DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 22 - 44, DOI: 10.33683/ddm.22.12.2

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Relazione etica degli studenti con un documento tratto dalla storia della matematica

Ethical relation of students with a document taken from the history of mathematics

Adriano Demattè
Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", Pieve del Grappa (TV) – Italia

adrdematte@gmail.com

Sunto / Un'attività di interpretazione di un brano tratto da *Introductio in analysin infinitorum* di Eulero, in una classe quinta della scuola secondaria di secondo grado, consente di evidenziare varie problematiche riguardanti una relazione di responsività e responsabilità – che in questo articolo viene denominata *etica* – da parte degli studenti con un testo matematico e in particolare con un documento storico. L'analisi viene operata alla luce del pensiero dei filosofi Emmanuel Levinas e Hans-Georg Gadamer. L'attenzione è rivolta a come gli studenti orientino la loro interpretazione, come affrontino la situazione di alterità – di confronto con il punto di vista dell'Altro – e come seguano l'autore nei suoi ragionamenti.

Parole chiave: testi matematici; documenti storici; etica; Levinas; Gadamer.

Abstract / Interpretations of a passage from Euler's *Introductio in analysin infinitorum* by secondary school students (18-19 years old) allow to highlight various problems concerning a relation based on responsivity and responsibility – which in this article is named *ethical* – that students have with a mathematical text, specifically with a historical document. The analysis is carried out with reference to the thought of the philosophers Emmanuel Levinas and Hans-Georg Gadamer. The focus is on how students orient their interpretation, how they deal with the experience of otherness – facing the Other's point of view – and how they follow the author in his reasoning.

Keywords: mathematical texts; historical documents; ethics; Levinas; Gadamer.

1 Introduzione: quale relazione con un testo?

Il testo scritto è uno strumento di trasmissione privilegiato della conoscenza matematica, basti pensare alle riviste di ricerca scientifica e di divulgazione, ai manuali scolastici, alle schede di lavoro per gli studenti ecc. L'autore propone al lettore una condivisione di ragionamenti e per come realizza la sua esposizione gli fornisce la possibilità di ripercorrere, assieme, quei ragionamenti – anche se non è escluso che possa riportare delle affermazioni non giustificate (aggiungendo, ad esempio, che la dimostrazione viene omessa). Se si tratta di un documento storico, a quei ragionamenti un lettore moderno potrebbe dare significati diversi rispetto all'autore, dipendenti dalla distanza storica.
Riprendendo Foucault (1969/1977), in un trattato di matematica può essere presente l'opera di più figure: colui che lo presenta, chi stende il contenuto, chi cura l'edizione. Un testo reca traccia di una o più persone. Con Dilthey, possiamo osservare che l'autore non domina tutto quello che scrive e vari aspetti sono lasciati da lui inconsapevolmente nel testo. Questo è un aspetto della teoria romantica della creazione inconscia. Conseguenza, paradossale, di questa teoria è che scopo finale del processo ermeneutico è comprendere l'autore meglio di come lui stesso si comprenda (Dilthey, 1900/1996). A questo possiamo aggiungere l'affermazione di Gadamer (1960/2006) per la quale il senso di un testo va molto oltre ciò che il suo autore originariamente ha inteso.
Considero che ciò trovi riscontro anche nell'utilizzo didattico del testo matematico. Può avvenire che un autore, pur avendo appunto la finalità di presentare aspetti matematici, riporti informazioni che da essi esulano, come indicazioni, se non addirittura personali, almeno riguardanti il contesto in cui è vissuto: si pensi ai manuali d'abaco medioevali e rinascimentali in cui non manca il riferimento a unità monetarie e di misura tipiche di specifiche città o dettagli tecnici, ad esempio sull'agricoltura o sulla vinificazione, che rivelano conoscenze dell'autore che vanno oltre gli aspetti matematici.
Un testo passa di mano in mano: chi ne suggerisce la lettura si associa all'autore nell'esibirne il contenuto. L'insegnante indica ai suoi studenti il libro di testo o parti di esso o altri documenti. Se si tratta di una fonte storica, il fatto che sia giunta fino a noi testimonia l'interesse che ha suscitato presso le persone, attraverso i secoli. Il testo è traccia di un Altro e, essendo traccia, rompe la fenomenologia perché lascia intendere un "al di là" che non documenta appieno. Questo estende al testo quanto Levinas (1963/1979a) introduce a proposito della traccia e dell'Altro; si veda anche Guillemette (2018).
L'esperienza di alterità consiste nell'abbandonare ciò che ci è familiare per andare verso qualcosa che ci è estraneo, con un atto di accoglienza, accettando la nostra inadeguatezza. Non si tratta però di un intento di possesso: l'Altro è fonte di desiderio mai completamente soddisfatto (come dice Levinas, non è come il pane che si mangia, e che sazia). Al *desiderio* del filosofo, riferendosi all'alunno, l'insegnante potrà associare termini quali: *curiosità*, *interesse*, *motivazione*.
Nel presente articolo intendo dunque fare riferimento all'opera di Levinas e Gadamer, due fra i più influenti filosofi del Novecento: al primo per il tema dell'alterità, al secondo per i suoi contributi all'ermeneutica. In ambito filosofico, King (2019) pone «l'interrogativo se l'approccio ermeneutico all'etica e all'altro di Hans-Georg Gadamer renda giustizia all'alterità dell'altro, come illustrato dall'approccio di Emmanuel Levinas all'etica come filosofia prima» (p. 1, traduzione dell'autore). Non intendo affrontare il tema della possibile conciliazione fra i rispettivi punti di vista dei due pensatori in senso generale ma ritengo comunque significativa la precedente citazione perché li accosta e lo fa in merito al tema dell'alterità che risulterà centrale allorquando, più avanti, si esamineranno le interpretazioni di un documento storico da parte di alcuni studenti. Per tali scopi riferiti all'educazione matematica, ritengo che vada posto l'interrogativo se la comprensione di un testo da parte di uno studente possa essere intesa come appropriazione, vale a dire: lo studente fa un uso distorto del testo anteponendo i propri fini, oppure l'Altro è salvaguardato? Intendo: il fatto che l'alunno segua il punto di vista dell'Altro – il che comporta l'esigenza di metterlo in relazione con le proprie preconoscenze (Gadamer usa il termine «pregiudizi» o «precomprensioni» – *Vorverständnisse*) – si concilia sempre con l'utilizzo che

del testo fa in relazione alle richieste dell'istituzione scolastica? Penso che la risposta non sia sempre affermativa.
Un testo nasce attraverso il linguaggio. In prospettiva levinasiana, possiamo dire che il linguaggio scaturisce come atto primigenio, irriflesso, nell'incontro di due persone: come saluto, come richiesta o dimostrazione di interessamento ecc. Si tratta dunque di una manifestazione della relazione etica che si instaura fra di esse. In una prospettiva diversa (neokantiana) Habermas (1983/1993) parla di un'etica del discorso. Non voglio addentrarmi in questa sua analisi ma desidero citarla considerato che un testo (ci riferiremo a un documento storico ma potremmo anche pensare a un manuale scolastico moderno) raccoglie un discorso che risponde a certe caratteristiche, ma poi lo studente che ne fruisce è indotto ad affrontarlo secondo opportune modalità. Intendo sostenere l'idea che vi possa essere una relazione etica con un testo scritto e la desidero ricondurre però all'Altro che sta dietro il testo. In questa relazione, lo studente trova condizioni per comprendere. Quella che chiamo "relazione etica con un testo scritto" prevede, come condizioni necessarie, la responsività e l'assunzione di responsabilità dello studente di fronte all'alterità del documento. Essa trova origine nell'incontro con l'Altro (l'autore ma anche l'insegnante o un'altra persona che propone il documento). L'apertura responsiva dello studente prevede la sua disponibilità a investire le proprie risorse, a fare un esame generale e una ricerca dei particolari, a confrontare le proprie conoscenze con il contenuto del testo. La sua responsabilità consiste nel riconoscere l'autorevolezza del testo, nell'accettare di rivedere i propri preconcetti, nell'argomentare soffermandosi sulla possibile origine degli eventuali errori riscontrati. Fin qui sono evidenziati gli aspetti che riguardano la relazione con il documento da parte del singolo studente. La relazione diventa più complessa se consideriamo anche l'istituzione scolastica. Può avvenire che lo studente faccia un uso strumentale del testo allorquando lo utilizza per superare verifiche ed esami senza aver affrontato un percorso mirato alla comprensione, senza cioè essere passato attraverso le fasi di responsività e responsabilità indicate poc'anzi.
L'osservazione di Dougan che segue, negli intendimenti dell'autrice, riguarda i testi letterari ma ritengo che si adatti anche al testo matematico: «[...] sono interessata al testo come Altro e alla responsabilità del lettore in merito ad esso [...]. Mi riferisco all'ermeneutica di Hans-Georg Gadamer per considerare sia la relazione che si ha con il testo che per descrivere chi esattamente l'Altro possa essere» (Dougan, 2016, p. 4, traduzione dell'autore). Un aspetto che Gadamer affronta nel suo *Verità e metodo* fornisce elementi per analizzare la relazione degli studenti con un testo matematico: si tratta di quello che riporta nella parte dal titolo «La priorità ermeneutica della domanda». Essa evidenzia come la *docta ignorantia* socratica racchiuda l'indicazione che l'estrema negatività della domanda, come consapevolezza di non sapere, in realtà conduca alla vera superiorità del domandare. Rileva come sia più difficile porre le domande che non rispondere ad esse, come avvenga che chi desidera capire passi attraverso la domanda. Non si riferisce quindi al tipo di domande che l'insegnante rivolge all'alunno e di cui sa già la risposta. Si tratta invece di domande aperte alla risposta – anche se questa apertura non è senza limiti, infatti una domanda pone un determinato "orizzonte" entro cui si colloca.

