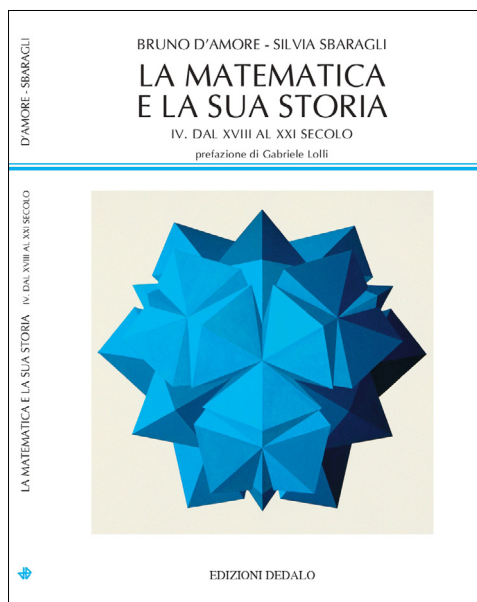


Recensioni¹

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia. Dal XVIII al XXI secolo*. Bari: Edizioni Dedalo.



Fate caso al titolo: non è “Storia della matematica”; la protagonista è la matematica, e la storia è intesa come un aiuto a comprenderla meglio e soprattutto a insegnarla. Gli autori dichiarano fin dalle prime righe di essere interessati alla didattica (il loro campo di ricerca scientifica) e alla divulgazione e di non essere storici di professione. Il loro obiettivo è ben compreso e apprezzato nelle prefazioni di quattro esperti di lusso: Umberto Bottazzini, Paolo Freguglia, Luigi Pepe e Gabriele Lolli. Ma si può comunque perseguire questo scopo in quasi 1600 pagine con la pretesa di coprire le origini, il “miracolo” greco e il suo tramonto, il medioevo, il rinascimento, l’illuminismo, fino agli ultimi due secoli, che da soli starebbero stretti in quattro volumi? No, e questo è chiaro ai due autori; perciò impostano in modo più o meno esplicito dei fili conduttori: l’interazione con l’arte, l’influsso degli eventi storici, le storie personali (ma senza cadere nell’aneddotica) e uno, secondo me quello principale, che per il momento non svelo.

Segnalo i continui riferimenti al lavoro di storici professionisti, la ricchissima bibliografia e le utili liste di nomi con date di nascita e morte. Trovo azzeccate le digressioni piazzate in paragrafi, appendici o interi capitoli; le mie preferite sono: curve non costruibili con riga e compasso, la storia dello zero, le macchine da calcolo.

Del primo volume apprezzo molto il rispetto manifestato per le origini: il pensiero greco, “uno dei misteri più inspiegabili e grandiosi della storia dell’umanità”, compare solo a pag. 121. Il libro mette in luce il legame strettissimo della comprensione della natura con lo studio autoreferenziale del pensiero, con i misteri dell’infinito e infine con il metodo ipotetico-deduttivo. Si passa da Talete alla scuola pitagorica e alla scuola eleatica intercalando punti prettamente matematici con aspetti filosoficamente sconvolgenti come l’incommensurabilità e i paradossi. Numerose e ben commentate sono

1. Indipendentemente dal Paese in cui è stato realizzato il materiale recensito o a cui appartiene l’autore della recensione, in questa sezione della rivista, per esigenze di uniformità, useremo le seguenti denominazioni: scuola dell’infanzia (allievi dai 3 ai 5 anni), scuola elementare (allievi dai 6 ai 10 anni), scuola media (allievi dagli 11 ai 14 anni), scuola media superiore (allievi dai 15 ai 18 anni).

le citazioni di Platone e Aristotele. Con quest'ultimo naturalmente fa la sua comparsa la logica, che giocherà un ruolo rilevante nei volumi seguenti. Ovviamente grande spazio è concesso agli *Elementi* di Euclide. Gli autori non nascondono, poi, la loro ammirazione per Archimede coi suoi metodi meccanici e con i suoi presagi di calcolo infinitesimale.

Ero molto curioso di leggere il secondo volume, non conoscendo niente della matematica medievale. Il raccordo col volume precedente è offerto da Apollonio, Tolomeo, Pappo e Diofanto; con quest'ultimo si studiano i problemi aritmetici con soluzioni intere e si affronta l'importantissimo progetto di una notazione simbolica, un altro "basso continuo" di tutta l'opera. Dopo una rapida disamina della matematica etrusca e latina ci si avvicina al medioevo ma c'è uno stacco importante e dovuto: la matematica in India, in Cina, nelle Americhe. Dalla matematica del mondo arabo si torna con naturalezza nel nostro ambito culturale. Gli eventi matematici sono inquadrati nei grandi mutamenti della società; s'intrecciano matematica, logica e filosofia. Ci aspettavamo Fibonacci, ma troviamo anche Tommaso, Bacone, Lullo, Ockham e tanti altri. Troviamo la complessa interazione con la Chiesa e la nascita delle università; troviamo Dante. L'impatto della notazione posizionale è comunque la parte che mi ha affascinato di più.

