DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (9), 103 - 126, DOI: 10.33683/ddm.21.9.5

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Educare alla "matematizzazione e modellizzazione" nella scuola media[1]

Educate on the "mathematization and modeling" in the secondary school

Lorenzo Cantaluppi
Scuola media di Stabio – Svizzera

lorenzo.cantaluppi@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo presenta il percorso didattico svolto in una classe di seconda media con lo scopo di indagare lo sviluppo delle convinzioni degli allievi riguardo agli elementi e ai processi efficaci da attuare al fine di una risoluzione ottimale di un problema matematico. L'itinerario si compone di molteplici attività cooperative attraverso le quali trattare in modo puntuale i processi coinvolti nel ciclo della matematizzazione. Gli allievi hanno affrontato tali proposte con motivazione e interesse, apprezzando in particolare la multidisciplinarietà relativa alla comprensione e alla lettura di un testo. I risultati ottenuti mostrano come gli allievi, durante l'attività di risoluzione di un problema matematico, abbiano imparato a spostare il loro focus dal prodotto ai processi: l'attenzione che prima era rivolta unicamente al risultato matematico viene ora ad essere ripartita anche su processi importanti quali la lettura, l'applicazione di algoritmi, la scelta delle operazioni, l'attuazione di strategie metacognitive e la riflessione e l'interpretazione del risultato matematico ottenuto.

Parole chiave: problema matematico; matematizzazione; processi; lettura dei problemi; comprensione.

Abstract / This paper illustrates the didactic itinerary performed in a 7th-grade class, in order to investigate the development of the students' beliefs about the elements and effective processes to be implemented in order to achieve an optimal resolution of a mathematical problem. The itinerary consists of multiple cooperative activities able to deeply analyze the processes involved in the cycle of mathematization. The students approached these proposals with motivation and interest, with particular appreciation to the multidisciplinary aspect due to the understanding and reading of a text. Results show how the students, during the resolution of a mathematical problem, have learned to shift their focus from the product to the processes: the attention that was previously directed only to the mathematical result is now also distributed on important processes such as the reading, the application of algorithms, the choice of operations, the implementation of metacognitive strategies and the reflection and interpretation of the obtained mathematical result.

Keywords: mathematical problem; mathematization; processes; reading problems; understanding.

1. Questo articolo rappresenta una sintesi del lavoro di diploma Master of Arts in Insegnamento per il livello secondario I, disciplina matematica, di Lorenzo Cantaluppi (2020). La tesi è scaricabile all'indirizzo: https://tesi.supsi.ch/3161/

1 Il "problema" in matematica e nella sua didattica

Afferma Halmos, matematico e statistico ungherese:

> «In che cosa consiste veramente la matematica? Assiomi (come il postulato delle parallele)? Teoremi (come il teorema fondamentale dell'algebra)? Dimostrazioni (come la dimostrazione di Gödel dell'indecidibilità)? Definizioni (come la definizione di dimensione di Menger)? Teorie (come la teoria delle categorie)? Formule (come la formula dell'integrale di Cauchy)? Metodi (come il metodo delle approssimazioni successive)? Certamente la matematica non potrebbe esistere senza questi ingredienti; essi sono tutti essenziali. Tuttavia un punto di vista sostenibile è che nessuno di essi è al centro della disciplina, che il motivo principale di esistenza per il matematico è risolvere problemi, e che, dunque, quello in cui consiste veramente la matematica sono problemi e soluzioni».
>
> (Halmos, 1980, p. 519, traduzione in Zan, 2007).

Come emerge dalle parole di Halmos, la risoluzione di problemi è un tema prioritario, ampio e complesso della matematica. In un contesto come quello del problem solving, infatti, le difficoltà insite nella disciplina vengono ad essere affiancate da ulteriori ostacoli legati all'attività tanto fondamentale quanto spesso trascurata della comprensione del testo. Dal punto di vista didattico risulta quindi molto importante creare una sinergia tra le due discipline, matematica e italiano, tradizionalmente avvertite molto distanti l'una dall'altra, con il fine di sviluppare parallelamente competenze matematiche e linguistiche e di favorire negli allievi un atteggiamento efficace da adottare nell'attività di risoluzione di problemi. In quest'ottica, l'esperienza didattica qui descritta si propone di offrire agli allievi un percorso mirato all'acquisizione di una nuova consapevolezza circa l'attività di risoluzione di un problema matematico, indagando gli elementi e i processi che la caratterizzano. Ma che cos'è un problema matematico e come si caratterizza in termini didattici?
Secondo il matematico francese Schwartz (1994), si parla di problema matematico quando una persona si trova di fronte ad una situazione non immediata, con una meta definita ma senza sapere ancora come raggiungerla, per la quale il bagaglio delle proprie risposte immediate e abituali non gli permette di venirne a capo. È quindi necessario porsi domande, riflettere, intuire, inventare, strutturare o ristrutturare, accettando di brancolare nel buio fino a quando non si giunge a un'illuminazione. Questa illuminazione non è casuale, bensì frutto di varie riflessioni in grado di condurre alla costruzione di nuove conoscenze. Per queste ragioni il problema matematico si differenzia dall'esercizio matematico, meno spiazzante e caratterizzato dall'esecuzione di procedure note, unicamente da consolidare e automatizzare. D'Amore (2014) invita tuttavia ad una maggiore flessibilità riguardo a tale distinzione: la medesima situazione problematica può configurarsi infatti come problema o esercizio a seconda della specifica situazione didattica in cui viene proposta.
Charnay (1988), professore e didatta francese, propone una classificazione dei problemi matematici sulla base delle loro finalità: costruzione di nuove conoscenze, utilizzo di conoscenze già elaborate, estensione del campo di utilizzo di una nozione già elaborata, utilizzo congiunto di più categorie di conoscenze e sviluppo di competenze metodologiche in situazioni di ricerca. È evidente, dunque, come un problema possa essere utilizzato per differenti scopi.
Zan (1998) distingue invece i problemi reali da quelli scolastici. I primi presentano un obiettivo e delle difficoltà per raggiungerlo da parte del solutore protagonista. I secondi sono caratterizzati invece da una struttura narrativa dotata di dati numerici e seguita da una domanda, spesso artificiosa poiché non derivante da una situazione problematica e legata al contesto solo per l'utilizzo dei dati numerici: in questo tipo di problemi, la struttura narrativa si configura unicamente come contenitore di dati ed evocatrice di un contesto familiare, che però non si presenta coeso con la struttura matematica del

problema. Zan evidenzia la frattura nel modo in cui gli allievi affrontano i due problemi: vi è la convinzione che per risolvere un problema scolastico sia sempre necessario eseguire un calcolo matematico, per il quale gli allievi procedono per lo più in modo casuale, combinando tra loro i dati numerici senza logica o sulla base di schemi risolutivi ormai cristallizzati. Questo atteggiamento evidenzia una grande e diffusa difficoltà che gli allievi presentano nella risoluzione dei problemi matematici e che il matematico americano Schoenfeld definisce come sospensione di senso, riferendosi alla mancanza di una vera e propria riflessione e *penetrazione della situazione problematica:*

> «Gli studenti preoccupati della forma [...] passeranno più tempo a preoccuparsi della forma della loro risposta che a cercare di capire il risultato che stanno scrivendo. E gli studenti che credono che la comprensione della matematica sia semplicemente al di là dei comuni mortali come loro, diventano consumatori passivi di matematica, accettando e memorizzando ciò che viene loro consegnato senza tentare di dargli un senso da soli».
>
> (Schoenfeld, 1987, p. 198, traduzione dell'autore).

Dal punto di vista didattico può essere interessante indagare la percezione degli allievi riguardo ai problemi. In Zan (1998, p. 41), ad esempio, viene presentata questa risposta, data da un bambino di III elementare alla domanda "che cos'è un problema?": «Per me un problema è una cosa che bisogna saper risolvere. Un problema è un esercizio-prova per vedere se una persona ha afferrato l'argomento».

Questa risposta mette in evidenza una convinzione di molti allievi riguardo allo scopo di un problema matematico: giungere al risultato corretto e mettere in campo le conoscenze e abilità proprie della disciplina è più importante rispetto a comprendere realmente la situazione proposta. Convinzioni profonde e cristallizzate come questa hanno il potere di influenzare l'atteggiamento e il comportamento messo in atto dagli allievi nei processi risolutivi: in virtù di questa convinzione, infatti, le risorse cognitive degli allievi saranno per lo più focalizzate sulla risoluzione matematica del problema piuttosto che sulla lettura, comprensione e interpretazione della situazione proposta.

È dunque compito del docente impegnarsi per evitare di sottoporre agli allievi problemi stereotipati e cercare di modificare il contratto didattico che si instaura in classe per questo argomento; è inoltre importante che il docente agisca anche sulle sue abitudini e attese nei confronti di un problema matematico, spesso focalizzate sul risultato piuttosto che sul processo. In questo modo gli allievi potranno modificare le proprie convinzioni e, di conseguenza, il proprio atteggiamento nella risoluzione di problemi.

2 Il ciclo della matematizzazione

Tra i quattro processi cognitivi della matematica descritti nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015) compare il processo "*matematizzare e modellizzare*". Tale processo è fortemente legato all'attività di risoluzione di problemi poiché consiste nell'organizzare e analizzare una situazione reale tramite gli strumenti della disciplina, cioè traducendo, riorganizzando e ricostruendo un problema dal contesto reale nel mondo simbolico della matematica, e viceversa (Jupri & Drijvers, 2016). Il processo "matematizzare e modellizzare" si caratterizza per la sua coerenza con un'indicazione centrale del Piano di studio, non solo per la matematica, ai fini dello sviluppo di un agire competente e consapevole: ricorrere a efficaci situazioni di apprendimento tratte dall'esperienza che consentano agli allievi di applicarvi i concetti, i principi e i metodi della disciplina.

L'indagine internazionale PISA (*Programme for International Student Assessment*), promossa dall'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico), definisce all'interno della matematizzazione e modellizzazione il ciclo della matematizzazione (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2013, 2016). Tale ciclo illustra le fasi e i processi coinvolti nell'attività di risoluzione di un problema matematico e può essere visualizzato attraverso il seguente schema (**Figura 1**).

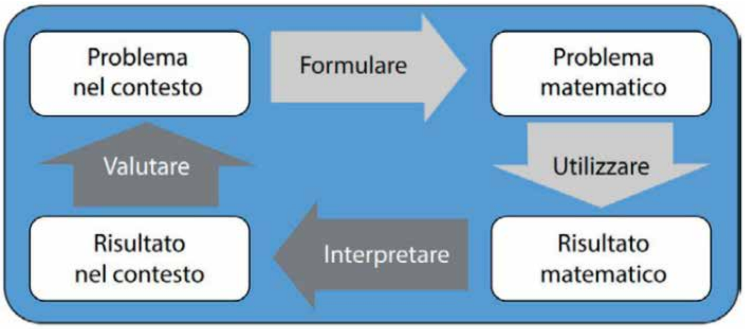


Figura 1. Il ciclo della matematizzazione descritto da OCSE-PISA.

