DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 9 - 32, DOI: 10.33683/ddm.22.11.1

OPEN ACCESS

Una revisione della ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi: una "ricerca-azione" sull'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri

A review of the research in teaching and learning the negative numbers: an "action research" concerning the application of the geometrical model of the number line

Athanasios Gagatsis• e Maria Alexandrou°
• Facoltà delle scienze sociali e dell'educazione, Università di Cipro – Nicosia, Cipro
° Insegnante di matematica di scuola secondaria, Ministero dell'Educazione, Cultura, Sport e Gioventù – Cipro

✉ gagatsis@ucy.ac.cy, maria.alexandrou@hotmail.com

QUESTO ARTICOLO È DISPONIBILE ANCHE IN LINGUA ORIGINALE

Sunto / La nozione di numeri negativi è una delle più fondamentali della matematica. Per molti anni hanno causato confusione e sono stati oggetto di controversie tra grandi ricercatori, finché lo sviluppo dell'algebra simbolica ha portato alla loro accettazione nella forma che hanno oggi. Come prevedibile, quando gli studenti imparano per la prima volta il concetto di numeri negativi e le operazioni tra di loro, si verificano varie difficoltà e sorgono misconcezioni. La loro comprensione è uno dei compiti più impegnativi dell'insegnamento della matematica a causa della loro complessità e natura astratta. Per questo scopo, sono stati ideati e impiegati vari modelli. Nel presente studio esponiamo alcuni degli ostacoli epistemologici comunemente osservati nella comprensione dei numeri negativi, dopodiché esponiamo e confrontiamo due diversi modelli frequentemente utilizzati per introdurre le quattro operazioni di base tra loro.

Parole chiave: numeri negativi; modello geometrico; linea dei numeri; ricerca-azione.

Abstract / The notion of negative numbers is one of the most fundamental in mathematics. For many years, they have caused confusion and they have been an object of controversy among great researchers, until the development of symbolic algebra led to their acceptance in the form they have today. When students are first introduced to the concept of negative numbers and the operations between them, various difficulties occur and misconceptions arise, as expected. Their comprehension is one of the most challenging tasks of teaching mathematics due to their complexity and abstract nature. For this purpose, various models have been devised and employed. In the present study we expose some of the epistemological obstacles commonly observed in understanding negative numbers and then exhibit and compare two different models frequently used for introducing the four basic operations between them.

Keywords: negative numbers; geometrical model; number line; action research.

1 Introduzione

Questo articolo è, in un certo senso, il risultato di un corso intensivo di didattica della matematica tenuto da un ricercatore di educazione matematica a un gruppo di insegnanti della scuola secondaria con alte qualifiche accademiche esperti di matematica. Più specificamente, l'articolo è il risultato di una stretta collaborazione tra i due autori dell'articolo, cioè, un ricercatore in educazione matematica e un insegnante del corso che è anche ricercatrice in matematica. Lo scopo principale del nostro articolo è quello di cercare di trovare modi per collegare la ricerca in educazione matematica relativa ai numeri negativi con la pratica didattica nella scuola. L'articolo si presenta come un esempio di connessione tra ricerca e pratica. Consiste in una revisione della ricerca dedicata a uno studio generale della questione dell'insegnamento dei numeri negativi e una "ricerca-azione" di un insegnante di matematica. L'articolo è diviso in due sezioni:

– Nel par. 2 presentiamo una rassegna di un gran numero di pubblicazioni che sono direttamente o indirettamente collegate alla comprensione e all'apprendimento dei numeri negativi. Abbiamo anche incluso in questa prima parte alcuni articoli relativi a modelli geometrici di insegnamento della matematica che potrebbero potenzialmente essere usati dagli insegnanti di matematica coi loro studenti.
– Nel par. 3 presentiamo una breve descrizione della metodologia della "ricerca-azione". Dopodiché presentiamo i due modelli specifici di insegnamento dei numeri negativi che derivano dalla nostra rassegna della ricerca e la loro applicazione agli studenti della scuola secondaria. Infine, viene presentata la "ricerca-azione" dell'insegnante di matematica, che consiste nell'applicazione dei due modelli da parte di un insegnante di matematica coi suoi studenti.

Il secondo paragrafo è diviso in quattro sottoparagrafi. Nel par. 2.1 presentiamo alcuni concetti e metodi della didattica della matematica che sono stati applicati alla comprensione, all'apprendimento e all'insegnamento della matematica come lo studio storico di un concetto matematico, il concetto di ostacolo epistemologico, il concetto di contratto didattico, la teoria della trasformazione didattica o trasposizione didattica e la teoria delle situazioni didattiche.
Nel par. 2.2, i concetti e i metodi menzionati sopra sono specializzati in vari studi sull'evoluzione storica del concetto di numeri negativi, così come le ricerche in didattica della matematica per la comprensione e l'apprendimento dei numeri negativi. Sono anche messi in relazione al concetto di valore assoluto, la cui evoluzione storica è strettamente legata all'evoluzione storica e alla comprensione dei numeri negativi.
Nel par. 2.3, presentiamo alcuni punti di vista sul ruolo delle rappresentazioni e dei modelli nell'insegnamento della matematica. Dato che una rappresentazione non può descrivere completamente un costrutto matematico e diverse rappresentazioni hanno diversi vantaggi, insistiamo sulla necessità di usare una varietà di rappresentazioni nell'insegnamento della matematica. Diamo diversi esempi di ricerche riguardanti l'uso di rappresentazioni nell'insegnamento e nell'apprendimento di frazioni e funzioni. Inoltre, sosteniamo che l'importanza dell'uso di modelli geometrici nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica è molto alta.
Infine, nel par. 2.4, presentiamo una ricerca sull'uso della linea dei numeri nelle operazioni elementari sui numeri interi da parte degli studenti della scuola primaria.[1] Il fenomeno della compartimentazione è osservato perché la linea dei numeri è usata come una semplice rappresentazione piuttosto che come un modello geometrico.
Il terzo paragrafo è diviso in quattro sottoparagrafi. In par. 3.1 presentiamo una breve descrizione della teoria e della metodologia della ricerca-azione.
Nel par. 3.2, viene presentata un'applicazione del modello delle cariche positive e negative per l'inse-

1. La scuola primaria a Cipro dura sei anni e corrisponde alla scuola elementare più il primo anno di scuola media nel Canton Ticino.

gnamento dei numeri negativi, come è stato preparato da un insegnante di matematica.
Nel par. 3.3 presentiamo un'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri per l'insegnamento delle operazioni tra numeri negativi, così come è stato preparato dallo stesso insegnante di matematica.
Infine, nel par. 3.4 presentiamo alcuni risultati del confronto dell'applicazione dei due modelli sulla base di un'analisi statistica descrittiva.

2 Ricerca nell'educazione matematica: il caso dell'insegnamento e dell'apprendimento dei numeri negativi

2.1 Una breve descrizione di alcuni concetti, metodi e teorie della didattica della matematica

Una scienza può progredire solo se delimita costantemente l'ambito della sua ricerca e definisce più precisamente l'oggetto che intende studiare.
Perciò, l'idea che la didattica sia lo studio scientifico dell'insegnamento non è sufficiente, poiché bisogna considerare quali aspetti di questo insegnamento prenderemo in considerazione e quali ignoreremo. In questo punto preciso, la pedagogia generale si differenzia dalla pedagogia di una materia.
La didattica della matematica è una scienza sperimentale. La sua metodologia si ispira ai principi ideati per la medicina sperimentale nel XIX secolo. Una prova (esperimento) è una situazione didattica preparata che dipende da un numero limitato di variabili controllate.
La ricerca in didattica richiede ricercatori di varie specialità: matematici, insegnanti, psicologi, linguisti, statistici, programmatori, storici (della matematica) e epistemologi. Di conseguenza, implica l'intervento di gruppi multidisciplinari. Inoltre, richiede una metodologia speciale e una terminologia speciale, senza l'uso della quale molti fenomeni didattici non possono essere interpretati. Dunque, la didattica della matematica ha sviluppato un insieme di concetti e metodi che delimitano il suo campo di validità (D'Amore & Gagatsis, 1997; Gagatsis & Maier, 1996; Gagatsis & Rogers, 1996).
Di seguito facciamo riferimento ad alcuni importanti concetti e metodi.
Un metodo importante è la trasformazione didattica o trasposizione didattica che si riferisce ai processi di trasformazione delle conoscenze scientifiche in oggetti di insegnamento. Quando un contenuto della conoscenza scientifica viene selezionato come conoscenza per l'insegnamento, c'è una serie di trasformazioni di adattamento che gli permettono di prendere il suo posto tra gli oggetti di insegnamento (Chevallard, 1985; Chevallard & Bosch, 2014). Di solito, i piani di studio non sono determinati solo dalla comunità matematica. Nella maggior parte dei Paesi, queste decisioni sono il risultato di interazioni tra matematici, insegnanti e altri membri sociali. Dipendono anche dai genitori o da scelte politiche. Il sapere scolastico è l'immagine finale del sapere scientifico dopo l'influenza di tutti questi fattori e dopo una serie di trasformazioni applicate ad esso. La trasposizione didattica è stata studiata in una varietà di concetti matematici in diversi sistemi educativi e, in particolare, nel concetto di valore assoluto (Gagatsis & Thomaidis, 1994, 1995, 1996).
Il termine contratto didattico si riferisce alle varie situazioni d'insegnamento in cui si definisce esplicitamente, in piccola parte in modo implicito ciò che viene gestito da ogni "partner" in un modo o nell'altro e di ciò di cui sono responsabili l'uno rispetto all'altro (Brousseau, 1983, 1997). Il ruolo del contratto didattico è quello di regolare le interazioni tra l'insegnante e lo studente in termini di una conoscenza. L'insegnante rispetta il contratto insegnando e dando valutazioni. Cerca di far imparare agli studenti ciò che vuole, ciò che devono imparare. È colui che sa tutto e guida gli studenti a produrre la loro risposta usando ciò che sanno. Lo studente rispetta il contratto se fa le valutazioni, se impara la lezione. Cerca di capire cosa vuole l'insegnante e di dare le risposte che si aspetta. Per esempio, cercherà di dare una risposta ad un problema proposto dall'insegnante anche se il problema non ha

soluzione. Tuttavia, questo non implica la comprensione del concetto menzionato. L'apprendimento non si basa su una cieca obbedienza ai termini del contratto ma sulla "violazione" del contratto.
Un esempio caratteristico del "contratto didattico" è legato al valore assoluto: gli studenti cercano di trovare soluzioni ad alcune equazioni che sono ovviamente "impossibili". Per esempio, l'equazione: $||x-5|-12|=-5$ (Gagatsis & Panaoura, 2014; Gagatsis & Thomaidis, 1994).
Una componente chiave della ricerca relativa alla didattica in Francia è la teoria delle situazioni didattiche. Secondo Brousseau la teoria delle situazioni didattiche esprime le condizioni in cui si genera la conoscenza matematica nel contesto dell'insegnamento e ne permette lo studio. In questo senso una situazione didattica è un insieme di relazioni tra un insegnante e uno studente, in cui si può riconoscere un piano (comune) di carattere sociale che mira all'acquisizione di una conoscenza da parte dello studente (Brousseau, 1997). Di conseguenza, l'insegnamento di una nozione matematica non può essere fatto in questa forma strutturale astratta che si incontra nella matematica pura. Deve essere insegnata nell'ambiente scolastico; deve assumere la forma specifica di un problema interessante ed essere trasformata in modo che il suo significato sia compreso dagli studenti. In questo modo il problema provoca varie azioni da parte loro, alcune formulazioni di possibili soluzioni, alcune spiegazioni ai compagni o all'insegnante, che in un certo senso portano alla "nascita" del concetto da apprendere. Un esempio caratteristico di situazione didattica riguarda "l'illusione della proporzionalità" (Modestou & Gagatsis, 2013).