Naturalmente il volume che copre il periodo dal rinascimento al XVIII secolo è pirotecnico: idee e personaggi si alternano senza un attimo di respiro. Cominciamo col fermento attorno alle equazioni di terzo grado, che vede protagonisti (ma non unici attori) Tartaglia e Cardano, poi Ferrari, con cui si risolverà il problema del quarto grado; e già ci lanciamo verso uno dei punti cardine del prossimo volume. Necessariamente sono nati i numeri complessi; spuntano i logaritmi. Nasce la prospettiva, con cui gli artisti/matematici rinascimentali superano di netto i loro modelli dell'antichità. Leonardo disegna le illustrazioni del "De divina proportion" di Pacioli e gravita attorno alla matematica con alterne fortune. Da teoremi e formule enunciati a parole si passa a un simbolismo sempre più accurato. Arriva la rivoluzione scientifica di Galileo; conosciamo la sua scuola e la sua modernissima vocazione divulgativa. Descartes (preceduto da un contributo di Fermat qui citato) crea la geometria analitica all'interno di un suo progetto generale di studio della realtà. Questa novità tecnica rivoluziona in effetti il modo stesso di concepire gli enti geometrici e si accompagna ad uno sviluppo della notazione algebrica, argomenti a cui gli autori prestano molta attenzione nel corso di tutta l'opera. L'intreccio tra filosofia e matematica compare naturalmente anche in Pascal. Il genio poliedrico di questi personaggi sembra non conoscere confini e abbraccia geometria, fisica, probabilità, logica e, in particolare con Fermat, riprende ed estende lo studio dei numeri naturali e dà l'avvio all'analisi infinitesimale. Si arriva a Leonhard Euler, uno dei miei idoli, e qua ogni lista riassuntiva del suo lavoro sarebbe gravemente riduttiva. Parlavamo dell'analisi? Ecco Newton e Leibniz e la controversa paternità di uno degli strumenti più innovativi e potenti dell'umanità. Di nuovo ecco l'interazione con la filosofia, di nuovo un progresso nella notazione matematica.

Ero dubbioso, aprendo il quarto volume. D'Amore e Sbaragli hanno saputo gestire l'effervescenza del rinascimento, ma come potranno presentarci le esplosioni nucleari degli ultimi due secoli in poco più di cinquecento pagine? Come giustificheranno le inevitabili scelte e inevitabili rinunce? La loro soluzione è furba ed elegante: si affidano a quello che secondo me è il loro principale filo conduttore. Cosa interessa di più a due studiosi di didattica della matematica? (Intendo la vera didattica, non quella da fast food per maestri frettolosi). Secondo me il primo interesse è la comprensione profonda degli strumenti matematici, più che il loro uso. In effetti, rileggendo le introduzioni e molti passi dei volumi, questo appare come un progetto esplicito degli autori.

Cos'è l'infinito? Cos'è il numero? Cos'è una struttura matematica? Cos'è una dimostrazione? Questi temi, presenti fin dall'inizio dell'opera, diventano la struttura portante del quarto volume. Si comincia con il devastante teorema di Ruffini-Abel-Galois: la non esistenza di una formula per le equazioni di quinto grado e oltre, che si affianchi a quelle dei gradi precedenti. Si concretizza la necessità dello studio delle strutture algebriche in quanto tali: che cosa materialmente sia rappresentato dai numeri in gioco passa in secondo piano. Un altro problema rimasto in sospeso è quello relativo al postulato

delle parallele; il passaggio da Saccheri a Gauss, Lobačevskij, Bolyai e Riemann è in gran parte un passaggio concettuale: si passa da “che cosa è vero in geometria” a “che cosa è indipendente dal punto di vista logico”.

E i problemi risolvibili con riga e compasso? Ecco che le nuove tecniche algebriche permettono di capire cosa è possibile e cosa no in termini di numeri algebrici e trascendenti. Lo sviluppo travolgente dell'analisi richiede un approfondimento del concetto di infinito e inevitabilmente del concetto stesso di numero, su cui si cimentano Bolzano, Weierstrass, Cauchy, Dedekind, Méray, Peano fino alle incredibili scoperte di Cantor. La teoria degli insiemi nasce e subito va in crisi con la lettera di Russell a Frege. Nel frattempo nasce e prospera la topologia, dove emergono nomi noti come Möbius e Poincaré. La logica trabocca dal dominio della filosofia e diventa logica matematica. Intanto la scienza è costretta a farsi filosofia e a interrogarsi sulla sua stessa natura. Hilbert si chiede se verità e dimostrabilità coincidono; risponde Gödel, con risultati indiscutibili e sconvolgenti. L'intuizionismo rifiuta procedimenti dimostrativi consolidati. Si dimostra che l'assioma di scelta è indipendente, seguendo lo stesso schema delle geometrie non euclidee. Lo studio delle strutture si spinge fino alla teoria delle categorie.

Insomma, la lente privilegiata con cui gli autori osservano XIX e XX secolo è un grandangolo che abbraccia e spiega molto del travolgente progresso ancora in corso. Non vengono trascurati gli ambiti culturali in cui questo processo matura: la scuola di Göttingen, il circolo di Vienna, Bourbaki. In un capitolo finale si riassumono rapidamente molti temi più lontani dalla critica dei fondamenti, cara agli autori.

Affascinante, però mi sarebbe piaciuto, anzi mi piacerebbe sentire dalla loro voce la storia delle equazioni differenziali, del rapporto fra dominio e frontiera, delle trasformate, dell'impatto sull'elettromagnetismo; il groviglio dei problemi NP-completi, pronto a collassare su di noi o forse no; il giallo, pieno di colpi di scena e non completamente risolto, della classificazione topologica delle varietà; e tante, tante altre storie di idee e di persone dal 1800 a oggi. Insomma, da emiliano-romagnolo a due conterranei dico: grazie per questo antipasto, è proprio di quelli nostri, monumentale e saporito. Una pausa ci sta, ma poi mi aspetto primo, secondo e dolce.

Massimo Ferri

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna, Italia

Maierù, L., & Florio, E. (2018). *Le costruzioni geometriche. Un percorso storico-didattico tra i matematici arabi dei secc. IX-XIII. Parte prima*. Roma: Aracne.



