DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 119 - 139

Articolo di riferimento (DOI: 10.33683/ddm.21.10.6)
Introduzione alla modellizzazione matematica nella scuola secondaria di secondo grado

Autori
Antonella Moser

Modelli matematici considerati come procedimenti risolutivi: puntualizzazioni operative

Un procedimento risolutivo è un modo con cui si procede, che ha la capacità, la funzione e lo scopo di chiarire e portare a soluzione un problema. Quelli utilizzati usualmente consistono in una sequenza di operazioni che conducono alla soluzione del problema a partire proprio dai dati del problema stesso. Ricorrere a un modello significa rispettarne una caratteristica che gli è proprio peculiare (che lo rende fra l'altro estremamente versatile). *La caratteristica di trovare una relazione fra i dati iniziali e finali del problema che sia applicabile per qualsiasi valore di detti dati*.
Esiste una differenza sostanziale nei passi che costituiscono un modello matematico rispetto a quelli relativi a un approccio risolutivo specifico per un determinato problema. Di seguito si riporta un semplice esempio che cerca di chiarire operativamente questa differenza.

Supponiamo di dover individuare il numero minimo di filtri da apporre a una condotta di acqua (formata da varie tratte) per rispettare il vincolo di far pervenire nelle abitazioni l'acqua purificata di una certa percentuale di impurità. Supponiamo che venga posto un filtro alla fine di ogni tratta della condotta.

> Dati: Ogni filtro filtra il 20% delle impurità contenute nell'acqua che lo attraversa.
> Requisito di purezza: alle abitazioni deve pervenire un'acqua purificata almeno al 75% (contenente al massimo il 25% delle impurità iniziali).
> Obiettivo: determinare il numero minimo di filtri da apporre all'interno della condotta in modo che questa soddisfi il requisito di purezza.

L'acqua che arriva nella condotta avrà un certo valore iniziale di impurità a cui associamo una variabile P_0. Alla quantità di impurità contenute nell'acqua dopo il passaggio attraverso il primo filtro associamo una variabile P_1, in generale definiamo con P_n la quantità di impurità dopo il filtro n-esimo.
Risolvere il problema significa determinare il minimo valore di n che soddisfi l'obiettivo che in termini matematici corrisponde a: $P_n \leq 0,25\ P_0$.
Dopo il primo filtro, l'acqua conterrà una quantità di impurità:

$P_1 = 0,8\ P_0$ (è stato filtrato il 20% di impurità, ne rimane l'80% cioè $0,8\ P_0$)

che pervengono al secondo filtro. Dopo il secondo filtro saranno state filtrate il 20% dell'impurità P_1; quindi, l'acqua conterrà una quantità di impurità pari a:

$P_2 = 0,8\ P_1$ ossia $P_2 = 0,8 \cdot 0,8\ P_0$.

Fino a questo passaggio non c'è differenza nell'utilizzare un modello matematico al posto di un procedimento standard.

Gli studenti tendono a utilizzare il procedimento standard e quindi proseguono con il seguente passaggio che consiste nel calcolare:

$P_2 = 0{,}64\,P_0$ poi $P_3 = 0{,}64 \cdot 0{,}8\,P_0 = 0{,}512\,P_0$.

Questo metodo li costringe a iterare il procedimento fino a che il fattore moltiplicativo di P_0 non risulti minore o uguale a 0,25.

In questo passaggio sta la differenza sostanziale fra ricorrere a un procedimento standard e costruire un modello matematico.

Un modello matematico descrive un legame funzionale fra le variabili, non si costruisce esplicitando risultati di calcoli spiccioli, validi solo per determinati valori dei dati. Riferendoci sempre all'esempio dei filtri, per costruire un modello occorre determinare una relazione fra la n caratterizzante l'n-esimo filtro e le impurità P_n contenute nell'acqua dopo il passaggio attraverso l'n-esimo filtro. In termini matematici:

$P_n = f(n)$.

