DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 28 - 47, DOI: 10.33683/ddm.20.8.2

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Denken beim Apéro.
Das dezimale Stellenwertsystem in unterhaltsamen Situationen meistern lernen

Thinking during the aperitif.
Learning to master the decimal place value system in entertaining situations

Stefan Meyer
Senior Lecturer, Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik – Zürich, Schweiz

stefan.meyer@hfh.ch

Abstract / Der Essay beschreibt, wie das logisch-mathematische Denken und Operieren im Umgang mit dem Stellenwertsystem kreativ, operativ und exemplarisch gefördert werden kann. Theoretisch steht der Essay der kognitiven Akzeleration nahe (vgl. Adey, 2008). Darin wird die Denkschulung mit der genetischen Entwicklungspsychologie (Piaget 1977a, 1977b; Piaget & Voelin, 1980), mit dem Curriculum, mit der Zone der nächsten Entwicklung (Vygotskij, 1986) und der Metakognition vereinigt. Der Essay integriert das Rollenspiel im Sinn eines soziometrischen Experiments (Moreno, 1996, 2007), die Methode der kritischen Exploration (Piaget in Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974) und den Schulabakus als Darstellungssystem (Johann, 2002; Johann & Matros, 2003). Diese nonkonformistischen Methoden sind notwendig, um die Orientierung am Verstehen in der mathematischen Bildung für alle zu radikalisieren.

Abstract / The paper describes how it is possible to develop logical-mathematical thinking and operational skills regarding the positional decimal numeral system in a creative, operational and illustrative way. Theoretically the paper is close to the construct of «cognitive acceleration» (Adey, 2008) that connects in a "school of thought" the genetic theory of cognitive development (Piaget, 1977a, 1977b; Piaget & Voelin, 1980), the current curriculum (Lehrplan21), the proximal development zone (Vygotskij, 1986) and metacognition. Moreover, the article integrates the role play in the sense of sociometric experiment (Moreno, 1996; 2007), the method of critical exploration (Piaget, in Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974) and the abacus as an operational tool of representation of the positional decimal numeral system (Johann, 2002; Johann & Matros, 2003). These methods can guide the understanding process during the learning of mathematics.

Schlüsselwörter: Arithmetik; das dezimale Stellenwertsystem; Abakus; Darstellungsmittel; Rollenspiel.

Keywords: arithmetic; positional decimal numeral system; abacus; tool of representation; role play.

1 Problemstellung

Das dezimale Stellenwertsystem ist eine einfache und zugleich herausfordernde symbolische Darstellung von natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) bis zu den reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) (Reiss & Schmieder, 2005). Das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems heranzubilden, ist eine komplexe und langwierige Aufgabe. Die Forschung bestätigt seit mehreren Jahrzehnten, dass sich die Einsicht bei der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler (abgekürzt: SuS) zwischen der zweiten und fünften Klassenstufe einstellt, bei einigen Kindern erst in der Sekundarstufe 1 (Ross, 1986; Schuler, 2004; Brugger, Sidler & Meyer, 2007; Moser Opitz, 2007; Ruflin, 2008; Herzog, Fritz & Ehlert, 2017; Herzog, Ehlert & Fritz, 2019; siehe Tabelle 1).