Luigi Maierù ed Emilia Florio sono due ben noti storici della matematica che da sempre pubblicano testi di estremo interesse sia per chi è appassionato di storia della matematica, sia per chi si occupa di didattica della matematica. Il fatto è che sempre più i didatti, ma anche i docenti delle scuole, specie secondarie, si sono convinti a usare eventi storici e personaggi della storia per raccontare non solo i risultati originali della ricerca matematica, ma anche la loro evoluzione e per presentare i protagonisti di questa grande avventura. Talvolta ci si dimentica che stiamo parlando di esseri umani e non di nomi vuoti, spesso decontestualizzati sia dal tempo sia dallo spazio, esseri umani che talvolta non si sanno collocare nell'evoluzione temporale, né nei luoghi.

Ora, che le vicende degli studi arabi su questioni di geometria così avvincenti fossero densi di significati e risultati eleganti e preziosi, è ben noto a tutti; ma, onestamente, questa dovizia di particolari e di eccellenza sorprende.

In questo bel libro, molto ben scritto e riccamente documentato, si incontrano personaggi assai noti anche al vasto pubblico, come Al-Khwārizmī e Naʿīm ibn Mūsā, ma anche altri che (almeno a me) erano meno noti; ma ora, grazie a Luigi e a Emilia, sono felice di aver fatto la loro conoscenza.

Certo, il tema delle costruzioni geometriche, così caro alla Grecia classica, viene ripreso con ricchezza di mezzi e di particolari a dir poco stupendi, con perizia e creatività, sia fini a sé stessi, sia come strumento algebrico, per esempio per risolvere le equazioni di II grado, come fa per esempio Al-Khwārizmī (ma anche molti altri). D'altra parte, l'uso delle costruzioni geometriche per affrontare problemi di carattere algebrico è molto diffuso, com'è ben noto, e lo sarà ancora anche nelle successive tradizioni in tutta l'Europa mediterranea, Italia compresa.

A volte la costruzione geometrica ha il senso di una dimostrazione, come nel caso dell'enunciato-problema: «L'area di un poligono circoscritto a un cerchio è uguale al prodotto del raggio del cerchio per il semiperimetro del poligono». A volte sono strumenti per la ricerca, come nel caso della seguente sfida: «Trovare due grandezze tra due grandezze date in modo che le quattro grandezze si succedano secondo un medesimo rapporto».

Trovo fantastici alcuni problemi posti sulla parabola (più in generale sulle coniche); per un moderno, l'idea di dover rinunciare alla geometria analitica (ancora ben lungi dall'essere anche solo immaginata) sembra una folle eresia; ma siamo di fronte a metodi e ad astuzie che hanno dell'incredibile.

Molto interessanti le costruzioni di poligoni regolari e la risoluzione di problemi di geometria tridimensionale; in entrambi l'immaginazione messa in campo da questi matematici colpisce un moderno.

Certo, a questi grandi creatori non mancavano preziosi testi di ispirazione geometrica, come molti famosi dei matematici greci; ma questi matematici arabi non sono da meno, sanno dominare una geometria potente e preziosa, sanno inventare, creare.

Una cosa che mi ha colpito molto è stato lo studio sugli specchi ustori di Ibn Sahl, dato che, nei primi anni '80, mi dedicai allo studio dello stesso tema così com'è affrontato da Bonaventura Cavalieri, alcuni secoli dopo. Anche in questo caso, il riferimento alla leggenda archimedeica è solo una scusa per uno studio dettagliato delle proprietà delle coniche.

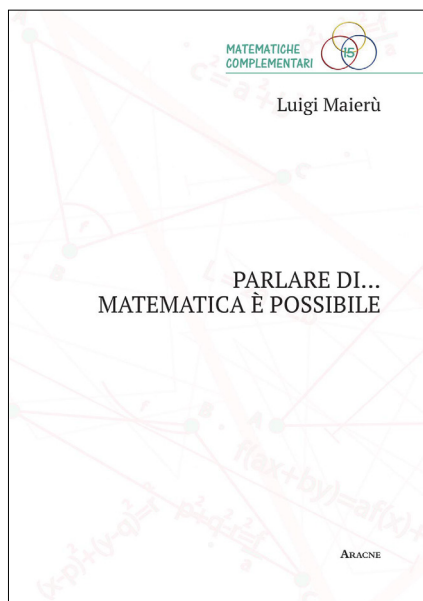
Tutti i problemi della Ellade classica sono presenti, anche la trisezione dell'angolo generico negli scritti di Al-Qūhī.

Che strumento didattico potrebbe costituire questo libro (e, in genere, questo genere di libri) nelle mani di un docente di scuola secondaria di II grado, fonte di ispirazione, forse capace di aumentare l'interesse e la curiosità degli studenti.

Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Maierù, L. (2020). *Parlare di ... matematica è possibile*. Roma: Aracne.



Mi trovo di fronte a un libro formidabile, la cui lettura consiglio vivamente a tutti, matematici, docenti, allievi, curiosi. Si tratta non solo di una lunga, corposa, approfondita storia della matematica, ma di una lettura dotta, piacevole, ricca di sorprese colte.

I temi trattati sono solo apparentemente classici e tradizionali, hanno sempre qualcosa in più, temi di riflessione, e non solo dettagli:

- gli *Elementi* di Euclide e la loro influenza sugli studi relativi ai fondamenti della geometria, da Platone al Novecento, con riferimenti alla problematica dell'insegnamento della geometria;
- una rivisitazione dotta e profonda, ricca di spunti critici, dell'opera di Archimede, con una precisa cronologia delle traduzioni medievali e rinascimentali di tale opera;
- un'analisi dettagliata di parte dell'opera di Apollonio e la sua influenza nel mondo arabo (parti colarmente dotta e ricca di spunti eccezionali) e fino al XVIII secolo;
- una narrazione fitta di citazioni interessanti e profonde dei lavori di Diofanto, Pappo, Sereno, Eutocio, mai vista in passato così completa e documentata;
- le relazioni fra geometria e algebra, il *metodo analitico*, dedicato alle posizioni (tutte perfettamente documentate), a partire dal mondo arabo e latino fino al XVI secolo e poi Viète, Descartes e Fermat, con la storia precisa della diffusione di queste conoscenze fino al XVIII secolo;
- un esempio concreto di quel che significa "parlare di matematica", avendo come esempio edificante la storia della costruzione dell'eptagono regolare, ricca di sorprese;
- un excursus storico sulla *mathesis universalis*, a partire da Wallis, fino alla costruzione dei numeri reali, dunque fine XIX secolo, ma con sconfinamento ai giorni nostri.