Il punto di partenza del ciclo è rappresentato dal problema nel contesto, il quale attraverso il processo "*formulare*" viene tradotto nel linguaggio formale della disciplina e convertito in problema matematico. Grazie al processo "*utilizzare*" vengono applicati i saperi e le strategie risolutive necessarie per giungere a un risultato matematico, il quale successivamente, tramite il processo "interpretare", viene analizzato alla luce del contesto di partenza, ottenendo appunto il risultato nel contesto. Il processo finale consiste nel "*valutare*" l'accettabilità dei processi risolutivi in funzione del contesto, identificandone potenzialità e limiti (Franchini et al., 2017).
Treffers (1987) e Freudenthal (1991) evidenziano due tipi di *matematizzazione*, riconoscibili nello schema in **Figura 2**, in cui si distingue una matematizzazione *orizzontale* e una *verticale*.

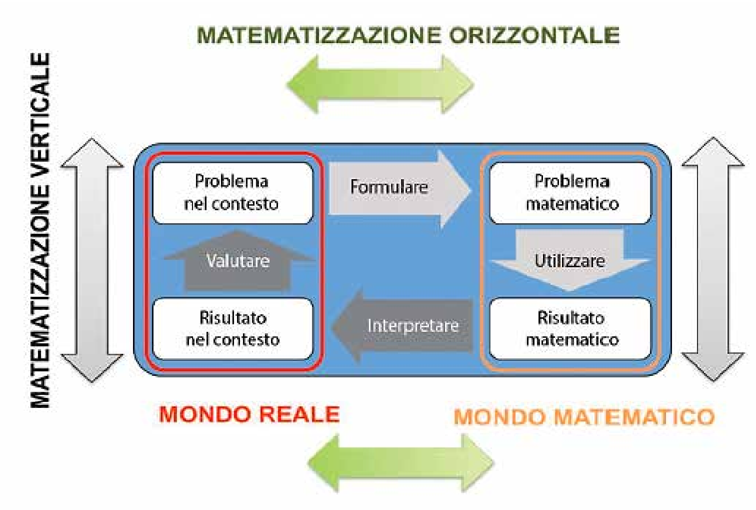


Figura 2. Distinzione tra matematizzazione orizzontale e verticale.

La matematizzazione orizzontale richiama i processi "formulare" e "interpretare" e consiste nella comunicazione tra il mondo reale e quello matematico: tale comunicazione si concretizza attraverso la traduzione del problema nel contesto mediante rappresentazioni semiotiche e tramite l’interpretazione del risultato matematico alla luce del contesto reale. La matematizzazione verticale, invece, richiama i processi “utilizzare” e “valutare” e consiste nell’applicazione di procedure e strategie all’interno dello stesso mondo: essa richiede sia l’utilizzo di conoscenze e risorse proprie della disciplina sia la verifica dell’applicabilità delle procedure risolutive in funzione del contesto (e la loro relativa possibilità di generalizzazione).

Tra i processi del ciclo della matematizzazione, il più delicato e determinante è sicuramente il processo “formulare”. Per risolvere un problema matematico è infatti necessario analizzare il problema nel contesto e distinguere le informazioni rilevanti ai fini della risoluzione da quelle inutili o superflue. Tale capacità di discernimento richiede a priori una vera comprensione della situazione proposta, che è conseguibile, laddove il problema venga presentato in forma scritta, attraverso una lettura efficace del testo e una conseguente comprensione delle informazioni da esso trasmesse, espresse in varie forme (linguistica, aritmetica, algebrica, grafica ecc.). Quando il problema è stato compreso e privato degli elementi ininfluenti e di contorno, spetta al risolutore individuare una struttura coerente, astratta e ideale che permette di tradurre il problema nel linguaggio matematico, rendendolo quindi risolvibile attraverso gli strumenti della disciplina.

È possibile riconoscere un chiaro parallelismo fra i processi del ciclo della matematizzazione appena descritti e i processi cognitivi riconducibili alla matematica presentati nel *Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese*:

- il processo “formulare” risulta connesso al processo cognitivo “esplorare e provare”, caratterizzato dall’esplorazione di situazioni matematiche non note e dalla scelta di affrontarle per tentativi ed errori, individuando strategie e procedimenti interpretativi e risolutivi e formulando congetture;
- il processo “utilizzare” richiama in modo significativo le risorse cognitive “sapere e riconoscere” ed “eseguire e applicare”, rispettivamente caratterizzate dalla padronanza delle conoscenze dichiarative e procedurali proprie della disciplina e dal saper eseguire procedimenti e algoritmi;
- i processi “interpretare” e “valutare” richiamano con evidenza i processi cognitivi “interpretare e riflettere sui risultati” e “comunicare e argomentare”, poiché il solutore è chiamato a descrivere, giustificare e argomentare il perché delle proprie scelte e conclusioni in rapporto al problema e al contesto reale di partenza.

Da quanto finora esposto risulta già evidente la complessità insita nella risoluzione dei problemi. Come ovvio, questa complessità ha conseguenze dal punto di vista di chi si pone davanti a un problema per risolverlo. Ad esempio, secondo la gerarchia degli errori di Newman (1977) e Clements (1980), le difficoltà che gli allievi possono incontrare nel ciclo della matematizzazione sono numerose: la conoscenza del significato delle parole, la comprensione del significato del problema e la corretta rappresentazione della situazione, la traduzione dal problema nel contesto in problema matematico, la risoluzione del problema matematico tramite l’applicazione di algoritmi risolutivi e l’interpretazione del risultato matematico nel contesto reale. Tali difficoltà, dunque, riguardano tutti i processi del ciclo della matematizzazione, ma in particolare il processo “formulare”, in cui l’azione della lettura gioca un ruolo fondamentale per la comprensione della situazione nel contesto reale e per la sua successiva traduzione nel linguaggio proprio della disciplina. Si tratta, infatti, di passare attraverso un particolare tipo di testo (il problema, appunto) per procedere alle fasi successive del ciclo, e questo passaggio ha per così dire una porta d’entrata (Demartini & Sbaragli, 2019) che è data dalla lettura del testo stesso. Ma come ci si può approcciare alla lettura di un testo e, di conseguenza, anche di un testo matematico?

Come sottolineato da alcuni ricercatori, esistono diversi atteggiamenti da adottare in funzione del genere e dello scopo prefissato dal testo stesso. Ad esempio, Tanner e Green (1988) propongono la seguente classificazione dei diversi tipi di lettura, oggi accolta nei principali quadri di riferimento delle indagini nazionali e internazionali:

- lettura esplorativa o orientativa (*skimming*): lettura rapida e a salti, con l'obiettivo di capire di cosa parla un determinato testo e valutare se è di proprio interesse oppure no;
- lettura selettiva (*scanning*): lettura mirata per la ricerca di specifiche informazioni o parole;
- lettura estensiva o globale (*extensive*): lettura classica, sequenziale, da cui si può ricavare un certo tipo di apprendimento;
- lettura intensiva o analitica (*intensive* o *narrow*): lettura profonda e reiterata, con l'obiettivo di comprendere e interpretare al meglio il testo grazie all'intervento attivo del lettore.

Di fronte a un problema matematico, gli allievi eseguono tipicamente una lettura di tipo selettivo: ricercano i dati numerici e le parole chiave che indicano il tipo di operazione da svolgere (Zan, 2016). Questa strategia non permette agli allievi di lavorare sulla comprensione del testo e sullo sviluppo di un pensiero critico e costruttivo. Molto spesso, tuttavia, i problemi con i quali gli studenti hanno a che fare nell'ambiente scolastico sono costruiti in modo tale da favorire questo tipo di lettura selettiva, perché il testo si configura unicamente come contenitore di dati: si tratta dei cosiddetti «problemi a quadretti», espressione usata da Zan (2016) per distinguere questo tipo di problema dai «problemi a righe», caratterizzati invece da una profonda integrazione fra l'aspetto matematico e quello narrativo, in cui la lettura selettiva del testo non è una strategia vincente perché i dettagli della storia sono tutti funzionali alla comprensione del problema.
Al di là di questa distinzione, è comunque chiaro che al fine di rendere possibile una buona lettura e una buona analisi di un problema è necessario adottare una lettura intensiva, che permetta all'allievo di soffermarsi e di indagare su tutte le componenti del testo. Ciò che è davvero importante, tuttavia, è rendere gli allievi consapevoli dell'esistenza di diversi tipi di letture e dell'importanza di saper applicare ciascuna di esse in funzione del testo e degli obiettivi prefissati.
In definitiva, per la corretta risoluzione di un problema matematico è necessario possedere risorse cognitive, attivare processi cognitivi e padroneggiare competenze linguistiche. Le conoscenze e le abilità proprie della disciplina devono dunque essere supportate dalla capacità di riconoscere il significato e l'obiettivo di un problema. È perciò fondamentale lavorare con gli allievi sul concetto di *devoluzione*, definito da Brousseau (1998) come il processo attraverso il quale l'allievo comprende e si fa personalmente carico del problema, condividendone l'obiettivo con l'insegnante. Questo processo passa inevitabilmente attraverso l'operazione di lettura del testo e coinvolge il processo "formulare" del ciclo della matematizzazione. Per quanto riguarda i processi successivi, invece, gli allievi affrontano i problemi sulla base di classici stereotipi che li conducono ad adottare comportamenti non logici come la combinazione casuale di dati. È compito del docente rinegoziare le proprie abitudini, modificando le convinzioni degli allievi rispetto al significato di problema matematico e rispetto agli elementi e ai processi efficaci da attuare al fine di una risoluzione ottimale. L'obiettivo è quello di sviluppare negli allievi un atteggiamento attivo, critico e costruttivo: per questo motivo è necessario lavorare anche sui processi "utilizzare", "interpretare" e "valutare" del ciclo della matematizzazione, che sono i processi meno considerati dagli allievi. È quanto si è cercato di tenere in considerazione nel progettare l'esperienza che verrà descritta nei prossimi paragrafi.

3 Metodologia

Il presente lavoro è stato proposto ad una classe di seconda della scuola media di Stabio in Canton Ticino, composta da 19 allievi, di cui 9 maschi e 10 femmine.
Il percorso può essere suddiviso in tre fasi: questionario iniziale, intervento didattico e questionario finale. Il questionario iniziale ha permesso di indagare le convinzioni iniziali degli allievi riguardo alle fasi per loro necessarie e agli elementi e ai processi efficaci per la risoluzione ottimale di un problema matematico. Successivamente, è stato proposto agli allievi un intervento didattico con l'obiettivo di

modificare le loro convinzioni, nel caso non fossero ancora adeguate, riguardo agli elementi e ai processi efficaci per la risoluzione di un problema matematico. Questo intervento didattico si è articolato in molteplici attività:
- costruzione di un procedimento comune;
- parallelismo tra fasi individuate e ciclo della matematizzazione;
- lettura di diversi tipi, generi e formati di testi;
- analisi di testi di diversi tipi di problemi;
- risoluzione di problemi e applicazione di strategie e calcoli;
- riflessione e interpretazione nella risoluzione di problemi;
- analisi di protocolli di problemi matematici.

Infine, il questionario finale ha permesso di verificare se le convinzioni degli allievi riguardo agli elementi e ai processi efficaci da attuare al fine di una risoluzione ottimale di un problema matematico sono cambiate dopo il percorso svolto sul ciclo della matematizzazione e sulle attività focalizzate a rafforzare i diversi processi coinvolti.
Le attività svolte durante l'intervento didattico si sono rivelate adatte per ragazzi di questa età, i quali, generalmente, presentano ancora un comportamento molto standardizzato nella risoluzione di problemi, più focalizzato sul prodotto piuttosto che sui processi. Si è scelto quindi di proporre agli allievi alcune attività al fine di guidarli in un percorso mirato alla ridefinizione delle loro convinzioni.
Le attività sono state proposte nel periodo compreso tra inizio novembre e inizio marzo. Si è cercato di inserire nelle attività alcuni richiami agli argomenti relativi al programma annuale della disciplina. La chiusura delle scuole a causa della pandemia da virus COVID-19 ha determinato la necessità di accelerare lo svolgimento di alcune attività finali e di svolgere totalmente a distanza il questionario conclusivo.