2 Documenti matematici originali in classe

Esiste un'ampia bibliografia riguardante l'utilizzo delle fonti storiche originali nell'insegnamento/apprendimento della matematica. Mi riferisco, prima di tutto, ai lavori contenuti negli Atti dei convegni di HPM-History and Pedagogy of Mathematics (Thematic Organization affiliata a ICMI–International Commission on Mathematical Instruction) e delle diverse edizioni di ESU-European Summer University di HPM (si veda, ad esempio, Barbin et al., 2019). Già in Jahnke (2000) veniva evidenziato come le fonti originali possano chiarire ed estendere ciò che viene riportato nelle fonti secondarie. Il loro uso didattico

è la modalità più ambiziosa per introdurre la storia nell'insegnamento/apprendimento della matematica. Rappresentano un'occasione che può essere molto fruttuosa sia dal punto di vista della riflessione sugli esiti educativi immediati, sia da quello di un ripensamento della matematica nella scuola.
Riguardo al problema dell'interpretazione di un documento originale, l'ermeneutica filosofica ci aiuta a riflettere sulla distanza temporale fra autore e lettore e su come l'alunno possa operare una immedesimazione in chi ha prodotto il documento. In effetti, non può esserci una reale trasposizione, se non altro perché dell'autore è impensabile ricostruire integralmente le motivazioni e i condizionamenti che lo hanno portato alla realizzazione del lavoro. Il superamento da parte dell'alunno dei propri preconcetti con l'intento di avvicinarsi alla prospettiva adottata dall'autore costituisce un obiettivo educativo fondamentale ed è legato all'instaurarsi di quella che chiamo "relazione etica con il documento".
Chi si occupa di utilizzo didattico della storia della matematica si è interrogato sul suo valore per l'apprendimento della disciplina. Non si è giunti a conclusioni concordi. C'è chi ritiene che solo occuparsi di storia nella matematica scolastica sia "mission accomplished", senza voler associare necessariamente ad essa delle performance da parte dello studente (Guillemette, comunicazione personale, 20 febbraio 2021). È mia opinione che lo studio di un documento originale abbia valore per molteplici aspetti, anzitutto per la figura dell'autore. Non considero però un fatto necessario che si tratti di un matematico importante. Il valore di un documento sta anche semplicemente nell'essere arrivato fino a noi, nell'essere associato a certe fasi dell'evoluzione del pensiero matematico, nel testimoniare la presenza della matematica nella cultura di un certo periodo, nell'essere stato fatto conoscere da persone di oggi, nell'essere stato scelto dall'insegnante.
Un libro di testo attuale è concepito per gli studenti. Al contrario, un documento storico non era in origine necessariamente concepito per giovani lettori. Questo, unito alla distanza temporale, è uno dei motivi per cui la sua lettura può determinare uno "spaesamento". Parla di *dépaysement épistémologique* Évelyne Barbin (1997, 2012) a proposito dell'introduzione della storia della matematica in classe che determina una sostituzione dell'usuale con l'insolito, nel rendere in forma diversa quanto lo studente già possiede. Lo spaesamento può avvenire anche negli studenti con un profitto elevato e che sanno utilizzare al meglio i testi moderni. Un documento storico presenta un compito impegnativo ma offre contemporaneamente motivazioni per affrontare lo spaesamento in quanto racchiude, in modo precipuo, gli elementi per arrivare a stabilire una relazione etica.

Figura 1. Dall'Aritmetica di Filippo Calandri (1491).[1]

1. Fonte immagine: https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fichier:Arithmetica_filippo_calandri.04.jpg.

Il testo storico ritengo aiuti lo studente a cogliere l'Altro che vi sta dietro, anche attraverso gli aspetti lasciati inconsapevolmente dall'autore a cui si accennava sopra. Riporto qui un documento storico che non richiama i contenuti matematici su cui si sofferma il presente articolo, ma che mette in evidenza come possa avvenire rispetto ad esso una ricerca dell'Altro che mette in risalto vari elementi di diversità rispetto a quello che potrebbe scrivere un autore moderno (**Figura 1**; nell'originale, accanto a questo è riportato un altro problema relativo a un contenitore di forma diversa). Questo problema di Filippo Calandri sulla vasca per la vinificazione ci porta a rilevare la sua conoscenza di aspetti che oggi non fanno più parte del sapere comune e che ai nostri occhi contribuiscono a caratterizzare il suo profilo. Evidentemente l'interesse storico del celebre incunabolo del Quattrocento può dare luogo a indagini che riguardano aspetti matematici, filologici, grafici ecc. Il lettore può rilevare anzitutto la particolare esposizione dei calcoli risolutivi del problema che può fornire un importante elemento riguardo alla collocazione storica dell'autore, considerando l'evoluzione del simbolismo matematico in Europa: inizio dell'algebra simbolica con Viète (1540-1603), diffusione dei numeri decimali (sistema numerico posizionale con suddivisione decimale) con Stevino (1548-1620). Qui desidero proporre questo testo per suggerire un raccordo fra quanto espresso nelle premesse filosofiche e le riflessioni sull'educazione matematica delle successive pagine. In esso, infatti, per un lettore attuale l'alterità del documento viene rimarcata dai caratteri inusuali della stampa, dalla particolare esposizione dei calcoli, dalla mancanza di punteggiatura ecc. Nella seguente trascrizione del documento, per comodità del lettore riporto fra parentesi quadre i calcoli in notazione moderna, pensando che poi vengano ritrovati nell'originale.

> «E glie un canale pieno duve pigiate che e lungo 4 braccia e e largo 2 braccia e $\frac{1}{2}$ e alto 2 braccia vo sapere quanto vino rendera calando poi lavinaccia tra il $\frac{1}{3}$ e il $\frac{1}{4}$ Cioe e $\frac{7}{24}$ della tenuta ocupa lavinaccia e e $\frac{17}{24}$ della tenuta e il vino
>
> $\left[4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20, \quad 20 \cdot \frac{17}{24} = \frac{340}{24} = 14\frac{1}{6}, \quad 14\frac{1}{6} \cdot 5 = 70\frac{5}{6}\right]$
>
> rendera barili $70\frac{5}{6}$».

L'immagine aggiunge altri particolari sulla procedura indicata nel testo e contribuisce a far capire il senso del calare della vinaccia. Non possiede un'analoga figura il problema 94 tratto da *Triparty en la science des nombres* di Nicholas Chuquet – francese, contemporaneo di Calandri – che prende ancora spunto dall'attività di vinificazione: «Una botte si svuota ogni giorno di $\frac{1}{10}$ della sua capacità; dopo quanto tempo si sarà svuotata per metà?». Nel presente articolo ritengo significativo riportarlo in quanto introduce il tema del logaritmo, di cui si occupa il passo scelto per l'attività in classe. Esprimendoci in termini che non appartenevano a Chuquet, il problema richiede evidentemente di risolvere l'equazione $\left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{2}$. L'autore ricava che al termine del sesto giorno la botte è piena per oltre metà del contenuto e al termine del settimo per meno della metà. Nella ricerca del valore esatto, però, fa ricorso alla regola del tre supponendo erroneamente il flusso costante nel corso del settimo giorno (si vedano le dispense del corso di Storia della matematica del Prof. Riccardo Rosso,[2] p. 12).
Iniziative didattiche come, ad esempio, far conoscere agli studenti la biografia dell'autore, mostrarne il ritratto e altre immagini, richiamare il contesto storico in cui è vissuto, ricordare aneddoti, collocarlo nella storia della matematica, o addirittura visitare i luoghi in cui è vissuto vengono ad avere un senso nella prospettiva che lo studente veda nell'autore un Altro che sollecita la sua responsabilità (intesa come attenzione, interesse, partecipazione al lavoro di analisi, ricerca della condivisione di ragionamenti matematici). Le considero dunque iniziative che possono avere una ricaduta positiva, anche se

2. Disponibili al link: https://mate.unipv.it/~rosso/logaritmi.pdf.

indiretta, per l'apprendimento della matematica. Penso che però non debbano entrare a far parte delle prove di verifica per evitare che gli studenti diano loro altre valenze, le ritengano funzionali all'assolvimento delle richieste dell'insegnante e al conseguimento di crediti scolastici. Ritengo che la condivisione di ragionamenti con l'autore, se racchiude elementi di novità e se determina il sovvertimento di qualche aspetto che per gli studenti è usuale in matematica, possa essere un modo efficace affinché riconoscano nel testo la traccia dell'Altro perché l'Altro, in quanto tale, si caratterizza proprio perché contiene la novità, la diversità.

3 Un'indagine in classe a partire da un documento di Eulero

L'indagine illustrata nel presente articolo ha carattere qualitativo-descrittivo e fa riferimento ad elaborati degli studenti che vengono analizzati con riferimento al pensiero di Levinas e Gadamer (si veda il par. 1). È stato utilizzato un passo sul tema dei logaritmi tratto da *Introductio in analysin infinitorum* di Leonhard Euler (Eulero, 1707-1783). Il grande matematico svizzero ha dato un contributo importante alla moderna teoria dei logaritmi. Scrisse l'*Introductio* come prima parte di un programma a cui seguirono le *Institutiones calculi differentialis* (1755) e le *Institutiones calculi integralis* (1768). Le opere furono dirette a chi voleva seguire gli studi matematici fino ai confini della ricerca. L'*Introductio* è stata scritta nel 1745, in latino, e pubblicata nel 1748; l'opera è suddivisa in due volumi.[3] Boyer (1951) ritiene che essa abbia avuto per la storia dell'analisi matematica un'importanza equivalente a quella degli *Elementi* di Euclide per la geometria sintetica e di *Al jabr wa'l muqabala* di al-Khwarizmi per l'algebra elementare. L'originalità del contenuto convive con un'esposizione in forma moderna ed appare accessibile in alcune sue parti ad uno studente di scuola secondaria di secondo grado.[4] La prima traduzione in lingua inglese è del 1988 a cura di John D. Blanton.[5] Il primo volume tratta delle funzioni, delle loro trasformazioni, della loro rappresentazione in serie di potenze, delle funzioni di due o più variabili, delle funzioni trascendenti, delle funzioni esponenziali, logaritmiche, goniometriche, delle frazioni continue. Nella *Prefazione*, Eulero esordisce con una riflessione di tipo didattico in quanto parla delle difficoltà nell'affrontare l'analisi, ritenendole imputabili a quelle in algebra; tuttavia, riconosce che l'analisi non richiede una conoscenza esaustiva dell'algebra. Il secondo volume è invece dedicato alle curve.

