DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 33 - 51, DOI: 10.33683/ddm.22.11.2
OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

La risoluzione di equazioni: tra rappresentazioni grafiche e linguaggio algebrico

Solving equations: within graphical representations and algebraic symbols

Rosalia Maria Lo Sapio•, Maria Mellone° e Cristina Coppola•
•Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno – Italia
°Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Italia

rlosapio@unisa.it, maria.mellone@unina.it, ccoppola@unisa.it

Sunto / In questo lavoro si propone una riflessione riguardo l'importanza di costruire percorsi didattici mirati a favorire un collegamento tra rappresentazioni grafiche e linguaggio algebrico per la risoluzione delle equazioni. In particolare, gli studi sul ruolo della visualizzazione nell'apprendimento della matematica e sul Early algebra apriranno ad una riflessione sull'utilizzo di rappresentazioni grafiche per la risoluzione di equazioni di primo e secondo grado. Inoltre, facendo riferimento alla tecnica delle "costruzioni in linee" di Rafael Bombelli in cui vengono utilizzate delle rappresentazioni geometriche per la costruzione della formula risolutiva di particolari equazioni di terzo grado, verrà presentato un esempio di situazione matematica in cui le tecniche risolutive saranno supportate proprio dalle costruzioni geometriche proposte dal matematico bolognese. Le situazioni matematiche presentate non saranno da intendersi come una proposta didattica, l'auspicio è che gli esempi mostrati e gli studi di ricerca presi in considerazione possano essere utili al lettore-insegnante per la costruzione di percorsi didattici inclusivi ed efficaci, in cui il registro algebrico e quello visuale-geometrico siano sempre più in comunicazione tra loro.

Parole chiave: rappresentazioni grafiche; pensiero algebrico; equazioni.

Abstract / In this paper we propose a reflection on the importance of designing didactic paths to create a connection between graphic representations and algebraic language for the solution of equations. In particular, studies on the role of visualization in learning mathematics and on Early Algebra will open up a reflection on the use of graphical representations for solving first and second degree equations. Furthermore, referring to the technique of "*costruzioni in linee*" by Rafael Bombelli in which geometric representations are used for the construction of the solution formula of particular third degree equations, it will be presented an example of a mathematical situation in which the solving techniques will be supported by the geometric constructions proposed by the Bolognese mathematician. The mathematical situations presented will not be intended as a didactic proposal, the hope is that the examples shown and the research studies taken into consideration can be useful to the reader-teacher for the construction of inclusive and effective didactic paths, in which the algebraic and the visual-geometrical registers are more and more in communication with each other.

Keywords: graphic representations; algebraic thinking; equations.

1 Quadro teorico

In questo lavoro vorremmo provare a collegare il filone di ricerca dell'Early Algebra (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011), in particolare la sua attenzione all'uso di rappresentazioni grafiche e geometriche, con la ricerca sviluppata nell'ambito della didattica della matematica riguardante i processi di visualizzazione (si veda, ad esempio, Bishop, 1973; Presmeg, 1986). Questo tentativo ci appare interessante perché, sebbene l'interesse per i processi di visualizzazione nell'apprendimento della matematica sia nato e si sia sviluppato in maniera completamente indipendente dall'Early Algebra, crediamo che ci siano dei punti di contatto cruciali potenzialmente utili a cogliere nuove suggestioni nell'ambito della didattica della matematica.
I primi studi sulla visualizzazione e sulle capacità spaziali risalgono allo studioso Alan Bishop (1973) per poi proseguire con le ricerche di Norma Presmeg (si veda, ad esempio, Presmeg, 1986; Presmeg & Bergsten, 1995) sul ruolo dei processi visivi nell'apprendimento della matematica. Le ricerche iniziali di Presmeg, risalenti al 1982, prendono ispirazione dai lavori di ricerca dello psicologo russo Vadim Andreyevich Krutetskii. Il libro di Krutetskii, *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, pubblicato nel 1968 e tradotto in lingua inglese nel 1976, ha rappresentato per l'epoca un'enorme novità dal punto di vista della ricerca, dal momento che le osservazioni e le indagini condotte miravano a risultati qualitativi piuttosto che quantitativi, i soli ad occupare in quel periodo storico un rilievo scientifico. L'indagine di Krutetskii (1968/1976) riguardava i processi di pensiero di coloro che egli definiva "adolescenti matematicamente capaci" ed "incapaci" e le differenze tra essi. Attraverso queste indagini Krutetskii individua alcune abilità, ossia dei tratti personali che consentono la corretta e rapida esecuzione di un compito matematico, e le distingue in:

- Abilità analitica, in cui predomina la componente logico-verbale, mentre le componenti visive-pittoriche e i concetti spaziali sono poco sviluppati.
- Abilità geometrica, in cui predomina la componente visivo-pittorica rispetto a quella logico-verbale. In tal caso, gli studenti sentono il bisogno di pensare visivamente.
- Abilità armonica, in cui le componenti logico-verbali e visive-pittoriche sono in equilibrio. Per tale abilità Krutetskii individua altre due sottocategorie in base all'utilizzo di supporti visivi: astratto-armonica, in cui questi ultimi non sono d'aiuto, e pittorico-armonica, in cui invece, lo sono.

Dal 1988, come risulta dagli atti della dodicesima Conferenza Annuale del Gruppo Internazionale di Psicologia dell'Educazione Matematica (PME12) (Borbas, 1988), inizia a manifestarsi un maggiore interesse nei confronti del pensiero visivo nei processi di apprendimento della matematica. Negli anni '90, poi, la ricerca in questo ambito assume un ruolo fondamentale ai fini dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica: emerge un maggiore interesse per gli aspetti e le teorie semiotiche, per l'uso dei gesti e dei segni come indicatori della presenza di un pensiero visivo. Le ricerche di Norma Presmeg (si veda, ad esempio, Presmeg, 2006) illustrano l'importanza in ambito matematico dell'interpretazione di informazioni attraverso l'elaborazione visiva e la conseguente costruzione di metafore personali, non solo per una memorizzazione di un significato individuale ma anche per una generalizzazione matematica. Comincia, inoltre, a emergere una caratterizzazione della visualizzazione come strumento per la risoluzione di problemi algebrici. Le rappresentazioni matematiche, in particolare quelle grafiche, cominciano ad essere concepite, da un lato, come portatrici di significati ben precisi storicamente costituiti, dall'altro, come strumenti che permettono lo sviluppo di significati ed usi personali (Radford, 2000).
Più recentemente, lo studio delle riflessioni degli studenti sui loro processi di pensiero, raccolte attraverso delle apposite interviste, ha permesso di approfondire la comprensione dei processi di pensiero matematico e di delineare le abilità di cui parlava Krutetskii attraverso la formulazione di un modello (Presmeg, 2014, 2019). Il modello propone di rappresentare la dicotomia logica-visualizzazione in

forma cartesiana: la forza delle abilità logico verbali è rappresentata sull'asse delle ascisse, mentre le capacità di visualizzazione matematica sono rappresentate come ortogonali ad esse sull'asse delle ordinate, e potrebbero essere presenti o meno. In base alla forza della logica e alla presenza o meno di rappresentazioni interne (immagini mentali) o rappresentazioni esterne (rappresentazioni di vario tipo), le ricerche di Presmeg individuano la presenza di studenti in tutti e quattro i quadranti del modello in **Figura 1**.