Es ist heikel, aus entwicklungspsychologischen Daten Normen für die Entwicklung der Denkniveaus abzuleiten, weil die Forschung meist in einer künstlichen Umgebung stattgefunden hat. Auch bei den Daten aus der Unterrichtsforschung muss geklärt werden, welchem pädagogischen Modell sie angehören: Sind es künstliche, repetitive Aufgaben und Probleme, oder sind es echte Probleme, die Interesse wecken? Daten über das Lernen hängen von der Qualität der mathematischen Bildungsprozesse und anderen Umweltfaktoren ab (vgl. Dewey, 2008; Weltgesundheitsorganisation, 2011). Nach Dewey (2008) kann mit der Theorie der Forschung überprüft werden, ob ein Objekt wie das dezimale Stellenwertsystem *mit oder ohne Bezug zu Situationen* behandelt wird. «Denn wir machen nie die Erfahrung von Objekten oder Ereignissen für sich, noch bilden wir uns Urteile über sie allein, sondern nur im Zusammenhang mit einem kontextuellen Ganzen» (Dewey, 2008, S. 87). Kamii (1985, 1994, 2004, 2005) weist rigoros darauf hin, dass das logisch-mathematische Denken nicht beigebracht werden kann, sondern selbst und ko-konstruktiv angeeignet wird. Wittmann (2002) entwickelte das Konzept des aktiv entdeckenden Lehrens und Lernens. Doch macht es den Anschein, dass sich alle hehren fachdidaktischen Ansätze unter dem alltäglichen Druck, die Lehrmittel durchzunehmen, verflüchtigen. So ringt die Bildung nicht nur mit den stufenübergreifenden Problemen beim Lernen des dezimalen Stellenwertsystems, sondern auch mit den eigenen Grenzen der Lehrbarkeit innerhalb der angenommenen Situationen.

Im Licht der kritischen Pädagogik (Gur-Ze'ev, 2005; Freire, 2011; Wink, 2011) haben die Grenzen der Lehrbarkeit damit zu tun, dass die Transmissionspädagogik, also der Glaube an die Lehrbarkeit, ungebrochen weiterexistiert. Die transmissionspädagogischen Annahmen fokussieren vor allem auf die innermathematische Beziehungshaltigkeit (Freudenthal, 1977), ohne Bezüge zur realen Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler. Modernisierte Aufgaben und Designs halten auch die Aufgabendidaktik à jour (Lenné, 1969). Das hat nach Freudenthal (1977) zur Folge, dass die Didaktik zu einem *illusionären System* verkommt. In seinen Augen ist die aussermathematische Beziehungshaltigkeit ein essenzieller Bestandteil der Bildung. Sie integriert die pädagogischen Situationen bewusst.

Freudenthal (1991) entwickelte das bekannte Konzept der "Realistic Mathematics Education" (RME). Mit diesem lassen sich die Versuchungen illusionärer Systeme kritisch überwinden. Das Adjektiv "realistisch" gibt die Erfahrung des Schülers mit der Schulmathematik an, die in sein tägliches Leben eingebunden ist.

Gleichzeitig bedeutet "realistisch", dass die *Mathematik*, *welche die Schüler in sich tragen*, durch lebendige Bildungsprozesse und geführte Neuerfindungen erforscht und integriert werden sollte. Per Definition integriert die Aufgabendidaktik die realistische, mentale Synthese der Schülerinnen und Schüler nicht, sie bleibt ein behavioristisches Ping-Pong zwischen Stimulus und Reaktion (Abrahamson, Zolkower & Stone, 2020).

Dieses illusionäre System lässt sich mit soziometrischen Methoden untersuchen und überwinden (Moreno, 1996). Der Glaube an die Lehrbarkeit, die Konzentration auf die innermathematische Beziehungshaltigkeit sowie die Aufgabendidaktik sind Indikatoren der Illusion und der Situationslosigkeit. Nach Moreno gibt es eine paradoxe Tendenz zwischen Innovation, Produktion und Konsumption. Dabei werden Produkte von kreativen Prozessen routinisiert und im Fall der Mathematik in neuen Lehrmitteln und in modernisierter Aufgabendidaktik "eingefroren". Moreno bezeichnete diese Produkte als Kulturkonserven (Storch, 1996; Moreno, 2007). Storch (1996, S. 1) präzisierte: «Konserven sind der Versuch, die Spontaneität und Kreativität eines vergangenen Augenblicks in einem konkreten Produkt einzufrieren».

