DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2021 (10), 9 - 28, DOI: 10.33683/ddm.21.10.1

OPEN ACCESS

Dans quelle mesure est-il important de résoudre et de faire résoudre les problèmes ?

How important is to solve problems and to give problems to be solved?

Gilles Aldon
S2HEP, Université Lyon 1 Claude Bernard – Lyon, France

gilles.aldon@ens-lyon.fr

« Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit » .
(Bachelard, 1967)

Résumé / Faire des maths, c'est manipuler l'abstrait, manipuler des symboles et manipuler la logique. Enseigner des mathématiques passe donc par la proposition par le professeur de situations dans lesquelles les élèves pourront à travers ces manipulations explorer une petite partie des mathématiques. Ce faisant, les élèves travailleront à la fois sur les heuristiques leur permettant de s'engager dans une véritable recherche mathématique et sur les connaissances en construction. Au moyen d'exemples de situations didactiques de recherches de problèmes, cet article montre comment les problèmes peuvent être des moteurs de l'apprentissage des mathématiques.

Mots-clefs : résolution de problèmes ; expériences ; épistémologie ; situation didactique ; apprentissage des mathématiques.

Abstract / Doing mathematics implies three levels of manipulation: manipulating the abstract, manipulating symbols and manipulating logic. Teaching mathematics therefore involves the teacher proposing situations in which pupils can explore a small part of mathematics through these manipulations. In doing so, the pupils work on both the heuristics enabling them to confront themselves with a real mathematical research and knowledge in construction. Through examples of didactic situations of problem solving, this article aims to show how problems can be drivers of mathematics learning.

Keywords: problem solving; experiences; epistemology; didactical situation; mathematics learning.

1 Introduction

Qu'est-ce que *faire des mathématiques* ? Cette question apparemment simple ouvre un univers de questions d'ordre philosophique, épistémologique et didactique. Selon les définitions données par le *Trésor de la Langue Française informatisé*,[1] le verbe « faire » utilisé dans cette question, mais aussi utilisé dans le contexte plus large du monde de l'enseignement des mathématiques, suppose que le sujet va « donner l'existence aux », ou « être l'auteur des » mathématiques auxquelles il est confronté. Ainsi, « faire des mathématiques » serait en créer. Cette réponse apparemment simple cache cependant des questions centrales de la philosophie des mathématiques, qui alimentent les débats depuis la nuit des temps : lorsque nous faisons des mathématiques, découvrons-nous un monde qui existe déjà, comme le soutient la philosophie de Platon, ou construisons-nous des mathématiques en nous appuyant sur notre intuition de l'espace et du temps, comme le suggère Kant ? Il se peut que ces réflexions dépassent le cadre de l'enseignement des mathématiques et n'aient de sens que pour la recherche mathématique, la création (ou la découverte !) mathématique. Personnellement, je ne le pense pas. Et cet article de réflexion tente de montrer que les élèves, lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes mathématiques, deviennent des créateurs de mathématiques, puisqu'ils manipulent des concepts a priori : « des pensées sans contenu sont vides, des intuitions sans concepts sont aveugles » (Kant, 1781/1905, p. 91, *Introduction à la logique transcendantale*). Bien que les directives institutionnelles[2] soulignent depuis longtemps l'importance des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, l'imprécision des fondements épistémologiques de ces directives devient un frein au déploiement à grande échelle d'un enseignement fondé sur la résolution de problèmes. En effet, de nombreux manuels ou sites pédagogiques se réfèrent à ces directives pour présenter une vision « scolaire » de la résolution de problèmes, en s'appuyant notamment sur les hypothèses behavioristes de la construction des connaissances. Ainsi, par exemple, la résolution d'un problème mathématique *a priori* intéressant et fructueux pourrait être réduit à répondre à une succession de questions interconnectées, dont le sens global ne peut être compris qu'au prix d'un effort supplémentaire de synthèse, effort qui est très rarement demandé. À titre d'exemple, considérons un problème largement étudié (Aldon et al., 2017) ; voici deux énoncés possibles se référant à la même situation mathématique :

1. Soit A et B deux points situés dans un même demi-plan délimité par une droite d. Où doit-on placer un point M sur d pour que la distance $AM + MB$ soit la plus courte possible ?
2. Soit A et B deux points situés dans un même demi-plan délimité par une droite d. Soit M un point sur d.
   a. Construire le point A', symétrique du point A par rapport à d.
   b. Prouvez que $AM + MB = A'M + MB$.
   c. Déduisez la position de M sur d pour que la distance $AM + MB$ soit la plus petite possible.

Le premier énoncé, ouvert, laisse le choix de la stratégie : la méthode n'est pas explicitée et les moyens de résolution sont donc laissés à la responsabilité des élèves. Dans le deuxième énoncé, en revanche, le choix de la méthode, le cadre et les outils à utiliser sont imposés. Néanmoins, les deux énoncés peuvent être considérés comme des « problèmes », à condition qu'ils soient proposés à des élèves pour lesquels la résolution ne consiste pas à réaliser un exercice d'application, mais à une véritable recherche et mobilisation de connaissances antérieures. Le premier énoncé est ce que l'on appelle dans l'enseignement des mathématiques un « problème ouvert » pour les élèves (Arsac et

1. http://atilf.atilf.fr/
2. Je fais notamment référence au système éducatif français, dont les programmes sont disponibles à l'adresse suivante : https://www.ac-strasbourg.fr/fileadmin/pedagogie/mathematiques/Lycee/Programmes/programmes_Maths2019.pdf

al., 1991), par analogie avec les fameux sept « problèmes du millénaire », dont six sont encore des questions ouvertes, c'est à dire des questions qui n'ont pas encore été résolues par les mathématiciens.
Les réflexions proposées dans cet article veulent montrer comment la résolution de problèmes instituée en méthode d'enseignement peut permettre aux élèves de construire et de consolider leurs connaissances mathématiques. Ces réflexions s'appuient sur des travaux de recherche et des observations de la mise en œuvre en classe de ce que nous appellerons des « situations didactiques de recherches de problèmes », conduits par l'équipe DREAM (*Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques*) ainsi que sur les résultats d'une expérimentation menée dans le cadre de la *Maison des Mathématiques et de l'Informatique* (MMI) de Lyon. Le travail de l'équipe DREAM se place depuis une dizaine d'années dans la tradition des « problèmes ouverts » au sein de l'IREM de Lyon[3] ainsi que sur les recherches menées au sein de l'Université de Lyon (Aldon et al., 2010 ; Arsac et al., 1991). L'une des particularités du groupe de recherche est sa composition : des chercheurs et des enseignants de tous les niveaux de l'école conçoivent et proposent des situations didactiques de recherche de problèmes, en réfléchissant ensemble à leurs effets sur les apprentissages des élèves.
Dans la première partie de cet article, nous exposons les hypothèses de travail de l'équipe DREAM à travers quelques réflexions préliminaires issues de la philosophie des mathématiques, qui serviront à préciser les fondements épistémologiques qui sous-tendent les expériences présentées dans la deuxième partie. A l'aide de deux exemples tirés des expériences menées dans le cadre de cette recherche, je montre quelles analyses du travail en classe sont possibles à l'aune de ces hypothèses.

2 Quelques réflexions préliminaires

Giuseppe Longo (2020) nous rappelle que « les mathématiques sont abstraites, symboliques et rigoureuses... au-delà des axiomes, derrière les axiomes » (p. 3). C'est précisément en reprenant ces trois directions de pensée (abstraction, symbolisme, logique) que je présente la position de l'équipe DREAM sur la question des problèmes dans l'enseignement des mathématiques (Aldon et al., 2017 ; Front, 2015 ; Gardes, 2013).

2.1 Qu'est-ce qu'un problème ?

Étymologiquement, le mot « problème » dérive du grec *Πρόβλημα*, dont le verbe de référence est *προβάλλειν*, c'est-à-dire « jeter en avant » : il s'agit donc de « se projeter en avant », de se diriger vers l'avenir, donc de tenter d'utiliser des connaissances pour atteindre une solution, en utilisant des méthodes reconnues par la société, la discipline ou plus généralement par l'institution dans laquelle on évolue. Cet article adopte la perspective de Brousseau selon laquelle :

> « Tout ce qui fait, non pas seulement la vérité, mais l'intérêt d'un théorème et avec cela, ce que Gonseth appelait le caractère idoine d'une connaissance mathématique, ce qui fait que cette connaissance existe comme solution optimale dans le champ défini par un certain nombre de contraintes […] ce qui en fait une solution à un problème ».
>
> (Brousseau, 1976, p. 103)

3. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lyon : http://math.univ-lyon1.fr/irem/.