2.2 Elementi storici e ostacoli all'apprendimento degli studenti relativi ai numeri negativi

Uno dei compiti più significativi della didattica della matematica è quello di identificare gli ostacoli che si oppongono alla comprensione e all'apprendimento di questa scienza. La ricerca indica che molti concetti matematici sono stati "segnati" dalle difficoltà dei grandi matematici. È ragionevole supporre che molte delle difficoltà che a un certo punto hanno fermato gli scienziati più ispirati, devono ancora preoccupare i nostri studenti. Lo studio storico di una nozione matematica è quindi un metodo importante della didattica della matematica, strettamente legato al concetto di ostacolo epistemologico.
In questo modo l'ostacolo epistemologico diventa un concetto importante della didattica della matematica. Tuttavia, si è osservata una grande controversia sulla nozione di ostacolo epistemologico, alla quale hanno partecipato ricercatori come Artigue, Brousseau, Duroux (Francia), Schubring (Germania), Sierpinska (Canada) ecc.
Brousseau (1983) definisce gli ostacoli nell'apprendimento come un insieme di errori che sono strettamente legati alla conoscenza precedente. Questo perché un tale errore nasce nella comprensione iniziale di un argomento da parte degli studenti, poi continua ad essere ripetuto in modo che sia incorporato nella memoria a lungo termine del sistema come conoscenza.
Brousseau (1983, 1997) afferma che gli errori e i fallimenti non hanno il ruolo semplificato che vorremmo che avessero. Gli errori non sono solo l'effetto dell'ignoranza, dell'incertezza, del caso, come sostenuto dalle teorie di apprendimento empiriste o comportamentiste, ma l'effetto di una conoscenza precedente che era interessante e di successo, ma che ora si rivela falsa o semplicemente inadatta. Errori di questo tipo non sono erratici e inaspettati, ma costituiscono degli ostacoli. Tanto nel funzionamento dell'insegnante quanto in quello dello studente, l'errore è una componente del significato del sapere acquisito. Secondo le percezioni di cui sopra, "l'ostacolo" deve avere le seguenti caratteristiche:

- È una conoscenza che funziona così com'è in un insieme di situazioni e per certi valori delle variabili di queste situazioni.
- Si tratta di una conoscenza che, nello sforzo di essere adattata ad altre situazioni o ad altri valori delle variabili, causerà errori specifici che possono essere osservati e analizzati.
- È una conoscenza solida. In situazioni che sfuggono al campo della sua validità, il suo rifiuto costerà agli studenti più di un tentativo per il suo adattamento.
- Possiamo superare l'ostacolo solo in situazioni speciali di rifiuto e questo rifiuto è una componente della conoscenza.

Un ostacolo è reso evidente dagli errori, ma questi errori non sono dovuti al caso, sono riproducibili, persistenti e non necessariamente spiegabili (Brousseau, 1997).
Un problema importante nella comprensione dei numeri negativi è la regola dei segni. Glaeser (1981) nel suo articolo *Epistémologie des nombres relatives* fa una ricerca storica e mostra che anche i grandi matematici, che hanno accettato i numeri negativi e li hanno usati nei loro calcoli, hanno incontrato problemi nel comprendere il concetto dietro di essi e soprattutto la regola dei segni.
La seguente regola, che veniva usata nelle scuole britanniche, dà un'idea del problema:

> Meno per Meno uguale a Più. Quale ne sia il motivo, non c'è bisogno di discuterne.

Glaeser ha iniziato la sua ricerca dopo aver letto il libro *Life of Henry Brulard* [autobiografia di Stendhal (1783-1843)].

> «Cosa potevo immaginare quando nessuno poteva spiegarmi come mai un meno per un meno è uguale a un più (– · – = +)? Alla fine, sono giunto a quello che dico ancora oggi: la regola "– · – = +" deve essere vera, perché è ovvio che, usando questa regola ogni volta nei calcoli, si arriva a risultati "veri e indiscutibili". La mia grande sfortuna è stata la seguente figura:

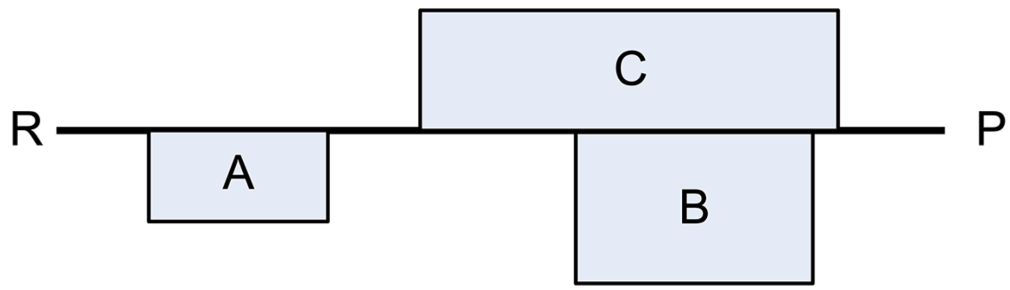

Figura 1. Quantità positive e negative.

> Sia RP la linea che separa il positivo dal negativo, tutto ciò che sta sopra è positivo, così come tutto ciò che sta sotto è negativo; prendendo il quadrato B tante volte quante sono le unità nel quadrato A, come posso riuscire a cambiare lato giungendo al quadrato C? Supponiamo che le quantità negative siano i debiti di un uomo, come, moltiplicando 10'000 franchi di debito per 500 franchi, riuscirà o può riuscire ad acquisire una fortuna di 5'000'000, cinque milioni?»

Glaeser inizia il suo studio con i testi di Diofanto di Alessandria (fine del III secolo), ai quali viene generalmente attribuito il "seme" della regola dei segni. Anche se questo autore non si riferisce chiaramente ai numeri rilevanti, all'inizio del suo libro Arithmetica I, fa un'implicazione allo sviluppo del prodotto di due differenze e scrive: «La carenza moltiplicata per la carenza produce la disponibilità; la carenza moltiplicata per la disponibilità produce la carenza».
Sulla base dello studio di un gran numero di testi matematici relativi ai numeri negativi, Glaeser propone una lista provvisoria di ostacoli riguardanti i numeri negativi:

1. Incapacità di manipolare quantità negative isolate.
2. Difficoltà nell'unificare la linea dei numeri.
   Questo si verifica, per esempio, quando si insiste sulle differenze qualitative tra quantità negative e numeri positivi o quando si descrive la linea come una giustapposizione di semirette opposte

che coinvolgono simboli eterogenei o quando si rifiuta di esaminare le caratteristiche dinamiche e statiche dei numeri allo stesso tempo.
3. L'ambiguità dei due "zeri".
4. La stagnazione allo stadio dei processi specifici (in contrasto con lo stadio dei processi standard).
5. La difficoltà di dissociarsi dal significato specifico dato ai numeri.
6. Il desiderio di un modello unificante: vogliamo applicare un buon modello additivo, ugualmente valido per spiegare il modello moltiplicativo, dove questo modello è funzionale.

(Glaeser, 1981, traduzione dell'autore)

La ricerca di Glaeser ha quindi dimostrato che abbiamo dovuto aspettare più di 1500 anni perché la "regola dei segni" fosse considerata come qualcosa di molto facile per la matematica. La seguente tabella fornisce una breve panoramica dei risultati della ricerca di Glaeser e dà luogo a un'intensa discussione tra i ricercatori per la "natura" del concetto di ostacolo epistemologico.

AUTORI	OSTACOLI 1	2	3	4	5	6
Diophantus	+					
Simon Stevin	+	–	–	–	–	–
René Descartes	+	?	–	?	+	+
Colin McLaurin	+	+	–	–	+	+
Léonard Euler	+	+	+	?	–	–
d'Alembert	+	–	–	–	–	–
Lazare Carnot	+	–	–	–		
Pierre de Laplace	+	+	–	–	+	?
Augustin Cauchy	+	+	–	–	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Tabella 1. Ostacoli legati ai numeri negativi.

Bishop et al. (2014) concludono che i matematici hanno storicamente affrontato quelli che noi descriviamo come tre ostacoli cognitivi legati ai numeri negativi: la mancanza di una rappresentazione fisica, tangibile e concreta per quantità inferiori a zero; il problema di togliere più di quanto si ha; e situazioni controintuitive alle interpretazioni di addizione e sottrazione come unire e separare.
Un altro grande ostacolo epistemologico legato alla nozione di numeri negativi è la difficoltà di comprenderli come oggetti intellettuali. Gli studenti comprendono intuitivamente i numeri naturali contrariamente ai numeri negativi. Lo studente deve necessariamente essere in grado di pensare ai numeri naturali in modo formale prima di poter iniziare con i numeri negativi (Streefland, 1996).