Lo scopo dichiarato dal nostro autore è quello di mostrare che è possibile parlare di matematica, non solo raccontarla, ma farla vivere da parte di chi legge, mostrandone anche la bellezza. Non è una novità, questo scopo, dato che ricordo perfettamente un altro libro dello stesso autore del 2017 il cui titolo è esplicito assai: *Della bellezza della matematica. Le tracce di un percorso di ricerca e di vita*.

Tutti argomenti già noti (dirà, potrebbe dire, qualcuno), già letti in altri libri di storia; sì, forse, quei nomi, quei fatti, quelle opere, quelle date sono già stati citati e trattati dallo stesso autore e da tanti altri, storici o divulgatori. Ma questo libro è diverso, coinvolgente, dotto, pieno di citazioni precise e riferimenti storici completi, traduzioni perfette anche di testi i cui autori tutti citiamo ma sui quali, realmente, spesso sorvoliamo, senza assumerci la responsabilità di ricerche precise e documentate,

fidandoci di quel che è già stato detto. Qui sono davvero presenti, citati e chiosati, a volte creando anche qualche (dotta) sorpresa. Confesso di aver letto alcune citazioni precise di autori arabi del medioevo solo qui in maniera così esplicita e completa. E poi accostamenti arditi fra personaggi e tematiche che solo il gusto dello storico di classe, che vuole proporre una narrazione più che un saggio critico scientifico, può offrire. Il che stupisce il lettore, specie se non digiuno appunto di questi temi, di questi nomi, di questi autori, più d'un motivo di sorpresa, gradevole e ben accetta.

Appassionato come sono anch'io della narrazione matematica, delle sue sfaccettature sottili, delle relazioni interpersonali fra questi creatori matematici, della chiosa magica su relazioni sottili fra opere di autori e periodi diversi, che si richiamano non sempre in modo esplicito, ma i cui rinvii devi capire da solo, confesso che ho molto apprezzato la costruzione, l'architettura narrativa, il gusto per la sorpresa e la voglia di stupire. E confesso di aver più volte ammirato il fatto che l'autore facesse di tutto per far capire (anche solo implicitamente) quel famoso anelito di libertà intrinseco alla matematica al quale diversi autori fanno cenno parlando della nostra disciplina, come Georg Cantor e Imre Toth. Chi e come deve/può leggere questa narrazione?

Per esempio chi s'è trovato talvolta a dover spiegare a qualcuno (scettico) che la matematica è interessante, ha una storia appassionante, che il suo sviluppo assomiglia molto, come modalità, a quello di discipline considerate di tutt'altro genere come l'arte figurativa, per esempio; qui costui troverà esempi a non finire, più di 600 pagine di esempi. A meno che, come fece André Weil rispondendo a una lettera della sorella Simone, non si limiti a dire: «[...] tanto varrebbe spiegare una sinfonia a dei sordi».

Un insegnante, per esempio, che vuol convincere i suoi studenti che la creazione della matematica è una storia senza fine fatta da esseri umani, non il prodotto della natura o di un demiurgo, ma il prodotto di pensieri profondi, legati a motivi che possono avere le derivazioni più diverse.

Un altro lettore che molto apprezzerà questa lettura è chi sa già abbastanza storia della matematica e l'apprezza, ma vuol sapere, almeno su alcuni temi e alcuni personaggi, dettagli precisi, citazioni esatte, riferimenti colti, relazioni fra matematici in quanto esseri umani; troverà di certo dettagli che mai aveva avuto occasione di conoscere prima, precisi, circostanziati, profondi.

Per lo studente generico di scuola, la lettura è forse troppo impegnativa; ma molti studenti universitari di matematica dovrebbero gustare la modalità narrativa, la sottile ironia che di tanto in tanto fa capolino, lo spirito colto e raffinato dell'evoluzione, così legata al dettaglio.

Auguro a questo volume il successo più pieno.

Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Toffalori, C. (2019). *L'equazione degli alef*. Bologna: il Mulino.



Carlo Toffalori è un logico matematico molto stimato in Italia e nel mondo, ex presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni (AILA), ordinario di Logica matematica a Camerino. Ma è noto anche al vasto pubblico dei non specialisti a causa del suo interesse e del suo impegno nella divulgazione della Matematica e in primo luogo della Logica. Fautore di varie iniziative in questo senso, è anche lui stesso impegnato in prima persona in questa opera di alta divulgazione; alcuni suoi libri sono vere e proprie ghiottonerie per gli appassionati non specialisti della logica.