Ainsi, au sein des mathématiques, c'est-à-dire dans le processus de mathématisation verticale (Treffers, 1987) sur lequel se concentre cet article, un problème est une question qui conduit à un résultat mathématique, un théorème, qui va élargir le champ de connaissance de la discipline. La résolution d'un problème implique donc l'utilisation d'un raisonnement reconnu comme valide au sein de la discipline. Cela nous amène évidemment à une première question : quels sont ces raisonnements valides ? Cette question nous amène à considérer à la fois l'apprentissage de ces modes de raisonnement et les connaissances que la solution du problème auquel on est confronté nécessitent. Ces connaissances sont en effet une condition nécessaire pour que le problème puisse être abordé. Schoenfeld (1998) montre la nécessité d'engager, dans la résolution de problèmes, à la fois les connaissances déclaratives (1 et 2) et les connaissances procédurales (3), qu'il définit comme :

1. la connaissance informelle, que l'on peut associer aux *intuitions* dites *pures* de Kant, est fondée sur l'appréhension sensible de l'espace et du temps ;
2. les faits et les définitions, qui permettront de nommer et de manipuler les objets mathématiques impliqués dans le problème ;
3. les procédures, qui renvoient à la fois aux règles de calcul et aux raisonnements et routines permettant de manipuler les objets et donc d'alimenter et de renforcer la déduction et la validation des résultats.

Ainsi, la résolution d'un problème mathématique consiste à manipuler simultanément l'*abstrait*, les *symboles* et la *logique*, en suivant Schoenfeld (1998) mais aussi Bonnay et Dubucs qui écrivent :

> « [on peut] donner une représentation fidèle et cognitivement plausible des trois éléments qui sont au cœur des mathématiques, premièrement les objets auxquels se réfèrent le mathématicien, deuxièmement les formules qu'il utilise, troisièmement l'activité mentale qui est la sienne ».
> (Bonnay et Dubucs, 2011, pp. 17-18)

2.2 Manipuler l'abstrait

Le titre de ce paragraphe peut sembler contradictoire, si l'on considère qu'une « manipulation » consiste à tenir « en main » l'objet que l'on souhaite transformer ou comprendre. C'est précisément ici que se pose la question de « l'existence » des objets mathématiques. Si l'on adopte un point de vue platonicien, le monde mathématique existe indépendamment de l'homme ; il s'agit de découvrir les propriétés des objets qui existent a priori. Mais ce réalisme se réfère-t-il aux objets mathématiques qui existent indépendamment de l'homme, ou à la vérité des énoncés mathématiques ?
C'est ce que Petitot (1986) appelle « la différence ontologique entre phénomène et objet », l'objet devenant alors « le simple opérateur de traductibilité des faits empiriques et/ou des données numériques dans un langage formel » (p. 3). C'est donc sur la base de cette différence ontologique que le rapport entre les mathématiques et la réalité objective peut être décrit en termes de dialectique « transcendantale » mathématiques-réalité, c'est-à-dire en rapport à l'objectivité : « cet engagement de l'abstrait dans la genèse du concret, c'est dans une interprétation transcendantale qu'on peut le mieux en rendre compte » (Lautman, 1935-1939, cité par Petitot, 1986, p. 14) ; les mathématiques se situent ainsi au carrefour entre l'expérience des phénomènes et le monde des idées. C'est ce qui permet cette manipulation d'objets qui conduit à la création fructueuse de concepts mathématiques. À ce stade, il faut veiller à ne pas confondre l'expérience primitive, qui consiste en une manipulation ne visant pas à la construction de connaissances, et l'expérience scientifique, qui n'a de sens que lorsqu'il y a une réflexion sur les résultats de l'expérience. La vérité scientifique apparaît alors comme le résultat d'un double mouvement : l'*inter*-action avec le concret et la *trans*-action dans la construction de l'expérience et l'interprétation de ses résultats. Les deux mouvements participent dialectiquement à l'élaboration des faits.

2.3 Manipuler les symboles

La syntaxe mathématique est essentielle pour la construction du raisonnement, mais la systématisation du formalisme mathématique conduit inévitablement à s'éloigner du sens et donc de la relation avec l'expérience phénoménologique. Les thèses de Frege et Russell, qui ont tenté de réduire les mathématiques à la logique aux XIXe et XXe siècles, se heurtent au sens et à la réalité des phénomènes : « L'abstrait ne peut pas revendiquer une existence autonome : ceci suffit pour écarter l'idée selon laquelle les axiomes représentent des conventions posées librement par l'esprit » (Gonseth, 1936/1974, p. 92).

En revanche, faire des mathématiques implique l'utilisation d'un symbolisme logique et de systèmes de signes qui permettent de construire et de communiquer les mathématiques. C'est même un enjeu de l'enseignement que de pouvoir maîtriser les différents systèmes de signes et de pouvoir communiquer de l'un à l'autre (Duval, 1991, 1995). Les objets mathématiques sont en effet manipulés à travers leurs représentations au sein de multiples systèmes de signes, où tout le problème consiste à comprendre que l'objet lui-même sera caractérisé par l'ensemble de ses représentations ; de cette façon, un objet mathématique peut être défini comme la classe d'équivalence de toutes ses représentations. Ce fait entraîne deux conséquences essentielles :

1. un objet mathématique peut être intelligible dans un contexte et inconnu ou difficile dans un autre ;
2. la conversion d'un registre de représentation à un autre est essentiel pour appréhender un objet mathématique, ce qui demande un travail de traduction qui à la fois fait perdre des éléments de sens, et en ajoute de nouveaux ; en modifiant le signifiant, c'est-à-dire la manière de désigner l'objet, le signifié, c'est-à-dire l'objet désigné, est modifié, enrichi et complété.

Pour illustrer le premier point, considérons cette multiplication comme un exemple :

$$2375 \times 7 = 16625.$$

Nous avons plusieurs moyens d'évaluer l'exactitude, ou du moins la plausibilité, de ce résultat : l'ordre de grandeur (2500 multiplié par 7 donne le résultat 17500, l'ordre de grandeur est respecté), le nombre d'unités ($7 \times 5 = 35$ et le résultat doit se terminer par 5), et la multiplication elle-même n'est pas difficile et peut être facilement vérifiée. Considérons maintenant cette multiplication :

$$2375 \times 7 = 21353.$$

Notre premier réflexe pourrait être de dire que le résultat est faux, en utilisant les mêmes critères de vérification que ceux mobilisés pour la première opération. Cependant, si l'on change le contexte de départ et que l'on considère que la multiplication se fait en base 8, on se sent soudain perdu, et la vérification de la validité du résultat n'est pas si évidente : les tables de multiplication en base 8 ne nous sont pas familières, et $7 \times 5 = 43$ ne sonne pas juste à nos oreilles ! Pourtant, nous manipulons toujours les nombres naturels, mais par le biais d'une autre représentation.

La deuxième observation concerne la sémiotique et a de nombreuses conséquences didactiques qui ont été largement étudiées dans la littérature (voir, par exemple, Arzarello et al., 2009 ; Bartolini Bussi et al., 2005 ; Duval, 1991, 1995 ; Hitt, 2004 ; Presmeg et al., 2018 ; Sabena, 2018). À cet égard, Duval souligne que : « Des représentations sémiotiques sont des productions constituées de signes appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement. » (Duval, 1991, p. 234). Plus tard, Duval (1993) insiste sur le lien entre conversions de registres et apprentissage : « Il ne peut y avoir de véritable apprentissage tant que les situations et les tâches proposées ne prennent pas en compte la nécessité de plusieurs registres de représentation, pour le fonctionnement cognitif de la pensée, et le caractère central de l'activité de conversion » (p. 64).

La relation dialectique entre *noésis* (compréhension conceptuelle d'un objet) et *sémiosis* (compréhension des représentations sémiotiques d'un objet) est au cœur de la compréhension des objets des mathématiques et participe à « l'engagement de l'abstrait dans la genèse du concret » dont parle Lautman (1977, p. 205).

De ce point de vue la manipulation des symboles, essentielle dans toute pratique mathématique, contribue à la compréhension de l'objet manipulé dans une relation dialectique dont on minimise souvent l'importance en termes didactiques, notamment en suggérant qu'un objet est intimement lié à l'une de ses représentations. L'exemple précédent illustre comment dans le domaine des nombres cette difficulté est présente et, même si un objectif essentiel de l'école primaire est la maîtrise du système de numération décimale de position, il est illusoire et parfois dangereux de laisser penser qu'un nombre est équivalent à sa représentation dans ce système de signes.