3.1 Il contesto dell'indagine

L'indagine è stata svolta nell'anno scolastico 2020-21 in una classe quinta di un liceo delle scienze umane. La classe seguiva una parte delle lezioni di matematica in modalità CLIL – *Content and Language Integrated Learning*. I libri scolastici, anche quello di matematica, spesso propongono testi specificamente concepiti per la didattica CLIL con alunni italiani. In tali testi, però, la lingua inglese risulta spesso destinata ad aspetti descrittivi o aneddotici, mentre per la sperimentazione si voleva scegliere un brano in inglese che portasse gli studenti a *fare* matematica. Attraverso di esso, oltretutto, si intendeva mostrare un caso in cui l'inglese consente di rendere fruibile alla comunità scientifica un'opera originariamente scritta in latino: si è considerato che l'inglese ha assunto il ruolo di lingua veicolare, ruolo che il latino possedeva ma non possiede più. In ciò trova giustificazione l'aver proposto agli studenti il brano in inglese e non nell'originale latino. Va precisato inoltre che, per il

3. L'originale, in latino, è consultabile online: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/101/.
4. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e agli anni di scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.
5. In http://www.17centurymaths.com/contents/introductiontoanalysisvol1.htm è possibile consultare la successiva traduzione di Ian Bruce.

loro percorso scolastico, la padronanza della lingua inglese da parte degli studenti era decisamente superiore a quella della lingua latina, anche per lo specifico compito di traduzione, e perciò il lavoro con l'originale latino avrebbe richiesto un investimento di tempo che, per la collocazione didattica dell'attività, non sarebbe stato sostenibile.
La classe aveva già affrontato l'interpretazione di altri brani storici sotto la guida dell'insegnante[6] (fonti primarie e secondarie) e utilizzato esercizi e problemi tratti dalle opere di Eulero riguardanti proprio i concetti di esponenziale e logaritmo. In classe quarta, questi erano inseriti in una scheda di lavoro in lingua inglese che comprendeva passi dall'opera anche di altri autori. In dettaglio: il problema sulla crescita della popolazione riportato come Esempio II nel paragrafo 110 della *Introductio*, con una risoluzione guidata comprendente anche un grafico cartesiano della situazione descritta nel problema e a un analogo problema sulla decrescita della popolazione; quattro passi dal *Saggio sul principio della popolazione* di Malthus con relative domande-guida per l'analisi del testo; una tabella di potenze di 2 ispirata a quella riportata in *Triparty en la science des nombres* di Chuquet con associati calcoli di prodotti, quozienti, potenze, radici utilizzando le proprietà delle potenze per una introduzione del logaritmo; esercizi da *Vollständige Anleitung zur Algebra* di Eulero nei quali, posto $\log_{10} 2 = x$, era richiesto di esprimere in funzione di x il logaritmo di numeri del tipo $2^n \cdot 5^m$ con n, m numeri naturali; un ragionamento di Eulero per l'approssimazione del valore di $\log_{10} 2$.
La finalità di queste schede era di realizzare situazioni laboratoriali in cui lo studente fosse chiamato ad operare con riferimento a un contenuto matematico mettendosi alla prova e confrontandosi con la proposta dell'autore dei documenti originali e con l'insegnante che li aveva scelti e che forniva determinate chiavi di interpretazione. Non si trattava dunque di impostare un discorso storico organico, né di operare una riflessione sulla matematica e la sua storia, ma di creare le condizioni per un coinvolgimento diretto dello studente, per costruire competenze matematiche. Anche il semplice riferire un passo tratto da un'opera storica ad un autore ritengo fosse un fatto significativo, per porgere la matematica in modo diverso e introdurre fra gli attori del processo di insegnamento/apprendimento un'altra persona.

3.2 Il documento scelto

Si riporta qui il brano tratto dall'opera di Eulero che è stato consegnato agli studenti per la sperimentazione descritta nel presente articolo.

> 103. Whatever logarithmic base we choose, we always have log 1 = 0, since in the equation $a^z = y$, which corresponds to $z = \log y$, when we let $y = 1$ we have $z = 0$. From this it follows that the logarithm of a number greater than 1 will be positive, depending on the base a. Thus, $\log a = 1$, $\log a^2 = 2$, $\log a^3 = 3$, $\log a^4 = 4$, etc. and, after the fact, we know what base has been chosen, that is the number whose logarithm is equal to 1 is the logarithmic base. The logarithm of a positive number less than 1 will be negative. Notice that $\log \frac{1}{a} = -1$, $\log \frac{1}{a^2} = -2$, $\log \frac{1}{a^3} = -3$, etc., but the logarithms of negative numbers will not be real, but complex, as we have already noted.
> (Euler, 1748/1988, p. 79).

Trattandosi dell'anno che concludeva il quinquennio della scuola secondaria di secondo grado, si è seguita l'idea di proporre agli studenti dei lavori che riprendessero concetti matematici già affrontati in precedenza e li collocassero in una prospettiva nuova. Un'analisi dettagliata del documento porta ad evidenziare gli aspetti di contenuto matematico per i quali è stato scelto per questa sperimentazione. Qui di seguito sono espressi sotto forma di "domande a cui il testo dà risposta". Ritengo significativo evidenziare, come fa Gadamer (1960/2006) nella sezione dedicata alla «Logica di domanda

6. L'insegnante è anche l'autore del presente articolo.

e risposta», che un testo è concepito per rispondere a delle domande, che peraltro il più delle volte rimangono implicite, così come il lettore lo analizza ponendosi domande a cui cerca risposta. Preciso che le seguenti domande non sono state fornite agli studenti, ma verranno qui usate come indicatori per l'analisi dei loro elaborati scritti.

1. Perché il logaritmo di 1 è uguale a 0?
2. Come si determina il logaritmo delle potenze ad esponente naturale aventi come base la base logaritmica? E il logaritmo dei reciproci di tali potenze?
3. Qual è il numero il cui logaritmo è 1?
4. Per quali valori della variabile indipendente il logaritmo è positivo e per quali negativo?
5. Il logaritmo di un numero negativo è reale?

Si noti che il documento non menziona il caso del logaritmo di 0, anche se al termine si riferisce ai logaritmi di numeri negativi e al fatto che la base utilizzata da Eulero è maggiore di 1, come egli stesso precisa nella parte finale del paragrafo 102 della *Introductio*, aggiungendo poi che è solo dei numeri positivi che possiamo esprimere il logaritmo con un numero reale. Nella parte conclusiva del paragrafo 98, Eulero sottolinea che il caso della base a, positiva e minore di 1, può venire esaminato a partire da quello della base maggiore di 1 considerando che se $a < 1$ allora $\frac{1}{a} > 1$ e basterà porre $\frac{1}{a} = b$.
Dal punto di vista dell'uso della lingua inglese, si è ritenuto che il brano di Eulero nella traduzione di Blanton fosse accessibile a tutti gli studenti della classe e quindi non presentasse ostacoli aggiuntivi alla comprensione del contenuto matematico. Eppure, in fase progettuale, ci si è dovuti confrontare con il fatto che l'uso di fonti in traduzione necessita di cautele particolari in quanto il linguaggio è parte integrante del discorso matematico. Esso può però introdurre ulteriori elementi che connotano l'autore. La comprensibilità per un lettore moderno e lo stile del passo di Eulero hanno suggerito alcuni elementi per la collocazione storica dell'autore. Nell'ambito dell'attività presentata in questo articolo, agli studenti era stata proposta anche l'analisi del problema 13 *De rege et de eius exercitu* tratto dalle *Propositiones ad acuendos juvenes* di Alcuino di York (ca. 735-804) che forniva loro la possibilità di un confronto: la prolissità di quest'ultimo testo nel presentare un numero di esempi specifici, che va ben oltre la necessità di far comprendere al lettore la situazione matematica (un accrescimento esponenziale), fa emergere la mancanza dell'indicazione esplicita di una legge generale nonché di un simbolismo algebrico. Riguardo al simbolismo del passo di Eulero, a confronto, il dettaglio sull'uso di «=» consentiva di segnalare una differenza rispetto al modo di indicare l'uguaglianza in Cartesio, presente in un passo sulle equazioni tratto da *La Géométrie* che gli studenti avevano esaminato in classe terza. Nel documento di Eulero, si può inoltre notare la densità di concetti, una caratteristica che i libri di testo utilizzati dagli studenti non possiedono. Dunque, il testo di Eulero non mostra il modo di esporre di un documento medievale, utilizza un simbolismo senza eccezioni analogo a quello che gli studenti hanno conosciuto ma si distingue rispetto all'esposizione dei loro libri di testo: sono tre indizi a disposizione degli studenti per una collocazione di Eulero e della sua opera nella storia della matematica.
Blanton ha scelto di tradurre «imaginarius» con «complex», diversamente da Bruce che ha preferito «imaginary»; il termine «imaginarius», di cartesiana memoria, nel passo di Eulero figura in contrapposizione con «realis». Gli studenti non avevano affrontato una trattazione specifica dei numeri complessi: avevano avuto come esempio più significativo il caso di discriminante negativo nella risoluzione delle equazioni di secondo grado. Si è considerata l'ultima riga del passo di Eulero in cui dice che il logaritmo di numeri negativi è complesso come una suggestione che potesse incuriosire gli studenti e inoltre un piccolo segnale che quanto affrontato nella matematica della scuola secondaria lascia uno spazio (sterminato) per futuri approfondimenti e ampliamenti: la teoria dei numeri reali e i numeri complessi, ad esempio. Anche questo ritengo potesse testimoniare che l'interpretazione è un atto mai concluso e che è illusorio o addirittura fuorviante credere di poter esaurire tutte le possibili aperture che un documento offre. Un resoconto sull'utilizzo didattico di una parte più ampia della stessa

opera di Eulero, che comprende il passo utilizzato nell'attività qui descritta, è riportato in Demattè e Furinghetti (2014).
Si era previsto un possibile disorientamento degli studenti riguardante aspetti attinenti ai termini specifici del linguaggio matematico magari non adeguatamente assimilati, ai legami logici fra le parti del testo, al gran numero di concetti richiamati in un passo così breve.
Prima dell'attività qui descritta, fra le misconcezioni degli studenti con più difficoltà si era rilevata quella per la quale il logaritmo non possa essere negativo. Evidentemente si tratta di una distorsione del fatto che il logaritmo di un numero negativo non è reale. Partendo dal documento, si è individuata l'opportunità per gli studenti di ricavare indicazioni per la realizzazione del grafico cartesiano di una funzione logaritmica a base maggiore di 1. In effetti tale grafico era già stato costruito attraverso una tabella di valori ma la capacità di riprodurlo si era riscontrato essere carente, per cui sarebbe stato utile un rinforzo. Dunque, si sarebbe trattato di utilizzare quanto Eulero indica, vale a dire che: $\log 1 = 0$; per valori maggiori di 1 il logaritmo è positivo; per valori compresi fra 0 e 1 il logaritmo è negativo. Era nelle attese che il passaggio dai registri verbale e simbolico a quello grafico avrebbe introdotto ulteriori difficoltà in un numero significativo di studenti, ma al contempo avrebbe consentito di affrontare ancora una volta uno degli aspetti più qualificanti dell'intero quinquennio, appunto la competenza nel passaggio da un registro all'altro. In particolare, un punto di cui ritenevo potesse non venir colto il significato in termini di implicazione per il grafico della funzione era «the number whose logarithm is equal to 1 is the logarithmic base» in cui Eulero parte da 1 come valore noto del logaritmo per risalire all'argomento.