Per determinare questa relazione non si deve effettuare il calcolo 0,8 · 0,8 ma lasciarlo indicato in termini esponenziali:

$P_2 = (0{,}8)^2\,P_0$, $P_3 = (0{,}8)^3\,P_0$

da cui è facile dedurre la relazione cercata:

$P_n = (0{,}8)^n\,P_0$.

L'obiettivo $P_n \leq 0{,}25\,P_0$ diventa $(0{,}8)^n\,P_0 \leq 0{,}25\,P_0$ da cui, semplificando P_0, si perviene a una semplice disequazione esponenziale nell'incognita n:

$(0{,}8)^n \leq 0{,}25$

$\log_{0{,}8} 0{,}8^n \leq \log_{0{,}8} 0{,}25$ da cui $n \geq \log_{0{,}8} 0{,}25$ cioè $n \geq 6{,}21$.

Il numero minimo di filtri da apporre nella condotta è 7.

La versatilità del modello è data dalla facilità di utilizzo per qualsiasi percentuale di impurità i filtri eliminino e per qualsiasi obiettivo si ponga, in termini di percentuale, rispetto le impurità iniziali. Ed è questa caratteristica che lo differenzia sostanzialmente dai metodi risolutivi di un problema utilizzati nelle normali prassi didattiche.

Esperienza didattica adattata e svolta in una classe seconda della scuola secondaria di secondo grado – Fase realizzativa

Modello descrittivo di una gara di zucche ed efficace per determinare lo spazio percorso dalla squadra vincitrice, conoscendo il numero di zucche prese (ogni volta che un concorrente prende una zucca deve riportarla alla partenza prima di prendere la successiva).

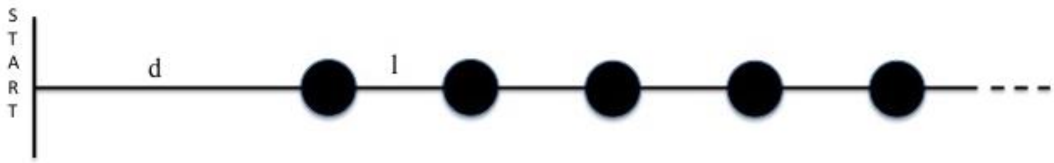


Figura 1. Schema semplificato della situazione.

Come nell'esperienza svolta nella classe quarta (descritta nell'articolo), anche per gli studenti del secondo anno della scuola secondaria di secondo grado,[1] sono state proposte la fase introduttiva e quella realizzativa, impostando i parametri in modo da semplificare il procedimento di costruzione del modello e renderlo più facilmente intuitivo per gli studenti di questo livello scolastico. In particolare:

d	$= 1$	tutte le zucche sono poste alla distanza di un metro l'una dall'altra.
l	$= 1$	la prima è posta ad un metro di distanza dallo start.

Definendo a_n come la variabile che descrive i metri percorsi per prendere la zucca n-esima, gli studenti calcolano in modo empirico i seguenti valori:

$a_1 = \mathbf{1}$; $a_2 = 1 + 3 = \mathbf{4}$; $a_3 = 4 + 5 = \mathbf{9}$; $a_4 = 9 + 7 = \mathbf{16}$; $a_5 = 16 + 9 = \mathbf{25}$.

[1] La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

Per puntare l'attenzione degli allievi sulla sequenza numerica che si sta generando, si possono fornire loro i valori successivi, a_6 = **36** e a_7 = **49**, e chiedere di indicare rapidamente quanto valgono a_8 e a_9.

Una volta osservato che a_8 = **64** e a_9 = **81**, si può far notare riscrivere la sequenza numerica degli $\boldsymbol{a_n}$:

1, **4**, **9**, **16**, **25**, **36**, **49**, **64**, **81**, …

che rappresenta la sequenza dei quadrati dei numeri naturali.

Da questa osservazione, si ricava facilmente la relazione:

$$\boldsymbol{a_n = n^2}.$$

Tale relazione permette di calcolare rapidamente quanti metri percorrere per arrivare a prendere qualsiasi zucca.