2.4 Manipuler la logique

L'une des premières remarques de Polya (1945/1957) dans son livre est la suivante : « si vous ne pouvez pas résoudre le problème proposé, essayez d'abord de résoudre les problèmes connexes » (p. XVII, traduction de l'auteur) ; c'est un conseil essentiel pour inviter les élèves à oser proposer des « petits fragments de mathématiques » qui n'aboutiront peut-être pas à une solution générale, mais qui, en tout cas, participeront à la construction des connaissances mathématiques de l'élève.

2.4.1 Le rôle de la logique dans l'interprétation d'une expérience

Lorsque nous cherchons un problème – où « nous » représente toute personne confrontée à un problème mathématique (qu'elle soit mathématicien ou mathématicienne, élève ou professeur) – tous les moyens sont permis. C'est précisément à ce stade que la créativité et l'appui sur l'intuition permettent de faire émerger des éléments essentiels à la résolution. En ce sens, la recherche d'une solution est le lieu où l'expérience mathématique peut être réalisée. Arrêtons-nous un instant sur le sens que nous donnons à ce terme « expérience » en mathématiques : en suivant Dias (2008), « le va-et-vient entre théorie et expérience est précisément ce qui caractérise une démarche de type expérimentale » (p. 27) ; l'expérience n'a de sens que dans une articulation avec la formulation et la (ou les) validation(s) qui peut(vent) s'entendre comme une vérification empirique ou une preuve au sens mathématique du terme (je reviendrai sur la notion de validation dans le paragraphe suivant). Mais expérimenter suppose que le sujet puisse manipuler des objets concrets ou suffisamment familiers pour qu'ils lui apparaissent comme tels. Ainsi, par exemple, un ou une élève de l'enseignement secondaire sera capable de manipuler les nombres naturels et les opérations élémentaires sur ces nombres *comme s*'il s'agissait d'objets réels. L'expression « comme si » renvoie à des positions épistémologiques fortes, que l'on retrouve par exemple dans la manière dont Poincaré (1902/1968) utilise le concept d'éther, repris ici par Mizony :

> « [...] un éther est la réification (la chosification) d'un espace mathématique utilisé pour étudier un domaine phénoménal. Et s'il y a uncité d'un domaine phénoménal, il y a multiplicité des espaces mathématiques pouvant exprimer un domaine de la physique (c'est ce que Poincaré nomme le pluralisme théorique), et donc multiplicité d'éthers possibles si l'on chosifie ces espaces mathématiques ».
>
> (Mizony, 2006, p. 92)

L'expérience peut également être réalisée sans utiliser la logique des mathématiques. Cependant, il y a un moment où, si l'on veut transmettre les concepts compris ou perçus par l'expérience, il faut passer par les règles permises par la logique mathématique, qui sont au centre de l'énonciation d'une phrase mathématique. C'est en examinant les phrases ainsi produites que l'on peut valider ou rejeter les résultats de l'expérience empirique. La déduction logique existe bel et bien en mathématiques et fonde les raisonnements « hypothético-déductifs », mais le sens des mathématiques réside dans leur relation au réel. Par exemple, la ligne droite euclidienne sans épaisseur est une pure abstraction et la

base de toute la géométrie qui s'applique intuitivement au monde qui nous entoure.
Ainsi l'expérience est à la base de la découverte des mathématiques, et cette découverte doit tenir compte de la structure logique intrinsèque à l'expérience : « L'activité mathématique est une activité expérimentale, autrement dit un système d'actes légalisés par des règles et soumis à des conditions qui en sont indépendantes » (Petitot, 1987, p. 98) citant la position de Cavaillès dans le débat du 4 février 1939 à la Société française de philosophie (Cavaillès & Lautman, 1945). Ou, comme le dirait Lautman, les mathématiques opèrent dialectiquement un passage de l'essence à l'existence :

> « On passe insensiblement de la compréhension d'un problème dialectique à la genèse d'un univers de notions mathématiques et c'est à la reconnaissance de ce moment où l'Idée donne naissance au réel, que doit, à mon sens, viser la Philosophie mathématique ».
>
> (Lautman, 1977, p. 147)

2.4.2 La phase de validation

Comme nous l'avons déjà dit, la validation est un moment fondamental de la résolution de problèmes, qui permet de réunir l'expérience, la théorie et la réflexion sur les résultats de l'expérience. La résolution de problèmes, conçue comme une situation didactique (Brousseau, 1986) doit donc être dévolue aux apprenants. Dans une situation didactique, Brousseau (1986) classe les interactions de l'élève avec le *milieu* (c'est-à-dire, au sens large, l'environnement d'apprentissage) en trois grandes catégories, qui correspondent à trois phases :

– la *phase d'action*, dans laquelle ont lieu des échanges d'informations non codifiées dans un langage, correspondant à des actions que les protagonistes mènent directement sur le *milieu* et sur les autres protagonistes de la situation, en interprétant les rétroactions et en activant leurs connaissances et les théorèmes-en-action dont ils disposent ;
– la *phase de formulation*, au cours de laquelle des informations sont échangées et codifiées dans un langage ;
– la *phase de validation*, au cours de laquelle les jugements sont échangés.

Dans la phase de validation, la relation entre les résultats de l'expérience du *milieu* et les connaissances des protagonistes a lieu ; c'est dans cette phase que les règles de la logique diffèrent des règles établies par la logique classique, qui impliquent le raisonnement hypothético-déductif des mathématiques. Brousseau écrit :

> « Les preuves et validations explicites sont supposées s'appuyer les unes sur les autres jusqu'à l'évidence, mais leur articulation n'est sûrement pas automatique. Les savoirs et les connaissances s'actualisent dans une activité de recherche ou de preuve selon des modalités que l'heuristique cherche à découvrir et que l'intelligence artificielle tente de reproduire ».
>
> (Brousseau, 1986, p. 348)

Il s'agit alors dans cette phase de construire un message mathématique précis, « vrai » au sens mathématique, dans une dimension dialogique dont l'objet porte plus sur la véracité des assertions.
Or, dans ce va-et-vient entre l'expérience et la théorie mathématique censée la modéliser, le sens des objets manipulés est primordial. Il s'agit alors dans une phase de validation de décider, d'une part de la vérité sémantique des énoncés et d'autre part de la vérité pragmatique mettant en jeu la langue naturelle. Pour garantir la véracité des énoncés et permettre la progression de la résolution d'un problème, les protagonistes doivent s'appuyer sur une logique, différente de la logique mathématique des propositions, mais suffisamment explicite pour permettre la transformation des comparaisons faites avec le *milieu* pour progresser vers une traduction formelle, mathématiquement valide dans le langage formel des mathématiques, et à laquelle il est possible d'attribuer la valeur de vérité « vrai »

dans la logique des propositions. Pour être plus précis, il faut distinguer entre la croyance qu'une assertion est vraie (« *véracité* ») et l'accord entre les protagonistes de la situation que l'assertion est vraie (« *véridicité* », entendu comme accord sur la « véracité » d'une assertion) (Vernant, 2004, 2008). La modélisation de la logique dialogique se construit alors sur une articulation entre *véridicité* et vérité, c'est-à-dire une cohérence du dialogue qui peut être jugée intérieurement par les protagonistes, et un résultat qui peut être comparé à un jugement extérieur. La vérité peut alors être comprise, comme le propose Tarski, comme se rapportant à un méta-langage dans lequel la vérité est définie par :

P est vraie si et seulement si *p*, où *p* est la proposition exprimée par *P*.

Cette définition sémantique de la vérité permet différentes interprétations et est neutre d'un point de vue philosophique :

> « En fait, la définition sémantique de la vérité n'implique rien concernant les conditions sous lesquelles un énoncé tel que "la neige est blanche" peut être asserté. Elle implique seulement que toutes les fois que nous assertons ou rejetons cet énoncé, nous devons être prêts à asserter ou à rejeter l'énoncé corrélatif : "L'énoncé 'la neige est blanche' est vrai" ».
>
> (Tarski, 1972, p. 295)

Ainsi, la phase de validation proposée par Brousseau peut être modélisée dans cette perspective, comme l'a souligné Durand-Guerrier :

> « Nous disons que l'appareillage logique dont nous avons besoin pour traiter de la question de l'apprentissage de la preuve et du raisonnement dans la perspective, en particulier, de la théorie des situations didactiques, se doit de mieux rendre compte de l'activité effective du mathématicien, et nous pensons avoir donné des indices de la fécondité, pour cela, des concepts et des méthodes de la théorie des modèles de Tarski ».
>
> (Durand-Guerrier, 2005, p. 23)

Toutes ces considérations philosophiques et logiques constituent une base pour analyser les situations d'enseignement de résolution de problèmes proposées par l'équipe DREAM. L'originalité de ces situations consiste à laisser aux élèves le choix de décider des expériences à réaliser, des types de raisonnement à conduire et des théories mathématiques à utiliser. Dans la deuxième partie de l'article, nous analysons le travail d'élèves confrontés à deux situations de ce type en utilisant les réflexions de ce paragraphe.