Ovviamente, citare gli alef in una collana che si chiama "Formule per leggere il mondo" non è che un modo per richiamare lo straordinario lavoro che fece Cantor in questo campo. Si tratta della creazione di una nuova categoria di numeri; partendo dal numerabile $\aleph_0$ (che è il cardinale dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, dell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi, dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali, dell'insieme degli irrazionali algebrici) e proseguendo con $\aleph_1$ (che è il cardinale dell'insieme dei numeri irrazionali trascendenti e dunque dei reali) e ammettendo che abbia senso scrivere che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; ipotizzato poi che non ci siano insiemi di cardinalità maggiore di $\aleph_0$ e minore di $\aleph_1$ (ipotesi del continuo) e che dunque in qualche modo $\aleph_1$ segua $\aleph_0$ ($\aleph_0 < \aleph_1$), si è di fronte a una nuova generazione di numeri (transfiniti) che richiedono nuove lettere per essere indicati, gli aleph, appunto. Con $\aleph_0$ indichiamo $\aleph_0$, con $\aleph_1$ il suo successivo $\aleph_1$, dunque $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Ma, ammessa questa scrittura, si può generalizzare il tutto, anche l'ipotesi del continuo, e giungere alla formulazione $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$. Sembra solo una questione di simbolismi appropriati (e quanto lo sono!), ma è invece un nuovo mondo, una nuova categoria di oggetti che mette tutta la matematica in discussione, aprendo fronti di ricerca e di studio unici e di una bellezza formale elegante e ineccepibile, il famoso Paradiso che, secondo Hilbert, Cantor aveva costruito per noi. E che spiega la famosa frase di Cantor: «La matematica merita [...] il nome di libera [...] l'essenza della matematica, infatti, sta proprio nella sua libertà».

Certo, la presentazione di tutto ciò e delle notevolissime conseguenze che ciò comporta nella logica, nell'intelligenza artificiale, nella vita di tutti i giorni, nel modo di guardare la matematica è incredibilmente ben descritta da Toffalori, con argomentazioni eleganti e acute, una sorta di narrazione e di analisi che spinge alla curiosità e che sorprende per la sua immediatezza, con un linguaggio attraente e convincente. Tante le sue citazioni, colte e profonde, sempre sul filo dell'equilibrio fra racconto, logica, formalismi e specifiche spiegazioni.

Ovviamente questa argomentazione ha comportato varie prese di posizione per quanto concerne la

teoria degli insiemi e le sue varie assiomatizzazioni, tema che ha costituito per quasi un secolo un argomento di discussione in taluni momenti addirittura violenta e che ha costretto a rivedere daccapo la fondazione stessa della matematica.

L'autore ci conduce anche attraverso questo impervio ma affascinante tema, dandoci tutte le nozioni che sono necessarie per capire il problema, teoremi e metateoremi che costituiscono l'ossatura di questa costruzione che offre una affascinante prospettiva su quel che è oggi la logica.

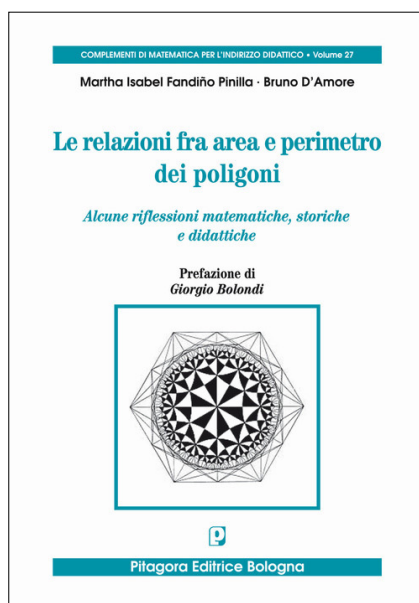
Trovo affascinanti e perfino divertenti certi riferimenti a questioni concrete attuali, come il debito pubblico e lo spread.

Questo libro è destinato al più ampio pubblico possibile costituito da persone colte, anche non specialisti; ma io penso che un grande vantaggio da questa lettura ne avrebbero gli insegnanti di matematica, se grazie a questa lettura potessero trarre vantaggio culturale personale e poi, chissà, almeno con gli allievi più curiosi, potessero tentare un ingresso nel mondo misterioso degli aleph...

Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2019). *Le relazioni fra area e perimetro dei poligoni. Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Bologna: Pitagora.



Il libro costituisce un'importante risorsa per insegnanti e ricercatori nell'ambito didattico. Nel volume gli autori riorganizzano, sistematizzano e ampliano i risultati di alcune ricerche realizzate all'inizio degli anni duemila, già pubblicate in un volume del 2006, ora riviste e arricchite di nuove riflessioni. I contenuti matematici oggetto della ricerca sono semplici all'apparenza e costituiscono temi essenziali dell'insegnamento della matematica nella scuola elementare, con innumerevoli applicazioni e sviluppi nei percorsi scolastici successivi, fino all'università: l'area e il perimetro. Può sorprendere che temi come questi siano al centro di un intero volume e che a ricerche didattiche su questi temi di base siano state dedicate così tante risorse ed energie: cosa c'è da indagare da un punto di vista didattico su argomenti così semplici? Eppure, di fronte ai risultati di tali ricerche, presentati in modo meticoloso e dettagliato sia dal punto di vista teorico che empirico, si è costretti a cambiare idea. Non solo sul tema specifico, ma sulla complessità dell'apprendimento della matematica in generale, e sulla necessità di una ricerca didattica e una formazione che, in maniera decisa, porti i docenti a riflettere a fondo sul sapere matematico di base e sulle criticità che da sempre accompagnano l'insegnamento di questa disciplina. L'impatto del sapere e delle convinzioni degli insegnanti sui processi di apprendimento dei loro studenti è infatti notevole, per ovvie ragioni, ed è stato documentato in numerose ricerche condotte anche dagli autori stessi. Questa assunzione è fondamentale nella lettura del testo, che identifica nella variabile "insegnante" la fonte principale delle difficoltà di apprendimento degli studenti relative a queste tematiche: numerosi ostacoli didattici, dovuti a un sapere che non supera di tanto l'oggetto dell'insegnamento stesso, si aggiungono infatti agli ostacoli epistemologici che caratterizzano area e perimetro, che contribuiscono a loro volta a minare e rendere fragile e incerto il sapere dei docenti. Prima ancora di ragionare sulle difficoltà, nel libro vengono discusse alcune abitudini dell'insegnamento della geometria attraverso i libri di testo e vengono riesaminati i contenuti matematici, come si suol dire, "da un punto di vista superiore", riproposti dagli autori in maniera precisa ma anche accattivante e originale, con l'aiuto della riflessione storica sull'origine e lo sviluppo di questi saperi. In seguito gli autori guidano i lettori, con riflessioni ed esempi presi dalla letteratura nazionale e internazionale, alla scoperta dei fattori che possono stare alla base delle difficoltà degli studenti e dei futuri insegnanti; difficoltà che, secondo gli autori, sembrano essere addirittura in forte aumento negli ultimi anni, a tutti i livelli di istruzione. Andando a indagare con pazienza, curiosità e competenza le convinzioni e le immagini mentali che