Figura 1. Il modello[1] proposto da Presmeg (2019, p. 24).

Dobbiamo sottolineare che i processi di visualizzazione e il loro sviluppo all'interno della mente umana sono stati oggetto di studio anche della psicologia cognitiva e, più recentemente, anche delle moderne neuroscienze. Secondo alcuni di questi studi (si veda, ad esempio, Zago et al., 2010), la costruzione e l'elaborazione di un'immagine mentale avvengono a partire da un complesso processo di acquisizione di dati provenienti dalla realtà circostante e da un altrettanto complesso processo di organizzazione degli stessi in memoria. Secondo questi studi le immagini mentali prodotte, sempre esaminabili e soggette a trasformazioni, ingloberebbero tutte le componenti che le hanno generate e possono essere comunicate agli altri attraverso, ad esempio, descrizioni verbali o scritte, ma anche servendosi di disegni o schemi grafici. Ogni individuo attraverso la propria esperienza personale, le proprie reazioni, la propria percezione del mondo e gli stimoli che da esso ne derivano, mette in atto, quindi, un complesso processo cognitivo che permette la creazione di immagini mentali a cui può accedere in un qualsiasi momento per eventualmente trasformarle, attribuire loro significati specifici o rievocare concetti ad esse collegati (Di Nuovo, 1999). Secondo questi studi, quindi, le immagini mentali che ciascun individuo utilizza non sono solo frutto della percezione visiva, ma piuttosto esse rappresentano una sintesi dell'esperienza personale, della sua percezione del mondo e degli stimoli che da esso ne derivano. In questa direzione le rappresentazioni grafiche che gli studenti incontrano e imparano a utilizzare nella loro esperienza scolastica possono quindi contribuire allo sviluppo di capacità di visualizzazione matematica, utilizzando l'espressione degli studi di Presmeg (1986), ma anche alla generazione di ricche immagini mentali, per usare un termine proveniente invece dall'ambito neuropsicologico (si veda, ad esempio, Zago et al., 2010). Ad ogni modo va sottolineato che, sia che si parli di visualizzazione matematica che di immagini mentali, non si tratta di processi legati solo alle esperienze di percezione visiva della realtà, ma più in generale entrambi i processi si riferiscono ad un'esperienza "multisensoriale" della realtà.

1. Il modello utilizza una rappresentazione cartesiana in cui sull'asse delle ascisse vengono rappresentate le abilità logiche analitiche degli studenti, mentre su quello delle ordinate le loro abilità di visualizzazione.

A livello internazionale e nazionale, da diversi decenni si sta sviluppando il filone di ricerca noto con il nome di Early Algebra (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011). Nelle ricerche che si collocano in questo ambito di indagine viene evidenziata l'importanza di promuovere negli alunni forme di pensiero algebrico fin dalla scuola dell'infanzia. Sebbene ci siano degli approcci didattici che prevedono l'introduzione del linguaggio algebrico fin dalla prima primaria[2] (si veda, ad esempio, Davydov, 1982), il presupposto della maggior parte di questi studi non è quello di anticipare le attività di trattamento del linguaggio algebrico tipiche della scuola secondaria, ma piuttosto di guardare all'aritmetica e alla geometria in una prospettiva algebrica. Si tratta quindi di cercare di guidare gli studenti a individuare relazioni, proprietà e analogie conducendoli gradualmente al riconoscimento di strutture. In anni recenti si sono sviluppate molte ricerche in questa direzione, secondo prospettive differenti e con diversi approcci, ma nella maggior parte dei casi si fa ampio uso di quelle che Davydov (1982) chiama *mezzi intermedi di rappresentazione grafica* (si veda, ad esempio, Figura 5): particolari rappresentazioni grafiche che, grazie alle loro caratteristiche percettive e olistiche, possono costituire strumenti cruciali per riconoscere e/o esprimere relazioni e supportare il riconoscimento di strutture aritmetiche predisponendo il terreno all'introduzione del linguaggio algebrico formale.
Le ricerche sull'Early Algebra che abbiamo richiamato e gli studi sulla visualizzazione che abbiamo illustrato all'inizio di questo paragrafo sottolineano, a nostro avviso, quanto sia importante riflettere, in ambito didattico, su come arricchire con rappresentazioni grafiche efficaci le attività matematiche che vengono proposte agli studenti in modo che queste li aiutino a orientarsi in diverse situazioni problematiche offrendo esperienze più inclusive ed efficaci. In particolare, in questo lavoro approfondiremo l'utilizzo di rappresentazioni grafiche e geometriche proponendo esempi, in parte classici in parte nuovi, di attività di educazione matematica che riguardano la risoluzione di equazioni algebriche.
Le situazioni matematiche che presenteremo nelle sezioni successive, relativamente alla risoluzione di equazioni di primo, secondo e terzo grado, possono essere trattate tanto dal punto di vista visuale-geometrico quanto da quello algebrico. In alcuni casi ci limiteremo a descrivere nel dettaglio i collegamenti tra i due registri semiotici, in altri evidenzieremo alcune delle potenzialità didattiche di un approccio integrato, sperando che possano essere di ispirazione per il lettore-insegnante per una possibile trattazione in aula.

2 Equazioni di primo e secondo grado

2.1 Metodi grafici per la risoluzione di equazioni di primo grado

Tradizionalmente a livello scolastico lo studio dell'aritmetica è separato da quello dell'algebra, e quest'ultimo è affrontato solo a partire dalla scuola secondaria di primo grado.[3] Alcuni studi hanno evidenziato come tale separazione possa provocare in molti allievi l'emergere di difficoltà nel passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico, mettendo in luce l'importanza di permettere agli allievi di avere delle prime esperienze in campo algebrico già a livello di scuola primaria (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011). L'approccio precoce all'algebra, non inteso solo come studio del linguaggio algebrico formale, può, quindi, determinare una svolta cruciale nell'apprendimento matematico degli studenti anche nei livelli scolastici successivi. In questa direzione il testo di Cai e Knuth (2011) presenta un'interessante rassegna di alcuni approcci precoci all'algebra implementati in diversi paesi. Da questa rassegna emerge che nei paesi orientali la principale finalità dei curriculum di ma-

2. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.
3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

tematica dei primi anni di scuola è la comprensione delle relazioni tra quantità e tale obiettivo viene perseguito, tra le altre cose, proprio attraverso l'utilizzo consapevole di particolari rappresentazioni grafiche. A tal proposito, tra gli altri, facciamo riferimento anche all'approccio dello psicologo russo Vasili V. Davydov (1982) che propone, nella scuola primaria, di guidare inizialmente i bambini all'analisi di alcune caratteristiche di oggetti reali, a loro familiari e a cui possono accedere visivamente e tattilmente, studiandone e confrontandone lunghezza, peso, area o volume; attraverso l'esplorazione, quindi, di relazioni quantitative, di passare poi alla misurazione e solo successivamente alla definizione di numero come strumento per misurare quantità. Così facendo, l'algebra non viene presentata come generalizzazione dell'aritmetica ma come generalizzazione delle relazioni tra quantità e delle azioni sulle quantità al fine di favorire negli studenti una comprensione più generale e una capacità di astrazione già a partire dalla scuola primaria (Schmittau, 2011). L'approccio di Davydov (1982) prevede quindi, in maniera del tutto rivoluzionaria l'inversione dell'ordine usualmente seguito a scuola, suggerendo di presentare l'algebra già dalla scuola primaria e soprattutto prima dell'aritmetica (si veda anche Venenciano et al., 2021).
Tenendo conto che gli studenti di scuola primaria non dispongono di conoscenze matematiche sofisticate per affrontare lo studio dell'algebra da un punto di vista formale, ciò che proponiamo è lo sviluppo di idee algebriche attraverso l'introduzione di strumenti più percettivi che permettano una maggiore comprensione delle relazioni matematiche e il supporto di nuove modalità di pensiero che riguardano l'osservazione della struttura, l'attenzione al cambiamento e l'analisi delle relazioni tra quantità. Una volta che i bambini prendono confidenza con gli oggetti reali, si passa a lavorare con "schemi" e quindi a coinvolgere processi visivi che permettono di sintetizzare ed esprimere le azioni matematiche in cui gli oggetti reali risultano coinvolti.
Un esempio di schema in tal senso è quello introdotto da Davydov (1982) e rappresentato in Figura 2, dove vengono messe in relazione tre quantità A, B e C di cui la A rappresenta l'unione delle altre due.

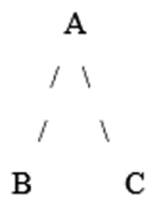

Figura 2. Schema proposto nell'approccio matematico di Davydov (Schmittau, 2011, p. 77).

Tali relazioni possono essere poi rappresentate graficamente, ad esempio, mediante dei segmenti, ed infine sintetizzate simbolicamente mediante delle equazioni, come mostrato in Figura 3.

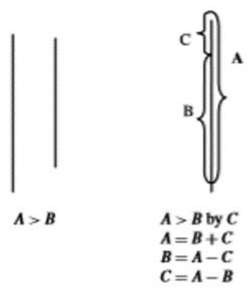

Figura 3. Schema proposto da Davydov che sintetizza il caso in cui A è maggiore di B, e C è la loro differenza (Schmittau, 2011, p. 76).

L'idea è dunque di partire da situazioni reali e familiari al bambino e di giungere poi ad una generalizzazione attraverso diverse rappresentazioni grafiche e algebriche.
In una delle attività proposte per la prima primaria (Davydov, 1982), si considerano due contenitori cilindrici uguali, ciascuno contenente diverse quantità d'acqua che i bambini sono invitati a indicare con le lettere A e B. Dopo avere condiviso e rappresentato opportunamente la relazione tra le due quantità A e B in termini di disuguaglianze, si propone ai bambini di determinare la quantità d'acqua (X) da aggiungere a B, in modo da ottenere la quantità d'acqua A (**Figura 4**).

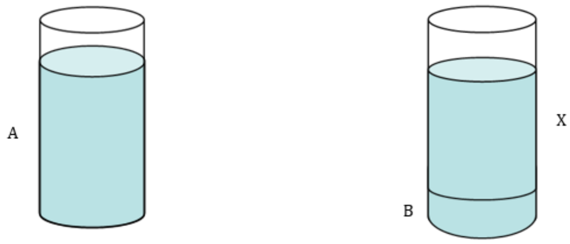

Figura 4. Rappresentazione di contenitori cilindrici ispirata all'attività proposta da Davydov.

Per la risoluzione di tale problema, Davydov propone di utilizzare quelli che egli stesso definisce *mezzi intermedi di rappresentazione grafica*, suggerendo di tradurre i volumi d'acqua in segmenti, come illustrato in **Figura 5**.

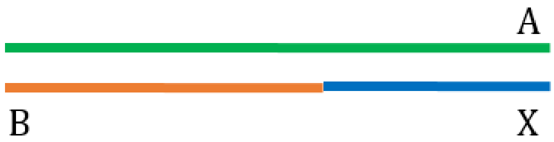

Figura 5. Metafora spaziale che permette di visualizzare la relazione tra le quantità A e B e il ruolo della quantità X. Rappresentazione ispirata a quella proposta da Mellone et al. (2013).

Attraverso questa rappresentazione grafica, dunque, si può riconoscere che la quantità da aggiungere a B è la differenza tra A e B, cioè X.
È possibile riconoscere la rappresentazione grafica in **Figura 5**, con piccole varianti, anche negli approcci precoci all'algebra implementati in altri paesi orientali come Cina e Singapore. Questa rappresentazione in Cina viene chiamata *equazione figurale* mentre a Singapore *Bar model* (o *Drawing model*). È possibile riconoscere come, con le dovute varianti, l'obiettivo didattico nell'utilizzo di una rappresentazione di questo tipo è quello di aiutare gli studenti a visualizzare e riconoscere in maniera più immediata le relazioni tra le quantità in gioco (Mellone et al., 2019; Mellone et al., 2020).

L'equazione figurale, in Cina, è introdotta a partire dalla seconda primaria per la risoluzione dei cosiddetti "problemi a parole" che prevedono, nei casi più semplici, una rappresentazione grafica riconducibile agli oggetti reali coinvolti nel problema (**Figura 6a**) e nei casi più complessi, quando ad esempio le quantità in gioco sono maggiori, una rappresentazione analoga ma continua (**Figura 6b**) e sempre più distaccata dal contesto (**Figura 6c**).

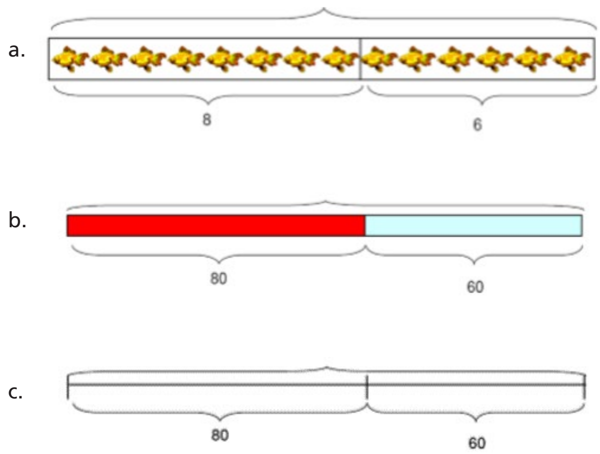

Figura 6. Esempio di rappresentazioni grafiche (Bartolini Bussi, 2009, p. 555).