4 Descrizione del percorso didattico

Nei paragrafi seguenti vengono riportate nel dettaglio le attività realizzate durante l'intervento didattico proposto agli allievi. Per ciascuna attività, dopo una breve introduzione, vengono descritti l'obiettivo, la struttura, le riflessioni emerse e le eventuali difficoltà incontrate, nonché un bilancio generale della singola esperienza. Per l'analisi dettagliata dei risultati ottenuti dai questionari si rimanda al lavoro di diploma al link https://tesi.supsi.ch/3161/.

4.1 Costruzione di un procedimento comune

A seguito della somministrazione di un questionario iniziale (Allegato 1) volto ad indagare le convinzioni in ingresso degli allievi relativamente alle fasi per loro necessarie e agli elementi e ai processi efficaci per la risoluzione ottimale di un problema matematico, l'intervento didattico ha avuto inizio con un'attività progettata per permettere agli allievi, senza alcun tipo di condizionamento, di elaborare un procedimento comune a tutta la classe relativo ai processi necessari per risolvere al meglio un problema matematico.
Agli allievi sono state innanzitutto presentate (Allegato 2) le risposte da loro fornite al questionario iniziale e sono stati evidenziati i 5 diversi stili da loro liberamente adottati (fumetto, schema, disegno, racconto ed elenco, in Figura 3) per rispondere alla prima domanda del questionario: che cosa si dovrebbe fare per riuscire a risolvere un problema matematico? L'obiettivo era quello di far loro scegliere uno stile condiviso da utilizzare in seguito per l'attività di gruppo. Di comune accordo, dopo aver ponderato vantaggi e svantaggi di ogni opzione, gli allievi hanno scelto lo stile del "racconto".

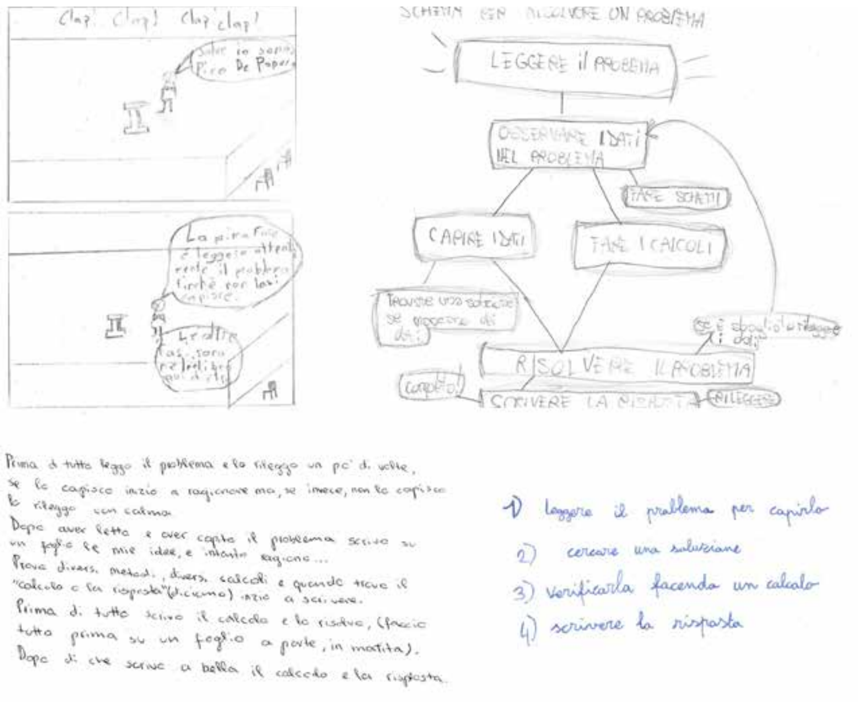


Figura 3. Esempi degli stili di risposta adottati dagli allievi per rispondere al questionario iniziale.

Successivamente, gli studenti sono stati suddivisi in 4 gruppi creati a partire dai processi risolutivi emersi dall’analisi delle risposte da loro fornite al questionario iniziale: leggere, comprendere, risolvere e riflettere. A ciascun gruppo sono stati presentati tutti gli enunciati espressi dagli allievi inerenti a quel preciso processo (Allegato 3), come riportato per chiarezza in **Figura 4** relativamente al processo “leggere”.

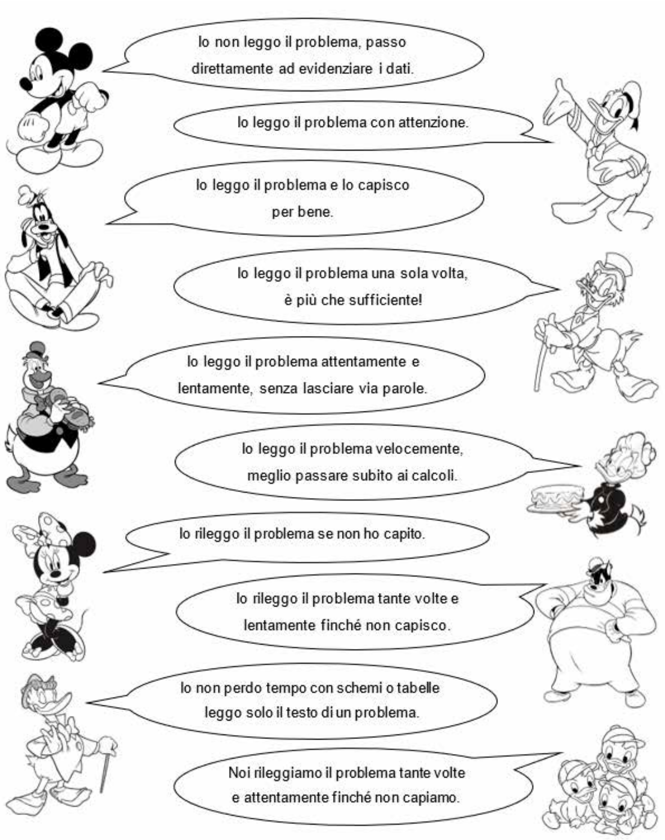


Figura 4. Raccolta di enunciati proposti al gruppo dedicato al processo della lettura.

Gli allievi hanno dovuto riflettere su tali enunciati e valutare l’importanza degli stessi, per poi riassumere il procedimento da loro validato utilizzando lo stile scelto del racconto. In **Figura 5** è riportata la risposta data dagli allievi appartenenti al gruppo “leggere”.

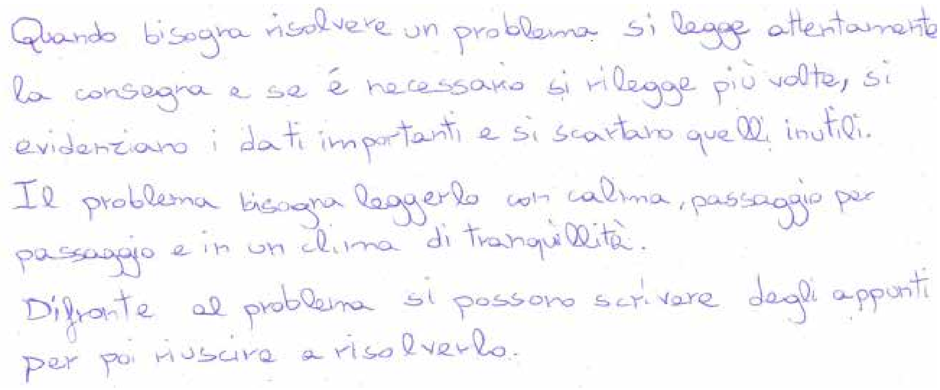

Quando bisogna risolvere un problema si legge attentamente la consegna e se è necessario si rilegge più volte, si evidenziano i dati importanti e si scartano quelli inutili.
Il problema bisogna leggerlo con calma, passaggio per passaggio e in un clima di tranquillità.
Difronte al problema si possono scrivere degli appunti per poi riuscire a risolverlo.

Figura 5. Procedimento validato in condivisione dal gruppo chiamato a lavorare sul processo della lettura.

Ciascun gruppo è stato poi chiamato a presentare il proprio lavoro davanti ai compagni e, di seguito, la classe è stata coinvolta in una discussione generale con l’obiettivo di definire lo schema finale da tutti condiviso. Per poter fissare in maniera stabile tale procedimento comune è stato infine realizzato un cartellone (**Figura 6**), la cui copia è stata poi consegnata a ciascun allievo per utilizzo personale.

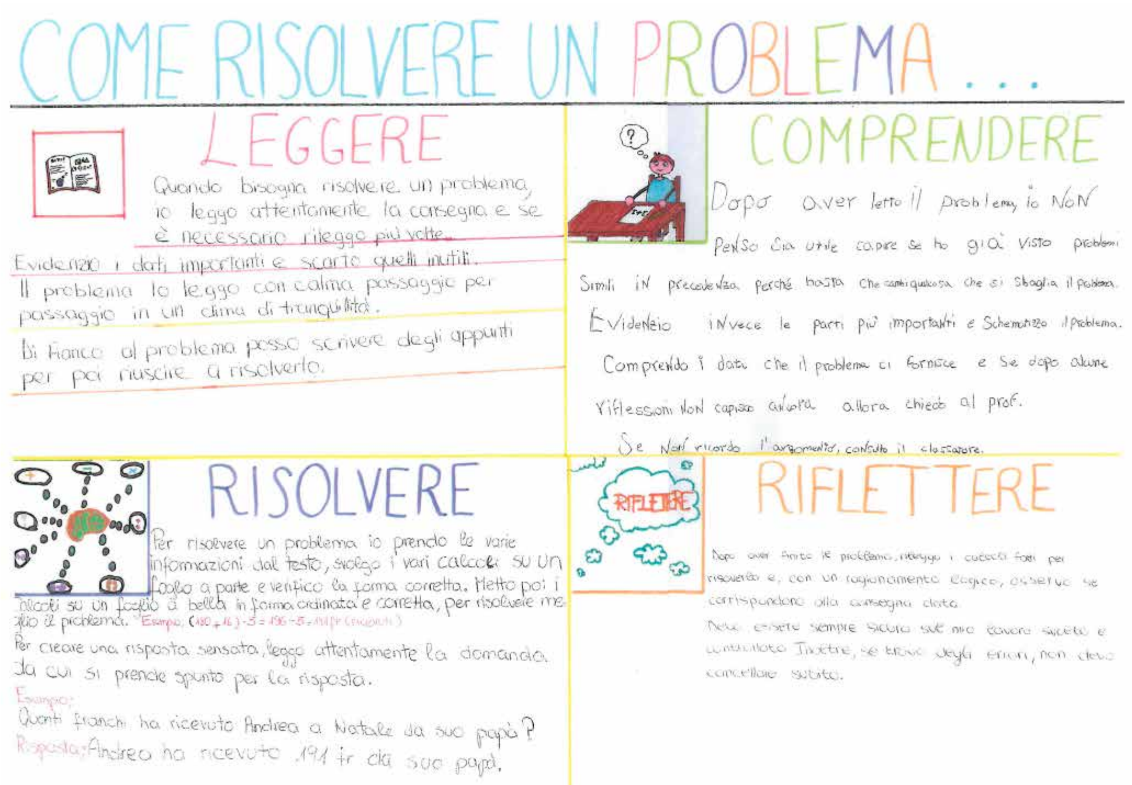


Figura 6. Cartellone finale con riportato il procedimento condiviso da tutti gli allievi riguardo ai processi necessari per risolvere al meglio un problema matematico.