Wenn das Durchnehmen von Schulstoff ungeachtet des Verständnisses der Materie dominant wird, geht die *Spontaneität als Voraussetzung für die Kreativität* verloren (Storch, 1996).

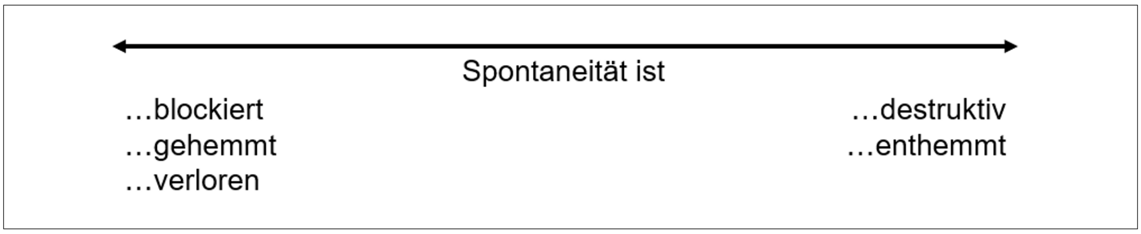

Abbildung 1. Die Pole der Kreativitätsneurosen.

Abbildung 1 zeigt in Anlehnung an Wieser und Ottomeyer (2000, S. 662), wie die Handlungs- und die Begegnungsfähigkeit durch Kreativitätsneurosen blockiert oder enthemmt werden. Lehrpraktiken, welche das Verstehen der Inhalte dem Stoffdruck opfern, gefährden auch die Spontaneität. Wer sich an die Spendendidaktik (Freire, 2011) klammert, empfindet Spontaneität als Störung der gängigen Mathematikdidaktik. Er verhält sich wie blind oder wie gespalten zur Spontaneität und zur Mathematikdidaktik, was in den Worten von Watzlawick (2017) das «Spiel ohne Ende» ist. Der Ausdruck bezeichnet soziale Vorgänge, in denen die Beteiligten nicht mehr wissen, wie zum Beispiel die Transmissionspädagogik beendet werden könnte. In Anlehnung an Watzlawick bräuchte es im Zusammenhang mit der Spendendidaktik und der temporären Aneignung ohne Verständnis einen *Durchbruch zur Abstraktion*. Die Spontaneität und die Kreativität könnten die Transmissionspädagogik aufbrechen und die irrationalen Ängste vor dem Verstehen überwinden helfen (Devereux, 1998).

Es reicht also nicht aus, die Mathematikdidaktik als «design science» (Wittmann, 2020, S. 66) festzulegen, quasi als Modernität zum Selbstzweck. Die «design science» müsste die Paradoxie der Kulturkonserven und der Spiele ohne Ende erkennen und meistern können.
Nonkonformistische Methoden könnten Perspektiven wechseln. Sie müssten nach Freudenthal (1983, 1991) in der didaktischen Analyse verankert sein. Didaktische Analysen (Klafki, 1996; S. Meyer, 2020a) bilden einen mehrdimensionalen Prozess der geführten Unterrichtsvorbereitung. Dabei organisieren und perfektionieren die Lehrpersonen das Zusammenspiel der folgenden Dimensionen: die Ressourcen und die Voraussetzungen, die bedeutsamen Inhalte [welche die realistischen Elemente nach Freudenthal (1991) sind], die Ziele, die Methoden, die Kommunikation, die Kooperation und die Interaktion sowie die Organisation der Sequenzen. Je lebendiger und systemischer die Wechselwirkungen zwischen den Personen und den verschiedenen Elementen zusammenspielen, desto bedeutsamer wird der Bildungsprozess. In einem derartigen Gefüge erscheint die Spontaneität als angemessene Reaktion auf eine neue Situation oder als neue Reaktion auf alte Situationen (Wieser & Ottomeyer, 2000).
Gupta (2009) beobachtete in einem Projekt zur Entwicklung der Literacy im Zusammenhang mit dem Erzählen von Geschichten und Rollenspielen folgende Auswirkungen:

1. Die Kinder entwickelten einen umfangreicheren Wortschatz und komplexere Satzstrukturen.
2. Im Rollenspiel zeigten die Kinder sehr persönliche emotionale Bedürfnisse und setzten sich mit eigenen Konflikten auseinander, was zur Erhöhung des Selbstvertrauens und der eigenen Wertschätzung führte.
3. Soziale Fragen wurden mit erhöhter Bewusstheit und Interesse verfolgt. Das betraf Geschlechterrollen, Macht, Gerechtigkeit, ethische Fragen und mehr.
4. Die Rollenspiele ermöglichten gemeinsames Problemlösen, Verhandeln, Organisieren und Entscheiden.
5. In den Peer-Gesprächen unterstützten die Kinder einander beim sachlichen und sozialen Denken.
6. Es entstand ein Zuwachs im Anerkennen verschiedener Gesichtspunkte und Möglichkeiten. Das egozentrische Selbst konnte dezentriert werden. Der Gemeinschaftssinn und das Wissen der ganzen Gruppe über jeden Einzelnen entwickelten sich auch.

Die Grundidee des Rollenspiels wurde in der Entwicklung der LeMa-Methode (Lesen und Mathematisieren) im MKT-Testsystem (S. Meyer & Wyder, 2017) weiterentwickelt. Es ist sehr hilfreich, wenn die Lehrperson bei Problemen mit dem Sachrechnen in die Rolle der geistreichen Sekretärin schlüpft und dem Kind die "Chefrolle" beim Problemlösen überlässt. Sehr positive Effekte konnten im Fall eines Mädchens beobachtet werden, das in der zweiten Klasse überzeugt war, dass sie überhaupt nicht rechnen könne. Die Heilpädagogin spielte den Taschenrechner. Das Mädchen nahm mit ihm sofort eine engagierte und kompetente Beziehung auf (vgl. Meyer, 2019).

Die Spontaneität im Sinn der Soziometrie ist Voraussetzung für neue und kreative Lehr- und Lernformen, welche im Essay exemplarisch zum dezimalen Stellenwertsystem skizziert werden.

2 Didaktische und pädagogische Gedanken

Stellen Sie sich vor, Sie würden ab und zu gegen 11 Uhr morgens einen Apéro organisieren. Bei gemeinsam vereinbarten Aktivitäten mit sozialer Bedeutsamkeit (im Sinn der systemischen didaktischen Analyse (SDA, vgl. Klafki, 1996; S. Meyer, 2020a) sollen das Lösen von mathematischen Problemen, das operative, gemeinschaftliche DENKEN und die reflektive Abstraktion (Piaget, 1977a, 1977b) kreativ gefördert werden. Mit dem Schulabakus und zum Beispiel mit Salzstangen als Darstellungsmittel könnten Probleme mit dem dezimalen Stellenwertsystem (Fehlannahmen, kognitive Konflikte) oder neue Interessen behandelt werden. Am Ende des Rituals werden die Salzstangen gegessen, und die Klasse stösst mit einem Glas Wasser oder Sirup auf ihr Wohl an.
Methodisch sind die mathematischen Tätigkeiten mit der Lernförderung im Sinn der «cognitive acceleration» (CA) (Adey, 2008) verwandt. Die CA vereinigt die Ansätze von Vygotskij (1986) und Piaget (1977a, 1977b). Diese Denkschulung wurde in England für alle Disziplinen entwickelt und empirisch erprobt (Adey, 2008).
Die Schulklassen werden in Arbeitsgruppen aufgeteilt, sodass alle SuS Gelegenheit zum Austausch bekommen. Bevor die Gruppen zu arbeiten beginnen, gibt die Lehrperson oder eine Gruppe von Kindern ein Modell für die Lösung der Aufgaben vor. Die anschliessenden Gruppenarbeiten werden im Plenum ausgetauscht (*Sharing*) sowie metakognitiv erörtert. Am Schluss wird Ausschau auf den Unterricht, auf die Freizeit und auf neue Apéro-Rituale gehalten (Bridging).
Die Darstellungsmöglichkeiten (von konkret bis zum numerisch-algebraischen Schreibsystem) sowie die Operationen mit und am Darstellungsmittel geben Hinweise auf Niveaus des abstrakten Denkens, sie geben auch Hinweise auf die Niveaus des Lesens und Verstehens der mathematischen Schreibsysteme.