Anche se ci sono differenze tra i punti di vista dei ricercatori sul concetto di ostacolo epistemologico, Sierpinska sostiene che nonostante queste difficoltà e indipendentemente dalla metodologia, l'utilità dell'analisi epistemologica della matematica insegnata ai vari livelli scolastici, non sembra discutibile, né per la pratica didattica né per la scrittura di libri di testo, o come riferimento per qualsiasi tipo di ricerca in educazione matematica.
I ricercatori hanno rivelato molte altre difficoltà degli studenti legate ai numeri negativi. Per esempio, Bofferding sostiene che alcuni degli errori e malintesi che si verificano nei calcoli che coinvolgono i numeri negativi sono legati al modo in cui sono denotati. Più precisamente, dopo aver introdotto i numeri negativi il segno meno "–" ottiene tre significati e cioè: binario, simmetrico e unario (Bofferding, 2014). La funzione binaria si riferisce a qualsiasi situazione in cui il segno meno indica che l'operazione è una sottrazione (un segno di operazione). Nella funzione simmetrica il segno meno indica che il numero è l'opposto del suo numero correlato, come nell'esempio di 5 e –5. Nella funzione unaria il segno meno agisce come guida per il lettore che il numero è effettivamente negativo, come in –10 che è "*10 negativo*". Secondo una ricerca condotta da Bofferding (2010), gli studenti tendono il più delle volte a usare l'interpretazione binaria del segno meno, a volte usano l'interpretazione simmetrica e meno spesso l'interpretazione unaria.
Inoltre, le difficoltà si verificano quando si sottraggono numeri interi. Gli studenti a volte hanno dubbi quando interpretano situazioni della forma $a - (-b)$, nonostante ottengano soluzioni corrette ai problemi (Bruno & Martinón, 1999). Fanno fatica a capire che nei problemi di sottrazione di numeri negativi il risultato è un numero maggiore del minuendo, poiché è stato insegnato loro solo come eseguire la sottrazione tra numeri positivi con il sottraendo che è sempre minore del minuendo. Inoltre, l'idea di sottrarre un numero negativo che dà lo stesso risultato che sommare il contrario del numero negativo, è difficile da comprendere per molti studenti (Badarudin & Khalid, 2008). Quando gli studenti imparano che esistono i numeri interi negativi, potrebbero accettare che i numeri interi negativi sono minori di zero ma potrebbero sostenere che –5 è maggiore di –3 perché –5 è più lontano da zero di quanto lo sia –3, così come 5 è più lontano da zero di quanto lo sia 3 (Bofferding, 2014).
I numeri negativi oggi si possono trovare ogni volta che c'è una situazione con due direzioni: profitto-perdita, avanti-indietro, deposito-ritiro, est-ovest, sopra il livello del mare-sotto il livello del mare ecc. Le operazioni su questi numeri appaiono quando vogliamo combinare cambiamenti, confrontarli, trasformarli o calcolare tassi e questi modelli funzionano sufficientemente solo per l'addizione (Freudenthal, 1983). La maggior parte dei modelli usati per insegnare i numeri negativi funzionano per le operazioni di addizione e sottrazione. La moltiplicazione e la divisione possono richiedere un approccio puramente algebrico e i modelli concreti tradizionalmente usati dovrebbero essere abbandonati (Williams & Kutscher, 2008).
Secondo Ekol (2010), gli studenti non possono pensare a una corrispondenza uno-a-uno tra i numeri negativi e gli oggetti fisici, come hanno imparato a fare con i numeri naturali, e così cercano di memorizzare le regole per eseguire le operazioni tra di loro. La comprensione dei numeri negativi è, infatti, il passaggio dalla matematica concreta a quella astratta, qualcosa per cui non tutti gli studenti sono pronti nello stesso periodo, poiché richiede un'elevata capacità di pensiero astratto (Thomaidis, 2009).
Lo stesso ricercatore ha studiato, in collaborazione con Gagatsis, i numeri negativi nel contesto di uno studio storico del concetto di valore assoluto e ha rivelato una serie di ostacoli epistemologici legati alla nozione di numero naturale come risultato della misurazione (Gagatsis & Thomaidis, 1994, 1995, 1996). Infatti Gagatsis e Thomaidis hanno condotto un'analisi storica del valore assoluto basata su quattro fasi. Nella prima fase il valore assoluto appare come un concetto implicito, strettamente legato alla percezione del numero in questione come un numero comune dotato di segno. Ad esempio, Viète, nel suo testo del 1591, *In artem analyticen isagoge*, introduce una simbologia speciale per il "minus incerto": "A quadrato = B piano", "B piano = A quadrato". Nel XVII secolo i numeri negativi appaiono come estensioni dei numeri "reali" a nuovi oggetti "fantastici". Nella seconda fase il valore

assoluto svolge una funzione esplicativa nel contesto del calcolo algebrico e principalmente a livello dell'algebra delle disequazioni. Il valore assoluto viene visualizzato come "un numero senza segno" o come "una distanza dallo zero". Secondo Cartesio, «La somma di un'equazione che ha alcune soluzioni è sempre divisa per un binomio che consiste nella quantità incognita ridotta del valore di una soluzione "vera" o aumentata del valore di una soluzione "falsa"» (R. Descartes, 1637 - *La Géométrie*, citato da Gagatsis & Thomaidis, 1995, traduzione dell'autore). Egli prosegue: «[...] aumentando le soluzioni di una quantità maggiore di qualsiasi radice falsa, tutte le soluzioni diventeranno vere» (R. Descartes, 1637 - *La Géométrie*, citato da Gagatsis & Thomaidis, 1995, traduzione dell'autore). Prendiamo, per esempio, l'equazione: $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ che secondo la terminologia di Cartesio ha la radice 1 "vera" (soluzione positiva) e le radici 2 e 3 "false" (soluzioni negative). Cartesio propone una trasformazione: aumentiamo le radici con una quantità maggiore di una radice falsa, per esempio sostituendo $y = x + 4$, trasformando così l'equazione originale in un'equazione con le soluzioni "vere" 5, 2 e 1 (Gagatsis & Thomaidis, 1995). Nella terza fase, si osserva una stretta connessione con il fondamentale cambiamento concettuale relativo al concetto di numero, cioè il progressivo passaggio dalla comprensione empirica del numero come mezzo di misurazione delle quantità, al concetto astratto di numero come elemento di un sistema matematico caratterizzato dalle proprietà dei suoi elementi e dall'assenza di contraddizione. Per esempio, per Leibniz $a - b$ significa la differenza tra a e b quando a è maggiore di b, $b - a$ quando b è maggiore e questo valore assoluto (moli) può essere chiamato $| a - b |$ (C. W. Leibniz, *Monitum De Characterisebus Algebraicis*, traduzione dell'autore). Infine la quarta fase corrisponde al formalismo reso necessario dall'evoluzione dell'analisi complessa. Uno studio più recente di Gagatsis e Panaoura (2014) si è basato sull'analisi storica di Gagatsis e Thomaidis (1994, 1995, 1996) e si è concentrato sulle somiglianze delle interpretazioni personali degli studenti del valore assoluto con i diversi tipi di concezioni emerse nell'evoluzione storica della nozione. La loro analisi si basava anche sui concetti e metodi della didattica della matematica come la trasposizione didattica, il contratto didattico e l'ostacolo epistemologico presentati nei par. 2.1 e 2.2. Infatti hanno esaminato le prestazioni degli studenti in problemi sul valore assoluto e le sue relazioni con gli ostacoli didattici o gli ostacoli epistemologici e le connessioni tra le concezioni degli studenti sul valore assoluto (definizioni di valore assoluto) e le loro prestazioni nella risoluzione di equazioni e disequazioni che incorporano la nozione. Questo studio particolare ha esaminato studenti del secondo anno della scuola secondaria superiore (grado 11) ed è stato condotto a Cipro.[2]

Infine, Elia et al. (2016) cercano di cogliere la complessità matematica e cognitiva quando gli studenti affrontano il concetto di valore assoluto sulla base del Mathematical Working Space (MWS) (Kuzniak & Richard, 2014). Il MWS comprende una rete di due livelli, uno cognitivo e uno epistemologico, e questa rete si basa su tre genesi, ovvero semiotica (tra rappresentazioni e visualizzazione di oggetti matematici), quella strumentale (tra artefatti e costruzione matematica), e quella discorsiva (tra il sistema di riferimento teorico e l'accesso al ragionamento, all'argomentazione e alla validazione matematica). Quest'ultimo studio estende lo studio di Gagatsis e Panaoura (2014), in primo luogo, identificando e analizzando a fondo gli errori degli studenti nella risoluzione di equazioni e disequazioni tipiche e non tipiche che incorporano il valore assoluto, esplorando il legame tra questi errori e le concezioni (definizioni) di valore assoluto degli studenti e discernendo più precisamente gli ostacoli epistemologici o didattici che intervengono nel lavoro matematico degli studenti. In secondo luogo, questa analisi si svolge nel quadro del MWS, concentrandosi sulla genesi discorsiva e le sue relazioni con la genesi semiotica nel lavoro matematico degli studenti. Questo quadro teorico è completato da altri approcci teorici basati su una prospettiva storica sul concetto di valore assoluto (Gagatsis & Thomaidis, 1994, 1995, 1996) e sulle idee di ostacoli epistemologici e didattici nel lavoro matematico. Una prospettiva storica sul valore assoluto può dare un'idea della natura epistemologica e del conte-

2. Il sistema educativo di Cipro è suddiviso in educazione primaria (gradi 1-6, dai 6 ai 12 anni), educazione secondaria inferiore (gradi 7-9, dai 12 ai 15 anni), educazione secondaria superiore (gradi 10-12, dai 15 ai 18 anni) e educazione universitaria.

nuto del sistema di riferimento matematico relativo al concetto di valore assoluto nel MWS personale degli studenti (spazio di lavoro in cui ogni studente si occupa di oggetti matematici). Un'analisi degli ostacoli che gli studenti incontrano nel loro lavoro matematico sul valore assoluto può rivelare le fonti degli errori e dei ritardi degli studenti nella genesi del significato matematico del concetto e del ragionamento discorsivo. Gli autori citati (Elia et al., 2016) sono interessati agli ostacoli sia di natura epistemologica, che possono avere punti in comune con le concezioni nell'evoluzione storica del concetto, sia di carattere didattico, relativi al processo di trasposizione didattica del valore assoluto e al fenomeno del contratto didattico nell'insegnamento. Una particolarità importante di questa ricerca è che gli errori degli studenti negli esercizi che coinvolgono il concetto di valore assoluto si osservano in diversi sistemi educativi, indipendentemente dalla lingua e dalla cultura degli studenti (Elia et al., 2016). Infatti, è stata condotta un'indagine in Turchia a seguito di un'indagine simile a Cipro in cui le prestazioni degli studenti della scuola secondaria sono state valutate utilizzando un test. I risultati hanno mostrato una discrepanza nella concezione prevalente di valore assoluto dei due Paesi, indicando le differenze tra i due paesi nei rispettivi MWS. Per la Turchia, la concezione del valore assoluto come distanza dallo zero, che era la definizione più utilizzata, ha dato un supporto positivo alla soluzione dei problemi che coinvolgono il ragionamento discorsivo. Questo non è stato il caso di Cipro, in cui la concezione più diffusa del valore assoluto era "numero senza segno". L'analisi degli errori degli studenti turchi ha rivelato una distinzione tra gli errori nella genesi discorsiva degli studenti e la genesi semiotica, che erano una conseguenza degli ostacoli didattici o epistemologici che intervenivano nel MWS personale degli studenti. Crediamo fortemente che il modello MWS dovrebbe essere applicato all'insegnamento dei numeri negativi, così come al modo in cui le percezioni degli studenti dei numeri negativi contribuiscono alla formazione della genesi semiotica, strumentale e discorsiva.