3 Deux exemples de situations didactiques de recherche de problèmes

Les exemples suivants sont tirés des observations réalisées par l'équipe DREAM dans un lycée et dans le cadre d'une expérimentation menée à la MMI dans quelques écoles primaires et collèges de la région lyonnaise (Aldon & Garreau, 2017). Le premier exemple développé porte sur l'analyse des comportements d'élèves de *Première*, c'est-à-dire, en France, de la deuxième année de lycée (grade 11). Le deuxième exemple illustre le comportement d'élèves du *Cours Moyen 2* (dernière année de l'école primaire, grade 5) et de la Sixième (première année de l'école moyenne, grade 6).

3.1 Premier exemple : les fractions égyptiennes

3.1.1 Contexte

Outre la problématique ouverte, les travaux de l'équipe DREAM s'appuient également sur les études développées autour de l'articulation entre logique et raisonnement mathématique (Durand-Guerrier, 2005), ainsi que sur les thèses de Marie-Line Gardes (2013) et Mathias Front (2015). La méthodologie de recherche est fondée sur le paradigme de la recherche *orientée par la conception* pour lequel la recherche est ancrée dans une nécessité épistémologique pour les chercheurs d'agir avec les enseignants (Monod-Ansaldi et al., 2019 ; Nizet et al., 2019). Dans cette approche, à partir de situations mathématiques riches, l'équipe analyse d'un point de vue mathématique, didactique et pragmatique le potentiel de ces situations afin de les transformer en situations d'enseignement de résolution de problèmes. Outre les travaux universitaires (thèses de master et de doctorat), les publications de l'équipe de recherche (voir par exemple : Aldon et al., 2010 ; Aldon et al., 2012 ; Front, 2012 ; Front & Gardes, 2015) mettent en évidence les apprentissages des apprenants confrontés à des situations d'enseignement de résolution de problèmes. Chacun des problèmes analysés est testé dans un certain nombre de classes, et c'est sur l'analyse de ces observations que la section suivante est construite. Le problème présenté a été proposé à différents niveaux scolaires, mais dans l'article je ne ferai référence qu'à l'observation réalisée dans une classe de *Première* (grade 11).

3.1.2 Méthodologie

L'objectif des travaux de l'équipe DREAM est de proposer des approches permettant aux professeurs de mathématiques d'utiliser les problèmes dans leur enseignement. Les questions suivantes sont au cœur de la recherche :

- Quelles sont les connaissances, les compétences transversales et méta-mathématiques qui peuvent être évaluées dans une pratique de résolution de problèmes ? Et quels sont les indicateurs qui peuvent être mis en place ?
- La créativité et l'inventivité mathématique développées dans les situations d'enseignement par résolution de problèmes modifient-elles l'image des mathématiques chez les élèves (et leur désir de faire des mathématiques) ? Et pour les enseignants ?
- Les situations didactiques de recherche de problèmes qui développent une forme d'acquisition de connaissances aident-elles les élèves à progresser dans d'autres domaines de l'activité mathématique ? Comment les élèves réinvestissent-ils les compétences et les connaissances qu'ils ont développées dans d'autres contextes ?

Pour répondre à ces questions, nous réalisons des expériences dans les classes des enseignants impliqués dans le projet, qui sont observées et analysées à la lumière des hypothèses de recherche fondées sur nos positions épistémologiques décrites dans la première partie de cet article (sec. 2). Les observations dans ce cas ont eu lieu dans la salle de classe avec un observateur par groupe qui a enregistré les dialogues des élèves.

3.1.3 Le problème

Cette expérimentation a été organisée dans une classe de lycée dans le but de recueillir des éléments de réponse aux questions précédentes, notamment en ce qui concerne la créativité et l'invention mathématique développées par ce type de problème chez les élèves d'une classe de Première scientifique d'un lycée général. L'analyse suivante se concentre sur l'adéquation de nos hypothèses épistémologiques et didactiques par rapport à la réalité d'une situation de résolution de problèmes en classe. Dans cet exemple, les dialogues des élèves qui ont travaillé en groupes formés par l'enseignant ont été enregistrés et l'analyse se concentre à la fois sur le problème lui-même – son potentiel pour développer la créativité et l'apprentissage, et son lien avec les connaissances mathématiques

des élèves – et sur la comparaison entre la base épistémologique de notre étude et le travail réel des élèves.
Cet exemple a été choisi pour mettre en évidence deux aspects développés dans la sec. 2 :
– d'une part, la manipulation de symboles sans compréhension du phénomène en jeu conduit à une impossibilité de conclusion ;
– d'autre part, la tentative de construire une vérité mathématique se fait par la recherche d'un accord entre les participants dans les étapes du raisonnement.

L'énoncé qui a été proposé par le professeur de cette classe de *Première* est le suivant :
1. Pouvez-vous trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que : $1 = 1/a + 1/b$?
2. Pouvez-vous trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que : $1 = 1/a + 1/b + 1/c$?
3. Pouvez-vous trouver quatre entiers naturels distincts a, b, c et d tels que : $1 = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d$?

Continuez...

D'un point de vue mathématique, on peut répondre à la première question par la négative en envisageant diverses stratégies, dont, par exemple, en tirant parti de la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{N}$:
On peut supposer que $2 \leq a < b$ et donc $1/b < 1/a \leq 1/2$ par conséquent $1/a + 1/b < 1$.
La deuxième question peut être traitée en trouvant une méthode générale pour déterminer une décomposition en n fractions de l'unité. Par exemple, à partir des égalités $1 = 1/2 + 1/2$ et $1/2 = = 1/3 + 1/6$, on peut déduire que $1 = 1/2 + 1/3 + 1/6$.
D'une façon plus générale en observant que, quel que soit $n > 0$, $1/n = 1/(n + 1) + 1/n \cdot (n + 1)$ on peut engendrer des solutions de longueurs arbitraires ; il en découle, par exemple, que
$1 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42$ en décomposant $1/6$ en $1/7 + 1/42$. Et ainsi de suite.
La séance a duré une heure, les élèves ont été répartis en sept groupes, chacun d'entre eux a été observé et enregistré par des observateurs externes. L'enseignant a précisé dès le départ que les élèves avaient le droit de passer à la deuxième question même s'ils n'avaient pas résolu la première. L'expérience montre que la première question peut être difficile pour les élèves en raison de la réponse négative : il n'existe pas deux entiers naturels distincts a et b tels que $1 = 1/a + 1/b$! D'une part, cette réponse négative peut heurter le contrat habituel de la classe (quand on pose une question, il y a toujours une solution), d'autre part, elle se heurte au fait que la réponse négative implique une démonstration *universelle* : pour chaque paire d'entiers distincts a et b, $1 \neq 1/a + 1/b$, alors qu'une réponse positive impliquerait une démonstration *existentielle* : il existe deux entiers naturels distincts a et b tels que : $1 = 1/a + 1/b$.
L'enseignant a donné aux élèves la tâche de résoudre le problème en groupe puis, avant la fin de la leçon, d'écrire les résultats du groupe sur une affiche. La demande de l'enseignant d'écrire un compte rendu visible par tous avait pour but de stimuler la validation du raisonnement, de permettre aux élèves de se comprendre dans un premier temps et, par conséquent, de tendre vers une vérité sémantique exprimée au tableau.
Je n'entre pas dans le détail de toutes les productions des élèves, mais me concentre plutôt sur quelques moments et dialogues significatifs en termes de manipulation et de validation au sein des groupes.

3.1.4 Observation et discussion

Examinons plus particulièrement ce dialogue mené dans un groupe de quatre élèves (A1, B1, C1 et D1). Après un petit moment de réflexion individuelle, le dialogue commence comme suit.