Die von der Genfer Schule entwickelte Technik der «vérification sur le vif » sowie die «abstraction réfléchissante» (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974)[1] kommen dem sehr nah, was Vygotskij als Zone der nächsten Entwicklung entworfen hat. Es ist das Spannungsfeld der logisch-mathematischen Wahrheit von Modellen sowie von Denk- und Handlungsweisen. In ihm werden Hypothesen zu Inhalten und Verknüpfungen fortlaufend im Prozess eines flexiblen Interviews oder in einer Episode in der CA thematisiert sowie operativ und sozial überprüft. Dies stimuliert die reflektierende Abstraktion, wie die Forschungen zur Kognitiven Akzeleration bewiesen haben: Die SuS sind intelligenter geworden, was auch die Wirksamkeit der *CA als Umweltfaktor* (*Inquiry-Situation*) untermauert (siehe Adey, 2008).

2.1 Die Gesprächsgestaltung in der "*aritmetica ludica*"

Der Essay verknüpft auch die «méthode d'exploration critique» (Piaget in Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974), was eine Umschreibung für das flexible Interview ist, mit der Ko-Konstruktion und der Zone der nächsten Entwicklung nach Vygotskij (Gupta, 2009). Auch die Metakognition (auch «abstraction réfléchissante» genannt, vgl. Piaget, 1977a, 1977b; Adey, 2008) und die Handlungsmethoden nach Moreno (1996, siehe **Abbildung 2**; H. Meyer, 2000) werden integriert.

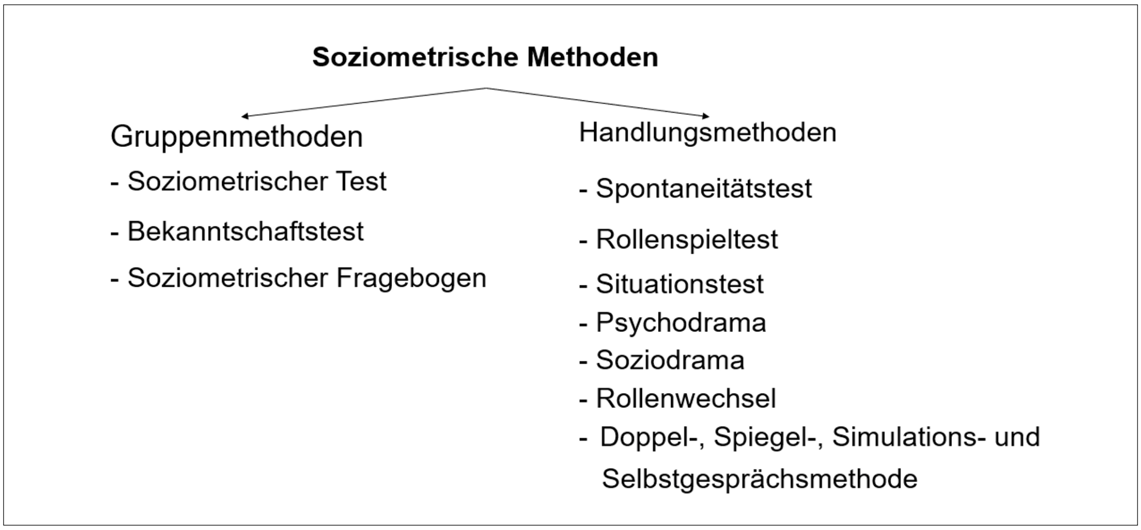

Abbildung 2. Dimensionen der soziometrischen Methoden nach Moreno (1996).