2.3 Il ruolo delle rappresentazioni e dei modelli geometrici in matematica e nell'insegnamento della matematica: il caso della linea dei numeri

Una caratteristica dell'intelligenza umana è l'uso di diversi tipi di rappresentazioni. Questa caratteristica differenzia l'intelligenza umana dall'intelligenza degli animali, così come dall'intelligenza artificiale. L'elemento che differenzia l'intelligenza umana da quella degli animali non è solo l'uso di un linguaggio, ma anche l'uso di una varietà di sistemi di rappresentazioni: linguaggio verbale, linguaggio scritto (disegni, dipinti, diagrammi ecc.) (Duval, 2002). Perché una varietà di rappresentazioni semiotiche? Il costo dell'elaborazione, le limitate capacità di rappresentazione e la necessità di almeno due rappresentazioni per la comprensione di un concetto matematico, sono alcune delle ragioni. Quindi, i sistemi di rappresentazione sono fondamentali per l'apprendimento concettuale e determinano in misura significativa ciò che viene appreso. Riconoscere lo stesso concetto in più sistemi di rappresentazione, la capacità di manipolare il concetto all'interno di queste rappresentazioni così come la capacità di convertire in modo flessibile il concetto da un sistema di rappresentazione all'altro sono necessari per l'acquisizione del concetto (Elia et al., 2008; Goldin, 2001; Lesh et al., 1987) e permettono agli studenti di vedere relazioni arricchenti. Così, i diversi tipi di rappresentazioni esterne nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica sembrano essere stati ampiamente riconosciuti dalla comunità dell'educazione matematica (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Dato che una rappresentazione non può descrivere completamente un costrutto matematico e che ogni rappresentazione ha vantaggi diversi, l'uso di rappresentazioni multiple per la stessa situazione matematica è al centro della comprensione matematica (Duval, 2002, 2006).
La necessità di utilizzare una varietà di rappresentazioni o modelli nel sostenere e valutare le costruzioni di frazioni degli studenti è sottolineata da diversi studi (Deliyianni & Gagatsis, 2013; Deliyianni et al., 2016; Gagatsis et al., 2011; Gagatsis et al., 2016).
Inoltre, il concetto di funzione è di fondamentale importanza nell'apprendimento della matematica ed è stato al centro dell'attenzione della comunità di ricerca sull'educazione matematica negli ultimi decenni. Un vasto numero di studi ha sottolineato l'importanza delle diverse rappresentazioni e la traduzione tra esse nella comprensione del concetto di funzione (Elia et al., 2007; Elia et al., 2008;

Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Panaoura et al., 2017).

D'altra parte, l'importanza dell'uso dei modelli geometrici nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica è molto alta. Patronis dà un importante contributo sulla natura e l'uso dei modelli geometrici nell'insegnamento della matematica. Utilizza una vasta bibliografia scientifica sui modelli matematici e in particolare alcuni lavori di Thom. Secondo lui, la matematizzazione (o, per alcuni, il processo di "costruzione di modelli") può essere vista come costituita da due attività umane di uguale importanza, nessuna delle quali potrebbe essere ignorata senza conseguenze infelici. La prima attività, che di solito è più sottolineata quando si parla di modelli matematici nella pratica scientifica, è la previsione. La seconda è la spiegazione. La previsione non è una spiegazione, come sottolinea Thom (1982, 1991).

Ciascuna delle due attività umane sopra citate mira a un diverso scopo della ricerca scientifica: la previsione mira a un'azione di successo, mentre la spiegazione mira a una (migliore) comprensione. Seguendo Thom, possiamo considerare questi due scopi come complementari l'uno all'altro: per agire con successo, bisogna prima capire e, viceversa, per ottenere una migliore comprensione di alcuni fenomeni – o, per ottenere una comprensione "globale" – bisogna prima fare una sorta di azione e rappresentazione "locale", in modo che un'immagine "globale" risulti dalla raccolta di quelle "locali". Tuttavia, concentrandosi su uno scopo, la mente umana tende a dimenticare l'altro, e questa complementarità è solitamente concepita come un'opposizione (Gagatsis & Patronis, 2001).

Nel procedere dall'azione "locale" alla comprensione "globale", la geometrizzazione, l'atto di costruire "modelli geometrici", si trova in una posizione intermedia. Da un lato, la rappresentazione geometrica di un sistema fornisce un'immagine "globale" (o "olistica") di esso, aiutandoci così a cogliere subito il suo significato e le sue funzioni. Questa comprensione "immediata" può essere contrapposta al processo "lineare" della lettura di un testo. D'altra parte, un "modello geometrico" nel senso di Thom collega le singolarità (locali) del sistema con la sua struttura (globale) e spiega la struttura in termini di singolarità (Thom, 1982, 1991).

Il concetto di modello geometrico non sembra essere stato esplorato sistematicamente da filosofi ed epistemologi (con la possibile eccezione di Bachelard, 1986).

In uno studio precedente, Gagatsis e Patronis (1990) hanno esaminato il ruolo dei modelli geometrici nell'educazione matematica, in relazione allo sviluppo di un processo di pensiero riflessivo, che può essere osservato nell'attività degli studenti, degli insegnanti e dei matematici nelle loro ricerche. La conclusione principale di quello studio era che i bambini piccoli sviluppano serie di forme geometriche simili o continuamente deformate di triangoli, rettangoli e quadrati, che possono essere approssimativamente identificati a percorsi continui in uno spazio di politopi. Tali serie di forme sono state utilizzate per insegnare e spiegare l'idea delle trasformazioni in geometria, così come per rappresentare geometricamente le relazioni algebriche $x + y = s$, $x \cdot y = p$.

Emma Castelnuovo giustificava in un certo senso queste pratiche di insegnamento, poiché i modelli geometrici esplicativi utilizzati dagli insegnanti apparivano implicitamente nella percezione e nell'azione del pensiero dei bambini. Ciò che infatti significa questa conclusione quasi-empirica, alla luce delle precedenti osservazioni teoriche, è che, almeno alcuni degli "universi" geometrici, che sono stati utilizzati da scienziati e insegnanti in modelli di vari "sistemi", potrebbero anche essere considerati come modelli dell'attività umana o culturale nel suo primo aspetto informale (Gagatsis & Patronis, 1990).

Gli autori di cui sopra suggeriscono una definizione del modello geometrico:

> «Diremo che una collezione S di punti, linee o altre figure nello spazio euclideo n-dimensionale, che rappresenta un sistema Σ di oggetti o una situazione o un processo, è un modello geometrico (teorico) di Σ, se le proprietà geometriche intrinseche degli elementi di S sono tutte rilevanti in questa rappresentazione, cioè corrispondono a proprietà del sistema Σ. Se questa condizione è soddisfatta solo per le proprietà topologiche delle linee o figure in S, allora parleremo di un modello geometrico in senso ampio (o topologico)».
>
> (Gagatsis & Patronis, 1990, traduzione dell'autore)

Secondo Fischbein, un modello deve avere un carattere generatore, cioè deve generare (produrre) e rappresentare un numero illimitato di proprietà, partendo da un numero limitato di elementi e di regole per combinarle. Inoltre, un modello deve avere un carattere euristico, cioè condurci facilmente, e indipendentemente dal sistema iniziale che rappresenta, a nuove informazioni su quel sistema (Fischbein, 1972).

2.3.1 Qual è la differenza tra una rappresentazione e un modello geometrico?

È importante distinguere tra i termini "rappresentazione" e "modello": un modello è un modo di rappresentazione (come il linguaggio), ma una rappresentazione non è un modello, a meno che non abbia un carattere generatore ed euristico. La rappresentazione può contenere più elementi o omettere alcuni elementi dell'insieme da rappresentare. Mentre nel modello geometrico tutti i suoi elementi danno qualche informazione sull'insieme da rappresentare: ha carattere generatore ed euristico.
Sulla base di quanto detto pocanzi e delle opinioni di Patronis diamo la seguente definizione per il modello geometrico della linea dei numeri:
Sia Σ l'anello dei numeri interi o il campo dei numeri razionali – o un campo che contiene il campo dei numeri razionali – con le seguenti operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.
Sia S una linea numerata, cioè una linea con un insieme distinto di punti, che corrispondono a numeri interi o razionali. S è un modello geometrico per Σ.
Esiste un isomorfismo tra Σ e S, in modo che le operazioni tra i numeri, appartenenti a Σ, corrispondano alle operazioni tra segmenti di linea orientati o alle operazioni tra numeri e segmenti di linea.
Esempio: il prodotto di un numero e un segmento di linea orientato.