Si noti che la relazione qui ricavata è coerente con quella determinata con gli studenti di classe quarta durante l'esperienza descritta nell'articolo (**par. 2.3.5**):

$$a_n = d\,(2n - 1) + (n - 1)^2$$

che per $d = 1$ restituisce proprio:

$$a_n = 2n - 1 + n^2 - 2n + 1 = n^2.$$

Test Modelli Matematici

Alunno: **Classe:** **Data:**

1. Scrivi una definizione di *modello matematico*.

2. Descrivi brevemente i vari tipi di modelli matematici.

3. Quando è iniziato lo sviluppo dei modelli matematici?

4. Un modello matematico, rappresentativo delle condizioni acustiche all'interno di una sala da concerto, può essere considerato un modello predittivo? Motiva la tua risposta.

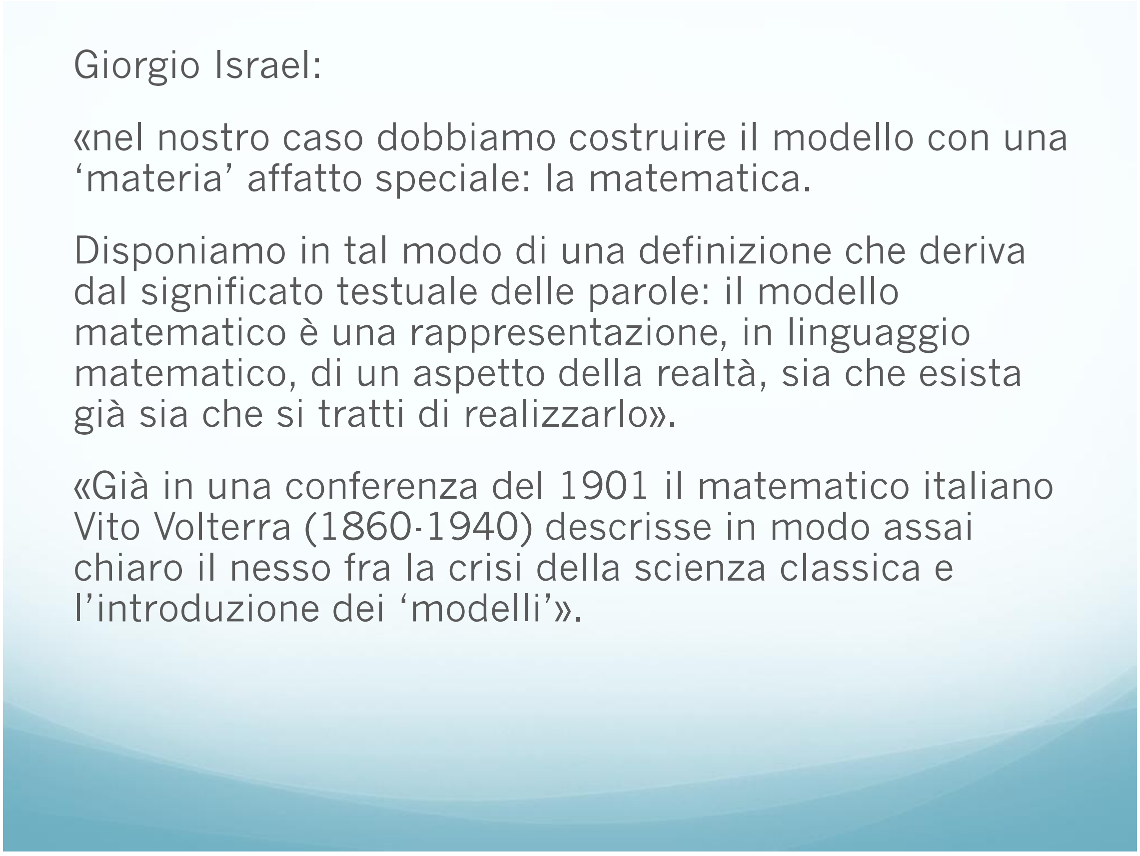

MODELLI MATEMATICI:
Cenni storici e
tipologie.