Die Übersicht über die soziometrischen Methoden (siehe **Abbildung 2**) weist auf eine Vielzahl von Möglichkeiten hin, die hier ausschnittweise erörtert werden. Die blockierte Spontaneität und das eingeengte Schaffen in überkommenen «Kulturkonserven» (Moreno, 2007) werden im weitesten Sinn durch die Spiele befreit.

Arithmetische Stegreiftheater, Rollenwechsel, inszenierte Selbstgespräche, Denkspiele der Zahlenkünstler – der Begriff "Zahlenkünstler" ist abgeleitet vom griechischen "arithmós" (Zahl), dem Adjektiv "arithmētikós" (im Zählen oder Rechnen geschickt) und "téchnē" (Kunst) – sowie Gespräche in Gruppen initiieren und inszenieren das operative und ko-konstruktive mathematische Denken. Dabei kommt es genauso zum «calcolo ragionato» wie zum reflektierenden Darstellen (*rappresentazione*

1. Die «vérification sur le vif », die uns schon immer als eines der grundlegenden Merkmale unserer Methode erschien, geht schrittweise von der kritischen Exploration und Befragung des Kindes über zur Analyse und Interpretation der Verhaltensweisen. (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974, S.40; Übersetzung des Autors).

ragionata) von Gedanken und Sachverhalten. Die Handlungsmethoden sind immer mit der mathematischen Fragestellung oder mit der Aufgabe trianguliert.
Arrigo (2014) bezieht den sogenannten «calcolo ragionato» auf die Darstellungstheorie der semiotischen Transformationen von Duval (1993; S. Meyer, 2017; siehe Abschn. 4). Der Prozess ist grundsätzlich mental; das nachdenkende, argumentierende Rechnen weist mehr Freiheitsgrade auf als das Halbschriftliche Rechnen. Diese Methode umfasst das Konzeptuelle (die Einsicht in die Begriffe), das Strategische, das Kommunizierbare und die Einsicht in das Darstellen. Das denkende Rechnen oder die denkende Zahlenkunst wird in der Praxis zur gut begründeten Einsicht in die vier Grundoperationen und in die kommutativen, assoziativen und distributiven Rechengesetze (Arrigo, 2014, S. 40).
Die Dynamik dieser Methoden trägt zur Überwindung der Transmissionspädagogik und der ineffizienten Belehrung bei. Die Methoden bereiten Freude und fördern die Einsicht in mathematische Begriffe und Zusammenhänge, auch wenn kognitive und soziale Konflikte und Probleme bestehen. Die Lösungen werden nicht rational durchexerziert, sondern spielerisch exploriert und gesichert. Die Frage nach der inner- und aussermathematischen Beziehungshaltigkeit (Freudenthal, 1977) wird zum dynamischen Element der "*aritmetica ludica*", dem mathematischen Rollenspiel.

2.2 Mentale Mathematik und befreiende Kommunikation

Die oben beschriebenen Methoden und Prinzipien sind zugegeben komplex. Welche Haltungen und Gesprächstechniken sind notwendig, damit Fachlehrkräfte zu befreienden und befreiten Kommunikatoren und Moderatoren werden? Die folgenden Hinweise erleichtern den Einstieg und die Praxis bei der Kommunikation (Cuomo, 2007; Gupta, 2009):