Un altro strumento metodologico molto importante utilizzato nella scuola cinese è quello dei "problemi con variazione": si tratta di diversi problemi a parole, tipicamente contenuti in una stessa pagina del libro, a cui è associata un'equazione figurale. Questi problemi riguardano lo stesso contesto reale, hanno le stesse quantità in gioco e la stessa struttura aritmetica; la richiesta agli alunni non è solo quella di risolvere i problemi, ma anche di riconoscere le caratteristiche comuni. Proprio nel processo di riconoscimento, le equazioni figurali sono dei potenti strumenti di supporto.
Anche il curriculum di matematica singaporiano per la scuola primaria offre agli studenti numerose esperienze per supportare lo sviluppo di competenze algebriche, partendo dalla risoluzione di problemi che coinvolgono quantità incognite e che vengono risolti attraverso l'uso di rappresentazioni grafiche e successivamente anche del linguaggio algebrico. Le equazioni, ancor prima di essere presentate da un punto di vista formale e simbolico, vengono introdotte attraverso le immagini del *Bar model* che permettono di visualizzare le relazioni quantitative del problema in esame prima di cimentarsi nel calcolo numerico. Il *Bar model* è una strategia di rappresentazione grafica, sviluppata a Singapore, per aiutare gli studenti nella comprensione e nella risoluzione di problemi a parole. Essa si serve di una rappresentazione mediante barre rettangolari. Questa scelta rappresentativa deriva dal fatto che inizialmente gli studenti sono invitati a manipolare dei piccoli parallelepipedi per rappresentare le quantità e le relazioni descritte nei problemi. Successivamente, i parallelepipedi vengono raffigurati sul foglio come dei rettangoli che sono più facili da disegnare e da suddividere e che, anche in caso di quantità elevate di oggetti, si prestano bene per rappresentare e visualizzare le relazioni tra le quantità in gioco.
In Figura 7 viene riportato un tipico problema a parole proposto per gli studenti di quinta della scuola primaria singaporiana, in cui risulta evidente il grande potenziale del *Bar model* (Cai et al., 2011).

"Raju e Samy hanno in totale 410$. Raju possiede 100$ in più rispetto a Samy. Quanti soldi possiede Samy?"

Figura 7. Testo di un problema a parole (Cai et al., 2011, p. 33).

La modellizzazione proposta attraverso la rappresentazione grafica del *Bar model* (Figura 8), permette agli studenti di visualizzare efficacemente le relazioni tra le quantità descritte nel problema e supporta l'ulteriore modellizzazione attraverso il linguaggio algebrico.

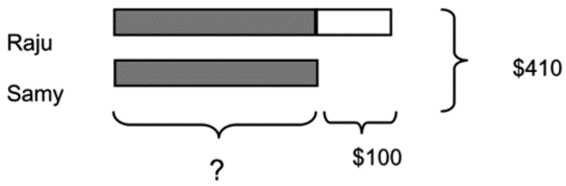

Figura 8. Esempio di *Bar model* (Cai et al., 2011, p. 33).

Dalla rappresentazione grafica in Figura 8, risulta evidente che i rettangoli, utilizzati sia per rappresentare valori noti che valori sconosciuti, sono costruiti in modo tale da restituire le relazioni tra quantità descritte dalle parole del testo del problema. Attraverso il *Bar model*, gli studenti sono accompagnati nella scrittura dell'equazione in linguaggio algebrico: sostituendo la rappresentazione della somma di denaro di Samy attraverso il relativo rettangolo del *Bar model* con la rappresentazione in linguaggio algebrico attraverso la lettera x, giungono a scrivere l'equazione $x + x + 100\$ = 410\$$.

In tutti i casi presentati, le rappresentazioni grafiche, in accordo con gli studi di ambito neuropsicologico accennati, rendono possibile modellizzare in chiave simbolica, e talvolta anticipare, fenomeni, oggetti ed eventi concreti della realtà circostante (Di Nuovo, 1999). L'utilizzo di questo tipo di rappresentazione grafica, quindi, può supportare lo sviluppo del pensiero algebrico, attivando processi di visualizzazione connessi all'utilizzo di semplici espressioni algebriche in contesti di significato, ed aiuta gli studenti a prepararsi allo studio formale vero e proprio del linguaggio algebrico nei gradi scolastici successivi.

L'analisi delle proposte educative e degli approcci precoci all'algebra implementati in Russia, Cina e Singapore, permette di riflettere sui possibili vantaggi di una preparazione al pensiero algebrico ad un livello scolastico primario e sulle modalità di applicazione di tali pratiche didattiche nel contesto scolastico italiano. È tuttavia importante precisare che la metodologia educativa e gli strumenti didattici cinesi e singaporiani rappresentano il prodotto di un complesso sistema che non prescinde dall'aspetto storico, culturale e linguistico del contesto di appartenenza (si veda, ad esempio, Bartolini Bussi & Ramploud, 2018; Mellone et al., 2019; Mellone et al., 2020).

2.2 Metodi grafici per la risoluzione di equazioni di secondo grado

Anche per la risoluzione di equazioni di secondo grado, è possibile trovare già tra gli scritti matematici e i documenti più significativi di popoli antichi, tracce di tecniche risolutive che usino proficuamente la rappresentazione grafica. Alcune tavolette in terracotta risalenti alla prima metà del secondo millennio a.C., su cui risultano incisi, mediante scrittura cuneiforme, calcoli aritmetici, problemi e procedimenti matematici, testimoniano che nella cultura babilonese era già diffuso un metodo grafico per la risoluzione di problemi matematici, che nell'approccio contemporaneo si potrebbero modellizzare attraverso equazioni di secondo grado. Il metodo grafico babilonese è oggi noto come *Geometria Naive* (Høyrup, 1990a) e si propone di ricercare una soluzione ad un dato problema algebrico, attraverso la costruzione e la manipolazione di figure geometriche.

I passaggi utilizzati per la risoluzione di alcuni dei problemi babilonesi sopra citati (Radford & Guérette, 2000) si presentano come una "lista di istruzioni" contenente una sequenza di calcoli da effettuare per giungere alla soluzione. Per tale ragione, per qualche tempo si è supposto che i Babilonesi conoscessero le attuali formule risolutive per le equazioni di secondo grado e che attraverso di esse riuscissero ad ottenere una soluzione esatta ai vari problemi matematici. Questa ipotesi è stata poi superata, dal momento che, analizzando più accuratamente i testi matematici babilonesi, risulta evidente la mancanza di simboli algebrici: proprio a causa della mancanza di rappresentazioni simboliche, l'"algebra babilonese" viene considerata differente dall'algebra elementare moderna (Radford, 1996). È stato il danese Jens Høyrup (1986), storico della matematica, a eliminare ogni sorta di dubbio a tal proposito, e a suggerire che alle sequenze di calcoli proposte dai Babilonesi per la risoluzione dei problemi matematici era sottesa una rappresentazione grafica ed una spiegazione orale. Un esempio è il problema noto come "Problema 1" (**Figura 9**), presente sulla tavoletta babilonese BM 13901 conservata al British Museum di Londra:

> "Determinare la lunghezza del lato di un quadrato, sapendo che la somma di quest'ultimo e dell'area del quadrato è 3/4".

Figura 9. Testo del "Problema 1" (Radford & Guérette, 2000, p. 69).

Ad ogni istruzione presente sulla tavoletta babilonese, è possibile affiancare una rappresentazione grafica ed un ragionamento legato alla costruzione della rappresentazione stessa, come mostrato di seguito (le **Figure 10-12** sono tratte da Radford & Guérette, 2000, p. 70; le **Figure 13-15** sono variazioni nella rappresentazione della **Figura 12**):

– Istruzione 1: Si consideri il coefficiente 1

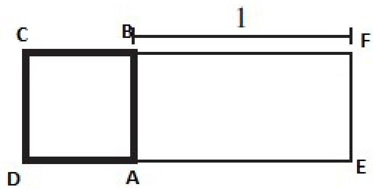

Figura 10. Viene aggiunto al quadrato ABCD, il rettangolo EFBA, di dimensioni 1 ed *s* (lato incognito del quadrato). L'intero rettangolo EFCD ha area $\frac{3}{4}$.