Valeriano Comincioli :

"Un modello, dal latino modulus (diminutivo di modus, misura) è un oggetto, o un concetto, che è usato per rappresentare qualcosa d'altro. In particolare un modello matematico è un modello che ha come componenti concetti matematici, come costanti, variabili, funzioni, equazioni".

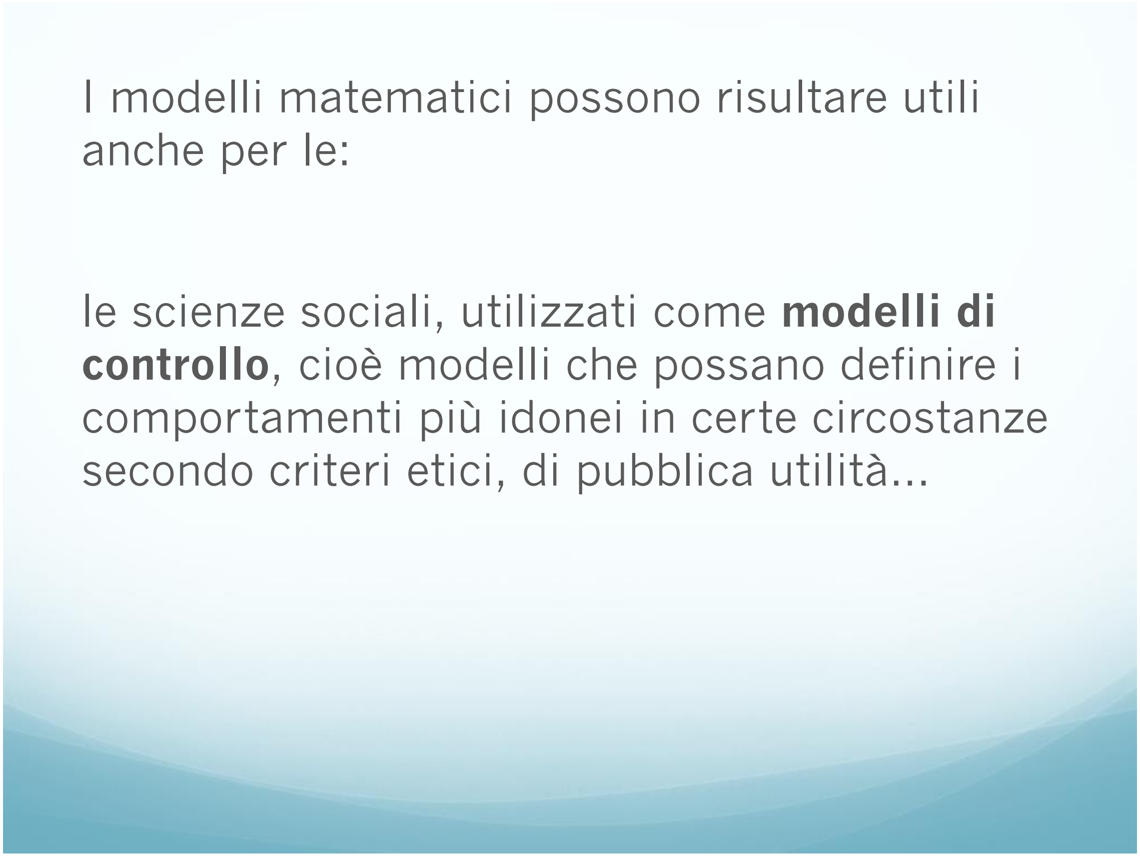
"La parola 'modello' implica originariamente un cambiamento di scala nella sua rappresentazione.