- Sie geben Kindern oder Erwachsenen ab und zu einen Impuls, über den frei nachgedacht werden kann. Oder Sie integrieren nach Rücksprache mit den Schülerinnen und Schülern ein Problem.
- Der Impuls ist einladend und bereitet Freude.
- Der Impuls ist Teil eines Rollenspiels. Alle verhalten sich wie bei einem Apéro, bei dem über eine interessante Frage konversiert wird.
- Impulse wirken über Modelle, Rollenspiele und Stegreiftheater. Personen oder Figuren (Plüschtiere) sind die Akteure. Sie könnten mit Aussagen auftreten wie: «Der Bär (oder Elsa) haben Hunger, im Restaurant (der Familie oder der Schulklasse) wird ein Apéro serviert. Es gibt Sirup und Salzstangen, aber da liegen bloss drei». (Genauer gesagt, es liegt eine Salzstange als Symbol auf einem Kärtchen, das den Zehner darstellt, und zwei Salzstangen liegen auf dem Kärtchen der Einer.) Es kann auch ein echtes Apéro-Ritual organisiert werden.
- Geben Sie nicht zig Aufgaben auf einmal. Machen Sie es wie beim Adventskalender. Anstelle von Weihnachten wartet die Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem.
- Sie verzichten bewusst auf Belehrung und nehmen eine sokratische Grundhaltung ein.
- Sie spielen mit feinem Humor eine vergessliche und uneinsichtige Person und fordern damit die SuS zum Denken und Kommunizieren heraus.
- Sie erklären nicht kleinschrittig und linear. Einsicht entsteht nicht linear, sondern durch bewusstes und unbewusstes Denken (Fühlen) in sich exponentiell verknüpfenden Nervenbahnen!
- Sie offerieren eine Vielzahl von Figuren und lassen die Kinder die Lieblingsfiguren bestimmen. Es gibt so viele inspirierende Vorbilder wie «La Linea – Series» (Osvaldo Cavandoli) oder «Il Rosso e il Blu» (Francesco Misseri: https://www.youtube.com/watch?v=koZeA5zDbF0) oder Mio Mao (Misseri Studio https://www.youtube.com/user/MISSERISTUDIO/videos).
- Während dieser Spiele setzen Sie sich lebhaft mit Fragen und mathematischen Handlungen auseinander. Der Spielpartner oder die Kinder werden zur Kommunikation animiert. Die Fragen und Probleme zirkulieren. Es entsteht kein Lehrer-Schüler-Pingpong.
- Sogenannte fachliche «Lücken» werden durch die Einsicht integriert und vernetzt, vertrauen Sie

darauf. Vertrauen Sie auf das Wachstum der Ressourcen der Klassengruppe.
- Sie beobachten frei wie ein diskreter Barkeeper.
- Stellen Sie spontan offene und vernetzende Fragen, welche das Gegenüber zum Denken und Sprechen und Handeln einladen.
- Laden Sie die Gruppe zum Darstellen mit verschiedenen Zeichen ein (Duval, 1993; Presmeg, Radford, Roth & Kadunz, 2016). Zeichen können mündlich, schriftlich, zeichnerisch oder enaktiv gegeben werden (Bruner, 1971). Lassen Sie die Frage über die Bedeutungen der Zeichen zirkulieren.
- Sie verzichten auf richtig-falsch Beurteilungen. Dafür fragen Sie jedes Gruppenmitglied immer wieder: «Ist das wahr?» (im Sinn der mathematischen, logischen Wahrheit). «Woran merkst du, dass deine logischen Schlussfolgerungen wahr sind? – Worauf achtest du, wenn du prüfst, ob das, was dein Kamerad oder deine Kameradin gesagt hat, wahr ist?»
- Fordern Sie wieder und wieder zum Beweisen heraus, etwa indem der Bär sagt: «Aber das kann doch nicht wahr sein?!» - «Lasst uns Beweise erfinden, damit der Bär überzeugt werden kann!» - Wie oben erwähnt, ist es der Bär oder Elsa, welche solche Sachen sagen. Wenn Sie in das Rollenspiel eintauchen, gelingt es besser, diesen heiteren und dynamischen Kommunikationsstil zu pflegen (Kamii, 2000; Bodrova, 2007; Cuomo, 2007; Wittgenstein, 2013; Resnick, Asterhan & Clarke, 2018; Schenker, 2018; Piaget, 1974; Piaget, Henriques & Ascher, 1990).
- Halten Sie kognitive Konflikte aus, indem Sie z.B. sagen: «Darüber können wir morgen nachdenken, wenn wir uns zum Apéro treffen; wollen wir uns dann dieselbe Aufgabe noch einmal stellen? Wollt ihr das? Der Bär hat genug!» Dadurch erzeugen Sie eine mentale und motivierende Spannung im Verhältnis zum mathematischen Problem. Machen Sie kognitive Spannungen nicht kaputt, indem Sie die Lösung verraten!