– Istruzione 2: Si prenda la metà di 1

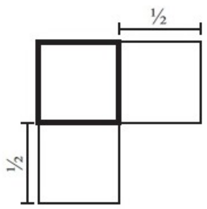

Figura 11. Si divide il lato di lunghezza 1 del rettangolo ABFE a metà e si trasporta uno dei due rettangoli, di dimensioni $\frac{1}{2}$ ed *s*, al di sotto del quadrato iniziale in modo da "incollare" le due figure lungo i lati di lunghezza *s*.

– Istruzione 3: Si moltiplichi $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{2}$

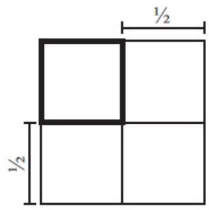

Figura 12. Si completa il quadrato aggiungendo un quadrato di lato $\frac{1}{2}$, che ha area uguale ad $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, cioè $\frac{1}{4}$.

– Istruzione 4: Si sommi $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$

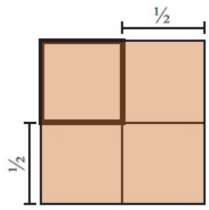

Figura 13. L'area totale del nuovo quadrato ottenuto è $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

– Istruzione 5: Si calcoli la radice di 1

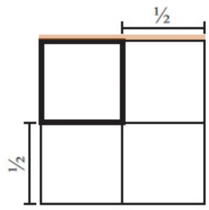

Figura 14. Il lato del nuovo quadrato più grande è dato dalla radice di 1.

– Istruzione 6: Si sottragga $\frac{1}{2}$ ad 1

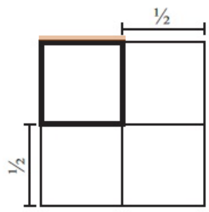

Figura 15. Al fine di ottenere la lunghezza del lato del quadrato originario, si sottrae $\frac{1}{2}$ dal lato di lunghezza 1. La lunghezza cercata risulta, quindi, essere uguale ad $\frac{1}{2}$.

Seguendo questa sequenza di istruzioni, viene determinata, attraverso un procedimento prettamente geometrico, la lunghezza del lato del quadrato originario. È possibile riconoscere una corrispondenza tra la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado e le operazioni geometriche indicate dal metodo babilonese. Il problema, infatti, può essere modellizzato attraverso un'equazione di secondo grado:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

da cui

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

È interessante notare come la somma tra la superficie del quadrato e il suo lato venga trattata come somma di superfici guardando al lato del quadrato come dotato di una "proiezione", il che permette la costruzione di un rettangolo, avente una dimensione uguale al lato del quadrato e l'altra dimensione uguale a 1 (Høyrup, 1990b). L'idea chiave su cui si basa la costruzione geometrica del metodo babilonese per la risoluzione di questi problemi, modellizzabili attraverso equazioni di secondo grado, consiste nel completamento del quadrato geometrico, che ha un'interessante corrispondenza, nella modellizzazione algebrica, con il completamento del quadrato algebrico.
Lo studio condotto da Høyrup (1990b) basato su un'attenta investigazione delle procedure, della

struttura e della terminologia propria della *Geometria Naive* babilonese, mette in evidenza come le parole "area" e "lato", utilizzate nei problemi, indichino relazioni aritmetiche che sussistono con la quantità numerica sconosciuta e come i calcoli aritmetici, che verrebbero fatti attraverso uno svolgimento "classico" del problema, corrispondano in tal caso a trasformazioni geometriche. Dal punto di vista storico risulta difficile tracciare i confini tra l'aspetto geometrico e quello aritmetico nell'algebra babilonese (Høyrup, 1990b), come risulta difficoltoso anche accertare le influenze che questi aspetti hanno avuto nelle diverse pratiche algebriche e geometriche, dal momento che numerosi lavori successivi non contengono riferimenti espliciti a queste fonti (Radford, 1996).
Si può osservare che le figure geometriche presentate da Radford & Guérette (2000) (Figure 10-15), che sono state costruite scegliendo specifiche relazioni tra le dimensioni delle loro componenti, già incorporano la soluzione al problema stesso. Infatti, il rettangolo EFBA, costruito in Figura 10, è rappresentato con la dimensione 1 (segmento BF) doppia rispetto ad *s* (lato incognito del quadrato), anticipando così, da un punto di vista grafico, il risultato ottenuto a seguito dell'analisi della costruzione. In questo modo le rappresentazioni del metodo geometrico babilonese possono suggerire una strategia didattica per un primo approccio alla risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado: le costruzioni geometriche potrebbero essere presentate in modo che i rapporti stessi tra le dimensioni delle parti anticipino e diano senso alla soluzione a cui si giunge per via algebrica. È possibile, però, pensare di utilizzare la sequenza di rappresentazioni geometriche descritte nelle tavolette anche senza conoscere in anticipo le relazioni tra le dimensioni delle figure, impostando una rappresentazione per cui alcune dimensioni potrebbero risultare, per così dire, "sbagliate" alla fine della procedura, utilizzando quindi le rappresentazioni in maniera più qualitativa, ma anche più algebrica.
Nell'ottica della progettazione di un percorso didattico o di un'attività in aula, il metodo risolutivo mostrato consente di riflettere sulla possibilità di trattare anche da un punto di vista geometrico un'equazione di secondo grado. La rappresentazione grafica, o nello specifico la rappresentazione geometrica, funge da mediatore che permette di giungere al contesto algebrico in cui il simbolo sintetizza le esperienze numeriche e geometriche sperimentate in precedenza. Sicuramente questo tipo di processo richiede, sia agli insegnanti che agli studenti, un maggiore tempo di lavoro rispetto a quello previsto per l'introduzione "classica" delle equazioni di secondo grado, che solitamente viene giustificata attraverso delle manipolazioni algebriche (basate appunto sull'idea del completamento del quadrato algebrico). D'altra parte la proposta di Radford e Guérette (2000) punta a fornire un contesto utile agli studenti che permetta loro di sviluppare un significato per i simboli. Si giunge a utilizzare il linguaggio algebrico a seguito di un'operazione di astrazione e generalizzazione: attraverso l'aggiunta di dettagli, gli studenti riescono ad avere più rappresentazioni di uno stesso oggetto, arrivando così ad "astrarlo". Con l'utilizzo del simbolo, essi riescono a riassumere e a rendere generali i procedimenti di costruzione geometrica adoperati per la ricerca della soluzione. Secondo la visione di Radford infatti, l'astrazione non consiste nel rimuovere delle caratteristiche da un dato oggetto, ma nell'aggiungerne di nuove (Radford & Guérette, 2000): attraverso la rappresentazione grafica, supportata in tal caso dalla tecnica della *Geometria Naive*, agli studenti viene fornito un nuovo modo di guardare alle equazioni di secondo grado. Le rappresentazioni grafiche costruite per la risoluzione del problema, possono essere manipolate ed esplorate, fornendo in tal modo agli studenti una modalità per dare significato ai simboli e comprendere e giustificare le formule risolutive per le equazioni di secondo grado.