1. A1 : « T'as trouvé le 2 ? »

2. D1 : « Oui ».
3. A1 : « Une seule solution ? Et si tu multiplies tout par deux ? Essaye avec des multiples ».

[…]

4. A1 : « Faut trouver un entier qui divise 1 et qui soit inférieur à *b*. Faudrait que $a < b$ ou bien que $b < a$ ».
5. B1 : « T'as pas le choix ».
6. A1 : « C'est une histoire de multiples ».
7. B1 : « De multiples ? »

[…]

8. D1 : « La fraction la plus petite avec des entiers c'est 1/2 ; tu peux pas avoir une fraction d'entiers plus petite. [Il mime avec les mains l'unité, puis la moitié et montre qu'il reste une moitié qui ne pourra pas être comblée par les fractions égyptiennes suivantes] ».
9. C1 : « Ah oui, vous avez raison ».
10. D1 : « Le 1 c'est pas possible, la fraction la plus petite c'est 1/2 ».
11. B1 : « Tu peux expliquer ? »
12. D1 : « Pour 2, la solution est : $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$; et pour 3, c'est : $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$, $d = 18$ ».
13. A1 : « Pourquoi le 1 est pas possible ? »
14. D1 : « [Se lance alors dans la détermination de sommes de 4, 5 fractions égyptiennes qu'il construit en décomposant le dernier terme en deux fractions égyptiennes et qu'il ex-plique de la façon suivante à ses camarades] : J'en suis sûr. J'ai pris le chiffre le plus petit sans que ça arrive à 1. C'est le truc des fractions égyptiennes : 1-1/2 = 1/2, 1/2-1/3 = 1/6, j'ai pris le nombre au-dessus : 1/6-1/9 = 1/18. On peut continuer en mettant au lieu de 18… ».
15. A1 : « Pourquoi la première c'est impossible ? »

Cet extrait est particulièrement intéressant en raison d'un malentendu entre les protagonistes. D1, d'abord silencieux, entre dans la discussion en ayant parfaitement compris l'impossibilité de décomposer 1 en la somme de deux fractions égyptiennes distinctes. La justification qu'il propose s'appuie sur la manipulation des grandeurs (intervention 8) ; son geste montre bien sa compréhension profonde du phénomène, que l'élève traduit oralement de manière confuse : « La fraction la plus petite avec des entiers c'est 1/2 ». Ses camarades, qui ne sont pas du tout dans le registre des grandeurs mais plutôt dans le registre algébrique, comme on le voit plus tard, considèrent cette explication orale peu convaincante, même si avec des entiers supérieurs à 2, toutes les fractions égyptiennes sont plus petites que 1/2. La confusion dans le discours de D1 entre « le plus petit entier positif que l'on puisse considérer est 2 » et « la plus petite fraction est 1/2 » (intervention 10), ne lui permet pas de communiquer efficacement son raisonnement à ses camarades, comme en témoignent les questions de B1 (intervention 11) et A1 (intervention 15). Le « Ah oui, tu as raison ! » de C1 (intervention 9) pourrait nous amener à penser que D1 a au moins réussi à convaincre C1. Cependant, lorsqu'il s'agit de résumer leurs recherches au tableau, C1 écrit :

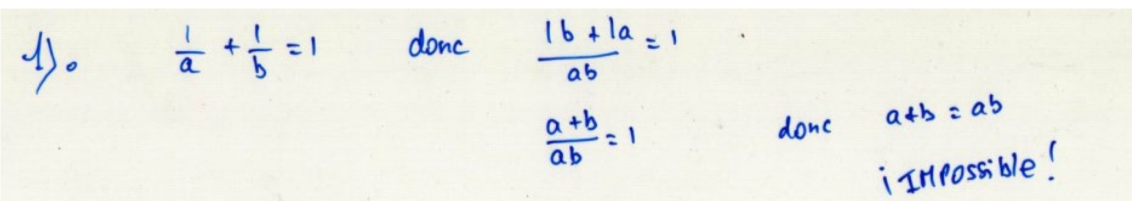


Figure 1. Justification de la première question par C1.

C1 revient alors à un raisonnement algébrique dans lequel la dernière étape (« *Impossible* » dans

la **Figure 1**) n'est pas justifiée. Pour C1, la manipulation de symboles dans le domaine algébrique est consolidée, mais sa comparaison avec D1 (interventions 8-10) ne se transforme pas en une traduction formelle, car les domaines dans lesquels D1 travaille d'une part et C1 d'autre part (avec A1 et B1) sont différents.
Le deuxième aspect intéressant de cet extrait consiste plutôt dans la manipulation des registres de représentation que D1 effectue, traduit et transforme en écriture formelle. Tout se passe comme si le fait d'avoir compris et géré la situation de deux fractions égyptiennes lui permettait de changer de registre et de traduire dans le registre arithmétique et dans l'écriture formelle adéquate les résultats pour finalement trouver le moyen de générer des séries de fractions égyptiennes, aussi longues qu'il le souhaite, de somme 1. C'est ce que D1 dit à C1 dans la deuxième partie du poster (même si en copiant C1 fait une erreur en écrivant au point 2 de la **Figure 2**, 1 - 1/3 = 1/6 au lieu de 1/2 - 1/3 = 1/6).

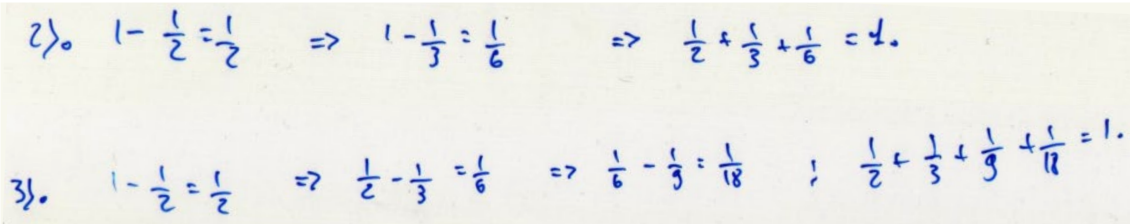


Figure 2. Génération d'une série de fractions égyptiennes de somme 1.

En résumé, dans ce groupe, nous voyons que les manipulations de l'abstrait, des symboles et de la logique dépendent fortement du registre utilisé ; le passage de l'un à l'autre ne peut avoir lieu sans une référence au champ phénoménologique sous-jacent à ce registre.
Examinons maintenant le comportement d'un second groupe dans lequel, après diverses manipulations, des expériences successives conduisent à une démonstration formelle presque complète. Dans un premier temps, le groupe de quatre élèves, que nous appellerons A2, B2, C2 et D2, se place dans un registre algébrique et déduit que si 1 = 1/*a* + 1/*b* alors *a* = *b* - 1/*a* et *b* = *a* - 1/*b*. Puis, en remplaçant a par sa valeur dans la deuxième égalité, ils trouvent 1 = 1, qu'ils ne savent pas trop comment interpréter. Par conséquent, ils changent de stratégie et expérimentent sur les nombres.

1. C2 : « 1 = 1/2 + 1/2 donc c'est possible, mais *a* = *b*. Après c'est l'embrouille ».
2. A2 : « il doit y avoir un algorithme pour passer de la première à la deuxième, donc il faut trouver la première ».

[Malgré une discussion sur les fractions, ils ne parviennent pas à se convaincre de l'impossibilité de la question 1].

3. A2 : « il y a une solution, je ne sais pas comment t'expliquer ! »

[Après être passé à la deuxième question, il revient à la première].