Si riporta per maggiore chiarezza quanto scritto nel cartellone:

– Leggere → Quando bisogna risolvere un problema, io leggo attentamente la consegna e se è necessario rileggo più volte. Evidenzio i dati importanti e scarto quelli inutili. Il problema lo leggo con calma passaggio per passaggio in un clima di tranquillità. Di fianco al problema posso scrivere degli appunti per poi riuscire a risolverlo.
– Comprendere → Dopo aver letto il problema, io non penso sia utile capire se ho già visto problemi simili in precedenza perché basta che cambi qualcosa che si sbaglia il problema. Evidenzio invece le parti più importanti e schematizzo il problema. Comprendo i dati che il problema ci fornisce e se dopo alcune riflessioni non capisco ancora allora chiedo al prof. Se non ricordo l’argomento, consulto il classatore.
– Risolvere → Per risolvere un problema io prendo le varie informazioni dal testo, svolgo i vari calcoli su un foglio a parte e verifico la forma corretta. Metto poi i calcoli su un foglio di bella in forma ordinata e corretta, per risolvere meglio il problema. Esempio: (180 + 16) – 5 = 196 – 5 = 191 Fr (ricevuti). Per creare una risposta sensata, leggo attentamente la domanda da cui si prende spunto per la risposta. Esempio: Quanti franchi ha ricevuto Andrea a Natale da suo papà? Risposta: Andrea ha ricevuto 191 Fr da suo papà.
– Riflettere → Dopo aver finito il problema, rileggo i calcoli fatti per risolverlo e, con un ragionamento logico, osservo se corrisponde alla consegna data. Devo essere sempre sicuro sul mio lavoro svolto e controllato. Inoltre, se trovo degli errori, non devo cancellare subito.

Ciò che emerge dalla lettura del cartellone e, in generale, da questa prima attività non si discosta da quanto precedentemente osservato dall’analisi del questionario iniziale:

– si dichiara l’importanza di una lettura intensiva e di un’eventuale rilettura;
– si ricorre ad una selezione delle informazioni del testo per comprenderne il significato;
– si procede in maniera rigorosa e schematica per la risoluzione matematica;
– si sottolinea l’importanza di controllare che i calcoli abbiano senso rispetto alla consegna data.

L’aspetto estremamente positivo di questa attività è stato che tutti gli allievi hanno partecipato con interesse e mettendosi in gioco, sia nella discussione di gruppo sia nella realizzazione pratica del cartellone. Gli allievi in genere più timidi hanno trovato questa modalità utile per offrire anch’essi il loro valido contributo.

4.2 Parallelismo tra fasi individuate e ciclo della matematizzazione

A questo punto del percorso, dopo aver definito le fasi ritenute dagli allievi necessarie per la risoluzione di un problema matematico, è stata loro presentata la distinzione tra “mondo reale” e “mondo matematico”. Si è scelto di definire questi due concetti al fine di costruire il terreno necessario per allestire un parallelismo tra le fasi individuate dagli allievi e il ciclo della matematizzazione.
Agli allievi sono stati presentati alcuni esempi di semplici problemi per rendere a tutti chiara la differenza tra “mondo reale” e “mondo matematico”. Una volta chiarite queste due espressioni, è stato chiesto agli allievi di inserire le quattro fasi di risoluzione da loro individuate nello schema riportato nella scheda dell’attività (Allegato 4): si è dunque ottenuto un ciclo della matematizzazione personalizzato sulla base delle convinzioni iniziali degli allievi, come riportato in Figura 7. Tale ciclo è stato più volte ripreso e ridiscusso durante l’intervento didattico per consolidare la prospettiva generale di quanto svolto e per evidenziare, all’inizio di ogni attività, la fase specifica su cui lavorare e da analizzare.

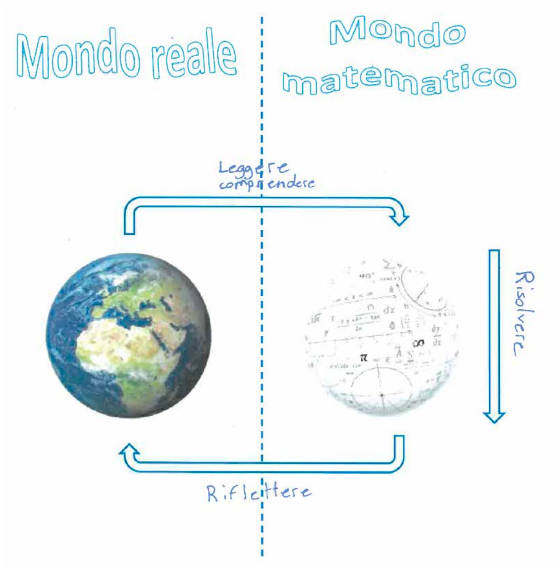


Figura 7. Parallelismo tra fasi riconosciute dagli allievi e ciclo della matematizzazione.

Come si evince dall’immagine, gli allievi hanno riconosciuto che:

– le fasi “leggere” e “comprendere” sono necessarie per tradurre il problema dal mondo reale al problema matematico e permettono di comprendere correttamente il significato e la richiesta del problema e di distinguere ciò che serve per risolvere un problema da ciò che è invece superfluo;
– la fase “risolvere” permette di raggiungere la soluzione matematica del problema e consiste nel mettere in gioco le risorse proprie della disciplina, muovendosi dunque sempre all’interno del mondo matematico;
– la fase “riflettere” consente di tornare dal mondo matematico al mondo reale, elaborando dunque una risposta al problema che tenga conto delle condizioni iniziali.

La distinzione tra “mondo reale” e “mondo matematico” non è risultata immediata agli allievi ed è stato necessario proporre più esempi per chiarire le differenze. L’obiettivo dell’attività, tuttavia, non è risultato compromesso e grazie a queste riflessioni si è potuto definire uno schema generale che, in maniera sintetica ed evidente, andasse a ricapitolare le fasi necessarie da attuare in relazione ai diversi contesti, con richiamo al ciclo della matematizzazione.

4.3 Lettura di diversi tipi, generi e formati di testi

L’obiettivo di questa attività è stato quello di presentare agli allievi le diverse modalità di lettura, da adattare in funzione del contesto e dell’obiettivo.

Gli allievi sono stati suddivisi in gruppi e in ciascuno di essi sono stati nominati un portavoce e un responsabile del tempo, incaricato di prendere nota del tempo impiegato dal gruppo per svolgere ogni successiva richiesta. L’attività proposta (Allegato 5) è stata articolata su cinque sezioni:

1. lettura di alcuni volantini per scoprire quali di essi vendono cellulari;
2. lettura di un dizionario per cercare due termini matematici;
3. lettura di un testo narrativo matematico breve (alcune pagine), tratto da un’opera di Cerasoli (2001), per poter imparare una storia da saper poi raccontare con parole proprie;
4. lettura di un testo tratto da un manuale scolastico per apprenderne il significato matematico;
5. esercizio finale per consolidare la relazione tra testo, scopo e tipo di lettura.

Per ciascuna delle prime quattro sezioni è stato chiesto agli allievi di rispondere, terminata la lettura del testo specifico, alle seguenti domande volte ad indagare la modalità di esecuzione e le caratteristiche della lettura effettuata:

– come avete effettuato la lettura di questo testo?
– che cosa vi siete chiesti durante l’attività per raggiungere il vostro obiettivo?
– avete incontrato delle difficoltà? Se sì, quali?
– la lettura è stata faticosa o piacevole?
– quanto tempo avete impiegato per raggiungere l’obiettivo?

Al termine di queste sezioni di lettura, la classe si è riunita per discutere riguardo alle risposte fornite da ogni gruppo. Per ciascuna sezione sono stati riportati alla lavagna i principali commenti degli allievi, sui quali tutti erano concordi (appunti in nero nella **Figura 8**). In seguito, grazie a questo momento di condivisione, è stato possibile dare a ogni modalità di lettura adottata un nome (appunti in verde nella **Figura 8**) e una descrizione più formale (**Figura 9**).

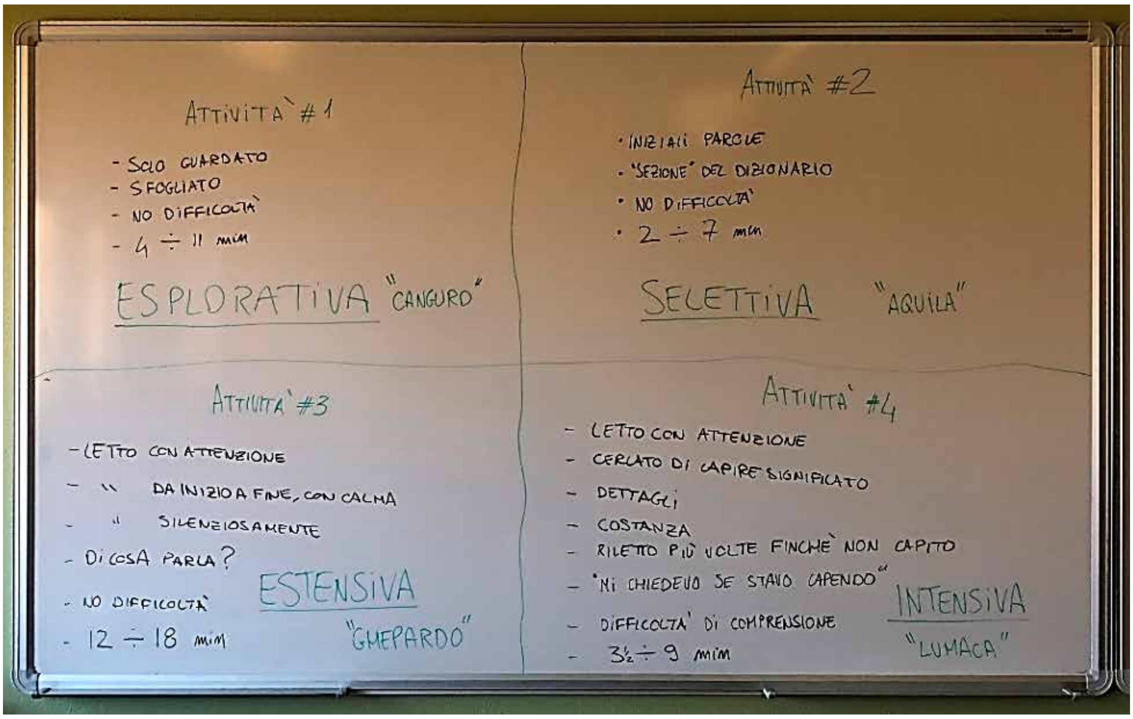
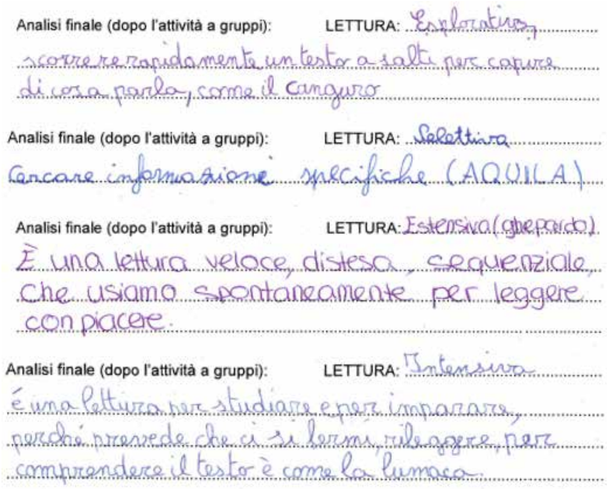


Figura 8. Lavagna con riportato quanto emerso dalla discussione a gruppo riunito a seguito delle 4 diverse attività di lettura.