2.4 Una ricerca sull'uso della linea dei numeri nelle operazioni elementari sui numeri interi da parte degli studenti della scuola primaria

Molti testi di metodi matematici elementari raccomandano l'uso di diagrammi di linee di numeri per insegnare l'addizione e la sottrazione di numeri interi. Chi si occupa di stendere il piano degli studi per la scuola elementare include tra gli obiettivi la capacità di eseguire semplici calcoli di addizione e sottrazione di numeri interi con l'aiuto di un diagramma della linea dei numeri. Alcuni pedagoghi della matematica mettono in relazione la capacità di usare un diagramma della linea dei numeri con la comprensione delle operazioni elementari sui numeri interi. Al contrario, altri rifiutano questa idea: per esempio, Hart (1981, citato da Gagatsis et al., 2003) sostiene che il modello della linea dei numeri dovrebbe essere abbandonato. Liebeck (1984, citato da Gagatsis et al., 2003) sostiene che la linea dei numeri non è un aiuto visivo utile per aiutare i bambini più piccoli ad aggiungere e sottrarre numeri interi. D'altra parte, Ernest (1985, citato da Gagatsis et al., 2003) osserva che ci può essere una discrepanza tra la comprensione degli studenti dell'addizione di numeri interi e la loro comprensione della linea dei numeri usata per questa operazione (Gagatsis et al., 2003).
Gagatsis et al. (2003), motivati dalle critiche sull'uso della linea dei numeri per eseguire semplici calcoli di addizione e sottrazione tra numeri interi, hanno condotto un'indagine quantitativa con degli studenti della scuola elementare. Hanno dato agli studenti quattro questionari sui numeri interi. Il questionario A includeva calcoli di addizione e sottrazione di numeri interi in forma simbolica. Il questionario B includeva calcoli simili o identici con addizione e sottrazione di numeri interi in forma simbolica, ma permetteva anche agli studenti di usare la linea dei numeri. Il questionario C includeva calcoli simili o identici con addizione e sottrazione di numeri interi in forma simbolica, ma gli studenti erano obbligati a usare la linea dei numeri e a mostrare il risultato e il processo su di essa. Infine, il questionario D conteneva diagrammi di una linea dei numeri su cui le operazioni tra numeri interi erano rappresentate con archi e gli studenti dovevano trovare le relazioni numeriche delle operazioni così come i loro risultati. Nei seguenti diagrammi osserviamo i risultati.

2.4.1 Risultati dei questionari A e B

Osserviamo che in tutti i casi il punteggio nelle domande del questionario B è migliore del punteggio nelle domande del questionario A (eccezione A1-B1).

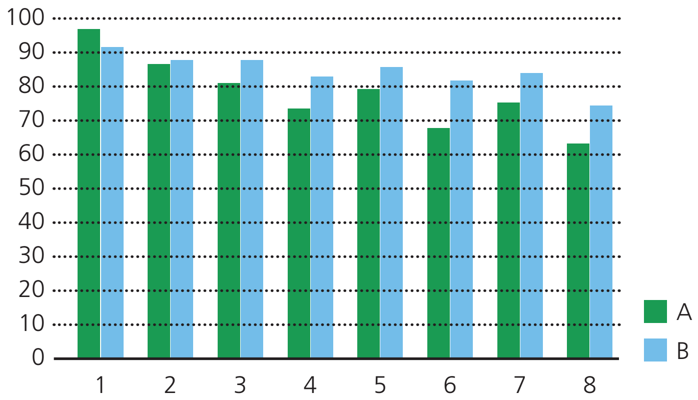

Figura 2. Confronto tra i punteggi dei questionari A e B.

2.4.2 Risultati dei questionari C e D

Non c'è una differenza significativa tra i punteggi nelle domande dei questionari C e D.

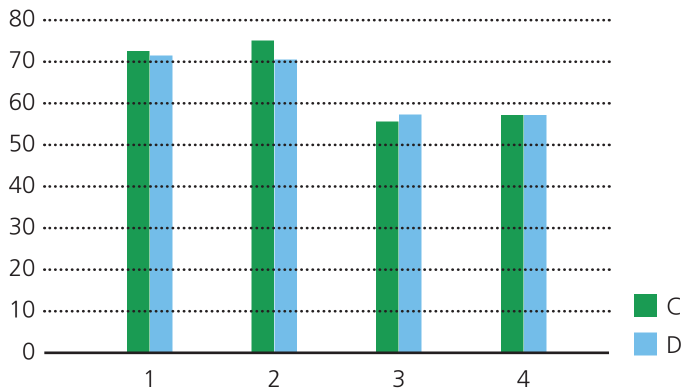

Figura 3. Confronto tra i punteggi dei questionari C e D.

2.4.3 Applicazione dell'analisi statistica implicativa di Gras

Gras ha sviluppato un metodo statistico molto utile ed efficace per i problemi di insegnamento-apprendimento e non solo, che attraverso il software CHIC fornisce diagrammi implicativi, cioè relazioni gerarchiche tra le variabili (Gras, 1979; Gras & Couturier, 2013). Quando una freccia collega due variabili, significa che il successo degli studenti in una delle variabili (problemi, domande ecc.) implica il successo nell'altra. L'importanza di tali implicazioni è notevole non solo per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, ma anche per altre materie. Inoltre, l'uso di questo metodo è diffuso in varie altre scienze come la psicologia, le scienze sociali, la medicina ecc.

Abbiamo applicato questo metodo alle risposte degli studenti ai questionari A, B, C, D, e come possiamo vedere nel diagramma sottostante, ci sono implicazioni solo tra i compiti del questionario C e del questionario D. Questo significa che gli studenti che hanno risolto correttamente gli esercizi dei questionari C e D non raggiungeranno risposte corrette in alcuni degli esercizi dei questionari A e B. In effetti, osserviamo il fenomeno della compartimentazione e la ragione di ciò è l'esistenza della linea dei numeri su cui gli studenti devono lavorare in C e D. Cioè, i giovani studenti usano la linea dei numeri come una semplice rappresentazione e non come un modello geometrico. Questo fenomeno di compartimentazione è stato osservato anche in altre ricerche (Elia et al., 2005; Gagatsis et al., 2011; Shiakalli & Gagatsis, 2005a, 2005b).

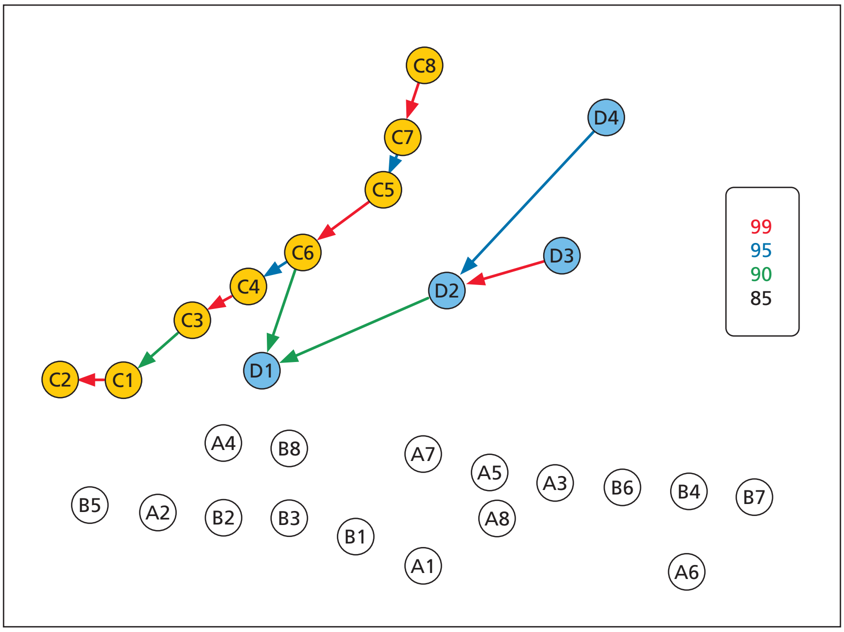

Figura 4. Diagramma statistico implicativo dei questionari A, B, C e D.

Infine, dobbiamo menzionare che la stessa ricerca è stata ripetuta in Grecia e in Italia e lo stesso fenomeno di compartimentazione è stato osservato nonostante le differenze tra i sistemi educativi, la lingua e la cultura dei tre Paesi (Gagatsis et al., 2004). Sulla base dei risultati della ricerca di cui sopra possiamo capire le opinioni di alcuni ricercatori secondo cui la linea dei numeri non è un aiuto visivo utile per aiutare i bambini più piccoli ad aggiungere e sottrarre numeri interi. La linea dei numeri è un modello geometrico che aiuta gli studenti a sviluppare una varietà di abilità che possono essere applicate non solo alle operazioni tra numeri interi ma anche ad altri concetti.

3 Un confronto tra due modelli per l'insegnamento dei numeri negativi: una ricerca-azione

3.1 Alcuni elementi della metodologia della ricerca-azione

La ricerca-azione è il processo di studio di un problema o di una situazione scolastica reale. In altre parole, la ricerca-azione è un metodo di indagine sistematica che gli insegnanti intraprendono come ricercatori della loro stessa pratica (Efron & Ravid, 2020; Mertler, 2009). Lo sviluppo professionale degli insegnanti può essere facilitato dalla ricerca-azione. Infatti, la ricerca-azione può essere utilizzata come un sostituto delle tradizionali formazioni continue per migliorare la crescita e lo sviluppo professionale degli insegnanti. Inoltre, l'obiettivo della ricerca-azione è quello di migliorare la propria pratica di insegnamento o di migliorare il funzionamento di una scuola. Johnson propone alcuni passi essenziali della ricerca-azione (Johnson, 2012). Il primo passo è la definizione di una domanda o di una area di studio; nel nostro caso è l'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi. Il secondo passo è la decisione dell'insegnante sul metodo di raccolta dei dati. Infatti, possono essere utilizzati diversi metodi: l'osservazione di individui o gruppi; l'uso di registrazioni audio e video; l'uso di interviste strutturate o semi-strutturate; la distribuzione di sondaggi o questionari ecc. Il terzo passo è la raccolta e l'analisi dei dati: esistono diversi metodi di analisi dei dati qualitativi o quantitativi. Il quarto passo è la descrizione dei diversi modi di utilizzo e applicazione dei risultati (Johnson, 2012). Una revisione della letteratura pertinente relativa all'argomento o alla domanda di ricerca potrebbe anche essere inclusa nella ricerca-azione.

Nel nostro caso, l'uso di modelli è stato un punto centrale per l'insegnamento dei numeri negativi ed è stato studiato da vari ricercatori. La rassegna della letteratura relativa è stata presentata nella prima parte dell'articolo. Secondo alcuni studi (Battista, 1983; Liebeck, 1990; Stephan & Akyuz, 2012), esistono due modelli per l'insegnamento dei numeri interi, ovvero quello con contatori o cariche di due tipi e quello con le linee di numeri. Per quanto riguarda la metodologia, nella nostra ricerca-azione abbiamo utilizzato due questionari che corrispondono ai due modelli di cui sopra per l'insegnamento dei numeri negativi. Abbiamo applicato la statistica descrittiva per analizzare i nostri dati.