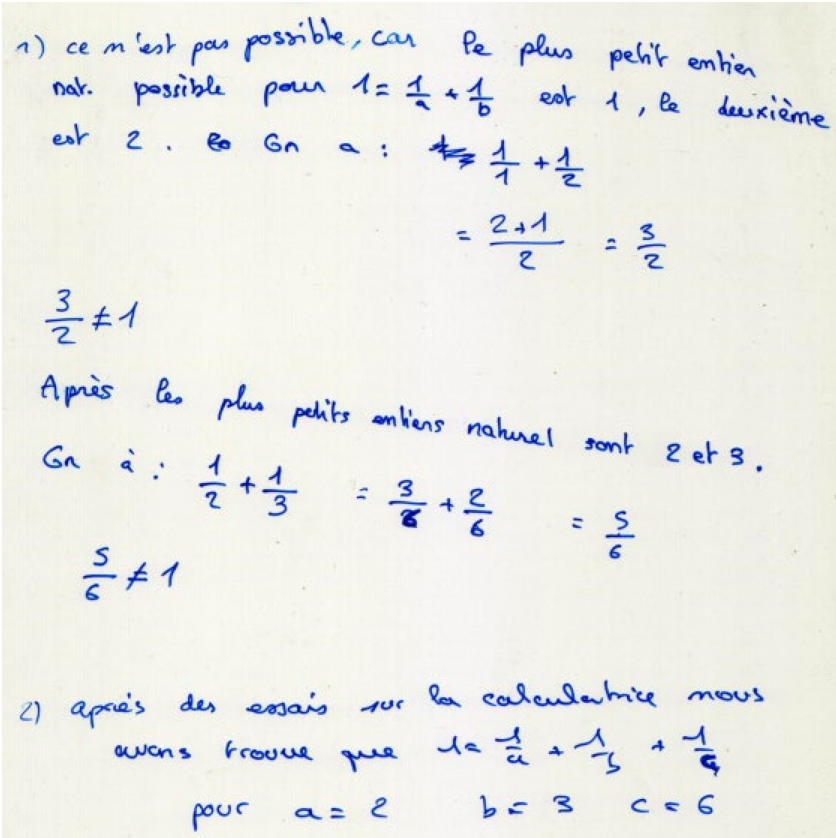
4. A2 : « 1/2 + 1/3, puis 1/3 + 1/4, on s'éloigne de 1 ».
5. C2 : « on n'est pas en SVT[4] à observer ! »
6. A2 : « Si, ça sert de voir ».

[…]

7. A2 : « Moi j'ai prouvé que plus c'est grand, plus on s'éloigne ».

Enfin, ils écrivent leur raisonnement sur le poster de la **Figure 3**.

4. SVT : Sciences de la vie et de la Terre.



1) ce n'est pas possible, car le plus petit entier nat. possible pour $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ est 1, le deuxième est 2. On a : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$

$= \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} \neq 1$

Après les plus petits entiers naturel sont 2 et 3.

On à : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{3}{6}+\frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{5}{6} \neq 1$

2) après des essais sur la calculatrice nous avons trouvé que $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

pour $a=2$ $b=3$ $c=6$

Figure 3. Le poster complet du deuxième groupe.

Dans ce cas, même si l'écriture formelle n'est pas complètement atteinte, le raisonnement suivi par le groupe conduit effectivement à une démonstration de l'impossibilité de décomposer 1 en une somme de deux fractions égyptiennes distinctes. C'est précisément à travers un dialogue concernant la véridicité des assertions que s'élabore la construction mathématique du raisonnement.

Dans ce groupe, le passage d'une vérité pragmatique, basée sur la manipulation d'exemples, à une vérité sémantique exprimée dans le poster, se traduit par la comparaison entre l'oral et l'écrit. Le résultat obtenu par le groupe démonte l'hypothèse initiale formulée par A2 : « Il doit y avoir un algorithme pour passer de la première à la deuxième, donc il faut trouver la première » (intervention 2). Il est également à noter que, malgré la demande insistante de l'enseignant, cette hypothèse reste en place, ce qui démontre la difficulté de débloquer certaines clauses du contrat didactique. Après avoir trouvé un triplet en réponse à la deuxième question, les élèves reviennent à la première, mais cette fois pour réfuter la conjecture initiale et démontrer son impossibilité en utilisant de manière pragmatique la décroissance de la fonction $x \to 1/x$ (« Moi j'ai prouvé que plus c'est grand [le dénominateur], plus on s'éloigne [de 1] », dit A2).

Le bref dialogue entre A2 et C2 sur l'expérience en mathématiques par rapport à l'expérience dans les sciences de la vie et de la Terre est également intéressant : « Si, ça sert de voir » dit A2, qui place ainsi l'expérience et la manipulation de l'abstrait mathématique en regard de l'expérience sur des objets concrets effectuée dans une science expérimentale.

D'une façon générale, les observations de tous les groupes mettent en évidence la difficulté de sortir d'une investigation algébrique qui est induite par l'énoncé donné sous cette forme. De très nombreux élèves s'engagent dans des essais de preuve utilisant le calcul algébrique, en général sans succès. Il y a semble-t-il une confusion entre l'utilisation de lettres et l'algèbre, sans doute provoquée par l'enseignement de l'algèbre souvent présenté précisément comme le calcul « avec des lettres ». Le problème posé est ici un problème d'arithmétique et une résolution de la première question pourrait être donnée par le raisonnement par l'absurde suivant :

> Supposons qu'il existe a et b tels que $1/a + 1/b = 1$
> on en déduit alors que $a + b = ab$
> donc a divise $a + b$ et donc a divise b et de même b divise $a + b$ et donc b divise a.
> $a = kb = kk'a$ donc $kk' = 1$ e donc $k = k' = 1$, d'où $a = b$, ce qui contredit l'hypothèse. On peut donc conclure qu'il n'existe pas deux entiers naturels distincts a et b tels que $1/a + 1/b = 1$.

Mais ce raisonnement suppose que la conjecture soit initialement produite, déplaçant ainsi le problème dans un domaine peu travaillé en classe.

3.2 Deuxième exemple : Le problème de la feuille de papier

3.2.1 Contexte

La *Maison des Mathématiques et de l'Informatique* (MMI) est un lieu « de médiation des savoirs dédié aux sciences mathématiques et informatiques via une approche vivante, ludique et pluridisciplinaire » (https://www.mmi-lyon.fr/). C'est aussi un centre de ressources pédagogiques dont l'objectif est d'accompagner les enseignants dans la diffusion des méthodes d'enseignement et d'apprentissage, en mettant l'accent sur l'activité et la découverte des élèves. Dans le cadre des activités de la MMI, j'ai participé à la formation d'enseignants du primaire et du secondaire dans le but de les sensibiliser à l'utilisation de problèmes mathématiques dans leur enseignement. Dans ce cadre, et en collaboration avec les établissements, j'ai proposé un projet de recherche collaborative qui s'est déroulé sur plusieurs années consécutives, réunissant des élèves de *CM2* (cinquième année, dernière année de primaire) et des élèves de *Sixième* (sixième année, première année de collège). Le but de ce dispositif était double : d'une part engager les enseignants dans une démarche mettant les problèmes de mathématiques au cœur de leur enseignement et d'autre part donner la possibilité aux élèves de vivre une situation mathématique non scolaire et les inviter à conduire une réflexion sur leurs propres procédures. Elle cherche à engager les élèves dans un travail portant sur la recherche de modalités de résolution à partir d'un problème suffisamment résistant pour que la recherche puisse s'étaler dans le temps et alimenter la classe de mathématiques tant du point de vue des méthodes utilisées que des concepts mathématiques manipulés. J'ai ainsi proposé à toutes les classes de résoudre le problème suivant. Tout commence par une feuille de papier que nous découpons en plusieurs morceaux.

Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?
Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?[5]
Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ? … Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ? Et si je voulais obtenir 2017 morceaux ? 2018 morceaux ?

D'un point de vue mathématique, en modélisant la situation, un nombre p sera atteint par des dé-

5. Ce problème a été expérimenté dans ces conditions en 2016 ! Ce qui, d'un point de vue mathématique était aussi intéressant puisque les diviseurs de 2015 sont {1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015} et donc les valeurs de n qui permettent d'atteindre 2016 sont : {2, 6, 14, 66, 156, 404, 2016} !

coupes en *n* si et seulement si *n*-1 est un diviseur de *p*-1. Les notions de diviseur, de nombre premier, de décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers etc. sont au cœur de la résolution de ce problème.

3.2.2 Méthodologie

Les observations faites en classe dans ce cas diffèrent des observations faites dans la première expérience décrite dans la sec. 3.1. Dans ce cas, les observations portent sur la continuité du travail et s'appuient sur les productions des élèves, parfois écrites, parfois orales, lors de la présentation de leur travail.

L'expérience s'est déroulée comme suit : huit classes étaient concernées, quatre *CM2* et quatre Sixième. Dans un premier temps, j'ai présenté le problème aux huit classes réunies dans un amphithéâtre et les élèves ont pu effectuer leurs premières recherches dans ce cadre. Dans la deuxième phase, les enseignants ont supervisé les recherches des élèves pendant les deux mois de l'expérience, en organisant dans leurs classes des moments de recherche de solutions au problème, en demandant aux élèves d'évaluer périodiquement leurs recherches. Dans la troisième phase, j'ai visité chacune des huit classes afin que les élèves puissent me présenter leurs recherches. Ces moments de travail ont été l'occasion pour moi d'écouter les élèves, de prendre note de leur travail et de relancer la recherche. Enfin, le quatrième moment a été un regroupement des huit classes au cours duquel les élèves se sont présentés mutuellement les résultats auxquels ils étaient arrivés et les méthodes utilisées qu'ils avaient soigneusement résumées sur des affiches. L'analyse de ce travail se fonde donc sur les différentes traces collectées au cours du processus de recherche et des entretiens menés avec les enseignants. Cet exemple a été choisi pour mettre en évidence la relation entre la manipulation d'objets concrets (dans ce cas, des morceaux de papier) et la manipulation d'objets abstraits (des nombres) qui conduit à la manipulation de règles logiques par la construction et la manipulation de représentations symboliques des concepts impliqués. Ainsi, les trois manipulations décrites dans la sec. 2 contribuent à la compréhension du problème et à sa résolution, au moins partiellement.

