza viene subito condiviso e mai messo in discussione.

Altri due aspetti emersi che si discostano dai comportamenti suggeriti dall'analisi della letteratura sono: il riferimento immediato nel discorso di tutti gli studenti a BG come realizzazione di altezza, nonostante il segmento non sia verticale (Fisher, 1978; Gutiérrez & Jaime, 1999; Sbaragli, 2017) e il riconoscimento di CF come realizzazione della mediana rispetto al lato AB che non coincide con l'altezza in questo caso. Un esempio di questo fenomeno si trova nel discorso di Giulio (vedi par. 4.1):

> G.: «L'altezza relativa al lato AB è CE. Mentre la mediana al lato AB è CF. L'altezza relativa al lato AC è G. E la mediana relativa al lato AC è D».

9. I risultati rilasciati da INVALSI a commento delle prove del 2013 registrano la difficoltà degli studenti rispetto al quesito: solo il 34,8% del campione individua CE e BG come realizzazioni di altezza.

In linea invece con i risultati noti dalla letteratura, alcuni studenti hanno considerato la possibilità che il segmento BD possa realizzare un'altezza; tuttavia, il focus del discorso si è presto spostato sulla scelta del lato del triangolo rispetto al quale guardare tale segmento. Questa considerazione ha portato gli studenti a richiamare nel discorso il "metodo di Paolo" e quindi grazie alla mediazione della striscia (realizzazione di *Tipo 2*), che ha portato al confronto con il segmento CE, sono emerse le caratteristiche necessarie perché BD potesse diventare la realizzazione di un'altezza, non tutte soddisfatte.

5.2 Possibili implicazioni didattiche e teoriche

Dal confronto tra l'albero di realizzazione della classe (Figura 10) e l'albero atteso (Figura 6) si può notare che gran parte delle realizzazioni proposte durante il percorso didattico, precedentemente svolto, sono presenti nel discorso di classe. Questo è a nostro avviso molto interessante dal punto di vista didattico perché, rispetto a un percorso più tradizionale in cui si introduce l'altezza solo attraverso realizzazioni di *Tipo 1*, avere un albero di realizzazione più ricco permette l'accesso al discorso matematico da parte di un maggior numero di studenti. Le prime analisi sembrano suggerire che questo approccio favorisca la scelta da parte del singolo studente del tipo di realizzazione che ritiene più funzionale, superando gli ostacoli generati da rappresentazioni stereotipate.

Riteniamo che la varietà di realizzazioni che compaiono nel discorso degli studenti, visibili nella ricchezza dell'albero di classe, sia frutto proprio delle scelte di progettazione del percorso didattico. Aver guidato la partecipazione degli studenti al discorso sulle altezze lavorando con diverse realizzazioni e, in particolare, affiancando alla realizzazione più tradizionale (che abbiamo chiamato di *Tipo 1*) quella che fa riferimento alla striscia (di *Tipo 2*), sembra aver contribuito in maniera sostanziale al raggiungimento di questi risultati.

Sebbene esuli dagli scopi di questo articolo, osserviamo che l'insegnante ha giocato un ruolo cruciale. Infatti, durante il percorso didattico l'insegnante ha promosso lo sviluppo del discorso di classe intorno alle altezze assicurandosi che tutti gli studenti prendessero parte alla discussione, facendo eco agli interventi senza interferire con il proprio punto di vista, ma ponendosi come facilitatore del discorso. In generale, riteniamo che il clima di confronto e scambio che l'insegnante ha saputo creare abbia contribuito in maniera significativa alla partecipazione degli studenti al discorso.

Dal punto di vista teorico, in questo studio abbiamo utilizzato l'albero di realizzazione come strumento di osservazione e di analisi, ispirandoci al lavoro di Weingarden et al. (2019), ma applicandolo per la prima volta al contesto della geometria. Pensiamo che questo possa diventare un valido strumento per analizzare lo sviluppo delle realizzazioni di un significante, che tuttavia può essere ancora affinato. In particolare, un aspetto che potrebbe essere oggetto di ulteriori riflessioni riguarda l'identificazione e l'analisi degli intrecci con alberi di realizzazione di altri significanti. Nel caso dell'altezza, l'albero sembra essere influenzato e sembra influenzare a sua volta l'albero di realizzazione del significante *perpendicolare*. Più precisamente, la perpendicolarità sembra essere incapsulata nella routine di costruzione con riga e squadra. Infatti, la parola "perpendicolare" viene usata solo da una studentessa ([17] Giorgia in Figura 10), ma troviamo altre tracce dell'influenza delle realizzazioni di perpendicolare nel discorso degli studenti. Un esempio su tutti è il gesto realizzato da Ciro ([4] Ciro in Figura 10).