3 Rappresentazioni geometriche nella risoluzione di equazioni di terzo grado

Il problema riguardante la risoluzione di equazioni algebriche rappresenta un tassello fondamentale della matematica anche da un punto di vista storico. Nel sedicesimo secolo, il matematico bolognese

Rafael Bombelli, studiando alcune equazioni di terzo grado mediante il metodo esplorato da Cardano, del Ferro e Tartaglia, propone un'interpretazione geometrica delle formule algebriche utilizzate per la loro risoluzione. Essa è basata su quelle che egli definisce "costruzioni in linee", ossia delle rappresentazioni bidimensionali e tridimensionali che prevedono la scomposizione di un solido in vari solidi (**Figura 16**) (Bagni, 2008).

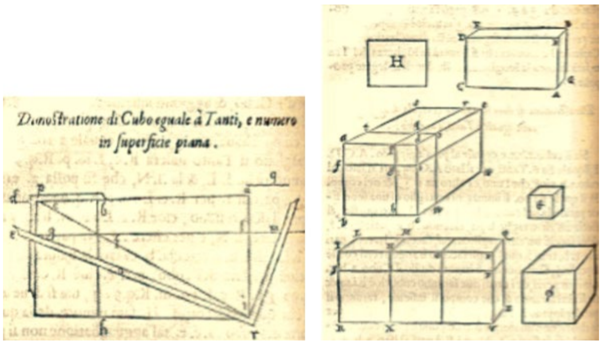

Figura 16. Esempio di costruzioni in linee proposte da Bombelli (Bagni, 2008, p. 409).

Seguendo le tracce di Radford e Guérette (2000) e tenendo conto delle suggestioni storiche di Bombelli, proponiamo una riflessione sull'introduzione della formula risolutiva per l'equazione cubica $x^3 + px = q$, usando una rappresentazione grafica, in particolare geometrica, che possa promuovere un utilizzo più consapevole del linguaggio simbolico e, dunque, supportare l'evoluzione del pensiero algebrico. L'esempio matematico preso in considerazione (Lo Sapio, 2019), pensato per studenti di scuola secondaria di secondo grado,[4] consiste nella risoluzione attraverso rappresentazioni e manipolazioni geometriche di un particolare problema di geometria solida (**Figura 17**) modellizzabile attraverso un'equazione di terzo grado.

"La lunghezza (incognita) dello spigolo di un cubo coincide con l'altezza di un parallelepipedo rettangolo.
Uno spigolo di base del parallelepipedo rettangolo misura 6 unità mentre la lunghezza dell'altro supera quella dello spigolo del cubo di 2 unità.
Sapendo che la somma dei volumi dei due solidi è 19 unità cubiche, determina la lunghezza dello spigolo del cubo."

Figura 17. Testo del problema proposto.

Al fine di "visualizzare" la situazione problematica, possono essere presi in considerazione alcuni solidi di cartoncino (due cubi e sei parallelepipedi rettangoli); tra le lunghezze degli spigoli dei solidi devono sussistere le relazioni esplicitate nella traccia del problema (**Figura 17**). Di seguito riportiamo una proposta di misure che possono essere intese come esempio-guida per l'eventuale realizzazione degli artefatti:

– 1 cubo con spigolo di 11 cm;
– 1 cubo con spigolo di 5 cm;
– 3 parallelepipedi rettangoli ognuno con altezza 11 cm, lunghezza 5 cm, larghezza 11 cm;
– 3 parallelepipedi rettangoli ognuno con altezza 5 cm, lunghezza 5 cm, larghezza 11 cm.

4. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

I solidi di cartoncino, che fungono da mediatori, vengono disposti per ricreare la situazione descritta dal problema (**Figura 18**): si accostano i 6 parallelepipedi a formare il parallelepipedo rettangolo oggetto del problema, il cubo con spigolo lungo 11 cm rappresenta il cubo oggetto del problema.

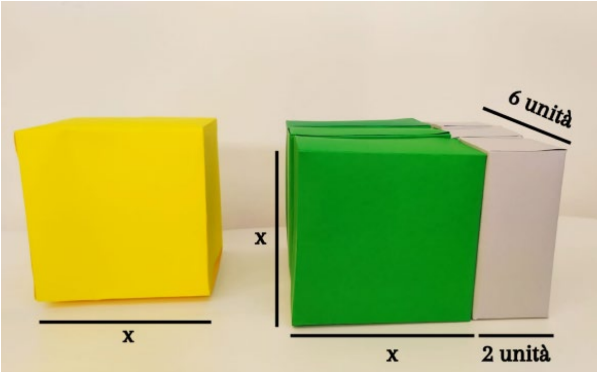

Figura 18. Solidi di cartoncino disposti a rappresentare il problema.

Le manipolazioni dei solidi di cartoncino, utili per arrivare ad una risoluzione geometrica del problema proposto, ricalcano quelle previste per le costruzioni geometriche del metodo babilonese, tenendo presente che in questo caso bisogna lavorare nel tridimensionale. Analogamente alla risoluzione illustrata in precedenza, si effettuano particolari "tagli" e spostamenti dei solidi che compongono il parallelepipedo rettangolo come descritto di seguito:

– si divide lo spigolo del parallelepipedo rettangolo lungo 6 unità in tre parti uguali ed in corrispondenza si effettuano dei tagli che permettono di ottenere tre nuovi parallelepipedi rettangoli, ciascuno di altezza incognita x e spigoli di base lunghi rispettivamente 2 unità e $x + 2$ unità (**Figura 19** – tagli blu);
– il taglio successivo è mirato ad ottenere tre parallelepipedi a base quadrata con spigolo lungo 2 unità, ciascuno di altezza incognita x, e tre parallelepipedi a base rettangolare, ciascuno di altezza incognita x e spigoli di base lunghi rispettivamente x e 2 unità (**Figura 19** – taglio rosso).

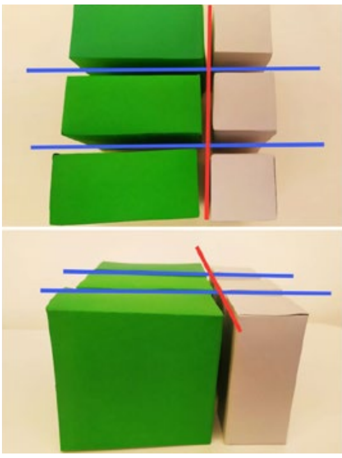

Figura 19. I segmenti in blu e rosso indicano le divisioni da effettuare al fine di ottenere tre parallelepipedi a base quadrata (parallelepipedi grigi) e tre parallelepipedi a base rettangolare (parallelepipedi verdi).

Adoperando le lettere al posto dei numeri, la **Figura 20** mostra i solidi di cui si dispone.

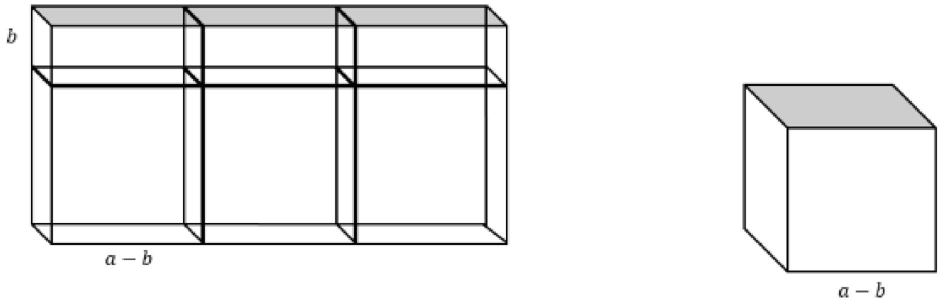

Figura 20. Rappresentazione grafica dei solidi di cui si dispone e delle dimensioni degli spigoli (Lo Sapio, 2019, p. 73).