3.3 L'attività proposta

Il documento di Eulero è stato consegnato assieme al problema di Alcuino (par. 3.2) per un lavoro domestico individuale, dopo aver ripreso in classe, nel periodo precedente, i concetti di esponenziale e logaritmo. Agli studenti è stato richiesto di scrivere tutto quello che potevano dire riguardo al documento, con l'aggiunta: «Chiamiamolo brainstorming!». Era stata lasciata loro la facoltà di scrivere un'interpretazione in lingua inglese o in lingua italiana: questo per favorire la loro possibilità di esprimersi e fornire preziosi elementi per la ricerca. Si è precisato che non ci sarebbe stato un voto né un giudizio da parte dell'insegnante e che lo scopo era indagare la loro relazione etica con il documento, usando appositamente questi termini e discutendone il significato con loro. A questo proposito, si è ribadito che proprio l'assenza di un ritorno in termini di voto avrebbe dovuto spingerli a stabilire una relazione diretta con il documento, escludendo che di esso si fosse interessati a fare un uso finalizzato a ricompense o riconoscimenti scolastici.
È stato detto agli studenti che avevano facoltà di scrivere delle domande di chiarimento alle quali sarebbe stata data risposta durante una lezione specificamente concepita in seguito all'attività. Nella presentazione dell'attività agli studenti, non è stata fatta una analisi nel merito dei contenuti del passo di Eulero, vale a dire una lezione in senso classico: questo per l'importanza di rilevare i punti sui quali gli studenti stessi avrebbero scelto di soffermarsi.
Circa tre mesi dopo l'attività di interpretazione, quasi tutti gli studenti sono stati intervistati brevemente, in modo individuale. Sono state poste loro una o più domande orali derivanti dall'analisi dei lavori e le loro risposte sono state trascritte immediatamente. Al termine, gli studenti potevano verificare se quanto scritto rispecchiava fedelmente ciò che intendevano dire e indicare eventuali modifiche o integrazioni. Nel par. 4 dedicato all'analisi dei loro elaborati vengono riportate le domande che sono state poste agli studenti intervistati e le loro risposte.
Nella settimana successiva alle interviste, è stata svolta la lezione programmata per dare risposta alle domande poste dagli studenti. Considerato il loro numero ridotto e tenuto conto del fatto che due studentesse non avevano consegnato il lavoro scritto, la lezione è stata per la maggior parte dedicata ad una sistematica riproposizione dei vari punti del brano di Eulero, con richiami concettuali, esempi numerici e realizzazione di grafici.

La finalità del lavoro proposto era di condurre gli studenti a rinforzare la competenza nell'utilizzo del concetto di logaritmo, ma non solo: ripensando la definizione e confrontandosi con l'autorevolezza di un grande matematico, avrebbero potuto constatare come l'elemento decisivo per acquisire tale competenza non sia tanto la gestione della complessità del calcolo – richiesta in alcuni degli esercizi tratti dal libro di testo affrontati in precedenza –, bensì la padronanza di opportuni esempi, riferimenti e argomentazioni. L'attesa era che gli studenti sapessero dare significato alle scritture simboliche utilizzate da Eulero, illustrandole a parole o con opportuni esempi.

Il lavoro con il documento qui illustrato veniva ad avere caratteristiche molto diverse rispetto a quello con le schede menzionate sopra (par. 3.1) e riguardanti esponenziale e logaritmo: nell'interpretazione del testo, lo studente doveva affrontare un compito aperto, in cui le sue conoscenze (come preconoscenze) venissero messe in discussione proprio da quanto diceva l'autore con il quale andava ricercata, come dire, una "conciliazione". Gli studenti avevano conosciuto in precedenza l'importanza di Eulero nella storia della matematica e si erano soffermati sulla sua biografia. In particolare, durante il precedente anno scolastico – in un lavoro pluridisciplinare su alcune figure del Settecento che aveva coinvolto Matematica, Italiano, Filosofia, Scienze umane e Insegnamento della Religione cattolica – un gruppo di studenti aveva approfondito i legami di Eulero con la cultura dell'epoca e aveva presentato il proprio lavoro al resto della classe. Il ricordo di questa attività è stato ripreso all'interno della presentazione del lavoro documentato nel presente articolo. Si è voluto fornire alla classe un quadro significativo della figura e dell'opera di Eulero (ruolo nella storia della matematica, utilizzo di esercizi e problemi tratti dai suoi lavori, analisi di un testo), lasciando a ciascuno studente la riflessione sui possibili legami fra i vari aspetti affrontati e riguardo al fatto che un grande matematico ha in parte prodotto opere non riservate agli specialisti della disciplina.

Un'ulteriore precisazione riguarda la scelta di far realizzare agli studenti un lavoro scritto, dettata da esigenze organizzative che hanno portato a scartare l'idea di colloqui individuali con ciascuno degli studenti, considerata la relativa lunghezza del compito. Un aspetto di dialogo è stato tuttavia mantenuto suggerendo che accanto all'interpretazione del testo venissero scritte le loro richieste di chiarimento. Una criticità di tale scelta può risiedere nel fatto che, nello scrivere la propria interpretazione, lo studente può operare delle scelte dipendenti, oltre che dal merito del contenuto matematico anche, come si diceva, da quelle che pensa possano essere le aspettative che attribuisce all'insegnante e che lo possono distogliere dalla relazione diretta con il documento.

Ci si attendeva infatti che gli studenti producessero lavori in cui il testo originario venisse rielaborato mantenendo però una coerenza logica interna e che seguissero la proposta dell'autore. Ci si attendeva inoltre che gli studenti cogliessero un messaggio di accettazione del loro pensiero, che diventassero protagonisti nella relazione con il documento anche a fronte del fatto che non ci sarebbero stati disapprovazione o conseguenze negative o voti penalizzanti in caso di errori.

A questo scopo, dopo aver comunicato la consegna del lavoro, l'insegnante, nel ruolo istituzionale e di mediatore rispetto al documento, si sarebbe defilato, devolvendo totalmente il compito agli allievi. Si riteneva che comunque gli studenti avessero ciascuno un loro quadro riguardo a quali fossero le aspettative dell'insegnante in merito alla realizzazione dell'elaborato scritto e che da esse si sarebbero fatti condizionare. Ci si è chiesti se queste aspettative rimaste implicite potessero essere ricondotte agli aspetti della traccia dell'autore e dell'insegnante che il documento reca con sé, di cui si è parlato all'inizio del presente articolo. Da qui la scelta di chiedere agli studenti di formulare eventuali domande di chiarimento per rinforzare la richiesta che avvenisse una genuina indagine personale.

Vincolare lo studente a produrre un elaborato scritto può dunque condizionare il suo pensiero. Può determinare inoltre eventuali difficoltà dal punto di vista linguistico. È verosimile pensare che qualche studente avrebbe scelto un'altra modalità per realizzare la propria interpretazione, magari mantenendola interna al suo pensiero come forma di (particolare) dialogo fra sé e il documento. Esplicitare l'interpretazione attraverso uno scritto induce un atto che – richiamando Levinas (1961/1979b, p. 27) – determina una violenza in quanto compromette il permanere in sé stesso del pensiero che rivendica l'idea di contenere l'essere, per chiedergli di affrontare un «surplus d'essere» (a rigore va detto che Levinas parla di «pensiero come atto» quindi anche non richiedendo allo studente un elaborato scritto si determina comunque in lui la violenza legata all'atto di pensiero che il documento induce). Voglio chiarire questa affermazione riferendola al ruolo didattico di esercizi e problemi e di ogni altra attività richiesta agli studenti, come appunto l'interpretazione di un documento. Anche se uno studente ha imparato una definizione ben formulata (che introduce in modo formalmente esauriente un concetto) e perciò ha acquisito una porzione di essere, richiedergli un surplus attraverso le attività è un modo per distoglierlo da un atto di presunzione – per farlo uscire da una sensazione di autosufficienza – proponendogli un confronto con altri aspetti dell'essere nei quali la sua acquisizione deve integrarsi. Parlare di "violenza" (il termine è ricorrente in Levinas), in questo caso, non riporta quindi a un'accezione negativa del termine. Ritengo infine evidente che le diversità fra i possibili atti richiesti (esercizi e problemi, riflessione interna al pensiero o realizzazione di un elaborato) possano determinare conseguenze formative diverse.

4 Analisi degli elaborati degli studenti

I lavori prodotti mostrano peculiarità molto difformi per il modo di esporre e per gli aspetti portati a tema. Le difficoltà manifestate dagli studenti attraverso gli errori contenuti nei loro elaborati non sono considerate di per sé un impedimento all'instaurarsi di una relazione etica con il documento: la riflessione che desidero operare riguarda invece l'approccio al testo, vale a dire l'atteggiamento degli studenti nei confronti del testo. Negli elaborati che vengono analizzati qui di seguito è mantenuta la formattazione scelta dagli studenti, a parte il tipo di carattere.[7] Sono stati scelti fra quelli prodotti dagli studenti della classe per mostrare anzitutto (in due casi) come la relazione etica appare essersi instaurata, ma tuttavia con esiti diversi dal punto di vista dell'utilizzo dei concetti. I successivi quattro mettono in risalto aspetti soggettivi diversificati che contrastano la relazione: a parte questo elemento di fondo, però, l'analisi di dettaglio non mostra comunanze significative fra di essi. L'ultimo viene riportato per analizzare un aspetto che ha avuto un ruolo importante nella strutturazione dell'esperimento didattico, vale a dire la formulazione di domande, interrogandosi comunque sulla relazione con il testo della studentessa che ne è autrice. Nel commento agli elaborati viene riportato pure l'esito della breve intervista personale, se il singolo studente è stato interpellato.

4.1 L'elaborato di Gaia[8]

LOGARITMI

Appena ho letto il testo non capivo molto ma poi rileggendolo molte volte ne ho capito il significato. In questo testo vengono spiegate i logaritmi e le loro proprietà. Il logaritmo è l'esponente di una potenza. Per trovare il logaritmo in base n di un numero y vuol dire trovare quel numero x che elevato alla base n mi dia y.

$$log_n y = x$$

Questo testo affermava che ogni numero più grande di 1 sarà positivo:

$$log\ a = 1$$

7. In particolare, sono state mantenute le scelte tipografiche degli studenti per la scrittura delle formule e non sono stati corretti eventuali errori linguistici o di battitura.
8. Per la tutela della privacy, verranno usati degli pseudonimi in ciascuno dei successivi casi di attribuzione degli elaborati agli studenti.