Analisi finale (dopo l'attività a gruppi): LETTURA: Esplorativa
scorrere rapidamente un testo a salti per capire di cosa parla, come il canguro

Analisi finale (dopo l'attività a gruppi): LETTURA: Selettiva
Cercare informazione specifiche (AQUILA)

Analisi finale (dopo l'attività a gruppi): LETTURA: Estensiva (ghepardo)
È una lettura veloce, distesa, sequenziale, che usiamo spontaneamente per leggere con piacere.

Analisi finale (dopo l'attività a gruppi): LETTURA: Intensiva
è una lettura per studiare e per imparare, perché prevede che ci si fermi, rileggere per comprendere il testo è come la lumaca.

Figura 9. Descrizione delle caratteristiche di ogni tipo di lettura presentata: esplorativa, selettiva, estensiva e intensiva.

Come emerso, a ciascuna delle prime quattro sezioni dell’attività corrisponde una modalità di lettura prevalente, nell’ordine: lettura esplorativa, lettura selettiva, lettura estensiva e, infine, lettura intensiva. Dopo averne definito le caratteristiche, ad ogni modalità è stata attribuita l’immagine di un animale per permettere con più chiarezza di ricordare il tipo di atteggiamento da adottare: canguro (lettura esplorativa), aquila (lettura selettiva), ghepardo (lettura estensiva) e lumaca (lettura intensiva). L’attività si è conclusa con l’ultima sezione (Allegato 5), in cui gli allievi sono stati chiamati ad associare ad un determinato testo e scopo la migliore modalità di lettura da attuare, specificandone inoltre le caratteristiche. In **Figura 10** si riportano invece alcuni ulteriori esempi, costruiti dagli allievi stessi, relativi all’associazione testo, scopo, tipo di lettura e caratteristiche della lettura.

TESTO	SCOPO	TIPO DI LETTURA	CARATTERISTICHE DELLA LETTURA
Istruzioni farmaco	capire come assumere il farmaco	L. Intensiva	Lentamente/senza saltare passaggi
Schede classeur	preparare un formulario per la verifica	L. Selettiva	Mirata
Giornale	leggo per non annoiarti	L. Estensiva	Scorrevole/Piacevole
Tutorial videogioco	capire come si gioca (solo alcuni comandi)	L. Selettiva	comprensiva/a salti

Figura 10. Tabella compilata dagli allievi con esempi di generi di testi e relativi scopi, con associate le rispettive modalità di lettura e caratteristiche.

L’attività è stata svolta in modo lineare e scorrevole, senza particolari ostacoli che ne compromettessero lo sviluppo. Tuttavia, gli allievi hanno riscontrato alcune difficoltà nel rispondere alle seguenti domande riguardo alle attività di lettura esplorativa (volantino) e selettiva (dizionario):

– come avete effettuato la lettura di questo testo?
– che cosa vi siete chiesti durante l’attività per raggiungere il vostro obiettivo?

Tali difficoltà possono essere dovute al fatto che l’obiettivo da raggiungere in queste attività era apparentemente semplice e, dunque, gli allievi hanno agito in modo spontaneo. Ciò ha determinato una maggiore rapidità di esecuzione ma, al contempo, anche maggiori difficoltà nell’indagare le modalità del proprio agire.

In aggiunta, distinguere una lettura esplorativa da una lettura selettiva non è stato per tutti immediato: la non sequenzialità di entrambe le letture le rendeva agli occhi degli allievi molto simili tra loro. È stato quindi più volte necessario rimarcarne la differenza, insistendo sull’atteggiamento da adottare in analogia con il mondo animale (atteggiamento del canguro rispetto a quello dell’aquila).

Grazie a queste attività, gli allievi hanno imparato che esistono diverse modalità di lettura e che il tipo di lettura dipende fortemente dal testo e dallo scopo che si ha. Gli allievi hanno accresciuto la propria consapevolezza sull’argomento e hanno acquisito strumenti efficaci per dettagliare e per saper spiegare le modalità con cui leggono un determinato testo.

4.4 Analisi di testi di diversi tipi di problemi

Dopo essere venuti a conoscenza delle diverse modalità di lettura a loro disposizione, gli allievi sono stati chiamati a lavorare sull’analisi del testo di una raccolta di problemi, tra loro differenti per natura, in modo da poter focalizzare l’attenzione sulle operazioni di lettura e comprensione. L’obiettivo di questa attività è stato quello di offrire del tempo agli allievi per analizzare in profondità il testo di un problema. Si è cercato di evitare di passare direttamente alla fase risolutiva, concedendo quel tempo prezioso, ma spesso trascurato, che permette di eseguire correttamente le operazioni di lettura e comprensione, tanto importanti nel processo "formulare" del ciclo della matematizzazione.

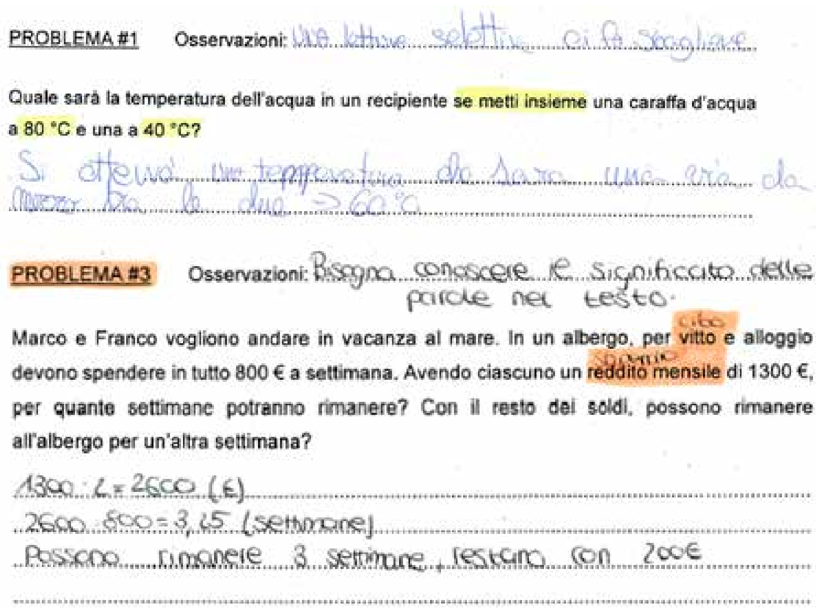
Agli allievi sono state consegnate le schede (Allegato 6) contenenti i problemi di diversa natura da analizzare: 2 problemi con i dati coperti; 2 problemi con i dati mancanti; 3 problemi con relazioni numeriche complesse; 4 problemi in cui emerge in modo chiaro l'effetto negativo di una lettura selettiva; 1 problema con domande non stereotipate; 1 problema con un contesto non familiare; 1 problema con una struttura narrativa del testo; 4 problemi con lessico specialistico o non noto.

A gruppo riunito, la classe ha affrontato un problema alla volta. Dopo una prima lettura insieme, ad ogni allievo è stato concesso il tempo per rileggere il testo, comprenderlo e analizzarlo individualmente. Al termine di questa riflessione in autonomia, la classe ha discusso delle difficoltà emerse nel processo di lettura e comprensione del testo. Dopo aver analizzato collettivamente il problema, è stato infine dedicato del tempo per la risoluzione dello stesso.

Durante l'analisi dei problemi gli allievi sono stati stimolati alla riflessione da domande utili a verificare la loro comprensione del testo, quali:

– di cosa parla il testo?
– chi sono i protagonisti del testo?
– sai descrivere con parole tue quello che hai appena letto?
– hai dubbi sul significato di qualche parola o frase?
– secondo te nel testo manca qualche informazione importante?
– perché ti viene data questa informazione? Pensi possa essere utile?

Sono riportati di seguito (**Figura 11**) due protocolli degli allievi: il primo relativo ad un problema in cui emerge in modo chiaro l'effetto negativo di una lettura selettiva e il secondo relativo a un problema con lessico non noto agli allievi. Per una loro corretta interpretazione, si precisa che il testo di ogni problema è stato prima analizzato individualmente da ogni allievo: le parti evidenziate sono quindi opera del lavoro autonomo dell'allievo. Successivamente, la classe ha apertamente discusso riguardo al significato del problema e ha infine proseguito nella risoluzione collettiva. La risoluzione dei due problemi che si osserva di seguito non riflette quindi le difficoltà individuali incontrate inizialmente dagli allievi durante l'analisi in autonomia del testo: tali ostacoli sono stati infatti superati grazie alla discussione collettiva con i compagni, che ha contribuito a modificare le convinzioni iniziali di ogni allievo.


PROBLEMA #1 Osservazioni: Una lettura selettiva ci fa sbagliare

Quale sarà la temperatura dell'acqua in un recipiente se metti insieme una caraffa d'acqua a 80 °C e una a 40 °C?

Si otterrà una temperatura che sarà una via di mezzo tra le due → 60 °C

PROBLEMA #3 Osservazioni: Bisogna conoscere il significato delle parole nel testo.

Marco e Franco vogliono andare in vacanza al mare. In un albergo, per vitto e alloggio devono spendere in tutto 800 € a settimana. Avendo ciascuno un reddito mensile di 1300 €, per quante settimane potranno rimanere? Con il resto dei soldi, possono rimanere all'albergo per un'altra settimana?

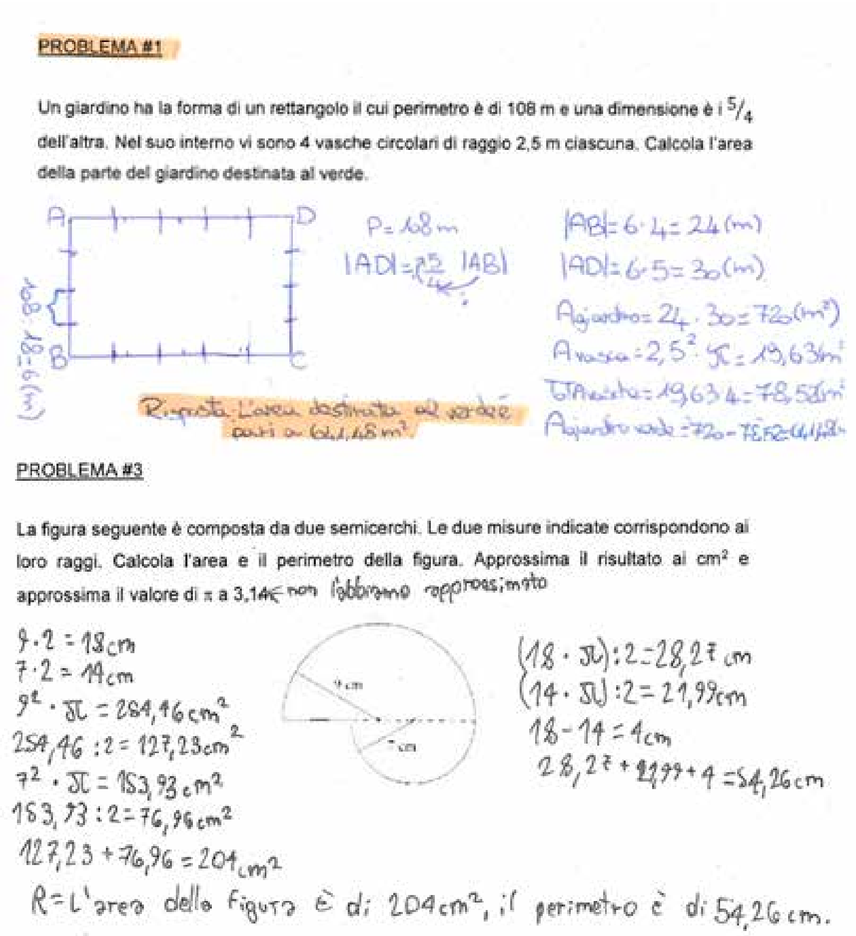
1300 · 2 = 2600 (€)
2600 : 800 = 3,25 (settimane)
Possono rimanere 3 settimane, restano con 200 €

Figura 11. Analisi del testo di due problemi proposti per evidenziare gli effetti negativi della lettura selettiva e le difficoltà di comprensione se il lessico non è noto.