si formano spontaneamente su area e perimetro nei processi di apprendimento, al di là di ciò che è oggetto di insegnamento esplicito, e che rimangono parte del bagaglio di molti docenti, gli autori ci mostrano concezioni spontanee e inattesi collegamenti tra le due nozioni, che emergono in situazioni che si discostano, seppur di poco, da quelle “da libro di testo”. La prospettiva e gli strumenti teorici della ricerca didattica aiutano a identificare e comprendere le difficoltà e prospettare soluzioni, e a interpretare associazioni apparentemente insensate e inspiegabili tra i due concetti dal punto di vista della matematica, intesa come rigoroso corpus di conoscenze storicizzate e formalizzate, che assumono invece senso cambiando il punto di vista sulla pratica d’aula e analizzando i processi di costruzione della conoscenza.

Tra i risultati più interessanti delle ricerche condotte dagli autori si trovano, ad esempio, alcune relazioni tra area e perimetro che vengono interiorizzate dagli studenti in casi particolari e generalizzate spontaneamente e inconsapevolmente, diventando proprietà che caratterizzano i due concetti e finiscono per diventare i veri criteri usati dagli studenti per rispondere alle domande nei quesiti di matematica o nella risoluzione di problemi.

Per quanto la scuola dell’infanzia e la scuola elementare siano maggiormente, e più direttamente, coinvolte da questa riflessione, le concezioni e i modelli intuitivi emersi dalla ricerca degli autori possono rimanere immutati anche in studenti di scuola media e scuola media superiore, fungendo da modelli parassiti che ostacolano l’apprendimento di altri concetti o influenzano gli studenti nei processi di risoluzione di problemi. Anche se ai docenti sembra che gli studenti dimentichino continuamente e con grande facilità e superficialità quanto sembravano aver appreso anche solo poche settimane prima, ci sono apprendimenti molto profondi, spesso difficili da far emergere, che lasciano traccia quasi indelebile nella mente degli studenti e modelli intuitivi che continuano ad “agire” ed essere riattivati anche molti anni dopo la loro formazione. Per tale ragione è molto importante che anche i docenti di scuola media e media superiore siano al corrente dei risultati di tali ricerche; è infatti su questi saperi di base che dovranno far costruire ai loro studenti nuovo sapere e nuova competenza matematica. I modelli intuitivi che si sono rafforzati nel corso degli anni continueranno a ripresentarsi rendendo difficile da parte dei docenti un intervento “correttivo”, soprattutto se il docente non è al corrente della natura di tali concetti e delle convinzioni degli studenti, quasi mai esplicitate.

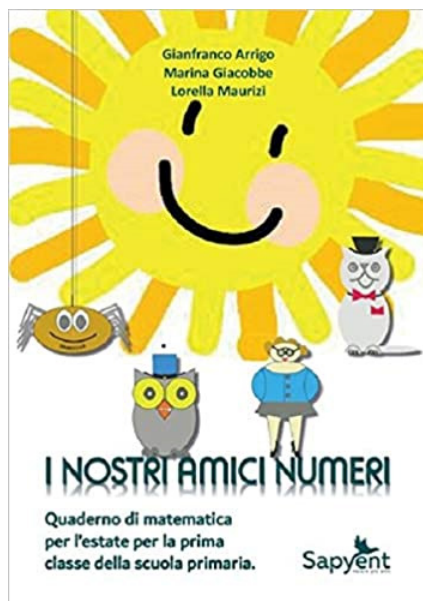
Gli studenti di oggi sono gli adulti di domani, e tra loro, naturalmente, troviamo, senza sapere chi saranno, i futuri insegnanti di matematica, di ogni ordine e grado. Senza una riflessione mirata, chi non ha avuto occasione di mettere a fuoco nel suo percorso scolastico alcune complessità dei concetti di area e perimetro, si ritroverà nel suo lavoro di docente a confrontarsi con esse nel momento più critico, cioè quello in cui esse si manifestano in alcune domande inattese degli studenti, o nella risoluzione di un problema diverso da quelli più standard. Richiamando le parole degli autori: “Per esempio, decidere se ci sono relazioni tra perimetro e area di una figura, supera le competenze di molti studenti, soprattutto perché, come abbiamo verificato, supera quelle di parecchi insegnanti; se poi questa figura fa parte di una successione di figure in trasformazione, allora la competenza quasi si annulla...”. Come sottolineano gli autori, le ricerche presentate offrono spunti notevoli soprattutto per la formazione degli insegnanti, grazie a riflessioni dei docenti stessi e a resoconti dettagliati delle attività di formazione. Per tale ragione questo volume costituisce una risorsa importante anche per i ricercatori che si occupano di formazione degli insegnanti, oltre che per i docenti stessi, che possono ripensare al loro sapere e riflettere sulle loro concezioni, a partire dalle riflessioni di altri docenti.