Figure 4. Le passage de l'expérience à la réflexion sur l'expérience.

Il est clair que les expériences concrètes constituent la première étape de la recherche d'une solution au problème, et la première question (couper en deux) a été résolue de manière empirique : il y a d'abord une feuille, puis un morceau de papier ; puis deux, puis trois, et ainsi de suite. Tous les nombres sont atteints et, en particulier, l'année 2016 sera atteinte à l'étape deux mille seize.[6] Cette première expérience est simple et contribue ainsi à la dévolution du problème. Plusieurs enseignants m'ont dit que cette étape avait été particulièrement importante pour de nombreux élèves, notamment ceux qui avaient des difficultés en mathématiques ; le problème peut être abordé ! Mais les difficultés commencent et le problème devient plus complexe, et c'est alors que le va-et-vient entre l'expérience et les concepts sous-jacents structure la compréhension du phénomène, permettant de renforcer les connaissances. C'est précisément ce qui se passe lorsque le nombre de coupes sur la feuille augmente ! L'expérience concrète devient vite impossible et le choix de se demander si 2016 (ou du moins un nombre suffisamment grand) est atteignable oblige l'élève à abandonner l'expérience concrète et à passer à la manipulation des objets mathématiques qui permettent de modéliser l'expérience (**Figure 4**). Ainsi, le passage à la réflexion, qui est une condition nécessaire d'une distanciation suffisante des objets concrets aux objets mathématiques, apparaît pragmatiquement comme une étape fondamentale de la démarche expérimentale en mathématiques. Dans le processus de résolution de ce problème, les élèves ont progressivement construit la formalisation du problème, comme l'atteste ce résumé (**Figure 5**) d'un élève de *Sixième* (grade 6).

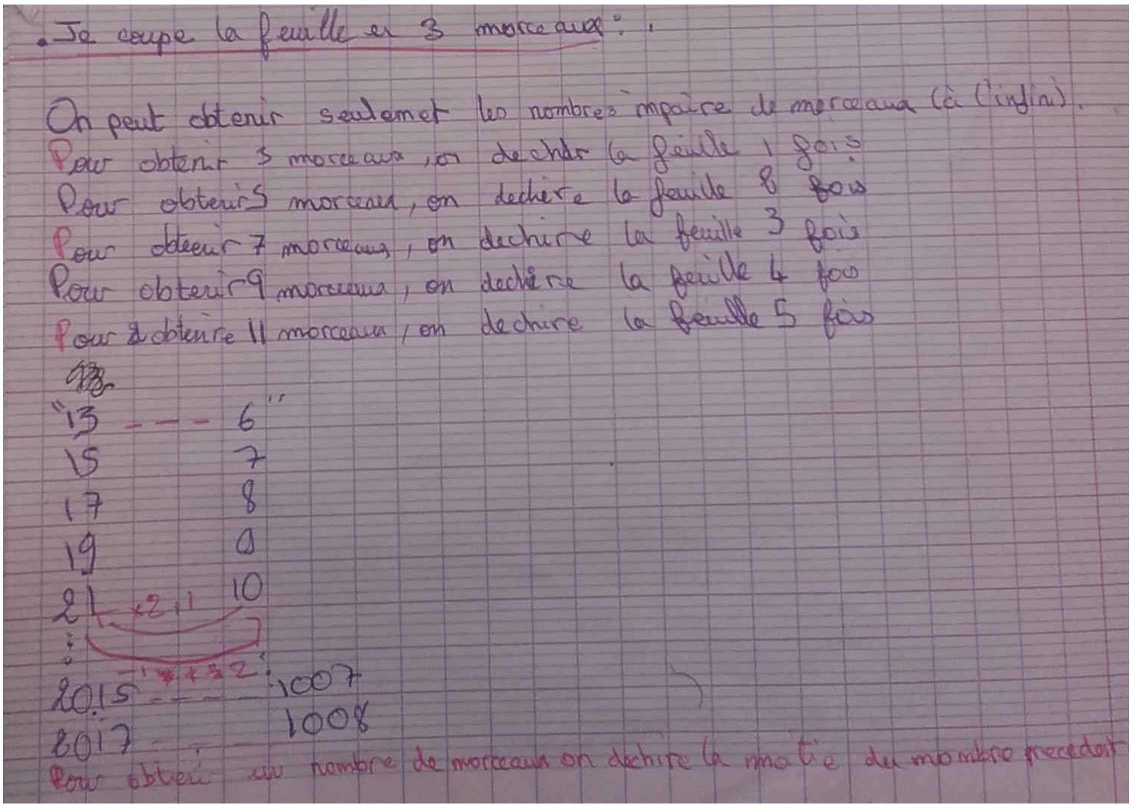


Figure 5. Évolution de l'expérience avec des objets concrets puis abstraits.

Au début, nous constatons une recherche empirique, lorsque nous coupons la feuille en trois morceaux et obtenons le résultat suivant : « On peut obtenir seulement les nombres impairs de morceaux

6. Vous trouverez de plus amples informations sur l'analyse mathématique et pédagogique de ce problème à l'adresse suivante : https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/40942.

(à l'infini) » (deuxième ligne de la **Figure 5**). Puis cette expérience est relatée en toutes lettres jusqu'à « Pour obtenir 11 morceaux… ». Ensuite la formalisation mathématique commence : il n'y a plus de morceaux de papiers et de nombre de découpes, mais une correspondance entre des nombres :

13 — 6
15 — 7 etc. jusqu'à :
2017 — 1008.

Et enfin, cette manipulation des objets abstraits mathématiques débouche sur une explicitation des opérations liant les deux colonnes de nombres : 10 × 2 + 1 = 21 (exemple générique s'appliquant à tous les nombres) et dans l'autre sens : -1 + : 2, qui montre encore une difficulté à formaliser la division euclidienne mais donne la méthode qui est appliquée pour 2015 et 2017.

Cet exemple est significatif du comportement des élèves confrontés à ce problème et montre bien les trois manipulations dont il est fait référence plus haut : manipulation de l'abstrait qui arrive progressivement en lâchant l'expérience concrète pour la décrire comme on peut aussi le voir sur la photographie de la **Figure 6** ; manipulation des symboles qui permet l'expression des remarques issues de l'expérience, en particulier le mode de correspondance entre les colonnes (**Figure 5**) et une tentative de définition par récurrence des nombres de la deuxième colonne, utilisant les différences finies (**Figure 6**); manipulation de la logique lorsque la validation des résultats issus des manipulations sur les objets abstraits se mettent en regard des résultats de l'expérience concrète (**Figure 4**).

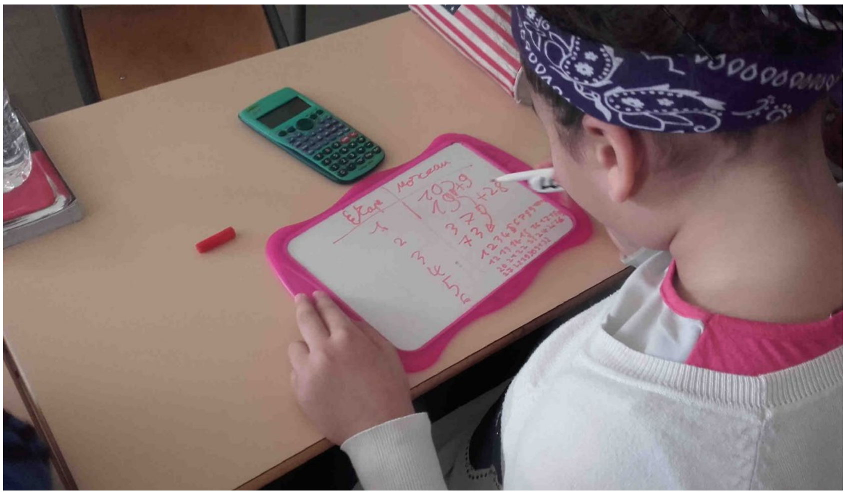


Figure 6. Transition vers une manipulation de l'abstrait.