Se noi abbiamo:

log a^2

In questo caso dobbiamo trovare un numero che elevato a 2 dia 2 ed è 10 poiché 10^2 da 100 e il logaritmo di 100 è 2.
Così anche se abbiamo un numero minore di 1 sarà negativo

$$\log \frac{1}{a\hat{}2} = -2$$

Fra le domande a cui il testo dà risposta (si veda il **par. 3.2**), Gaia fa riferimento alla 1 (però senza esplicitare il fatto che log 1 = 0), alla 2, alla 3, alla 4. Si notano in più punti alcune sue difficoltà: gestione delle espressioni scritte «quel numero *x* che elevato alla base *n*», «ogni numero più grande di 1 sarà positivo», «un numero che elevato a 2 dia 2»; passaggio al valore 10 senza rimarcare che si tratta di valore specifico della base; omissione del soggetto nell'ultima affermazione. Nelle prime due righe, Gaia porta a tema sé stessa e il documento. Solo successivamente segue l'autore nei suoi ragionamenti. Nella parte introduttiva non si è ancora instaurata la relazione con il documento che ho chiamato *etica*. È successivamente che essa emerge quando Gaia si espone riprendendo e riformulando quanto Eulero dice, anche se non riesce a portare a compimento la revisione delle proprie preconoscenze in una esposizione del tutto accettabile. Quando scrive «vengono spiegate i logaritmi e le loro proprietà» dice qualcosa che Eulero non afferma esplicitamente: porta a tema il documento attraverso una sintesi sommaria. Questo realizza una situazione che voglio considerare analoga a quella che si ha nella ripetizione "mnemonica", intendendo con quest'ultima espressione appunto un appropriarsi del testo, così com'è, e una non esplicita adesione alla sostanza del pensiero dell'autore. Quello dello "studio mnemonico" può risultare un atto illusorio per l'insegnante e pericoloso per l'allievo, in quanto non permette appieno di valutare (o autovalutare nel caso dello studente) se vi è un'effettiva comprensione, come nel caso dello scritto di Gaia.

4.2 L'elaborato di Francesca

103
Il documento parte dal presupposto che qualunque base logaritmica scegliamo, log 1 = 0; infatti se a^z = y e quindi log y = z, se y = 1 allora z sarà sempre 0 perchè per qualunque numero elevato ad un altro numero che debba risultare 1 l'esponente sarà sempre 0. Per esempio, 10^z = 1, z=0. Da ciò deriva che il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo, per esempio log (base 10) 10 = 1. Se log *a* = 1, log *a*^2 = 2 ,etc allora si saprà che la base del logaritmo equivale ad a, per esempio 10^1 = 10, 10^2 = 100,...
Allo stesso modo il logaritmo di un numero positivo minore di 1 sarà negativo. Per esempio log 1/a = -1 infatti 10^-1 =1/10.
domanda: perchè nella terza riga del documento si afferma che come conseguenza alla prima proposizione il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo?

Nell'elaborato di Francesca appare il riferimento alle domande 1, 2, 3, 4. Si nota come anche lei associ alle scritture simboliche esempi specifici. Durante l'intervista, le è stato chiesto: «Qual è il ruolo degli esempi che hai scelto?». Ha risposto: «Siccome *a* è generale, ho scelto 10 per mostrare la verità della regola generale che c'è scritta; puoi rimpiazzare *a* con qualsiasi numero».
Francesca mostra di accettare la proposta dell'autore e di cercare di seguirla. Mette in evidenza questo fatto anche scegliendo degli esempi numerici a conferma della regola generale. Realizza in tal modo un aspetto della relazione con l'autore che sta dietro il testo e che ho chiamato *etica*. Avrebbe palesato un atteggiamento diverso se avesse utilizzato esempi specifici per mostrare l'utilizzo delle regole proposte dall'autore: avrebbe mostrato responsività ma non la responsabilità derivante dall'offerta di condivisione di pensiero fatta da Eulero attraverso il testo. Soffermiamoci

sugli esempi scelti da Francesca e consideriamo i diversi ruoli delle persone protagoniste dell'attività. Rispetto a sé, gli esempi appaiono utili per dare significato alle scritture generali presenti nel documento, per farle "radicare" in lei stessa, per superare quella che ha rilevato inizialmente come un'indicazione non evidente e tale da giustificare la ricerca di un elemento chiarificatore – la scelta di esempi numerici, appunto. Rispetto all'autore, sembrano rispondere al desiderio di dar seguito alla sua proposta, aggiungendo un proprio surplus per mettersi in sintonia con lui nell'indagine su quello specifico concetto matematico. Rispetto all'insegnante, dovendo produrre un elaborato scritto da lui richiesto, possiamo congetturare che Francesca presupponesse che pure lui ritenesse le scritture simboliche di Eulero un elemento non banale e tale da meritare un intervento chiarificatore. Per approfondire l'analisi del tipo di esempi scelti da Francesca, così come di quelli scelti da Gaia, si veda Mason e Pimm (2008).
A proposito della domanda di chiarimento finale presente nell'elaborato di Francesca, notiamo che al paragrafo 98 Eulero dice che nel caso in cui la base sia superiore a 1, a^z verrà ad avere un valore maggiore se z sarà maggiore:

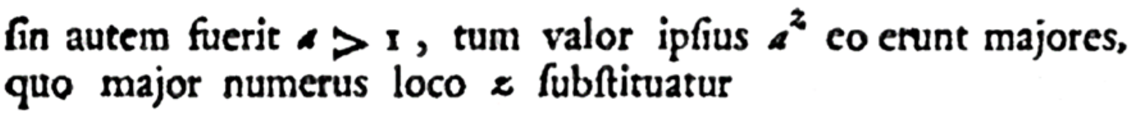
ſin autem fuerit $a > 1$, tum valor ipſius a^z eo erunt majores, quo major numerus loco z ſubſtituatur

Figura 2. Estratto dal paragrafo 98 dell'originale latino (Euler, 1748/1988).

Considerato il mantenimento della monotonia da parte della funzione inversa, si giustifica quanto afferma Eulero, vale a dire che da log 1 = 0 segue che il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo.

4.3 L'elaborato di Chiara

Documento: logaritmi

Questo documento fa riflettere sulle regole dei logaritmi.
Logaritmo: a=b elevato alla c → log in base b (a) = c. Ad esempio: 100=10 alla seconda → log in base 10 (100) = 2
Regole:
-log in base 10 (10) = 1 → base e argomento UGUALI = 1.
-log in base a (1) = 0 → qualsiasi base con argomento 1 = 0.
-log (a x b) = log (a) + log (b) → moltiplicazione = addizione.
-log (a / b) = log (a) – log (b) → divisione = sottrazione.
-log (a elevato alla b) = b x log (a) → potenze = moltiplicazione.
Dopo aver ragionato sulle regole dei logaritmi, il documento mi fa riflettere sul fatto che se l'argomento del logaritmo è > 1 il risultato sarà POSITIVO, se invece è < 1 sarà NEGATIVO.
Esempi:
-log (0,9) = -log (9/10) = -(log (9) – log (10)) = -(log (3 alla seconda) – log (10)) = - (log (3 alla seconda) – 1) = -2 log (3) – 1) = - 2 log (3) + 1 oppure = -0,046 → logaritmo di un numero positivo minore di 1 = negativo
-log (2) = 0,30 → logaritmo di un numero positivo maggiore di 1 = positivo

Chiara fa riferimento alle domande 1, 2, 3, 4. Inizialmente elabora il ragionamento di Eulero pure attraverso esempi. Dopo di ciò sviluppa un proprio ragionamento, diverso da quello di Eulero: riporta le proprietà del logaritmo di un prodotto, di un quoziente, di una potenza ma nel prosieguo non utilizza

la prima. Il lavoro di Chiara mostra come l'interpretazione di un testo tratto dalla storia della matematica sia il risultato di una solo parziale identificazione con l'autore e sia condizionata dalle conoscenze e dall'esperienza dell'interprete. Chiara non segue i passaggi sviluppati dall'autore, in base ai quali è immediato ricavare il logaritmo di una potenza, anche con esponente negativo: abbandonando il ragionamento dell'autore, rinuncia alle potenzialità contenute in esso. Nel primo esempio, Chiara usa la regola dei logaritmi e mostra un ragionamento che può essere adatto per altri esempi e può essere considerato alla stregua di una dimostrazione. L'ultimo esempio, invece, si basa su un valore del logaritmo precedentemente utilizzato in un esercizio svolto in classe.
A Chiara, durante l'intervista, è stato chiesto perché abbia abbandonato il ragionamento di Eulero ed ha risposto: «Nel documento di Eulero ho preferito richiamare le proprietà dei logaritmi per soffermarmi e per ragionare sul fatto che se l'argomento del logaritmo è maggiore di 1 il risultato sarà positivo, al contrario se è minore di 1 sarà negativo. Quindi ho scelto di mettere un po' in disparte il documento per un ragionamento mio, visto che inizialmente non comprendevo, ma grazie al richiamo delle proprietà dei logaritmi e dei calcoli ho compreso».

4.4 L'elaborato di Doris

Doris ha consegnato il lavoro richiesto solo dopo essere stata personalmente sollecitata a farlo, una volta scaduti i termini inizialmente indicati. L'alunna aveva mostrato in precedenza, durante le attività di classe, varie difficoltà in matematica. Allo scopo di fornirle un innesco che la inducesse a realizzare l'elaborato richiesto, le è stato inviato un messaggio via email suggerendole di partire da una riflessione personale sul perché non avesse svolto il lavoro. Qui di seguito è riportato l'elaborato di Doris.

> La comprensione dei logaritmi non risulta immediata, poiché nel testo seguente, prima bisogna tradurre il testo e successivamente comprenderlo e fare le relative considerazioni.
> Dopo aver compreso cos'è un logaritmo, ovvero «dato un numero reale non [*sic*] X esiste solo un numero Y tale che =X», questo numero si chiama «logaritmo di X». Questa condizione non è semplice all'inizio. Un'altra difficoltà è comprendere che il problema del logaritmo è risolvibile trovando l'esponente che mi permette di trovare quel risultato.
> Il motivo per il quale non ho svolto il compito, o meglio non ho l'ho terminato, è che la matematica personalmente è un concetto da capire attraverso la pratica di esercizi e formule, invece attraverso un testo in inglese mi sono trovata maggiormente in difficoltà poiché non mi permetteva di comprendere il concetto di logaritmo o dei concetti che richiedeva ogni testo del "brain-storming" in modo esplicito e diretto. Questo lavoro distoglieva la mia attenzione dal vero scopo, ovvero quello di interiorizzare il concetto, invece il lavoro di tradurre e comprendere il testo in sé quindi il ragionamento per arrivare alla comprensione del concetto era molto enigmatico e prolungato.

Doris sembra avere raccolto il suggerimento di partire da una riflessione personale non tanto per sviluppare la propria interpretazione del documento quanto per esprimere un'opinione sul suo utilizzo e la sua utilità. In effetti la sua adesione al ragionamento matematico dell'autore è solo marginale. Il suo spaesamento è espresso in pieno ma non affrontato. Le sue riflessioni confermano che l'interpretazione di un documento è un compito che trova ostacolo in un approccio alla matematica basato sull'utilizzo di regole («formule») finalizzato alla risoluzione di esercizi. Appare allarmante che Doris attribuisca ad una «pratica di esercizi e formule» il modo per arrivare a «interiorizzare il concetto», senza citare altri modi. Ritorneremo su questi aspetti più avanti traendo spunto anche dall'elaborato di Marta (par. 4.6).