Gli autori riescono a rivolgersi a un pubblico molto eterogeneo, con la loro consueta capacità di coinvolgere ed essere al tempo stesso meticolosi e precisi. La lettura di questo testo è in grado sia di stimolare riflessioni generali sull’apprendimento, che possono incontrare i gusti un vasto pubblico, sia fornire strumenti operativi utili per la professione docente e per i formatori.

Laura Branchetti

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università di Parma, Italia

Arrigo, G., Giacobbe, M., & Maurizi, L. (2019). *I nostri amici numeri*. Bologna: Sapyent.



Ho di fronte a me cinque volumi ciascuno dei quali si chiama “Quaderno didattico” di ampie dimensioni, più una guida per l’insegnante. Il primo quaderno è destinato alla prima e seconda elementare; il secondo alla terza; il terzo alla quarta e quinta; il quarto è un quaderno per l’estate destinato alla prima; il quinto, sempre per l’estate, destinato alla seconda. La guida è di piccole dimensioni, destinata all’insegnante.

Quel che colpisce subito è l’eleganza del disegno, la sobrietà della disposizione dei testi, la ricchezza delle figure destinate a completare la descrizione dei problemi proposti e a decorare con allegria le singole pagine.

La guida è particolarmente significativa. Il complesso editoriale tratta non tutta la matematica, ma solo l’aritmetica, con quella dovizia di particolari e di allegri e divertenti “trucchi” che da molti anni il collega Arrigo descrive oralmente nei suoi molteplici e fortunati corsi.

Le proprietà delle operazioni, per esempio, non costituiscono il solito banale stereotipato elenco di definizioni con esempi, ma vere e proprie attività da far svolgere in aula, scoperte da fare e non apprendimenti ripetitivi.

La guida è particolarmente ricca di riferimenti anche teorici in didattica della matematica, quasi a voler dire che un buon testo per studenti, anche se si tratta di una raccolta di esercizi da far svolgere e problemi da far risolvere, deve avere una base culturale didattica, basata sulla teoria, che mai verrà detta al bambino, ovviamente, ma che garantisce l’insegnante che la usa. Non si tratta insomma di indottrinare con suggerimenti del tipo “fa così e così e vedrai che ...”, ma di delineare una strategia, un percorso culturale, una strada intelligente da proporre.

In prima, per esempio, si inizia con corte favole nelle quali un numero ha un ruolo specifico, contando raggruppamenti di oggetti, introducendo le cifre da 1 a 9, introducendo la cifra 0 per indicare il numero che ci insegna a gestire formalmente situazioni nelle quali la risposta è “nessuno”. Appaiono vari personaggi simpatici che catturano l’attenzione dei bambini; vengono sempre proposti giochi idonei, sempre alla portata dei nostri piccoli lettori...

E così via, in seconda i giochi si fanno più interessanti, in terza stuzzicano la fantasia, in quarta sono sfide, in quinta...già si sente odore di scuola media... In terza, la fantasia dei nostri autori galoppa e, creando situazioni simpatiche e idonee, sfida quasi la voglia di matematica degli allievi con giochi, attività e racconti che non possono lasciare indifferente nessun bambino...

Ogni tanto ci sono passaggi per così dire teorici nei quali si stabilisce che una certa proprietà, scoperta giocando e lavorando, vale in generale e dunque si può applicare sempre. Ma senza prosopopea, senza essere pedanti, come spesso capita nei libri di matematica. In quarta e quinta la sfida diventa più significativa, si entra in argomenti più profondi e precisi, ma sempre con quell'aria di gioco e di scoperta che entusiasma i bambini dato che li fa sentire esploratori protagonisti dell'aritmetica.

Tutti i volumi sono ricchi di personaggi che si alternano nella narrazione, nelle sfide, nell'essere protagonisti di giochi e attività diverse. Fra queste, molto indovinata la palestra matematica che costituisce un polo di forte attrazione motivazionale per fare un deciso passo avanti nella costruzione di conoscenza matematica (in palestra, appunto, dunque provando sé stessi!).

Auguriamo ai nostri tre autori e alla casa editrice che ha creduto in loro un totale successo dell'opera, specie nelle mani di quei docenti di scuola elementare di matematica che sono stanchi di attività ripetitive e stereotipate e che vogliono sì insegnare e fare in modo che i bambini imparino, ma senza annoiarli e offrendo loro attività giocose, intelligenti e creative.

Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Cerasoli, A. (2015). *Tutti in festa con pi greco*. Firenze: Editoriale Scienza.



Nella usuale notazione anglosassone, la data del 14 marzo presenta in successione le cifre 3, 1 e 4. Esatto: le prime tre cifre del pi greco! Questa singolare coincidenza è stata notata solo alla fine degli anni '80, ma da allora il 14 marzo è diventato il giorno in cui si festeggia il pi greco in tutto il mondo: è il Pi Day!

Che esagerazione: dedicare a un numero un intero giorno all'anno. Sembra una di quelle ossessioni da scienziati un po' troppo devoti. Eppure, a ben guardare, il pi greco è non solo uno dei numeri più importanti della storia della matematica, e forse della storia della scienza in generale, ma rappresenta un nodo fondamentale nell'evoluzione del pensiero dell'uomo. Lo sa bene anche Anna Cerasoli, autrice del libro *Tutti in festa con pi greco*, nel quale la scrittrice ed ex insegnante di matematica narra in modo accattivante e preciso diverse vicende, umane e scientifiche, che ruotano attorno a questo numero, riuscendo a descriverne la significatività in termini matematici, storici, culturali ecc.