4 Conclusion

Négocier un contrat d'enseignement dans lequel les élèves acceptent d'apprendre les mathématiques en s'attaquant à des problèmes mathématiques[7] est loin d'être gagné d'avance. Il s'agit d'une tâche complexe qui repose sur une phase dans laquelle une culture de recherche est établie dans la classe, à travers des questions, des défis, des petits problèmes, des routines qui peuvent aiguiser la curiosité et engager les élèves dans une envie de comprendre. Dans ces conditions, la recherche de

7. Par « problèmes mathématiques », dans cet article nous nous concentrons sur le processus de mathématisation verticale des élèves, c'est-à-dire sur le travail qu'ils effectuent dans le monde des mathématiques pour résoudre les problèmes proposés.

problèmes lorsqu'elle est instaurée en méthode d'enseignement et qu'elle repose sur des manipulations (dans le sens décrit plus haut), devient non seulement un vecteur d'apprentissage d'heuristiques et de méthodes de démonstration (compétences méta-mathématiques) mais aussi une façon de présenter ou d'affermir les connaissances d'objets mathématiques en lien avec les programmes des classes concernées. Les exemples présentés dans ce texte mettent en évidence les apports de cette approche pour les apprentissages mathématiques en montrant l'importance des différentes manipulations nécessaires à l'établissement de résultats mathématiques. Loin d'opposer un entraînement à des techniques à la recherche du sens, ces exemples illustrent bien la construction dialectique des connaissances mathématiques reposant sur l'équilibre des manipulations d'objets abstraits, des manipulations des symboles dans un registre de représentation donné et des manipulations de la logique (ou des logiques). Comme l'explique Michèle Artigue à propos du calcul :

> « Ce qui fait la puissance des mathématiques, enfin, ce n'est pas seulement le fait qu'elles se dotent d'objets calculables et de systèmes de représentations supportant efficacement ce calcul, c'est aussi que ce calcul puisse s'algorithmiser et s'automatiser. Le calcul est ainsi pris dans un autre mouvement puissant, celui de sa mécanisation qui, lorsqu'elle est réussie, permet de l'exécuter sans intelligence, le réduisant à une succession automatisée de gestes. Cette mécanisation est nécessaire à l'avancée de la connaissance et il y a donc, dans la plupart des calculs, une alchimie subtile entre intelligence et routine ».
>
> (Artigue, 2005, p. 4)

Les questions qui se posent alors sont d'ordre pédagogique et didactique et passe par des expérimentations d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes, dans lequel la progression annuelle ne sera pas découpée par les connaissances à acquérir, mais plutôt par des problèmes ou des situations didactiques de recherche de problèmes. Ces situations laissent aux élèves la possibilité de mobiliser leurs connaissances et leurs compétences mathématiques pour faire émerger de nouveaux concepts ou affermir des notions déjà présentes. L'ambition des travaux actuels de l'équipe DREAM est d'explorer, à grande échelle et dans un contexte ordinaire, les conditions et les contraintes d'un enseignement efficace des mathématiques, centré sur le processus de « manipulation – verbalisation – abstraction » à travers la résolution de problèmes. Les premiers résultats montrent d'une part la faisabilité d'un tel processus d'enseignement dans des classes « ordinaires » et d'autre part les bénéfices en termes d'apprentissage mathématique pour les élèves.

Remerciements
Je tiens à remercier chaleureusement Chiara Zuretti et Monica Panero pour leur aide dans la traduction de cet article du français vers l'italien et vice versa.

Bibliographie

Aldon, G., Cahuet, P., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., & Tardy, C. (2010). EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'Ecole. *Cérédom*. INRP, IREM de Lyon.

Aldon, G., Front, M., & Gardes, M.-L. (2017). Entre élaboration et usage, comment poser la question de la cohérence des ressources ? *Education & didactique*, *11*(3), 9–30.

Aldon, G., & Garreau, O. (2017). Un dispositif de recherche de problèmes de mathématiques au cycle 3, *Repères IREM*, *108*, 26–40.

Aldon, G., Meunier, M., Roblin, M., Royot, A.-S., Terrenoire, A., Vilas-Boas, H., & Vilas-Boas, J. (2012). Narrations de recherche en mathématiques. Ecrire pour comprendre, écrire pour apprendre. *Cérédom*. IREM de Lyon.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problèmes ouverts et situations problème*. IREM de Lyon.

Artigue, M. (2005). L'intelligence du calcul. *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour*. https://gpc-maths.org/data/documents/artiguecalcul.pdf

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109.

Bachelard, G. (1967). *La formation de l'esprit scientifique* (5e éd.). Librairie philosophique J. VRIN.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in the primary school. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign* (pp. 77–90). Springer.

Bonnay, D., & Dubucs, J. (2011). *La philosophie des mathématiques*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00617305

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques*. *Comptes rendus de la XX VIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain la Neuve.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Cavaillès, J., & Lautman, A. (1945). Discussion sur la pensée mathématique. *Société française de Philosophie*, séance du 4 février 1939, vol. 40.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (2005). Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski, *Actes du colloque « Didactiques : quelles références épistémologiques ? »* (Bordeaux, 25-27 maggio 2005). https://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme2-complet/cours-Durand-Guerrier-complet/docs-preparatoires/Durand-guerrier-Actes-Bordeaux-2005pdf.pdf

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233–261.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Front, M. (2012). Pavages archimédiens du plan : une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM*, *89*, 5–37.

Front, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan*. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1.

Front, M., & Gardes, M.-L. (2015). Un projet d'enseignement fondé sur les situations de recherche. In G. Aldon (Ed.), *Actes de la 66ème CIEAEM Mathématiques et réalités* (pp. 132–138). Lyon, 21-25 luglio 2014. http://math.unipa.it/~grim/quaderno24_suppl_1.htm

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1.

Gonseth, F. (1974). *Les mathématiques et la réalité*. Blanchard. (edizione originale del 1936).

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 329–354.

Kant, E. (1905). *Critique de la raison pure. Félix Alcan édition*. (Titolo originale: *Kritik der reinen Vernunft* pubblicato nel 1781).

Lautman, A. (1977). *Essai sur l'Unité des Mathématiques et divers écrits, 1935-1939*. Christian Bourgeois.

Longo, G. (2020). Le jeu difficile entre rigueur et sens. In T. Paul & M. Schmidt (Eds.), *La rigueur* (pp. 21–38). Spartacus IDH. https://www.di.ens.fr/users/longo/files/jeu-rigueur-sens.pdf

Mizony, M. (2006). L'héritage de Poincaré : de l'éther à la modélisation. *Repères IREM*, *64*, 91–111.

Monod-Ansaldi, R., Aldon, G., & Vincent, C. (2019). Objets frontières et *brokering* dans les négociations en recherche orientée par la conception. *Education & didactique*, *13*(2), 61–84.

Nizet, I., Monod-Ansaldi, R., Aldon, G., Prieur, M., & Criquet, A. (2019). L'analyse de valuations dans une démarche collaborative de recherche. *La Revue LEeE*, *1*, 1–20. https://revue.leee.online/index.php/info/article/view/47

Petitot, J. (1986). Mathématiques et ontologie. *Séminaire de philosophie et mathématiques*, *3*, 1–19. http://www.numdam.org/article/SPHM_1986___3_A1_0.pdf

Petitot, J. (1987). Refaire le « Timée » : Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman. *Revue d'histoire des sciences*, *40*(1), 79–115.

Poincaré, H. (1968). *La science et l'hypothèse*. Flammarion. (edizione originale del 1902).

Polya, G. (1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press. (edizione originale del 1945).

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Springer Nature.

Sabena, C. (2018). Multimodality and the Semiotic Bundle lens: A constructive resonance with the Theory of Objectification. *PNA*, *12*(4), 185–208.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, *4*(1), 1–94.

Tarski, A. (1972). *Logique, sémantique, métamathématique, 1923-1944* (traduction de G.G. Granger). Armand-Colin.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction-the Wiskobas project*. Reidel Publishing.

Vernant, D. (2004). Pour une logique dialogique de la véridicité. *Cahiers de linguistique française*, *26*, 87–111.

Vernant, D. (2008). Définition stratifiée de la véridicité, *Travaux de logique*, *19*, 205–238.