4.5 L'elaborato di Franca

1) LOGARITMO
TRADUZIONE TESTO
103) Qualsiasi base logaritmica scegliamo abbiamo sempre log 1 = 0.
dato che nell'equazione $a^z = y$, che corrisponde a z = log y, se y = 0 allora z = 1.
Di conseguenza, il logaritmo di un numero maggiore di 1 sarà positivo, a seconda della base a.
Pertanto: log a = 1, log a^2 = 2, log a^3 = 3; log a^4 = 4, ecc. dopodiché sappiamo quale base è stata scelta, cioè il numero il cui logaritmo è uguale a 1 è la base logaritmica.
Il logaritmo di un numero positivo minore di 1 sarà negativo, infatti:
log 1/a = -1
log 1/a^2 = -2
log1/a^3 = -3, ecc.
mentre i logaritmi dei numeri negativi non saranno reali, bensì complessi, come già osservato.
ANALISI CONTENUTI
Il testo spiega il meccanismo alla base del logaritmo, mettendolo in relazione alla tipologia e al segno dei numeri coinvolti.
Il logaritmo è l'esponente al quale bisogna elevare un numero costante (base) per ottenere un determinato numero. Logaritmo ed esponenziale, infatti, sono funzioni inverse:
$a^z = y$ z = log y.
Partendo da questo presupposto, l'autore afferma che log 1 = 0. In effetti, 0 l'unico numero che può soddisfare l'uguaglianza: $n^x = 1$.
Dopodiché, le successive deduzioni dell'autore non riesco a capirle. Forse per un mio errore di traduzione, ma in alcuni punti non riesco proprio a capire il senso della frase.
L'ultima osservazione, però, mi incuriosisce molto: «i logaritmi dei numeri negativi non saranno reali, bensì complessi».

Franca riporta una sua traduzione del documento (è una delle due studentesse della classe ad averla scritta) che va a costituire una parte significativa del suo elaborato che altrimenti, al netto delle osservazioni sulle proprie difficoltà, risulterebbe piuttosto povero. La traduzione appare abbastanza fedele, a parte l'errore «z = log y, se y = 0 allora z = 1»; anche il suo «infatti» risulta discutibile in quanto sembra attribuire agli esempi che lo seguono la possibilità di dedurre l'affermazione sul logaritmo negativo, mentre Eulero appare riportarli come conseguenze di essa. Franca fa poi riferimento alle domande 1 e 5. Porta a tema il documento come oggetto su cui dare un giudizio complessivo; la sua attenzione e il suo coinvolgimento nella proposta dell'autore appaiono lacunosi. Dopo una chiara introduzione del concetto di logaritmo e del suo legame con l'esponenziale, scrive di non aver capito la seconda parte del documento ma non esplicita riguardo a quali punti («in alcuni punti non riesco proprio a capire il senso della frase»). Rinuncia a formulare domande di chiarimento rivolte all'insegnante. Menziona l'autore e dice di sé in merito a un possibile errore di traduzione; formula quello che ritengo possa essere interpretato come un implicito giudizio sulla chiarezza del testo, espresso dal suo «forse». Franca sembra rompere quello che Levinas chiama «Asimmetria dell'interpersonale», il titolo di un paragrafo di *Totalità e Infinito*: si stacca dall'itinerario indicato dall'autore, dalla possibilità di ricevere un insegnamento; al contrario porta a tema il proprio lavoro e quello dell'autore cosicché la sua relazione con il testo non appare irriflessa e affidata all'iniziativa dell'autore. Franca mostra curiosità per l'osservazione finale riguardante il logaritmo di un numero negativo, che Eulero non chiarisce all'interno del documento ma che nell'originale affronta ai punti che precedono il 103. Franca nota la mancanza di una spiegazione e con ciò conferma la sua curiosità intellettuale che però, durante

il lavoro individuale o con il resto della classe, tendeva a non essere sostenuta da una propensione all'analisi e all'approfondimento.
Durante l'intervista, a Franca è stato chiesto se potesse spiegare quali fossero quegli «alcuni punti» in cui non riusciva a capire il senso della frase. Ha risposto che si trattava della parte in cui Eulero riporta uguaglianze come log $\frac{1}{a^2}$ = -2 e che quando ha prodotto la sua interpretazione non ricordava il significato degli esponenti negativi.

4.6 L'elaborato di Marta

> In questo documento l'esponente, quindi il logaritmo dell'equazione è "z". (y =1 allora z = 0)
> Nei passaggi successi viene messo in mostra come i logaritmi siano gli stessi esponenti dei vari numeri; un logaritmo può risultare negativo quando l'esponente a cui corrisponde si trova al denominatore invece che al nominatore.
> Mi è stato difficile capire il documento, ma sono riuscita ad estrarre alcune regole di base, come:
> - Il logaritmo può essere negativo quando l'esponente è al denominatore
> - Il logaritmo di un numero è il suo esponente oppure un esponente che può aiutarci a raggiungere il numero che ci serve

Marta fa riferimento alle domande 1, 2, 4. Riguardo all'esponente del denominatore, individua una regola in base alla quale è possibile risolvere una gamma di esercizi. Sembra fare riferimento semplicemente alla struttura formale delle scritture riportate da Eulero. Con l'identificazione delle due regole nel breve elenco puntato, appare orientata a mettere in primo piano l'importanza della memorizzazione. Marta dice di sé e delle proprie difficoltà nel comprendere il documento: metaforicamente, appare "respinta" dal testo. Si noti che, diversamente da Franca, non riporta possibili cause di ciò: possiamo ritenere che le abbia attribuite a sé stessa. Avrebbe preso così atto della propria inadeguatezza che in tal caso sarebbe penalizzante: non premessa alla propria disponibilità a ricevere un insegnamento ma rinuncia a riceverlo. Nonostante le sue difficoltà, non riporta domande di chiarimento rivolte all'insegnante.
A Marta, durante l'intervista, è stata rivolta la domanda: «Per cosa ritieni utili le regole di base che hai riportato nella tua interpretazione?». La studentessa ha risposto che «le regole sono utili per risolvere gli esercizi in modo più semplice, con meno difficoltà». Ciò che Marta ricava dal testo appare finalizzato alla realizzazione del compito scolastico e in questo senso fa un uso strumentale del testo: non è il ragionamento proposto dall'autore che viene tenuto come riferimento ma l'idea che possa servire per il raggiungimento di uno scopo esterno. Marta aveva avuto forti difficoltà in matematica durante tutti gli anni della scuola secondaria di secondo grado. Le sue osservazioni suggeriscono una riflessione sul ruolo degli esercizi (intesi come utilizzo di un concetto indicato esplicitamente; non faccio riferimento ai problemi in cui il riferimento ai concetti è una questione aperta). Si diceva sopra (par. 3.3) che essi forniscono un «surplus d'essere». Contrariamente a quanto afferma la studentessa, gli esercizi sono in questo senso finalizzati a introdurre delle difficoltà per il solutore; superarle è indice di avanzamento nel processo di apprendimento. Gli esercizi hanno un ruolo fra le *performance* richieste dalla scuola nelle prove di verifica. Come nel caso di Marta, un alunno debole tende a finalizzare il proprio impegno all'assolvimento di tali richieste, bypassando l'apprendimento. Si ha così un esito paradossale: la situazione insoddisfacente determinata dalle difficoltà nella disciplina tende ad essere risolta dall'iniziativa dell'alunno, avendo come riferimento ciò che la scuola richiede. Le pratiche in atto nell'istituzione (le modalità di verifica su cui è basato l'avanzamento ai gradi successivi) consentono così alla scuola di autoassolversi dalla necessità di un intervento destinato ad affrontare le difficoltà degli alunni. Si genera evidentemente una contraddizione: la scuola ha come proprio fine costitutivo gli apprendimenti dell'alunno ma la sua struttura offre l'opportunità, previo assolvimento di determi-

nati atti, di non conseguire apprendimento. Detto con termini utilizzati nel presente articolo, la scuola crea le condizioni perché l'alunno viva la relazione etica di alterità da cui origina l'apprendimento, ma al contempo offre le condizioni perché venga disattesa.

4.7 L'elaborato di Anna

> Logaritmi
> In questo documento vediamo come si svolgono i logaritmi.
> Sappiamo che il logaritmo è l'esponente della potenza al quale la base deve essere elevata per ottenere un determinato numero.
> Esempio: 10^2= 100 (10 è la base, 2 è il logaritmo mentre 100 è l'argomento)
> Nel logaritmo $\log_2 16$= x dobbiamo trovare quel numero che, elevando 2^x sia uguale a 16. In questo caso quindi la x= 4 perchè 2^4= 16
> Grazie a questo ragionamento possiamo confermare perciò che qualsiasi log1 risulterà sempre 0 perché sappiamo che qualsiasi numero elevato alla 0 da 1. (x^0=1)
> In questo documento viene spiegata, in maniera molto chiara, il ragionamento che sta dietro al logaritmo e, dal mio punto di vista, è molto utile perchè viene spiegato sia in maniera scritta che in maniera numerica.
> La spiegazione numerica può risultare più complessa per chi non è portato per la matematica quindi la spiegazione scritta presentata è assolutamente efficace.
> Ovviamente, come accade in altre equazioni, sappiamo che il logaritmo di un numero inferiore a 1 risulterà un numero negativo.
> Esempio: log 1/3 3 = 1
> Cos'è un logaritmo e di quali parti è composto?
> Come si calcola un logaritmo? Spiega perché log1 sarà sempre uguale a 0.
> Il logaritmo di un numero minore di 1 è positivo? Se no perché?

Anna accenna a sé stessa riportando quello che definisce il proprio «punto di vista»; parla del testo esprimendo il proprio giudizio; insiste sulle domande che hanno risposta nel testo 1, 2 e 4. Produce esempi dello stesso tipo di quelli di Gaia e di Francesca (par. 4.1 e par. 4.2).
Formula poi domande che non sono però autentiche richieste di chiarimento rivolte all'insegnante, ma appaiono una sorta di schema della sua interpretazione, cioè domande che Gadamer cita come interrogativi che sostengono la ricerca di risposte all'interno del testo. Va notato che anche un'altra studentessa (della quale qui non viene riportato l'elaborato per esteso) aveva inteso che le domande che era stato suggerito di scrivere fossero di questo tipo: non richieste per avere un aiuto dall'insegnante nella comprensione, ma parte dell'esercitazione scritta che perciò le studentesse sembra abbiano considerato come fine a sé stessa. Dal punto di vista di un insegnante, questo tipo di domanda avrebbe potuto avere un senso se, ad esempio, fosse stato programmato un interscambio fra i compagni di classe e le domande fossero servite come aiuto per mettere in risalto i punti del documento ritenuti fondamentali. Questa particolare formulazione di interrogativi può essere intesa dunque come una sorta di resoconto dell'attività di porsi domande (quelle di cui hanno trovato risposta nel testo) che le studentesse hanno fatto durante l'interpretazione.
Per un altro verso, tramite la formulazione di quel tipo di domande, Anna mostra di voler dare all'insegnante un esplicito riscontro del successo della sua interpretazione. Con ciò, la relazione etica viene interrotta e interlocutore dell'alunna diventa l'insegnante nel suo ruolo istituzionale. Al contrario, formulare domande per raccogliere chiarimenti testimonia che l'insegnante viene riconosciuto come mediatore nella relazione etica – del resto, faceva già parte di questo suo ruolo l'atto di proporre il documento all'attenzione degli studenti. Considero il fatto che Anna abbia scritto quelle domande come specchio di ciò che avviene usualmente in classe, vale a dire del fatto che lo studente sostiene una prova di verifica

– un atto tangibile a conclusione di un lavoro – somministrata dall'insegnante nel suo ruolo di membro dell'istituzione scolastica. Nel suo elaborato, Anna mostra sia una fase di adesione etica al documento, sia una fase di attenzione al valore istituzionale del suo impegno scolastico. Questo evidenzia il delicato equilibrio in cui lo studente svolge in generale il suo lavoro: la dipendenza dalle richieste dell'istituzione e la necessità di rendere conto ad essa dei propri progressi, passando però per quella che abbiamo chiamato relazione etica che si instaura con persone come l'autore di un testo.