Come già anticipato, i due problemi sono stati proposti al fine di evidenziare sia gli effetti negativi di una lettura selettiva (“se metti insieme” suggerisce, erroneamente, di addizionare tra loro i dati), sia le difficoltà di comprensione laddove vi è una mancata conoscenza del significato di alcune parole (“vitto”, “alloggio”, “reddito” e “resto”).
In alcuni casi (problema con relazioni numeriche complesse, problema con domande non stereotipate e problema con un contesto non familiare) gli allievi si sono soffermati troppo sul processo risolutivo, alla ricerca della strategia opportuna per risolvere il problema, pur non essendo questo il reale obiettivo dell’attività. Ciò ha provocato un certo rallentamento e per queste ragioni di tempo, dunque, l’analisi del testo è stata svolta soltanto su un problema per tipo.
Nello svolgimento dell’attività, gli allievi hanno sicuramente riscontrato le maggiori difficoltà di comprensione del testo nei problemi con un contesto astratto o con relazioni numeriche complesse: è evidente come un contesto per loro familiare possa infatti agevolare la comprensione. È inoltre emerso con evidenza come la lettura selettiva sia rischiosa da attuare nella risoluzione di problemi matematici: molti allievi, infatti, durante l’analisi individuale del testo eseguita inizialmente, sono stati condizionati da alcune parole ingannevoli del testo nella scelta del procedimento risolutivo da attuare, come ad esempio le espressioni “mettere insieme” e “in tutto” che suggeriscono, talvolta erroneamente, un’operazione di addizione.
Nel complesso l’attività, pur limitata dal tempo a disposizione a causa dell’interruzione della scuola in presenza, si è rivelata produttiva e ha permesso di mostrare agli allievi le insidie nascoste nel testo di un problema, che possono tuttavia essere affrontate grazie ad una lettura profonda di tipo intensivo.

4.5 Risoluzione di problemi e applicazione di strategie e calcoli

Il percorso è proseguito con una diversa attività che ha permesso agli allievi di focalizzare l’attenzione sulla fase da loro definita “risolvere”, corrispondente al processo “utilizzare” del ciclo della matematizzazione. L’obiettivo di questa attività è stato dunque quello di far riflettere gli allievi riguardo all’importanza di possedere un valido bagaglio di conoscenze e abilità matematiche per poter risolvere adeguatamente un problema.
Agli allievi sono stati assegnati sette problemi (Allegato 7), principalmente riguardanti gli argomenti affrontati nel corso delle ultime settimane: circonferenza, poligoni regolari e frazioni. I ragazzi sono stati chiamati a svolgere a coppie tali problemi. Successivamente, a gruppo riunito, è stato risolto ciascun problema alla lavagna e gli allievi hanno discusso riguardo alle principali difficoltà affrontate nello svolgimento. A titolo esemplificativo, sono riportati di seguito due protocolli (Figura 12) nei quali emerge l’importanza, ai fini della risoluzione, di possedere conoscenze matematiche sia riguardo al calcolo dell’area e della circonferenza di un cerchio sia riguardo al concetto di frazione come operatore.


PROBLEMA #1

Un giardino ha la forma di un rettangolo il cui perimetro è di 108 m e una dimensione è i $^5/_4$ dell'altra. Nel suo interno vi sono 4 vasche circolari di raggio 2,5 m ciascuna. Calcola l'area della parte del giardino destinata al verde.

PROBLEMA #3

La figura seguente è composta da due semicerchi. Le due misure indicate corrispondono ai loro raggi. Calcola l'area e il perimetro della figura. Approssima il risultato ai cm^2 e approssima il valore di π a 3,14

Figura 12. Protocolli riguardanti lo svolgimento di problemi somministrati con l'obiettivo di focalizzare l'attenzione sul processo "utilizzare".

La principale difficoltà riscontrata dagli allievi nel primo problema ha riguardato il calcolo della lunghezza dei lati del rettangolo: per ottenere tale informazione era infatti necessario interpretare correttamente la relazione fornita dal testo del problema: "una dimensione è i 5⁄4 dell'altra". Inoltre, non conoscendo la lunghezza di nessuno dei due lati e avendo come unica informazione il perimetro della figura, gli allievi sono stati chiamati ad utilizzare la relazione iniziale per individuare una strategia efficace per ricavare la lunghezza dei lati a partire dalla lunghezza del contorno.

Nel secondo problema, invece, gli allievi hanno dovuto richiamare alla memoria le loro conoscenze tecniche relative al calcolo della lunghezza di una circonferenza e dell'area di un cerchio. La figura non convenzionale proposta dal problema ha introdotto alcuni ostacoli nella risoluzione, in particolare per quanto riguarda il calcolo della lunghezza del segmento facente parte del contorno della figura. La richiesta di approssimazione, invece, è stata talvolta trascurata dagli allievi, sia per distrazione sia per una loro ancora radicata tendenza nel prediligere il calcolo esatto anziché quello approssimato.

In generale, questa attività ha permesso di osservare come diversi allievi, pur avendo dichiarato di aver compreso il significato e la richiesta dei problemi, si sono trovati in difficoltà nell'elaborare un procedimento risolutivo a causa di una carente o non ancora efficace padronanza delle risorse matematiche. In particolare, le maggiori difficoltà in tal senso sono emerse negli esercizi sulle circonferenze e sulle frazioni, nei quali agli allievi è stata richiesta una maggiore abilità cognitiva sia nel riconoscimento delle relazioni tra i dati sia nell'utilizzo di formule non per tutti ancora chiare e consolidate.

In particolar modo per gli allievi più in difficoltà, ma non solo, questa attività si è dunque rivelata efficace in quanto ha evidenziato come senza un valido bagaglio di conoscenze e abilità matematiche sia impossibile risolvere la maggior parte dei problemi. Oltre alle competenze linguistiche che permettono di eseguire una corretta lettura e comprensione è dunque fondamentale possedere gli strumenti e le risorse della disciplina.

4.6 Riflessione e interpretazione nella risoluzione di problemi

A questo punto del percorso, dopo aver affrontato le fasi "leggere", "comprendere" e "risolvere", si è scelto di dedicare questa attività al processo di riflessione e interpretazione, spesso sottovalutato o trascurato dagli allievi. L'obiettivo è stato quello di fare in modo che gli allievi comprendessero che ad un certo punto risulta necessaria l'operazione di interpretazione del processo risolutivo e la lettura del risultato in base al contesto reale. In alcuni casi è addirittura richiesta la modifica del processo risolutivo e del risultato matematico ottenuto, se non adeguati al mondo reale.
In primo luogo, per poter in seguito agevolare l'esecuzione dell'attività, si è scelto di ripassare lo schema personalizzato dagli allievi relativo al ciclo della matematizzazione. In questo modo è stato possibile rievocare la distinzione tra "mondo reale" e "mondo matematico", utile per la successiva fase di analisi.
Sono stati assegnati agli allievi cinque problemi (Allegato 8):

- due di questi problemi prevedono un risultato matematico che ha senso nel mondo reale;
- tre di questi problemi prevedono un risultato matematico che richiede un'interpretazione e una modifica dello stesso sulla base del contesto reale.

Dopo una fase iniziale di risoluzione a coppie, a gruppo riunito è stata in seguito riservata particolare attenzione all'analisi finale del risultato matematico ottenuto per ciascun problema. È stato dunque richiesto agli allievi di riflettere insieme sullo svolgimento da loro proposto e di pensare se quanto da loro ottenuto avesse senso oppure no nel contesto reale descritto dal testo del problema. Gli allievi hanno potuto riconoscere i casi nei quali il risultato matematico ottenuto aveva poco senso nel mondo reale e, dunque, necessitava di essere adeguatamente interpretato e modificato.
Di seguito (Figura 13) due protocolli esplicativi degli allievi, realizzati in collaborazione con il gruppo classe:

PROBLEMA #4

Per la fessura della buca delle lettere della casa di Ada si riesce a far passare a malapena una busta quadrata di 84 cm di perimetro. Per il compleanno di Ada, Elia le ha confezionato una busta rotonda. Quanto deve essere lunga al massimo la circonferenza della busta per passare dalla buca delle lettere?

Lato busta Quadrata = 84 : 4 = 21(cm) ⟶ Diametro busta circolare = 21cm
C busta = D · π = 21 · π ≃ 65,97(cm)

Risposta: La circonferenza massima è di 65,97

ANALISI: Il risultato matematico ha senso nel mondo reale

PROBLEMA #5

Per arredare la sua nuova casa Federica deve scegliere le piastrelle per il soggiorno. La superficie da piastrellare ha un'estensione pari a 25 m². Sapendo che tutte le piastrelle sono congruenti e che ciascuna misura 1350 cm², quante piastrelle dovrà comprare Federica?

25 m² = 250000 cm²
N piastrelle = 250000 : 1350 = 185,18 piastrelle
R: dovrà comprare 186 piastrelle.

ANALISI: Il risul. mat. è corretto ma non ha senso nel mondo reale → interpretare

Figura 13. Protocolli riguardanti lo svolgimento e l'analisi di problemi con l'obiettivo di focalizzare l'attenzione degli allievi sull'interpretazione dei risultati.

L’attività è stata svolta nel rispetto dei tempi e in linea con l’obiettivo previsto. Gli allievi non hanno riscontrato particolari difficoltà nello svolgimento dei problemi e nel riconoscimento dei risultati da interpretare alla luce del contesto di partenza. Tuttavia, solo in pochi casi questa operazione di interpretazione è stata svolta prima dell’esplicita richiesta di analisi del risultato matematico ottenuto.
Questa attività ha dunque permesso di rendere gli allievi consapevoli dell’importanza di eseguire una riflessione critica una volta ottenuto il risultato matematico di un problema. Questa riflessione è essenziale e deve tenere conto del contesto definito in partenza: solo in questo modo, infatti, è possibile far comunicare tra loro il “mondo matematico” e il “mondo reale”, chiudendo il ciclo dell’attività di risoluzione di un problema matematico.