Disponendo i parallelepipedi ottenuti attorno al cubo, come mostrato in **Figura 21,** si ottiene un nuovo solido:

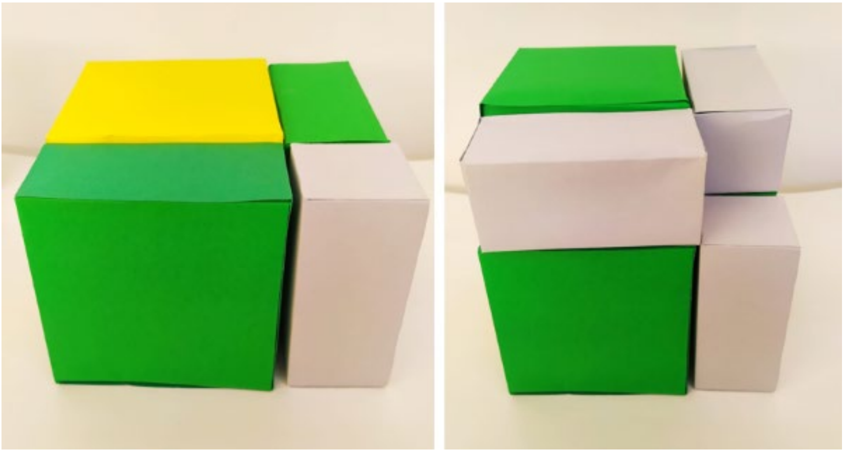

Figura 21. L'immagine a sinistra mostra il primo step da eseguire, quella a destra, il secondo e ultimo step.

Il solido ottenuto ha volume pari a 19 unità cubiche, come dichiarato nel problema iniziale, e può essere completato in un cubo aggiungendo un cubetto di spigolo 2 unità (cubetto arancione in **Figura 22**).

Figura 22. In arancione è raffigurato il cubetto di spigolo 2 unità da aggiungere al solido, al fine di ottenere un cubo di spigolo $x + 2$ unità.

Il volume del cubetto aggiunto è uguale a 8 unità cubiche; pertanto, il volume del nuovo cubo risulta essere uguale a 19 + 8 = 27 unità cubiche. Da qui si deduce che lo spigolo del nuovo cubo misura 3 unità. Dunque, la lunghezza dello spigolo incognito x è 1 unità.
Con le notazioni introdotte precedentemente, il cubo e il parallelepipedo rettangolo di partenza hanno volume rispettivamente uguale ad $(a - b)^3$ e a $3(a - b)b \cdot (a - b) + 3(a - b)b \cdot b$.
Il cubetto aggiunto al fine di "completare" il cubo ha volume b^3. Il nuovo cubo ottenuto, di spigolo a, è mostrato in **Figura 23**.

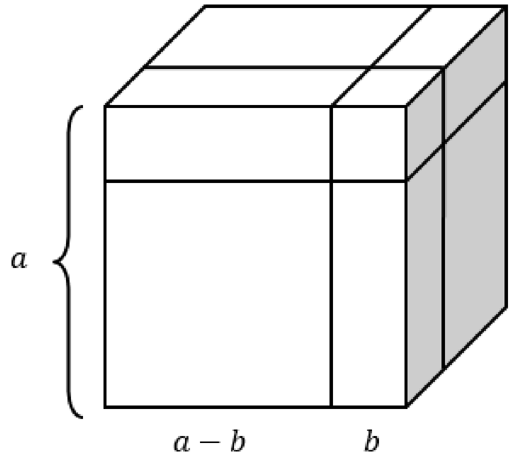

Figura 23. Cubo ottenuto a partire dai "tagli" effettuati e dalle manipolazioni descritte (Lo Sapio, 2019, p. 71).

A questo punto, si osserva che il volume del cubo ottenuto, a^3, può essere calcolato mediante la somma dei volumi dei tre solidi di cui esso si compone.

$$a^3 = (a - b)^3 + b^3 + 3b(a - b)^2 + 3(a - b)b^2,$$

da cui, si ottiene:

$$a^3 = (a - b)^3 + b^3 + 3ba^2 + 3b^3 - 6ab^2 + 3ab^2 - 3b^3.$$

Effettuando alcuni calcoli si ha:

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3.$$

Ponendo x uguale ad $a - b$, si ha:

$$x^3 + 3abx = a^3 - b^3.$$

L'equazione appena ottenuta è della forma:

$$x^3 + px = q\ ,$$

dove $p = 3ab$, da cui si ricava $ab = \frac{p}{3}$, e $q = a^3 - b^3$.

L'equazione $x^3 + px = q$ viene trasformata nel sistema:

$$\begin{cases} a - b = x \\ ab = \frac{p}{3} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Elevando al cubo la seconda equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} a - b = x \\ a^3b^3 = \frac{p^3}{27} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Le ultime due equazioni del sistema equivalgono al problema della determinazione di due numeri il cui prodotto e la cui differenza sono noti. Nel dettaglio, i due numeri la cui differenza è q e il cui prodotto è $\frac{p^3}{27}$ risolvono l'equazione di secondo grado $y^2 - qy - \frac{p^3}{27} = 0$, pertanto:

$$y = \frac{q}{2} \pm\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

da cui:

$$a^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad b^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Ricordando che $x = a - b$, si ottiene:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

giungendo alla soluzione in forma algebrica dell'equazione cubica considerata.

4 Discussione e conclusioni

Le ricerche sull'Early Algebra (si veda, ad esempio, Cai & Knuth, 2011) richiamate all'inizio di questo lavoro hanno permesso di evidenziare come le rappresentazioni grafiche possano giocare un ruolo importante nell'avvio dei processi di riconoscimento della struttura matematica fin dai primi anni scolastici. Come anticipato, in questo studio abbiamo provato a collegare il filone di ricerca dell'Early Algebra, in particolare la sua attenzione all'uso di rappresentazioni grafiche, con la ricerca sviluppata sempre nell'ambito della didattica della matematica riguardo ai processi di visualizzazione. Abbiamo quindi evidenziato come le ricerche iniziali di Presmeg (si veda Presmeg, 1986; Presmeg & Bergsten, 1995) riguardanti la visualizzazione ed il pensiero visivo come risorsa nell'apprendimento della matematica, abbiano avuto come nucleo teorico di base i risultati ottenuti dallo psicologo sovietico Krutetskii (1968/1976). Gli studi di Presmeg hanno permesso l'evoluzione della ricerca riguardante la visualizzazione, evoluzione che ha comportato cambiamenti anche in relazione ai paradigmi teorici e alle metodologie di ricerca comunemente ritenute legittime. In questo scenario, emerge con sempre più chiarezza la necessità di integrare a livello didattico metodologie e innovazioni capaci di includere e potenziare approcci cognitivi differenti e complementari.
Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato, attraverso gli studi di ricerca citati e gli esempi di situa-