5 Discussione

Sopra (par. 3.2) si è detto delle motivazioni che hanno portato alla scelta del brano di Eulero e che si possono ricondurre a una domanda di senso, unificante, a cui il testo dà risposta. Brevemente, essa si può formulare attraverso l'interrogativo: come proporre agli studenti un lavoro per rivedere il concetto di logaritmo? Gadamer (1960/2006) riporta altre considerazioni che menziono come sintesi del ruolo della domanda nell'interpretazione. Dice della perplessità di fronte a un testo del passato (nel caso del testo matematico questo richiama il *dépaysement épistémologique*). Fa poi riferimento alla comprensione, che include la mediazione fra il presente e la tradizione. La relazione fra domanda e risposta può essere di fatto invertita: la voce che ci parla dal passato ci interpella e pone una domanda che determina in noi un'apertura di significato. Allo scopo di rispondere alla domanda postaci, noi stessi dobbiamo iniziare a porre domande. Queste non potranno però mai essere all'interno dell'orizzonte originario ma entro un orizzonte che abbraccia noi stessi. Questo ci riallaccia ai temi delle preconoscenze e della distanza storica affrontati sopra (par. 1).
Soffermiamoci sull'elaborato di Gaia che mostra più degli altri come si possa ritenere che la relazione etica si sia instaurata pur di fronte a evidenti difficoltà di ordine concettuale e linguistico. Dopo aver riconosciuto lo spaesamento che le ha procurato, la studentessa ha accettato progressivamente l'alterità del documento, l'ha affrontato attraverso un atteggiamento etico. Ha accolto il documento senza volersene servire, senza farsene strumento, senza *reificarlo*. Nell'abbandonare il tema iniziale riguardante sé e il documento, si è fatta carico di quanto Eulero propone e si è impegnata a seguirlo – con Levinas (1978/2002, p. 94) potremmo dire che si è fatta prendere dalla «ossessione per un altro che non si manifesta»: l'Altro non si manifesta direttamente nel testo, vi figura solo attraverso delle tracce ma arriva a determinare nello studente un ruolo passivo inteso come disponibilità a farsi guidare.
Il valore educativo in un documento storico ritengo possa essere attinente, in senso lato, alla promozione nello studente della sua disponibilità a mettersi in ascolto dell'Altro, a essere aperto alla novità di cui è portatore e ad affrontare le difficoltà prodotte dagli aspetti insoliti presenti nel documento. Gaia si è messa in gioco affrontando il rischio dell'insuccesso che l'interpretazione del documento comporta. Dopo aver parlato del documento "in terza persona" si è volta al merito del contenuto vale a dire è passata dalla palese esigenza di gestire il documento, di comprenderlo (dal latino *comprehendĕre* e *comprendĕre*, composizione di *con-* e *pre(he)ndĕre* "prendere"), alla condivisione con l'autore dell'analisi del contenuto matematico.
A seconda delle situazioni e del contesto, alcune obiezioni possono nascere riguardo al riconoscimento dell'eticità nella relazione di un lettore rispetto a un documento. Pensiamo al caso di uno studioso che, ad esempio, utilizzi un documento storico a soggetto matematico per indagini legate all'uso della lingua: possiamo supporre che non sia interessato a seguire il ragionamento esposto dall'autore. Stabilisce allora una relazione non etica con il documento, nel senso dell'etica levinasiana centrata sulla relazione Io-Altro (quella fra lo studente e l'autore che si espone attraverso un ragionamento matematico, e che ha costituito il punto di attenzione del presente articolo). Gli aspetti linguistici a cui lo studioso è interessato ritengo vadano inclusi fra gli elementi che l'autore lascia inconsapevolmente

nel documento e che pure aiutano a connotarlo. Nel definire "non etica" tale relazione, così, ancora una volta non faccio riferimento a principi di altra provenienza o a codici deontologici che possano portare a giudicare negativamente la scelta di quello studioso.

L'autore ha lasciato traccia nel documento scritto, così come l'insegnante che l'ha scelto e l'ha proposto ai suoi studenti. Sono quindi loro che determinano l'«ossessione» di cui parla Levinas – nel suo stile a volte iperbolico ma certo efficace. La mancanza di comprensione che Gaia riconosce è la dichiarazione di non aver individuato l'orizzonte entro cui l'autore si colloca. Lo individua nel momento in cui recupera le proprie preconoscenze e riesce ad associarle all'oggetto del documento. In quanto Gaia afferma («i logaritmi e le loro proprietà», da intendersi in senso lato e in questo caso non come quelle che tradizionalmente riguardano il logaritmo del prodotto, del quoziente o di una potenza) sembra trasparire quello che Gadamer (1960/2006, p. 294) chiama «pregiudizio di completezza» e si riferisce al fatto che solo ciò che costituisce un'unità di significato è intellegibile. Gaia sembra dichiarare che inizialmente andasse cercando questa struttura unitaria del testo; ha poi mostrato di averla trovata riportando una sorta di "titolo" per il documento.

Gaia ha colto le domande a cui il testo fornisce risposta elencate sopra, tranne quella sul logaritmo di un numero negativo. In effetti, a proposito di quest'ultima Eulero accenna a osservazioni fatte altrove, senza una trattazione analoga a quella del logaritmo di numeri maggiori di 1 o positivi minori di 1. Gaia appare in grado di rispondere a possibili domande sul contenuto del documento di Eulero, con forse l'eccezione di quella riguardante appunto il valore del logaritmo di un numero negativo.

Anche in vari elaborati degli studenti che non sono riportati nel presente articolo si è manifestata una sorta di "distanziamento" dal testo che si esprime nel soffermarsi, ad esempio, sulle proprie difficoltà o nell'indicare solo per sommi capi il contenuto. Non sembra che questi studenti si siano posti domande e che abbiano intrapreso una riflessione per trovarvi risposta nel testo. Gli elaborati di Doris o di Franca rendono plateale questo "distanziamento" dal testo. Considero alla stessa stregua anche una parte di ciò che ha proposto Chiara (che ha inserito nel proprio elaborato la proprietà del logaritmo di un prodotto senza poi utilizzarla in un ragionamento che seguisse quello di Eulero): lo considero un atto di estrema responsività ma non di responsabilità nei confronti del documento.

In precedenti attività a classe intera, la lettura di un testo aveva prodotto un interscambio con l'insegnante molto vivace, fatto di osservazioni e domande orali. L'elaborato scritto ha indubbiamente prodotto una significativa rarefazione delle domande di chiarimento degli studenti all'insegnante, nonostante siano state presentate come parte del compito stesso. Va considerato che la produzione di schemi e riassunti di testi, per le varie discipline, era una pratica consolidata nelle attività affrontate in classe dagli studenti ma non lo era la scrittura di domande di chiarimento rivolte all'insegnante.

L'interpretazione del testo richiede che gli studenti mobilitino le loro personali conoscenze, abilità e competenze e in questo viene ad avere una impronta di soggettività. La classe aveva già lavorato per circa due mesi sul logaritmo. Attraverso l'attività con il testo si è rilevato però che vari aspetti concettuali in molti studenti rimanevano non chiari. Sorge l'interrogativo riguardante il modo in cui questo abbia potuto ostacolare la loro ricerca di adesione al pensiero dell'autore. Per dare completezza, seppur molto sinteticamente, al quadro del lavoro della classe, utilizzando ancora pseudonimi qui di seguito vengono menzionati alcuni degli elaborati non riportati sopra; è tralasciato il riferimento a quelli che costituiscono sostanziali ripetizioni. Caterina ha scritto la traduzione in italiano, le «formule e la sintesi matematica» ed un commento su come ha svolto il lavoro. Emanuela ha prodotto uno schema con sintetici enunciati e scritture simboliche non sempre corrette. Michele ha prodotto una riformulazione del contenuto anche attraverso espressioni personali non precise come, ad esempio, «Il logaritmo di un numero è il suo esponente o l'esponente "ideale" che servirebbe per raggiungere il numero a destra dell'uguale»; ha tralasciato però quasi interamente le scritture simboliche. Corinna ha riportato un brevissimo elaborato contenente affermazioni errate: «Il logaritmo di un numero è sempre positivo quando la base è maggiore di 1», «Il logaritmo di un numero è negativo quando la base è minore di 1».

6 Conclusioni

Nell'articolo sono stati considerati alcuni elaborati prodotti dagli studenti relativamente all'interpretazione di un brano di Eulero sui logaritmi per discutere secondo quali aspetti si potesse rilevare che si era instaurata o meno una relazione "etica". Forse il termine *empatica* aiuta a comprendere meglio una parte del significato che ho desiderato attribuire al termine "etica", nel senso che suggerisce la presenza di una persona dietro al testo, con la quale si instaura un rapporto di partecipazione e che, attraverso il testo, indirizza l'impegno dello studente. Si produce un'immedesimazione nell'autore che però non può essere completa: non possiamo parlare di identificazione. Questo diventa particolarmente evidente pensando agli effetti che la distanza temporale produce nel caso di un documento storico: autore e lettore provengono da contesti culturali diversi e da esperienze di vita differenti, la loro preparazione matematica non è la stessa. È questo un caso che conferma come in un'autentica relazione di alterità non è possibile ridurre l'Altro a noi stessi, anche nel caso di una relazione pienamente responsiva e responsabile.

Nell'articolo si è insistito sull'esigenza che lo studente si mostri disposto a ripercorrere gli stessi ragionamenti dell'autore: come premessa per l'apprendimento, contro lo studio "mnemonico". Il rendere conto dei ragionamenti matematici dell'autore non esaurisce però l'interpretazione del documento. Non va esclusa la possibilità che gli studenti possano portare a tema altri aspetti e senza un'esplicita sollecitazione dell'insegnante si vogliano, ad esempio, soffermare su particolari espressioni linguistiche dell'autore o sulla sua collocazione storica: questa loro iniziativa costituirebbe una ulteriore problematizzazione riguardo all'instaurarsi della relazione che ho indicato come "etica".