4.7 Analisi di protocolli di problemi matematici

L’intervento didattico si è concluso con un’attività in cui sono stati mostrati alla classe alcuni problemi e i relativi procedimenti eseguiti da allievi di quinta elementare, nell’ambito della prova standardizzata di matematica svolta nel 2015 e analizzata da un punto di vista didattico da Sbaragli e Franchini (2018). L’obiettivo di questa attività è stato quello di allenare gli allievi ad una profonda analisi dei protocolli, finalizzata all’individuazione di eventuali errori e, in questi casi, del processo specifico in cui ciascun errore è stato commesso.
Agli allievi sono stati presentati i testi di alcuni problemi con i rispettivi protocolli (Allegato 9) ed è stato richiesto di esprimersi, su schede dedicate (Allegato 10), in merito alla correttezza di ciascun protocollo proposto. In caso di protocolli non corretti, è stata richiesta agli allievi una ricerca profonda e avanzata volta ad indicare in quale fase di risoluzione del problema era stato commesso l’errore:

– lettura e comprensione (formulare): l’allievo sbaglia perché ha letto / compreso male il testo;
– risoluzione (utilizzare): l’allievo sbaglia a svolgere i calcoli o utilizza formule sbagliate;
– riflessione (interpretare): l’allievo non riflette sul senso del risultato ottenuto.

Di seguito (**Figura 14**) il protocollo di un’allieva, realizzato in collaborazione con il gruppo classe:

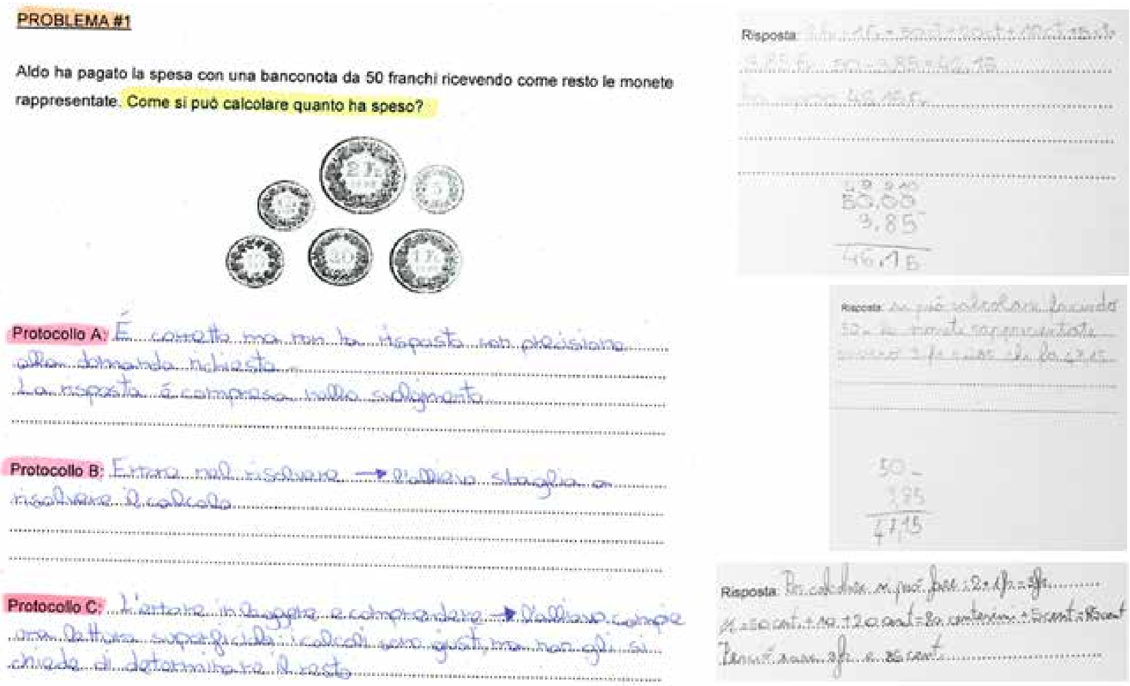


Figura 14. Analisi (a sinistra) di vari protocolli di risoluzione (a destra) di un problema somministrato ad allievi di quinta elementare.

Questa attività è stata svolta pochi giorni prima della chiusura delle scuole a causa della pandemia da virus COVID-19. La situazione delicata che già condizionava il clima di classe in quei giorni ha dunque compromesso il pieno svolgimento dell’attività: diversi allievi (5) non erano presenti a lezione e solo la metà dei problemi previsti è stata analizzata.
Nonostante questi impedimenti, l’attività è stata svolta in maniera costruttiva e gli allievi presenti hanno offerto il loro contributo in maniera molto positiva. La richiesta di correggere protocolli altrui ha divertito i ragazzi e questo aspetto motivazionale ha permesso di soddisfare l’obiettivo prefissato. Come emerge dal protocollo riportato, gli allievi hanno mostrato una buona capacità nel distinguere i procedimenti corretti da quelli errati, individuando non solo gli errori più evidenti compiuti a livello del processo “utilizzare” ma riconoscendo anche le imprecisioni più velate dovute ad una lettura superficiale del testo, la quale spesso conduce ad una risposta non precisa alla domanda del problema. In conclusione, gli allievi si sono dunque resi conto che per comprendere la natura di un errore è importante indagare il processo in cui tale errore è stato commesso: per fare ciò è necessario essere consapevoli dei processi che caratterizzano il ciclo della matematizzazione, che gli allievi hanno scoperto e approfondito nel corso di questo intervento didattico. Un comportamento consapevole e riflessivo di questo tipo consente sicuramente di sviluppare allo stesso tempo un maggiore atteggiamento critico nei confronti del proprio operato.

5 Sintesi dei risultati

Dall’analisi del questionario iniziale somministrato agli allievi ad inizio percorso emerge un comportamento abbastanza standardizzato nella risoluzione di problemi matematici da parte degli allievi. Le fasi da loro riconosciute per lo svolgimento di un problema sono riconducibili ai processi “formulare” e “utilizzare” del ciclo della matematizzazione: leggere, comprendere, risolvere e riflettere. Nessun allievo prende dunque in reale considerazione i processi “interpretare” e “valutare”. Gli allievi riconoscono l’importanza di leggere con attenzione il testo di un problema, ma dimostrano poca abilità nel dettagliare le modalità con cui leggono un testo: la lettura è per loro un’operazione automatica e spontanea, e non ne colgono ancora il reale significato ai fini della comprensione del testo. La risoluzione di un problema per quel che riguarda l’applicazione di algoritmi risolutivi avviene in modo molto stereotipato: si ricercano parole all’interno del problema per capire come combinare tra loro i dati e si scrivono le operazioni che più si adattano ai numeri del problema. È dunque chiaro come il focus degli allievi sia principalmente puntato sull’applicazione di algoritmi piuttosto che sull’attività di ragionamento che coinvolge i restanti processi del ciclo della matematizzazione. Infine, le strategie metacognitive degli allievi si limitano alla rilettura del procedimento o del testo del problema: manca una vera e propria riflessione sul risultato matematico ottenuto e un’interpretazione dello stesso alla luce del contesto reale.
Quanto appena descritto è raccolto sinteticamente nel seguente schema (**Figura 15**): nella colonna di sinistra sono indicate le quattro fasi individuate dagli allievi (e la percentuale relativa agli allievi che hanno nominato tale fase nelle loro risposte del questionario), mentre nella colonna di destra sono elencati i principali atteggiamenti dichiarati dagli allievi in ogni specifica fase. Per la corretta comprensione dello schema, si segnala che le frecce contenute nella colonna di destra indicano, laddove presente, una variazione nei contenuti tra le risposte fornite alla prima parte del questionario (domanda aperta) e alla seconda parte (elenco di atteggiamenti e convinzioni riguardo ai quali esprimersi a favore o sfavore).

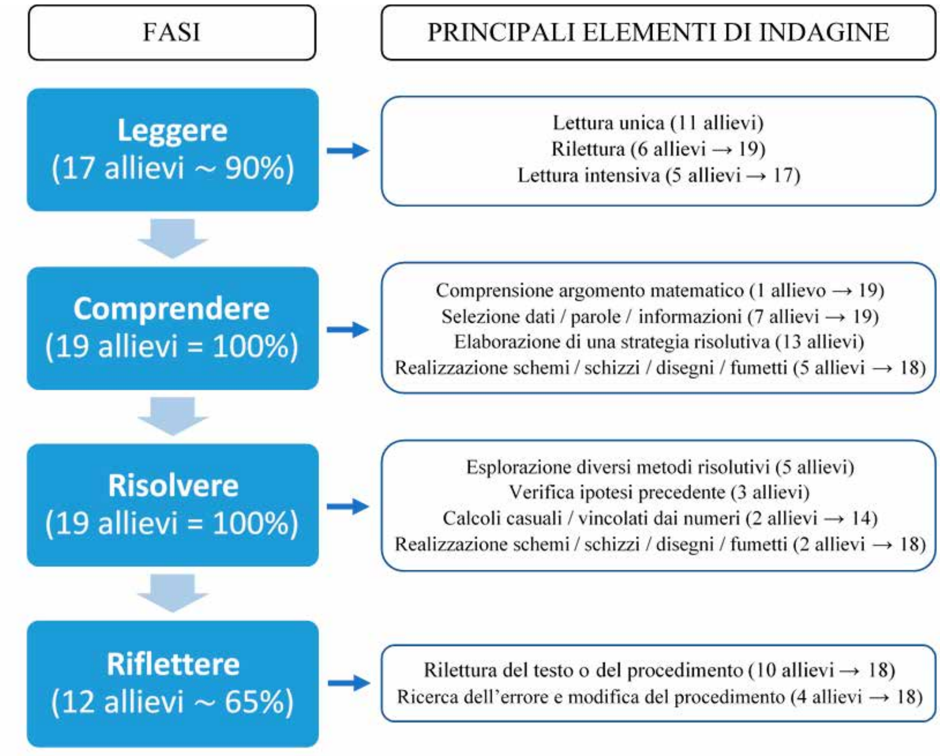


Figura 15. Schema riassuntivo relativo alle principali operazioni svolte dagli allievi durante il processo di risoluzione di un problema matematico.

Grazie al percorso svolto gli allievi hanno modificato almeno in parte le loro convinzioni riguardo agli elementi e ai processi efficaci al fine di una risoluzione ottimale di un problema matematico. Tra le risposte fornite dagli allievi alle varie domande del questionario finale (Allegato 11), è interessante osservare come sono cambiate le loro convinzioni rispetto a delle identiche affermazioni già presenti nel questionario iniziale. Nel seguente grafico (Figura 16) sono riportati in blu i punteggi assegnati dagli allievi a ciascun enunciato nel questionario iniziale e in arancione i punteggi relativi al questionario finale (1 = per nulla d’accordo; 2 = poco d’accordo; 3 = abbastanza d’accordo; 4 = molto d’accordo). È possibile osservare come in tutti gli enunciati (a eccezione del 21) si verifica una variazione delle convinzioni degli allievi, in alcuni casi minima e in altri più marcata.