zioni matematiche differenti, come le rappresentazioni grafiche e geometriche forniscano una risorsa didattica importante per inglobare e sintetizzare precisi ragionamenti e come esse siano in grado di aiutare la costruzione di significati personali da parte degli studenti. In particolare, è stato mostrato come in alcuni approcci orientali sia previsto, già a partire dalla scuola primaria, di proporre agli allievi esperienze basate sull'utilizzo di rappresentazioni grafiche connesse a problemi di natura algebrica che permettono una maggiore comprensione delle relazioni quantitative a supporto del passaggio a un successivo studio più formale dell'algebra. L'ipotesi alla base di questi approcci didattici è che lo studio delle relazioni quantitative attraverso l'utilizzo di immagini, grafici e schemi e la successiva trasformazione di tali strutture in simboli algebrici, permetta all'allievo di radicare idee astratte in eventi significativi e concreti. L'idea è che questo tipo di esperienze, se proposte durante i primi anni di scuola, possano preparare gli allievi in modo più efficace ad affrontare un successivo studio più formale del linguaggio algebrico (Blanton & Kaput, 2011).
Nell'attuale pratica didattica italiana, l'uso di rappresentazioni grafiche o geometriche ed i processi di visualizzazione ad esso connessi non sempre vengono valorizzati per la risoluzione di problemi algebrici. Le difficoltà che spesso si riscontrano nell'utilizzo di rappresentazioni grafiche in matematica e la risultante non attivazione di processi di visualizzazione, in particolar modo nel contesto algebrico, possono essere in parte attribuite alla scarsa abitudine nell'uso scolastico di utilizzare, ove possibile, rappresentazioni grafiche da affiancare alle espressioni algebriche. Non a caso, come evidenziato ad esempio in Bagni (1997), gli studenti italiani nel risolvere problemi algebrici appaiono timorosi nello scegliere una risoluzione che si basi su costruzioni geometriche o rappresentazioni grafiche, ed invece più propensi a procedere in maniera analitica attraverso trattamenti simbolici che considerano come più affidabili e tradizionalmente più sicuri. Nelle Indicazioni Nazionali per i Licei (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2010, pp. 19–20), d'altra parte, si legge: «Fermo restando l'importanza della acquisizione delle tecniche, saranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi». In conclusione dunque, all'aspetto esclusivamente tecnico e procedurale con cui vengono spesso affrontate le equazioni algebriche a scuola, potrebbe essere opportuno affiancare anche quello basato sulla costruzione di rappresentazioni grafiche per giungere ad una manipolazione consapevole dei simboli.
In questa prospettiva abbiamo cercato di mostrare come le rappresentazioni grafiche possano essere un valido strumento per introdurre lo studio più formale del linguaggio algebrico a partire dal caso più semplice, previsto dalle equazioni figurali per le equazioni di primo grado, passando ai metodi della *Geometria Naive* babilonese per le equazioni di secondo grado, fino a giungere alla risoluzione di alcune equazioni di terzo grado attraverso l'uso di particolari rappresentazioni che prendono ispirazione dalle costruzioni in linee di Bombelli. Speriamo quindi che gli esempi di rappresentazioni grafiche presentati in questo articolo possano essere di ispirazione per la pratica didattica d'aula e, d'altra parte, aprire la strada a sperimentazioni più analitiche che puntino a indagare la connessione tra l'uso di rappresentazioni grafiche durante le lezioni di matematica e le abilità di visualizzazione degli studenti.

Bibliografia

Bagni, G. T. (1997). Visualizzazione e didattica della matematica nella scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20B*(4), 309–335.

Bagni, G. T. (2008). La nascita di un concetto matematico: Rafael Bombelli e gli immaginari. *Progetto Alice, 27*, 405–418.

Bartolini Bussi, M. G. (2009). Una metodologia didattica della scuola cinese: i problemi con variazione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32A*(5), 545–564.

Bartolini Bussi, M. G., & Ramploud, A. (2018). *Il lesson study per la formazione degli insegnanti.* Carocci Faber.

Bishop, A. J. (1973). Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education, 9*, 43–49.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5–23). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Borbas, A. (Ed.) (1988). *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (12th, Veszprem, Hungary, July 20-25, 1988), Volume 1.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives.* Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Cai, J., Ng, S. F., & Moyer, J. C. (2011). Developing students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China to Singapore. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 25–41). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_3

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 224–238). Lawrence Erlbaum Associates.

Di Nuovo, S. (1999). *I processi immaginativi: componenti e sviluppo. Mente e immaginazione. La progettualità creativa in educazione e terapia.* FrancoAngeli. http://www.fmag.unict.it/Public/Uploads/links/Immaginimentali.pdf

Høyrup, J. (1986). Al-Khwarizmi, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra. *Erdem*, 2, 445–484.

Høyrup, J. (1990a). Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought. *Altorientalische Forschungen*, *17*(1), 27–69 & *17*(2), 262–354.

Høyrup, J. (1990b). Algebraic traditions behind Ibn Turk and Al-Khwarizmi. In *Proceedings of the International Symposium on Ibn Turk, Khwârezmî, Fârâbî, Beyrûnî and Ibn Sînâ* (Ankara, 9–12 September, 1985), 247–268.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* University of Chicago Press. (Edizione originale in russo pubblicata nel 1968. Tradotto da Joan Teller, a cura di J. Kilpatrick & I. Wirszup).

Lo Sapio, R. M. (2019). *Rappresentazioni grafiche come risorsa didattica per la risoluzione di equazioni.* Tesi Magistrale in Matematica. Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Mellone, M., Punzo, C., & Tortora, R. (2013). Un percorso per riscoprire i significati algebrici lavorando con le quantità. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 36A*(1), 53–84.

Mellone, M., Ramploud, A., & Carotenuto, G. (2020). An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 379–396. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09942-7

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM Mathematics Education, 51*, 199–212. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0992-7

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali". http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297–311.

Presmeg, N. C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Sense publishers.

Presmeg, N. C. (2014). Mathematics at the center of distinct fields: A response to Michael and Ted. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics and mathematics education: Searching for common ground* (pp. 45–53). Springer.

Presmeg, N. C. (2019). The evolution of mathematics education research: Russia's place in this global movement. In A. Shvarts (Ed.), *Proceedings of the PME and Yandex Russian conference: Technology and Psychology for Mathematics Education* (pp. 19–31). HSE Publishing House.

Presmeg, N. C., & Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: An international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 58–65). PME.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 39–53). Springer.

Radford, L. (2000). Students' processes of symbolizing in algebra: A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81–88). PME.

Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second degree equations in the classroom: A Babylonian approach. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics. An international perspective* (pp. 69–75). The Mathematical Association of America.

Schmittau, J. (2011). The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: A vygotskian perspective. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 71–85). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_5

Venenciano, L., Polotskaia, E., Mellone, M., & Radford, L. (2021). An introduction to multiple perspectives on Davydov's approach in the XXI century. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 323–326. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10040-5

Zago, S., Allegri, N., Cristoffanini, M., Porta, M., Ferrucci, R., & Priori, A. (2010). La perdita dell'immagine mentale visiva tra neurologia e psichiatria: una rivisitazione critica del caso di Charcot e Bernard del 1883. *Giornale Italiano di Psicopatologia, 16*, 346–361.