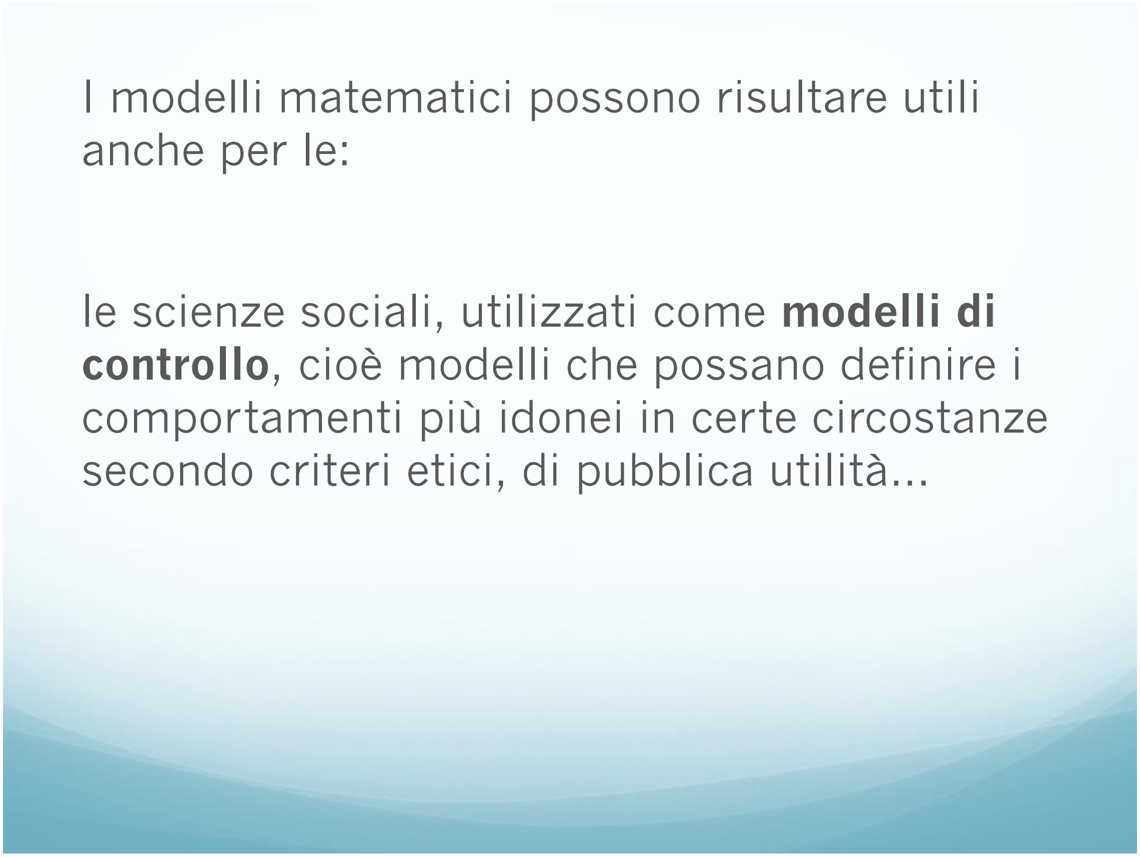
Attualmente, tale significato rimane nel senso che un modello ad esempio matematico, rappresenta un cambiamento sulla scala di astrazione: per ottenere il modello certi particolari vengono rimossi e vengono introdotte delle semplificazioni".


Giorgio Israel:
«nel nostro caso dobbiamo costruire il modello con una ‘materia’ affatto speciale: la matematica.
Disponiamo in tal modo di una definizione che deriva dal significato testuale delle parole: il modello matematico è una rappresentazione, in linguaggio matematico, di un aspetto della realtà, sia che esista già sia che si tratti di realizzarlo».
«Già in una conferenza del 1901 il matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) descrisse in modo assai chiaro il nesso fra la crisi della scienza classica e l’introduzione dei ‘modelli’».