3.2 Il modello delle cariche positive e negative per insegnare i numeri negativi

Nel primo modello usiamo una rappresentazione specifica per i due tipi di cariche, ognuna delle quali corrisponde a un'unità positiva o negativa. Una carica positiva è rappresentata dal simbolo "+" in un cerchio. Allo stesso modo, una carica negativa è rappresentata dal simbolo "–" in un cerchio. Le operazioni tra i numeri sono associate alla manipolazione delle cariche e al calcolo della carica totale. Sia l'addizione che la sottrazione si basano sull'uso dell'elemento neutro. L'elemento neutro di un'operazione è un elemento che, se combinato con un altro numero usando quell'operazione, lascia il numero invariato. Per l'addizione e la sottrazione questo è il numero zero. Gli studenti devono capire che due cariche di tipo diverso corrispondono al numero zero, che si traduce nel calcolo (+1) + (–1) = 0. Questo può essere esteso come segue: aggiungere qualsiasi numero di cariche che possono essere messe in coppie di tipo opposto non cambia la carica totale che avevamo inizialmente, quindi $v + 0 = v$. Dunque, possiamo disegnare o cancellare qualsiasi numero di tali coppie per facilitare i calcoli.

Quando sommiamo disegniamo le cariche che rappresentano i due numeri da aggiungere, usando i simboli appropriati a seconda che siano positive o negative. Poi troviamo tutte le possibili coppie di cariche opposte e le cancelliamo (dato che il loro valore è zero) e infine contiamo le cariche rimanenti (che devono essere dello stesso tipo). Per esempio, per eseguire l'addizione 4 + 3 disegniamo quattro cariche positive e poi altre tre cariche positive. Pertanto, in totale abbiamo sette cariche positive e la somma deve essere sette. Per l'addizione di due numeri negativi si lavora in modo simile. Per sommare due numeri con segni diversi usiamo la proprietà dello zero come elemento di identità. Per esempio, per eseguire il calcolo (–4) + (+3) disegniamo prima quattro cariche negative e poi tre cariche positive. Osserviamo che abbiamo tre coppie di cariche opposte, di cui non teniamo conto. Così, ci ritroviamo con una sola carica negativa (Tabella 2).

Operazione	Rappresentazione simbolica	Risposta
(–4) + (+3)	⊖⊖⊖⊖ ⊕⊕⊕	(–4) + (+3) = –1

Tabella 2. Somma (–4) + (+3).

L'operazione di sottrazione funziona come segue: si disegnano le cariche corrispondenti al numero da sottrarre e poi si cancellano le cariche che corrispondono al numero da sottrarre. Nei casi in cui non ci sono abbastanza cariche da depennare, si disegnano cariche addizionali. Per ogni carica aggiuntiva disegniamo anche un'altra carica del tipo opposto, in modo che la carica iniziale rimanga la stessa. Infine, contiamo le cariche rimanenti. Per esempio, per eseguire la sottrazione (–4) – (+3), iniziamo disegnando quattro cariche negative. Poi dobbiamo cancellare tre cariche positive, che non esistono. Per trovare la differenza disegniamo tre cariche positive e tre negative. Dopo di che cancelliamo le tre cariche positive e così alla fine ci ritroviamo con sette cariche negative (**Tabella 3**).

Operazione	Rappresentazione simbolica	Risposta
(–4) – (+3)	$\ominus\ominus\ominus\ominus\ominus\ominus\ominus$ $\cancel{\oplus}\cancel{\oplus}\cancel{\oplus}$	(–4) – (+3) = –7

Tabella 3. Differenza (–4) – (+3).

Per capire la moltiplicazione, gli studenti devono solo capire che questa operazione è equivalente all'addizione ripetuta. Per esempio, per fare la moltiplicazione 3 · (–2) dobbiamo disegnare tre volte due cariche negative, quindi in totale abbiamo sei cariche negative. Il caso più difficile con la moltiplicazione è quello in cui abbiamo due fattori negativi. Dobbiamo disegnare coppie di cariche opposte (abbastanza per cancellare le cariche negative) e poi cancellare tante cariche negative quanto il valore del modulo del secondo fattore per tante volte quanto il modulo del primo fattore. In altre parole, cancelliamo tante cariche negative quanto il prodotto dei moduli dei due fattori. Infine, contiamo le cariche rimanenti (non teniamo conto di eventuali coppie di cariche opposte). Di conseguenza, il prodotto di due numeri negativi è sempre positivo. Per esempio, per eseguire il calcolo (–3) · (–2) si disegnano coppie di cariche opposte e poi si cancellano due cariche negative, ripetendo tre volte. Perciò, cancelliamo sei cariche negative in totale e rimangono sei cariche positive (ed eventualmente alcune coppie di cariche opposte), il che implica che il prodotto è sei.
Quando si divide si cerca di ottenere tante cariche quante sono quelle del dividendo, disegnando o cancellando ripetutamente le cariche. Nei casi in cui il divisore è un numero positivo, si disegnano gruppi di cariche con cardinalità uguale al divisore. In questi casi, il segno del risultato dipende dal segno del divisore. Se abbiamo per esempio la divisione (+6) : (+2), disegniamo coppie di cariche positive fino ad ottenere sei cariche. Dobbiamo disegnare tre di queste coppie e quindi il quoziente è +3. Se ora abbiamo la divisione (–6) : (+2), disegniamo coppie di cariche negative fino ad ottenerne sei. Dobbiamo ripetere questo processo tre volte e quindi il quoziente è –3. Nei casi in cui il divisore è negativo il processo cambia. In pratica cerchiamo di creare e cancellare tanti gruppi di cariche equivalenti a quanto è il divisore, in modo da finire con tante cariche quanto è il valore del dividendo. Se abbiamo la divisione, (+6) : (–2), cancelliamo due gruppi equivalenti di cariche in modo da avere 6 cariche positive. Dunque, inizialmente disegniamo sei coppie di cariche opposte e cancelliamo due triple di cariche negative. Quindi il quoziente è –3, poiché cancelliamo le triple di cariche negative. Allo stesso modo, eseguiamo la divisione (–6) : (–2). Disegniamo sei coppie di cariche opposte e cancelliamo due triple di cariche positive. Pertanto, il quoziente è +3, poiché cancelliamo le triple di cariche positive.

3.3 L'applicazione della linea dei numeri per l'insegnamento delle operazioni tra numeri negativi

Sulla base dell'esame da un lato della ricerca sugli ostacoli dei matematici e degli studenti relativi ai numeri negativi e dall'altro lato sui vantaggi dell'uso di modelli geometrici nell'insegnamento della matematica, proponiamo il modello della linea dei numeri per l'insegnamento dei numeri negativi.
Questa è una linea che contiene tutti i numeri reali ed è composta da tre parti fondamentali. Al centro, abbiamo l'origine solitamente segnata con il numero zero, i numeri positivi sono segnati a destra dell'origine mentre i numeri negativi sono segnati a sinistra dell'origine. Le frecce sono messe alle estremità della linea orizzontale per mostrare che la linea continua all'infinito. I vettori sono usati per la rappresentazione dei numeri. Per i numeri positivi si usano vettori diretti a destra, mentre per i numeri negativi si usano vettori diretti a sinistra. La lunghezza di un vettore corrisponde al valore assoluto del numero che rappresenta. Per esempio, il numero 4 è rappresentato da un vettore di lunghezza quattro diretto a destra, mentre il numero –4 è rappresentato da un vettore di lunghezza quattro diretto a sinistra.
In questo modello l'addizione si esegue come segue: partendo da zero si disegna un vettore corrispondente al primo numero. Poi, partendo dal punto finale di questo vettore si disegna un altro vettore corrispondente al secondo numero. La somma dei due numeri è rappresentata da un vettore che parte dall'inizio del primo vettore (cioè zero) e si estende fino alla fine del secondo vettore. Per esempio, se dobbiamo fare il calcolo (+2) + (+3), disegniamo prima un vettore che si estende da zero a 2 e poi partendo da 2 disegniamo un vettore di lunghezza tre, diretto a destra che quindi si estende fino a 5. La somma dei due numeri è rappresentata da un vettore che parte da zero e si estende fino a 5 e rappresenta quindi il numero 5 (**Figura 5**). In modo simile, possiamo sommare due numeri negativi, con la differenza che questa volta i vettori sono entrambi diretti a sinistra. Se dobbiamo sommare due numeri di segno opposto, per esempio con il calcolo (+2) + (–3), lavoriamo come segue: disegniamo prima un vettore da zero a 2 e poi partendo da 2 disegniamo un vettore di lunghezza tre con direzione verso sinistra che quindi termina a –1. La somma dei due numeri è rappresentata da un vettore che parte da zero e si estende fino a –1 e rappresenta il numero –1 (**Figura 6**).

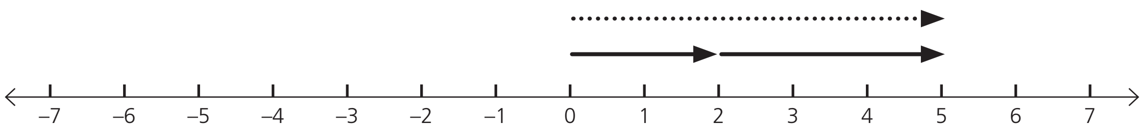

Figura 5. Somma (+2) + (+3).

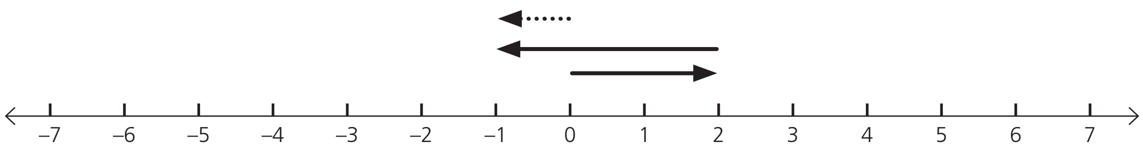

Figura 6. Somma (+2) + (–3).