Non va dimenticato che un lettore possiede un proprio bagaglio di «preconoscenze» o «pregiudizi» (termine utilizzato da Gadamer che non deve essere visto in un'accezione negativa) in base ai quali opera una propria personale attribuzione di significati al testo: non dovrà sembrare paradossale che questo avvenga anche se autore e lettore sono impegnati con lo stesso contenuto matematico. A questo proposito pensiamo a Gaia e Francesca e al richiamo delle loro preconoscenze riguardanti le potenze di 10 per dare significato alle scritture generali di Eulero.

Sono stati individuati alcuni punti nel passo dell'*Introductio* che sono andati a costituire uno schema di ragionamenti condivisi: alla luce di quanto appena detto, certamente non esauriva i possibili significati del documento. Tale schema è stato ricavato considerando le domande a cui il testo fornisce risposta, che lo studente può cogliere nella sua interpretazione e riportare nel suo resoconto scritto.

Quella con l'autore è una relazione di fiducia che porta lo studente ad affrontare il rischio dell'errore e dell'insuccesso. Dal punto di vista educativo ritengo questo tipo di relazione imprescindibile affinché lo studente ponga sé stesso dentro un cammino di crescita personale nell'apprendimento della matematica. La messa in atto di relazioni etiche può essere considerata anche una più generale testimonianza del coinvolgimento degli alunni nella proposta didattica, e questo è uno degli obiettivi che la scuola si pone: mantenere gli studenti all'interno dei percorsi che realizza è un atto prioritario rispetto all'apprendimento di specifici contenuti disciplinari.

Seguire i ragionamenti dell'autore di un testo è un modo per mettersi in ascolto dell'Altro – per imparare ad ascoltare – come documentano Arcavi e Isoda (2007) a proposito dell'uso didattico dei documenti storici. Ci si colloca così nell'ambito di una finalità educativa di notevole rilievo, rispetto alla quale la matematica è importante possa dare il proprio contributo come disciplina scolastica, andando oltre i valori che usualmente le vengono attribuiti quali, ad esempio, il rigore nel ragionamento o la correttezza nell'uso di linguaggi specifici.

In un momento successivo, informalmente, una studentessa ha manifestato le proprie perplessità riguardo all'uso del termine *etica* riferito al documento e si chiedeva quali principi etici si potessero violare rispetto a un testo matematico. Ritengo che questa osservazione possa essere lo spunto per

ribadire come la relazione di cui ci stiamo occupando nel presente articolo tragga origine, levinasianamente, dalla relazione con l'Altro e non dai principi di un'etica preesistente.
Riassumendo quanto è stato illustrato nell'articolo, possiamo dire che uno studente stabilisce una relazione etica con un documento se nella scrittura della sua interpretazione porta a tema il ragionamento dell'autore, se trascura sia il testo come oggetto (da memorizzare, da usare in vista di una prova di verifica) che la propria relazione con esso, se condivide con l'autore le domande a cui il documento fornisce risposta, se mostra di accettare un insegnamento anche a costo di incorrere nell'errore, se cerca di consolidare i legami fra il ragionamento dell'autore e il proprio, se formula richieste di chiarimento.
Nel caso degli studenti che hanno interpretato il testo di Eulero, il porre domande è risultato un atto parziale, incompiuto. Qui intendo riferirmi alla formulazione esplicita di domande di chiarimento rivolte all'insegnante. Porre domande ritengo costituisca la dimostrazione del riconoscimento dell'alterità del testo e l'accettazione della propria inadeguatezza. Penso però che nella quotidianità di classe esistano delle condizioni per le quali gli studenti non possano trovare la motivazione per manifestare questa inadeguatezza, in una scuola che non fa iniziare il proprio intervento da una discussione con gli studenti dei loro bisogni formativi e che non prevede poi il riconoscimento dei progressi rispetto ai personali livelli di partenza.
Quasi tutti gli elaborati prodotti dagli studenti hanno mostrato difficoltà di vario tipo nella gestione del concetto di logaritmo. L'analisi condotta nel presente articolo non intendeva focalizzare questi aspetti a proposito dei quali si rinvia a Dintarini (2018). Alcuni degli errori presenti negli elaborati riguardanti l'interpretazione del documento sono di natura linguistica, come ad esempio in Gaia: «Per trovare il logaritmo in base *n* di un numero *y* vuol dire trovare quel numero *x* che elevato alla base *n* mi dia *y*» per intendere che la base *n* va elevata all'esponente *x*. Per quanto riguarda lingua e linguaggi della matematica nell'insegnamento, si veda Ferrari (2020).
Dopo il lavoro di interpretazione del documento, considerare che queste funzioni logaritmiche sono crescenti ha aiutato a chiarire l'affermazione di Eulero: «From this [log 1 = 0] it follows that the logarithm of a number greater than 1 will be positive».
Il testo di Eulero sembra sia stato ritenuto dagli studenti adeguatamente chiaro, e la lingua inglese non ha introdotto difficoltà supplementari, ma negli elaborati e nelle indicazioni informali raccolte successivamente alla consegna del testo solo un numero molto limitato di studenti ha formulato dei rilievi e infatti solo due studentesse hanno messo in discussione la chiarezza del documento, anche se non in maniera netta. Si ricordi, ad esempio, l'affermazione di Franca riportata al par. 4.5 «Forse per un mio errore di traduzione», all'interno di un passo in cui sottolineava le proprie difficoltà di comprensione di alcune righe del documento.
Lavorare con i documenti storici è anche un modo per sperimentare la «fondamentale non-definitività dell'orizzonte in cui il comprendere si colloca» (Gadamer, 1960/2006, p. 366). Pensiamo, ad esempio, a come lo studente possa affrontare le varie fasi dello spaesamento che si ha nell'incontrare i diversi aspetti, anche di carattere pluridisciplinare, del documento. In generale, se lo studente considera quanto ha appreso come un atto concluso ritengo che corra il rischio di precludersi la possibilità di individuarne nuovi significati. Questo ritengo possa influire sulla possibilità di impiegarlo in ulteriori proposte di apprendimento, rivedendolo in quanto preconoscenza e sapendolo trasferire a nuove situazioni. Con questo intendo richiamare anche Paulo Freire (1970/2007, p. 75) quando, nel paragrafo dedicato a «L'uomo come essere inconcluso e la sua permanente ricerca di "essere di più"», parla della necessità di mantenersi in un «movimento di ricerca». Intendo anche fare riferimento all'insegnamento di Levinas che esorta ad andare oltre la conoscenza intesa come appropriazione dell'alterità di ciò che viene conosciuto, si veda Levinas (1982/1989). Nella relazione etica con il documento, la comprensione avviene nel desiderio di seguire l'Altro e quanto propone, l'Altro che si espone attraverso la propria opera.

Bibliografia

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 111–129.

Barbin, É. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, *37*(1), 20–25.

Barbin, É. (2012). L'histoire des mathématiques dans la formation : une perspective historique (1975–2010). In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Actes du congrès de l'Espace mathématique francophone 2012* (pp. 546–554). Université de Genève.

Barbin, E., Jankvist, U. T., Kjeldsen, T. H., Smestad, B., & Tzanakis, C. (Eds.). (2019). *Proceedings of the 8th European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*. Metropolitan University of Oslo.

Boyer, C. B. (1951). The foremost textbook of modern times. *The American Mathematical Monthly*, *58*(4), 223–226.

Calandri, F. (1491). *Aritmetica*. Morgiani & Petri.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2014). History in the mathematics laboratory: an exploratory study. In M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds.), *Ιστορία των Μαθηματικών καιΜαθηματική Εκπαίδευση – Special Issue of Education Sciences* (pp. 114–130). University of Crete.

Dilthey, W. (1996). *The rise of hermeneutics*. In R. A. Makkreel & F. Rodi (Eds.), *Hermeneutics and the Study of History: Selected Works* (Vol. IV, pp. 235–257). Princeton University Press. (Titolo originale: *Die Entstehung der Hermeneutik* pubblicato nel 1900).

Dintarini, M. (2018). Understanding logarithm: what are the difficulties that students have? *Proceedings of the 5th International Conference on Community Development (AMCA 2018) – Advances in Social Science, Education and Humanities Research* (pp. 239–241). Atlantis Press.

Dougan, M. J. (2016). *The Ethics of Reading: Levinas and Gadamer on encountering the other in literature*. Doctoral Thesis, University of Waikato, Hamilton, New Zealand.

Euler, L. (1988). *Introduction to analysis of the infinite, Book 1*. Springer. (Titolo originale: *Introductio in analysin infinitorum* pubblicato nel 1748).

Ferrari, P. L. (2020). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET Università.

Foucault, M. (1977). What is an Author? In M. Foucault (Ed.), *Language, counter-memory, practice* (pp. 113–138). Cornell University Press. (Titolo originale: *Qu'est–ce qu'un auteur?* pubblicato nel 1969).

Freire, P. (2007). *La pedagogia degli oppressi*. EGA Editore. (Titolo originale: *Pedagogia do oprimido* pubblicato nel 1970).

Gadamer, H.-G. (2006). *Truth and Method*. Continuum. (Titolo originale: *Wahrheit und Methode* pubblicato nel 1960).

Guillemette, D. (2018). The ethical subject of Levinas. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education – Otherness in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 95–123). PME.

Habermas, J. (1993). *Etica del discorso.* Laterza. (Titolo originale: *Moralbewußtsein und kommunikatives Handeln* pubblicato nel 1983).

Jahnke, H.-N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. A. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education, The ICMI Study.* Kluwer Academic Publishers.

King, C. (2019). Gadamer, Levinas, and the Hermeneutic Ontology of Ethics. *Philosophies*, *4*(3), 48. MDPI AG. http://dx.doi.org/10.3390/philosophies4030048

Levinas, E. (1979a). *La traccia dell'altro.* Tullio Pironti Editore. (Titolo originale: *La trace de l'autre* pubblicato nel 1963).

Levinas, E. (1979b). *Totality and Infinity – An Essay on Exteriority.* Martinus Nijhoff Publishers. (Titolo originale: *Totalité et Infini: essai sur l'extériorité* pubblicato nel 1961).

Levinas, E. (1989). *Ethics as First Philosophy.* In S. Hand (Ed.), *The Levinas Reader* (pp. 75–87). Basil Blackwell. (Titolo originale: *Éthique comme philosophie première* pubblicato nel 1982).

Levinas, E. (2002). *Altrimenti che essere o al di là dell'essenza.* Jaca Book. (Titolo originale: *Autrement qu'être ou au-delà de l'essence* pubblicato nel 1978).

Mason, J., & Pimm, D. (2008). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277–289.