I modelli matematici **descrittivi** costituiscono un potente strumento per:

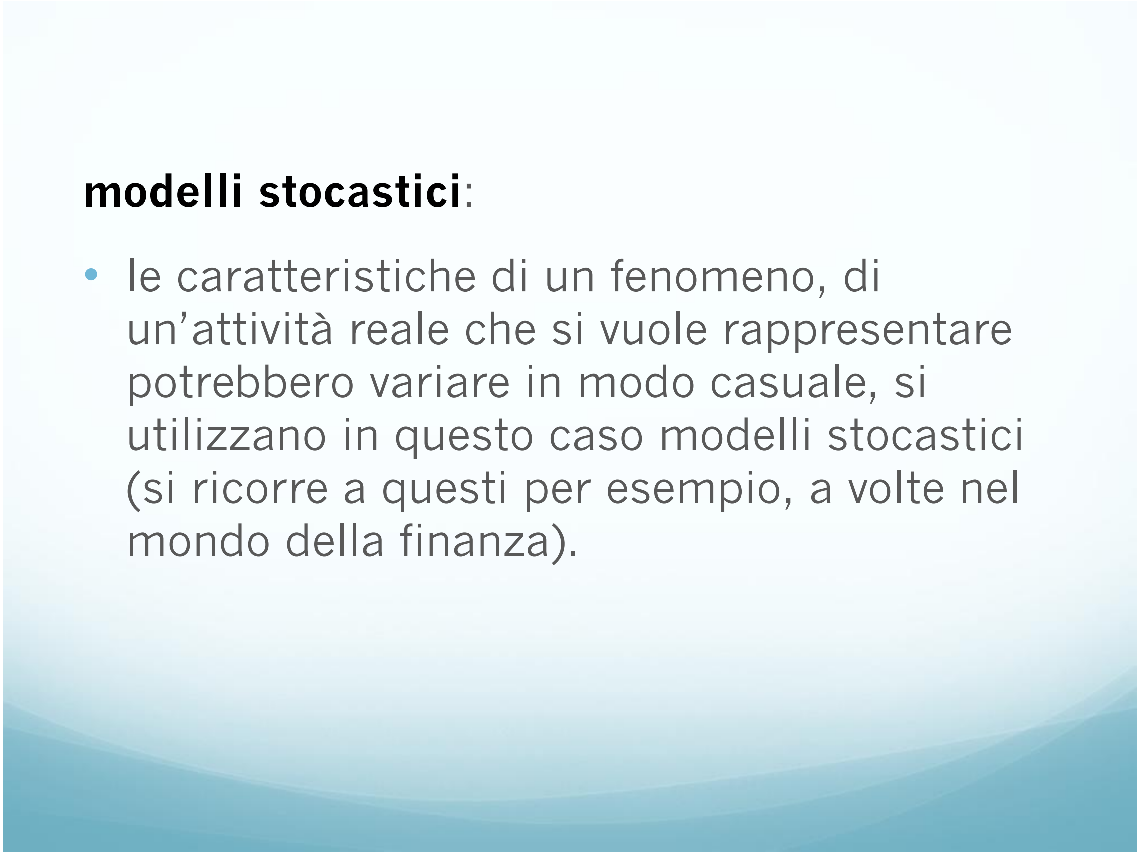
- rappresentare e descrivere quantitativamente un fenomeno naturale, o un'attività reale ed eventualmente prevenirne l'evoluzione nel tempo.
- visualizzare le proprietà di una data teoria
- rappresentare il progetto di un modello reale di un artefatto tecnologico.


I modelli matematici possono risultare utili anche per le:
le scienze sociali, utilizzati come **modelli di controllo**, cioè modelli che possano definire i comportamenti più idonei in certe circostanze secondo criteri etici, di pubblica utilità...


I modelli matematici possono risultare utili anche per le:
le scienze sociali, utilizzati come **modelli di controllo**, cioè modelli che possano definire i comportamenti più idonei in certe circostanze secondo criteri etici, di pubblica utilità...

La maggior parte dei modelli descrittivi o di controllo sono **deterministici**:

- descrivono l'evoluzione di un fenomeno, di un'attività reale, di una situazione, in modo che noto il valore di certe variabili di stato (rappresentative del fenomeno ad un certo momento) si riesce a determinare il loro valore futuro e passato in modo univoco.


modelli stocastici:
le caratteristiche di un fenomeno, di un’attività reale che si vuole rappresentare potrebbero variare in modo casuale, si utilizzano in questo caso modelli stocastici (si ricorre a questi per esempio, a volte nel mondo della finanza).