Il risultato è un libro prezioso: a partire dalla presentazione di Archimede di Siracusa, vero genio e "padre" del pi greco, vengono affrontati in modo accessibile temi complessi. Ad esempio, viene descritto il procedimento di calcolo infinitesimale utilizzato per determinare approssimazioni sempre più accurate del pi greco. Approssimazioni, certo, perché il pi greco è un numero irrazionale (e anche trascendente), cioè un numero che non può essere scritto come rapporto fra due numeri interi e la cui rappresentazione, qualunque sia la base considerata, non termina mai e non forma una sequenza periodica. Certo si dirà: "Esistono infiniti numeri fatti in questo modo, perché il pi greco è così famoso?" Beh, è sufficiente dire che grazie al pi greco possiamo calcolare l'area di un cerchio, e il cerchio è la figura che a parità di perimetro racchiude l'area massima. Questo risultato è utilizzato in modo spontaneo dagli animali a fini di una maggiore protezione dagli attacchi, dagli essere umani per risparmiare risorse nella costruzione delle mura di difesa di una città...e persino dalla leggendaria Didone, fondatrice di Cartagine!

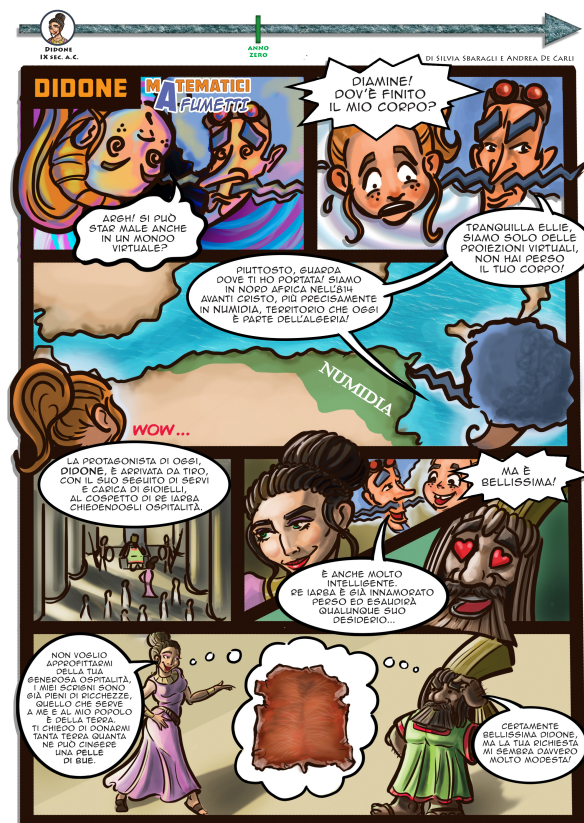
Insomma, il pi greco ha fatto la storia della matematica fin dai tempi antichi, e ancora oggi continua a far parlare di sé. Come questo libro, edito nel 2015, che mantiene stretti fra loro il potere di una narrazione coinvolgente e contenuti matematici curiosi e rigorosi. Un testo per tutti: appassionati e non, studenti e, soprattutto, insegnanti della scuola obbligatoria.

Michele Canducci

Dipartimento Formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera

Sbaragli, S., & De Carli, A. (2020-2021). *Storie di matematici*.

Disponibile in: <https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/didone/>



All'interno del progetto *Communicating Mathematics Education*, finanziato dal Fondo Nazionale Svizzero Agora per la divulgazione scientifica, una delle iniziative previste per l'a.a. 2020/21 è la creazione e diffusione di una serie di fumetti "Storie di matematici" su personaggi e aneddoti matematici, in un'ottica di intreccio interdisciplinare di aspetti matematici, storici e geografici.

I fumetti sono incentrati sull'incontro della giovane Ellie, ragazzina non interessata al mondo della matematica, con vari personaggi della storia della matematica che vivono aneddoti riguardanti contenuti matematici di base. L'intento è di fare appassionare i lettori, anche i più scettici, alla matematica e alla sua storia e far comprendere che la matematica è un'espressione della cultura umana, fatta dall'uomo per l'uomo.

L'incontro tra Ellie e questi personaggi avviene attraverso gli occhiali virtuali costruiti in laboratorio dal geniale zio Angelo, che consentiranno di viaggiare nel tempo dall'800 a.C. fino ai giorni nostri. La lettura dei fumetti consente dunque di toccare, oltre ad aspetti matematici, anche elementi storici, geografici e caratteristici dei personaggi.

I primi due episodi sono già disponibili: nel primo si fa la conoscenza della protagonista, Ellie, e dello zio Angelo, che la guiderà nel suo percorso di scoperta; nel secondo vengono narrate le vicende, matematiche e storiche, che ruotano attorno alla leggendaria figura di Didone. Gli episodi che seguiranno copriranno più di due millenni di storia, da Didone e i matematici greci fino a Möbius e Turing, passando per i grandi personaggi della matematica medievale.

Insomma, questo insolito binomio: fumetti e matematica sarà utile per avvicinare un pubblico spesso scettico a questa disciplina, essendo il fumetto uno strumento di comunicazione diretta, rivolto a un

pubblico di massa. Ma potrà essere efficacemente utilizzato anche da docenti di scuola: perché non introdurre, ad esempio, i temi dell'area e del perimetro attraverso il racconto della leggenda di Dido-ne? Oppure approfittare del fumetto su Pitagora per lavorare in ottica laboratoriale e interdisciplinare sulle relazioni fra matematica e musica?

Insomma, questi fumetti sono pensati per essere un modo leggero e divertente di narrare la matematica, ma chi dice che con la leggerezza non si possa fare della buona didattica? È questo l'auspicio sottointeso dagli autori, due che di didattica se ne intendono: Silvia Sbaragli, professoressa in didattica della matematica e autrice di numerosi volumi didattici e divulgativi, e Andrea De Carli, docente di visiva delle scuole medie ticinesi, illustratore e fondatore della Scuola di Disegno di Locarno. Decisamente un bel binomio!

Michele Canducci

Dipartimento Formazione e apprendimento
SUPSI di Locarno, Svizzera