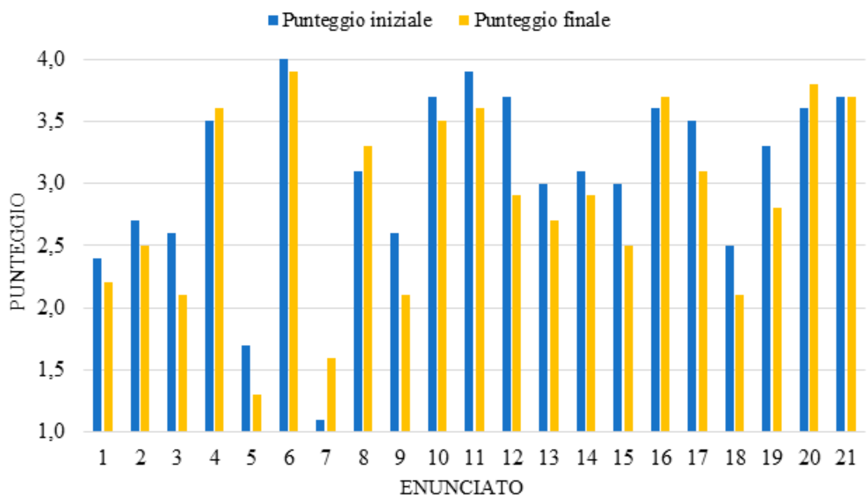


Figura 16. Confronto tra i punteggi iniziali e finali relativi agli elementi e ai processi ritenuti efficaci per l’ottimale risoluzione di un problema matematico.

Nella tabella seguente (**Tabella 1**) si riportano i 21 enunciati per una migliore lettura e analisi del grafico precedente.

1.	È più facile comprendere un problema con un testo più corto rispetto a un problema con un testo più lungo.
2.	È più facile risolvere un problema con una sola domanda rispetto a un problema con tante domande.
3.	È più facile svolgere i calcoli di un problema con numeri piccoli rispetto a un problema con numeri grandi.
4.	Utilizzare tutto il tempo necessario per leggere in profondità il testo di un problema matematico allo scopo di comprenderne bene il senso.
5.	Leggere velocemente il testo di un problema matematico per concentrarsi prima possibile sul procedimento matematico da implementare.
6.	Rileggere il testo di un problema se alla prima lettura non si è capito il significato.
7.	Leggere soltanto il testo di un problema. Tutto il resto (es. disegni, schemi, tabelle) non serve per comprenderne il significato.
8.	Cercare il significato di una parola sul dizionario se non si conosce.
9.	Capire che tipo di testo si sta leggendo: se non ha dati numerici, allora non è un problema matematico.
10.	Prima di pensare ad un possibile procedimento risolutivo, cercare di capire l’argomento matematico che emerge dal problema.
11.	Cercare di capire il significato della/e domanda/e presenti nel problema.
12.	Cercare nel testo del problema le parole che suggeriscono l’operazione da fare.
13.	Pensare se il problema proposto ha una struttura simile a quella di problemi già visti.
14.	Prima di iniziare a scrivere sul foglio, pensare a tutto il procedimento risolutivo.
15.	Provare a scrivere le operazioni che sembrano più adatte ai numeri e alle parole del problema. Scegliere poi quella che si ritiene corretta.
16.	Fare disegni o schemi se può essere utile per risolvere alcuni problemi.
17.	Modificare subito il procedimento se ci si rende conto di avere sbagliato.
18.	Essere più concentrati quando si svolgono i calcoli rispetto a quando si sceglie l’operazione da scrivere: è peggio infatti fare un errore di calcolo piuttosto che sbagliare a scegliere le operazioni.
19.	Chiedere subito aiuto ai compagni o al docente quando non si capisce qualcosa.
20.	Dopo aver svolto il procedimento risolutivo, controllarlo per assicurarsi di non avere fatto errori.
21.	Dopo aver svolto il procedimento risolutivo, rileggere il problema per assicurarsi che il processo e la soluzione siano accettabili.

Tabella 1. Elenco degli enunciati riguardo ai quali gli allievi hanno espresso il loro grado di condivisione sia nel primo che nel secondo questionario.

L’analisi delle variazioni più significative del grafico, supportata dalle ulteriori risposte fornite dagli allievi alle altre domande del questionario, permette di osservare con piacere che gli allievi hanno imparato ad attribuire alla lettura un significato molto più importante: alcuni allievi riconoscono che è possibile utilizzare molteplici modalità di lettura, in funzione del tipo di problema e delle richieste, ma la maggior parte degli allievi dichiara che è necessaria una lettura intensiva per comprendere il significato di un problema e per non perdere informazioni importanti. La lettura del testo e la comprensione che ne deriva si configurano quindi come processi necessari per passare dal mondo reale al mondo matematico. Grazie al percorso svolto, gli allievi dichiarano di aver imparato a risolvere un problema in maniera più riflessiva e ragionata: la scelta del procedimento risolutivo da attuare è ora meno vincolata dalle parole presenti nel testo o dal tipo di dati. Si riconosce inoltre l'importanza di porsi domande in itinere, utili per tenere sotto controllo il procedimento e per evitare errori, distrazioni o dimenticanze. In aggiunta a tutto questo, sembra anche che gli allievi abbiano compreso l'importanza di riflettere sul risultato matematico ottenuto. Per la maggior parte degli allievi, tale operazione consiste in una rilettura del testo o del procedimento mentre solo per alcuni allievi si configura in una più consapevole operazione di interpretazione e valutazione del risultato matematico ottenuto alla luce del contesto reale. Infine, è con grande piacere che tra i vari protocolli emerge la risposta di un'allieva (**Figura 17**) che con forte entusiasmo si mostra consapevole di aver sviluppato nel percorso anche alcune importanti competenze trasversali (DECS, 2015), quali la collaborazione e la comunicazione.

RISPOSTA:

In questi mesi ho imparato a risolvere i problemi matematici con molta più facilità.
Ho imparato che esistono 4 passaggi che si devono fare in un problema e che esistono molti modi diversi di lettura.
Il lavoro della lettura che abbiamo fatto a gruppi mi è piaciuto molto anche perché questi lavori ci insegnano a collaborare e infatti noi per la lettura esplorativa ci siamo divise i giornali e abbiamo fatto più in fretta.
Poi è bello anche confrontarsi con gli altri per vedere come hanno letto loro, perché magari qualcuno non ha usato un certo tipo di lettura che invece qualcun altro ha fatto e si impara qualcosa di nuovo.
Ho imparato moltissime cose e ne sono felice.
Ma poi il bello è che queste cose si possono usare anche nella vita reale, infatti mia mamma, visto che è una docente, mi ha chiesto aiuto per una cosa e io gli ho insegnato un po' di cose.

Figura 17. Risposta di un'allieva alla domanda del questionario riguardo agli apprendimenti acquisiti grazie al percorso svolto.

6 Conclusioni

Il percorso didattico descritto nei paragrafi precedenti ha permesso di intervenire sulle convinzioni degli allievi riguardo agli elementi e ai processi da attuare al fine di una risoluzione efficace di un problema matematico.
Grazie a questo percorso il focus degli allievi si è maggiormente spostato dal prodotto al processo. Le numerose attività svolte sui vari processi del ciclo della matematizzazione hanno infatti reso gli allievi consapevoli che l'attività di risoluzione di un problema matematico non si limita unicamente ad una semplice lettura e alla scrittura di calcoli e che, inoltre, il risultato non è tutto. Gli allievi hanno appreso che il testo di un problema matematico può essere letto in vari modi, ma solo una lettura intensiva permette di cogliere ogni dettaglio, che la scelta delle operazioni e lo svolgimento dei calcoli deve avvenire in modo ragionato e richiede una comprensione totale della richiesta del problema, che porsi domande durante l'esecuzione significa essere previdenti e che un problema non può dirsi concluso se non dopo aver riflettuto sul risultato matematico ottenuto.
Gli allievi hanno inoltre imparato a distinguere con maggiore consapevolezza il "mondo reale" dal "mondo matematico", riconoscendo l'efficacia di ciascun processo a loro presentato all'interno del ciclo della matematizzazione. Le fasi descritte dagli allievi nel questionario iniziale (leggere, comprendere, risolvere e riflettere), caratterizzate in origine da una certa indipendenza e da un legame tra loro di tipo sequenziale, sono state progressivamente inserite dagli allievi all'interno di una struttura

più estesa che permette loro di avere una maggiore visione d’insieme, utile per definire il concreto apporto di ciascun processo alla complessa attività di risoluzione di un problema matematico.
Con riferimento ai risultati ottenuti, è emerso come pochi allievi siano realmente consapevoli del processo interpretativo necessario per chiudere il ciclo della matematizzazione. Probabilmente l’acquisizione di tale processo è più difficile da conseguire per gli allievi poiché richiede loro una certa capacità riflessiva non scontata alla loro età. Sarebbe quindi opportuno dedicare più tempo all’analisi di questo importante processo e prevedere attività più approfondite che permettano agli allievi di acquisire un atteggiamento più critico e riflessivo. L’interruzione della didattica in presenza a causa della pandemia da virus COVID-19 non ha sicuramente consentito di dedicare a questo processo l’attenzione e lo spazio opportuno che avrebbe meritato.
Una delle problematiche principali riguardo all’estendibilità dell’efficacia di questo percorso didattico è stato il numero esiguo di allievi del campione di riferimento. Sarebbe interessante proporre questo percorso ad un numero maggiore di allievi, non solo di seconda media, in modo da osservare come gli apprendimenti e le convinzioni si modificano al variare dell’età e delle esperienze degli allievi. Inoltre, il presente lavoro non valuta se le convinzioni acquisite dagli allievi riguardo ai processi efficaci per la risoluzione di un problema matematico si mantengano costanti oppure subiscano ulteriori modifiche. Sarebbe quindi interessante proporre, nei mesi successivi alla compilazione del questionario finale, ulteriori problemi da analizzare e sui quali discutere in maniera più approfondita.
Oggigiorno viviamo in una società frenetica e sempre in movimento. I nostri allievi sono esposti a numerosi stimoli e distrazioni ed è spesso difficile per loro mantenere per un tempo adeguato l’attenzione necessaria per svolgere un’attività. Uno degli obiettivi di questo percorso didattico è proprio quello di far comprendere agli allievi l’inefficacia di un agire rapido e impulsivo nell’attività di risoluzione di un problema matematico. È necessario che gli allievi imparino a procedere con calma, dedicando il tempo adeguato a ciascun processo del ciclo della matematizzazione. La maggiore consapevolezza acquisita dagli allievi grazie a questo percorso didattico permette loro di abbandonare un atteggiamento frettoloso, volto a raggiungere nel minor tempo possibile il risultato di un problema. Ciò che permette all’allievo di sviluppare con solidità le proprie competenze, infatti, non è il focus sul risultato ma la corretta e profonda applicazione dei processi necessari per la risoluzione di un problema.

Bibliografia

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Cerasoli, A. (2001). *I Magnifici Dieci*. Sperling & Kupfer.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. In C. Parra & I. Saiz (Eds.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51–64). Paidós.

Clements, M. A. (1980). Analysing children’s errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 1–21.

D’Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Digital Docet.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula, 5*, 9–43.

Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport. (2015). *Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese.* Repubblica e Cantone Ticino, Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport, Divisione della scuola. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds

Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 1*, 38–63.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*(7), 519–524.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(9), 2481–2502.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin, 39*, 31–43.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2013). *The PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2016). *The PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2018), *Valutazione didattica delle prove standardizzate di quinta elementare*. SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189–215). Lawrence Erlbaum Associates.

Schwartz, L. (1994). Le point de vue de Laurent Schwartz. *Dossier Les Mathématiciens, Pour la Science, 2*, 15–18.

Tanner, R., & Green, C. (1988). *Tasks for teacher education. A reflective approach*. Addison Wesley Longman.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project.* Kluwer Academic Publishers.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Pitagora.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Carocci.