Infine, rispetto al task-design meritano un ulteriore approfondimento le possibili conseguenze della caratterizzazione di altezza attraverso la striscia quando si passa ai poligoni convessi in generale. Nel caso del triangolo è sempre possibile identificare questa striscia, univoca per ciascun lato; invece, nel caso del poligono, occorre valutare quando la figura può essere inscritta in una striscia rispettando la caratterizzazione data da Ferrari (2016). Questo è un punto delicato che può risultare complesso per gli studenti, poiché nuovamente si scontra con una naturale concettualizzazione di altezza come "massimo ingombro" che conduce a includere – ma non inscrivere – il poligono in una striscia.

In conclusione, lo studio mostra come nel discorso della classe sul significante altezza siano presenti diverse realizzazioni, frutto di precise scelte didattiche intenzionalmente mirate a lavorare su alcune delle difficoltà ampiamente documentate in letteratura. Alcuni risultati sono in linea con ricerche

precedenti, ma sono stati messi in luce anche aspetti che se ne discostano, a supporto dell'efficacia del percorso didattico.
Sebbene lo studio presentato in questo articolo sia di carattere esplorativo, senza alcuna ambizione di generalità, ci auguriamo possa essere un primo passo verso un approccio differente ad un tema di ricerca tra i più tradizionali e studiati in didattica della matematica.

Ringraziamenti
Ringraziamo di cuore la prof.ssa Anna Baccaglini-Frank, che ci ha incoraggiate ad esplorare il tema di ricerca affrontato in questo articolo, per non averci mai fatto mancare i suoi preziosi suggerimenti e commenti sia teorici che metodologici. Grazie a Federica Poli per aver progettato, sperimentato e documentato il percorso, permettendoci di realizzare nelle sue classi l'esperienza didattica. Ringraziamo tutti gli studenti coinvolti, per l'impegno e la curiosità che ci hanno mostrato.

Bibliografia

Baccaglini-Frank, A., Finesilver, C., & Tabach, M. (2022). Representations in mathematics education - a shift in perspectives. *ERME column. Eur. Math. Soc. Mag.*, *123*, 45–51. https://doi.org/10.4171/MAG/74

Dreyfus, T. (2017). What are solid findings in mathematics education? In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3952–3959). DCU Institute of Education and ERME.

Ferrari, M. (2016). Sua altezza. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *39*(4A), 465–488.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193–1211. https://doi.org/10.1080/0950069980201003

Fisher, N. (1978). Visual influences of figure orientation on concept formation in Geometry. In R. Lesh (Ed.), *Recent Research Concerning the Development of Spatial And Geometrical Concepts* (pp. 307–321). ERIC/SMEAC.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1999). Pre-service Primary Teachers' Understanding of the Concept Of Altitude of a Triangle. *Journal of Mathematics Teacher of Education*, *2*(3), 253–275. https://doi.org/10.1023/A:1009900719800

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry – or when "a little learning is a dangerous thing.". In J. Novak (Ed.), *Proceedings of the 2nd International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol. III, pp. 238–251). Cornell University.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry: Two Sides of the Coin. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 61–76.

Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2013). *Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2012/13. Guida alla lettura Rilevazioni Nazionali sugli apprendimenti 2012-13 - Prova di Matematica Classe prima Scuola secondaria di I grado.* https://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/2013_I_Sec_Primo_grado_GUIDA_MATEMATICA.pdf

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (Vol. 138, pp. 97–116). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_7

Mariotti, M. A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria.* Pitagora.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183–195. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80058-5

Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale.* Le Monnier. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf/1f967360-0ca6-48fb-95e9-c15d49f18831?version=1.0&t=1480418494262

Sbaragli, S. (2010). Qui cade sua...altezza. *La Vita Scolastica*, *18*, 25–27.

Sbaragli, S. (2017). Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *40*(2A-B), 227–248.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why Cannot Children See as the Same What Grown-ups Cannot See as Different? Early Numerical Thinking Revisited. *Cognition and Instruction*, *23*(2), 237–309. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2302_3

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth PME Conference* (pp. 177–184). University of California.

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool – examining explorative participation in mathematics lessons. *Journal of Mathematical Behavior*, *56*, 100717. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100717

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Springer-Verlag.