La sottrazione si esegue in modo simile, come mostrato con le seguenti due differenze: il secondo vettore viene posto in modo che il suo punto finale sia uguale a quello del primo vettore e la differenza dei due numeri viene rappresentata da un vettore che inizia dal punto iniziale del primo vettore e finisce nel punto iniziale del secondo vettore.
Per esempio, se abbiamo il calcolo (+7) – (+3) lavoriamo come segue: disegniamo un vettore che inizia da zero e termina a 7. Poi, disegniamo un altro vettore che termina anch'esso a 7, di lunghezza 3 e diretto verso destra, il quale, quindi, deve avere il suo punto di partenza a 4. La differenza tra i due numeri dati è rappresentata da un vettore che inizia da zero e si estende fino a 4, quindi è il numero

positivo 4 (**Figura 7**). Nel caso di due numeri con segno opposto, come per esempio nella sottrazione (–7) – (+3) si fa così: si disegna un vettore che parte da zero e si estende fino a –7. Dopo di che disegniamo un altro vettore che termina anch'esso a –7 e ha una lunghezza di tre. Il secondo vettore è diretto a destra, quindi deve partire da –10. La differenza dei due numeri corrisponde a un vettore che parte da 0 e si estende fino a –10, quindi è il numero negativo –10 (**Figura 8**). Infine, se dobbiamo sottrarre un numero negativo come, per esempio, nel calcolo (+7) – (–3) lavoriamo nello stesso modo: disegniamo un vettore che parte da zero e si estende fino a 7. Poi disegniamo un altro vettore che termina a 7 e ha una lunghezza di 3. Il secondo vettore è diretto a sinistra e quindi deve partire da 10. La differenza tra i due numeri corrisponde a un vettore che parte da zero e si estende fino a 10, quindi rappresenta il numero positivo 10 (**Figura 9**).

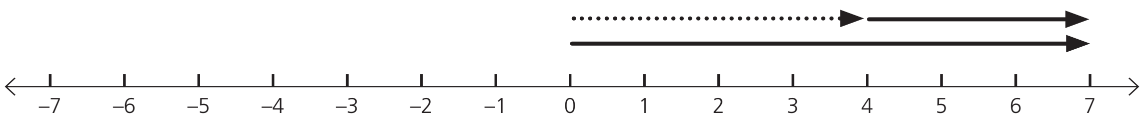

Figura 7. Differenza (+7) – (+3).

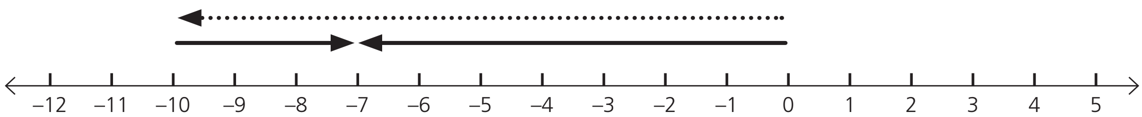

Figura 8. Differenza (–7) – (+3).

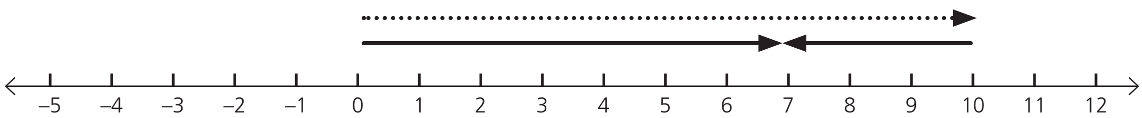

Figura 9. Differenza (+7) – (–3).

La moltiplicazione tra numeri positivi si ottiene per addizione ripetuta. La moltiplicazione di un numero positivo per un numero negativo si esegue allo stesso modo. Per esempio, per la moltiplicazione (+2) · (–3) seguiamo i seguenti passi: disegniamo un vettore con punto iniziale a zero e punto finale a –3 e poi un altro vettore con punto iniziale a –3, di lunghezza 3 che deve estendersi fino a –6 e quindi il prodotto è –6 (**Figura 10**). Nel caso in cui il primo fattore sia un numero negativo, l'operazione di moltiplicazione implica una sottrazione ripetuta da zero, cioè il secondo fattore viene sottratto da zero tante volte quanto indicato dal modulo del primo fattore. Se, per esempio, abbiamo la moltiplicazione (–2) · (–3) facciamo così: disegniamo due vettori consecutivi di lunghezza 3 e diretti a sinistra (che rappresentano il numero –3). Di conseguenza, questi vettori devono iniziare a 6. Così, il prodotto dei due numeri è rappresentato da un vettore che ha il suo punto iniziale a zero e il suo punto finale (al punto iniziale dei due vettori) a 6 (**Figura 11**). Quindi, il prodotto di –2 e –3 è 6.

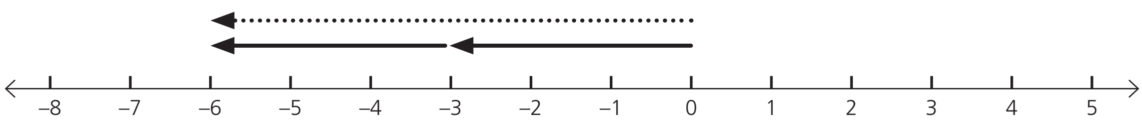

Figura 10. Prodotto (+2) · (–3).

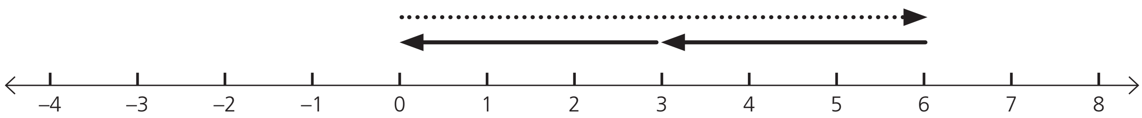

Figura 11. Prodotto (–2) · (–3).

La divisione si ottiene o per addizione ripetuta o per sottrazione ripetuta del divisore da zero tante volte quanto necessario per ottenere il dividendo. Per eseguire la divisione (+10) : (+2) disegniamo un vettore da zero a 2, poi un vettore da 2 a 4 e ripetiamo questo processo altre tre volte fino a raggiungere 10. Poiché dobbiamo disegnare 5 vettori consecutivi di lunghezza 2 per raggiungere 10, il quoziente di questa divisione è 5 (**Figura 12**). Per la divisione (–10) : (+2) sottraiamo ripetutamente da zero: disegniamo un vettore che termina a zero e parte da –2 (poiché ha una lunghezza di due ed è diretto a destra), poi un altro vettore che termina a –2 e parte da –4 e ripetiamo questo processo altre tre volte fino a raggiungere –10. Poiché dobbiamo sottrarre da zero cinque vettori di lunghezza 2 per raggiungere –10, il quoziente di questa divisione è –5 (**Figura 13**).

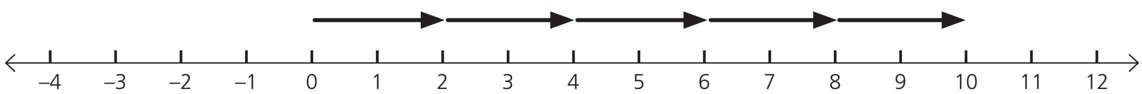

Figura 12. Quoziente (+10) : (+2).

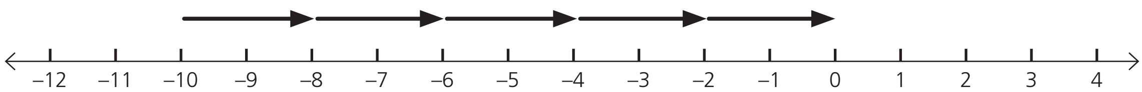

Figura 13. Quoziente (–10) : (+2).

3.4 Risultati del confronto dell'applicazione dei due modelli

Lo scopo di questo studio è confrontare il modello delle cariche positive e negative e il modello della linea dei numeri, in termini di efficacia nell'insegnamento delle operazioni di addizione e sottrazione di numeri interi. La ricerca ha coinvolto 18 studenti tra i 12 e i 13 anni, che sono stati divisi in due gruppi omogenei. Al primo gruppo sono state date istruzioni su come applicare il modello delle cariche positive e negative insieme ad alcuni esempi. Al secondo gruppo sono state date istruzioni ed esempi sul modello della linea dei numeri. Ad ogni gruppo è stato dato un diverso foglio di esercizi. Nei due fogli di esercizi ai gruppi è stato chiesto di eseguire le stesse operazioni utilizzando il metodo spiegato loro.

Più precisamente, i due fogli di esercizi comprendevano due attività (Attività 1 e Attività 2) e ciascuna di esse aveva quattro sotto-domande (a, b, c, d). Le domande 1a e 1b riguardavano rispettivamente l'addizione tra due numeri positivi e due numeri negativi. Le domande 1c e 1d riguardavano l'addizione di un numero positivo e uno negativo. In 1c il valore assoluto del numero positivo era maggiore di quello del numero negativo e in 1d avveniva l'inverso. Le domande 2a e 2b riguardavano la sottrazione tra numeri positivi. In 2a il minuendo era maggiore del sottraendo e in 2b il contrario. La domanda 2c riguardava la sottrazione tra due numeri di segno opposto con il sottraendo che era negativo. La domanda 2d riguardava la sottrazione tra numeri negativi. Di seguito (**Tabella 4**) sono riportate le percentuali di successo per domanda in ogni foglio di esercizi.

Domanda	Operazione	Modello cariche positive e negative	Modello linea dei numeri
1a	(+5) + (+1)	78%	78%
1b	(–2) + (–3)	78%	67%
1c	(+5) + (–1)	56%	44%
1d	(+2) + (–6)	33%	44%
2a	(+6) – (+4)	44%	33%
2b	(+1) – (+4)	22%	11%
2c	(+2) – (–4)	11%	0%
2d	(–1) – (–5)	11%	0%

Tabella 4. Tassi di successo per domanda nei due fogli di esercizi.

Osserviamo che le percentuali di successo nella domanda 1a sono le stesse per entrambi i gruppi. Una piccola differenza nelle percentuali di successo si osserva nelle domande 1b, 1c e 1d. Il modello delle cariche prevale nelle domande 1b e 1c e il modello della linea dei numeri ha una percentuale maggiore nella domanda 1d. C'è una differenza nelle percentuali di successo nelle domande 2a, 2b, 2c e 2d con il modello delle cariche che ha le percentuali più alte in tutte.

Da quanto sopra si evince che il modello della linea dei numeri è meno efficace per l'operazione di sottrazione rispetto al modello delle cariche. Questo può essere dovuto al fatto che ci sono due differenze nella procedura seguita nella sottrazione rispetto a quella seguita nell'addizione (la freccia corrispondente al sottraendo è posizionata in modo che finisca nello stesso punto della freccia corrispondente al minuendo invece di iniziare da dove la freccia corrispondente al minuendo finiva e la freccia corrispondente alla differenza comincia all'inizio della prima freccia e finisce all'inizio della seconda in contrasto con quella della somma che inizia all'inizio della prima freccia e finisce alla fine della seconda). Queste differenze possono confondere gli studenti che cercano di applicare per la sottrazione la stessa procedura usata per l'addizione.

Le percentuali di successo nelle domande 2a-2d che riguardano la sottrazione sono generalmente inferiori a quelle delle domande 1a-1d che riguardano l'addizione per entrambi i modelli. Quindi, concludiamo che è più difficile per gli studenti capire la sottrazione. Gli studenti hanno incontrato una particolare difficoltà nei casi in cui il minuendo era un numero negativo.

Diversi ricercatori hanno tentato il confronto tra questi due modelli. Secondo Bofferding (2014) i due modelli primari per l'insegnamento dei numeri negativi sono il modello delle cariche positive e negative e il modello della linea dei numeri. Il modello delle cariche positive e negative è un modello del primo tipo in quanto la sua funzionalità si basa sul fatto che una carica positiva e una negativa si annullano a vicenda. Il modello delle cariche positive e negative implica l'uso del principio dell'inverso additivo, che potrebbe aiutare la comprensione parziale del segno meno unario, ma non sottolinea l'ordine; e in alcuni casi, la sottrazione implica sia l'addizione che la sottrazione, confondendo potenzialmente il significato binario del segno meno. D'altra parte, il modello della linea dei numeri

evidenzia l'ordine dei numeri negativi rispetto ai numeri positivi, e i valori dei numeri possono essere interpretati come distanze dallo zero in direzioni opposte, fornendo un senso al significato unario del segno meno e alle grandezze orientate.
Nonostante i vantaggi del modello della linea dei numeri, questo metodo non è utile se lo studente non ha una chiara comprensione di una linea dei numeri astratta. Inoltre, un errore comune degli studenti quando applicano questo modello è che contano i numeri stessi piuttosto che gli spazi tra i numeri. Freudenthal (1983) ha sottolineato altri due svantaggi del modello della linea dei numeri. Il primo difetto del modello è l'asimmetria didattica tra numeri positivi e negativi. I numeri positivi sono più concreti nel senso di una maggiore originalità; così, si può operare con loro; i numeri negativi sono secondari, introdotti come risultati di operazioni che prima erano impossibili, adatti ad essere adoperati se necessario, ma inadatti ad avere operazioni eseguite con loro. In secondo luogo, in questo modello un punto *a* sulla linea dei numeri è allo stesso tempo interpretato come una freccia da 0 ad *a* e ci sono autori di libri di testo che tacitamente passano da questa interpretazione alla visione delle frecce come numeri e in questo modo suggeriscono più di quanto la prima interpretazione possa rendere.

4 Conclusioni

La comprensione dei numeri negativi e delle operazioni tra di essi è un compito piuttosto impegnativo, a causa della loro natura. Le difficoltà sorgono non solo nel concepire la loro esistenza ma anche nel capire come usarli. Cioè, errori comuni si verificano sia nei calcoli che coinvolgono i numeri negativi, sia nel concettualizzare e dare un senso ad essi e alle loro operazioni. È chiaro che l'esiguo numero di alunni ai quali sono stati applicati il modello delle cariche positive e negative e il modello geometrico della linea dei numeri, non ci permette di utilizzare l'analisi statistica implicativa, come è stato fatto nell'indagine sugli alunni della scuola primaria.
Tuttavia, con l'approccio didattico appropriato, in particolare quello basato sul modello geometrico della linea dei numeri, possiamo superare questi ostacoli e misconcezioni persistenti che sono stati incontrati sia da grandi matematici che da studenti. Infatti, il modello geometrico della linea dei numeri ha un carattere generatore, cioè produce e rappresenta un numero illimitato di proprietà, a partire da un numero limitato di elementi e di regole per combinarli. Inoltre, questo modello ha ovviamente un carattere euristico, cioè ci porta facilmente a nuove informazioni su quel sistema, indipendentemente dal sistema iniziale che rappresenta.
Ciononostante, il modello geometrico della linea dei numeri ci sembra più adatto agli studenti più avanzati. I risultati dell'applicazione della linea dei numeri in semplici compiti di addizione e sottrazione di numeri interi in studenti della scuola primaria supporta questo punto di vista. Inoltre, questo modello, che è in definitiva un caso speciale di un modello di linea affine con calcolo vettoriale, dovrebbe essere più generalmente integrato in un piano affine con vettori. Anche se la presente "ricerca-azione" è basata su una metodologia semplice e sulla presentazione statistica descrittiva dei risultati, crediamo che sia un buon esempio concreto di relazione tra la "ricerca" nell'educazione matematica e la "pratica" nelle scuole. Sosteniamo che la ricerca-azione può essere utilizzata per colmare il divario tra la ricerca sull'educazione matematica e la pratica dell'insegnamento della matematica.
Infine, crediamo fortemente che il modello del Mathematical Working Space (MWS) dovrebbe essere applicato all'insegnamento dei numeri negativi così come al modo in cui la percezione dei numeri negativi da parte degli studenti contribuisce alla formazione delle genesi semiotiche, strumentali e discorsive.

Bibliografia

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique.* Libr Philosophique J. Vrin.

Badarudin, B. P. H., & Khalid, M. (2008). Using the Jar model to improve students' understanding of operations on integers. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, 85–94.

Battista, M. T. (1983). A complete model for operations on integers. *Arithmetic Teacher*, *30*(9), 26–31.

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B., & Lewis, M. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: an analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*, 19–61. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0019

Bofferding, L. (2010). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *6*, 703–710.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders. *National Council of Teachers of Mathematics*, *45*, 194–245.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165–198.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Mathematics Education Library* (Vol. 19). Kluwer.

Bruno, A., & Martinón, A. (1999). The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*, 789–809.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée sauvage.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 170–174). Springer.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 153–166). SpringerLink.

D'Amore, B., & Gagatsis, A., (1997). *Didactics of Mathematics - Technology in Education.* ERASMUS, Art of Text.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *33*(4), 427–442.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 397–417.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1–16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Ekol, G. (2010). Operations with negative integers in a dynamic geometry environment. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 337–344). PME.

Efron, S. E., & Ravid, R. (2020). *Action research in education: A practical guide.* Guilford Press.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one step additive problem. *Learning and Instruction*, *17*, 658–672.

Elia., I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we "trace" the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis* (pp. 175–185). Università degli Studi di Palermo.

Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., & Özel, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 895–907.

Elia, I., Panaoura A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *8*(1), 49–69.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105–121.

Fischbein, E. (1972). Les modèles génératifs et le développement intellectuel. *Activités – Recherches Pédagogiques*, *5*, 10–14.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Kluwer Academic Publishers.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité: le cas du domaine numerique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 21–38.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Panaoura, A., & Michael-Chrysanthou, P. (2016). Fostering representational flexibility in the mathematical working space of rational numbers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 287–307.

Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the cross-cultural applicability of number line in conducting arithmetic operations using structural equation modeling: A comparative study between Cypriot, Italian and Greek primary pupils. *World Studies in Education*, *5*(1), 85–101.

Gagatsis, A., & Maier, H. E. (1996). *Texte zur Didaktik der Mathematik*. ERASMUS, University of Regensburg.

Gagatsis, A., & Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(1), 29–54.

Gagatsis, A., & Patronis, T. (2001). Geometrical models in mathematics and in mathematics teaching. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, *1* (pp. 333–336). Intercollege Press.

Gagatsis, A., & Rogers, L. E. (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Art of Text.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.

Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *8*, 95–112.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1994). Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. In M. Artigue, C. Laborde & R. Gras (Eds.), *20 ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 343–348). La Pensée Sauvage.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1995). Eine Studie zur historischen Enwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs "absoluter Betrag". *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *16*, 3–46.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1996). Eine studie zur historischen Enwicklung und didaktischen transposition des Begriffs "absoluter Betrag". In A. Gagatsis & H. Maier (Eds.), *Texte zur Didaktik der Mathematik* (pp. 153–200). ERASMUS.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatives. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(3), 303–346.

Goldin, G. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

Gras, R. (1979). *Contribution étude expérimental et l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs en didactique des mathématiques.* Thèse de doctorat, Université de Rennes 1.

Gras, R., & Couturier, R. (2013). Spécificités de l'Analyse Statistique Implicative par rapport à d'autres mesures de qualité de règles d'association. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(2), 249–291.

Johnson, A. (2012). *A short guide to action research*. Pearson.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Les Espaces de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *Relime, 17*(4-I), 14–27.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates.

Liebeck, P. (1990). Scores and forfeits: An intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *21*, 221–239.

Mertler, C. A. (2009). *Action research: Teachers as researchers in the classroom*. SAGE.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2013). Didactical Situation for the Enhancement of Meta-Analogical Awareness. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 160–172.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 723–740.

Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2005a). The number line as a geometrical model for teaching whole number addition and subtraction. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education:* Vol. I (pp. 329–339). University of Palermo, Cyprus Mathematical Society.

Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2005b). The geometrical model of the number line in the teaching of whole number addition and subtraction. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *42*, 167–184.

Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2006). Compartmentalization of representation in tasks related to addition and subtraction using the number line. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: Vol. 5 (pp. 105–112). Charles University of Prague.

Stephan, M., & Akyuz, D. (2012). A proposed instructional theory for integer addition and subtraction. *National Council of Teachers of Mathematics*, *43*, 428–464.

Streefland, L. (1996). Negative numbers: reflections of a learning researcher. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 57–77.

Thom, R., (1982), Mathématique et théorisation scientifique. In J. Dieudonné, J.-P. Descles, R. Apery & M. Caveing (Eds.), *Penser les mathématiques* (pp. 252–273). Seuil.

Thom, R. (1991). *Prédire n'est pas expliquer.* Eshel.

Thomaidis, I. (2009). Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών [The History of Mathematics as a source of ideas and material for teaching options and activities: The case of negative numbers]. In Scientific Association for the Teaching of Mathematics (Eds.), *Συλλογικός Τόμος Αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* [Collective volume of the exploitation of the History of Mathematics in the teaching of Mathematics] (pp. 193–219). Ziti Publisher.

Williams, J. S., Linchevski, L., & Kutscher, B. (2008). Situated intuition and activity theory fills the gap: the cases of integers and two-digit subtraction. In A. Watson & P. Winbourne (Eds.), *Directions in Situated Cognition in Mathematics Education* (pp. 153–178). Springer Nature.