Die Hinweise verdeutlichen, dass das mathematische Rollenspiel humorvoll und schlau ist. Die Kommunikation ist empathisch und nicht vertikal bzw. fremdbestimmt (Freire, 2011). Das Rollenspiel schafft einen erlebnisreichen Erziehungsstil (Cuomo, 2007). In Situationen noch nicht zu verstehen, ist etwas Normales, und das Lernen wird liebevoll und schön. Die gelebte Arithmetik der Lehrperson ist Modell und Zone der nächsten Entwicklung im Sinn von Vygotskij (1986).

3 Der Apéro als pädagogisches Experiment - die PASS-Theorie

Die Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem und in die betreffenden Darstellungen erfordert mehrjährige Beschäftigung mit Problemen sowie abstrahierende Reflexion über diese Beschäftigung (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974; Piaget, 1977a, 1977b; Adey, 2008). Die Beschäftigungen sind in Anlehnung an Dewey (2008) Inquiry des Objekts dezimales Stellenwertsystem in einer Situation. Das Apéro-Ritual als Situation folgt der von Lurija entwickelten neuropsychologischen PASS-Theorie. Das ist eine Folge von Aufgaben und Kriterien, welche in Tests von Goldstein, Princiotta und Naglieri (2015) und vor allem von Otero (2015) Eingang gefunden hatten. Lurija und Judowitsch (1982) und Cuomo (2007) haben die Logik der Tests in die Logik von inklusiven schulischen Bildungsprozessen transformiert. Die systemische und didaktische Analyse (Klafki, 1996; S. Meyer, 2020a; siehe Abschn. 1) wirkt dabei als Mediatorin und Advokatin.

PASS ist die Abkürzung der Prozesse des Planens, der Aufmerksamkeit, der Simultaneität und der Sukzession, welche bezogen auf das Apéro-Ritual folgendes bedeuten:
- **Planen** ist ein kognitiver, operativer und sozialer Prozess, welcher Personen in Situationen zum Bestimmen, Auswählen und Anwenden einer Strategie und von Taktiken des Problemlösens he-

rausfordert. Planen ist demnach Aufgabe der Fachpersonen *und* der Kinder, welche in den Dienst der Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem gestellt ist. Diese Prozesse werden zu den exekutiven Funktionen gezählt.

- **Aufmerksamkeit** ist ein kognitiver und sozialer Prozess, welcher von Personen verlangt, dass sie sich selektiv mit einem bestimmten Inhalt oder einer bestimmten Frage auseinandersetzen. Dieser Prozess verhindert, dass die Person von konkurrierenden Inhalten in Beschlag genommen wird.
- **Simultaneität** ist ein kognitiver, operativer und sozialer Prozess, bei dem getrennte Stimuli bzw. Inhalte in ein einzelnes Ganzes oder eine Gruppe integriert werden. Das ist ein Hauptmerkmal des Apéro-Rituals, das dezimale Stellenwertsystem wird simultan mit allen Mitteln und Kenntnissen erörtert.
- **Sukzession** ist ein kognitiver, operativer und sozialer Prozess, welcher Sachen / Sachverhalte serial ordnet (Wasser in die Mokkamaschine zu geben bedeutet etwas anderes als die Mokkamaschine ins Wasser zu geben; 12 zu schreiben bedeutet etwas anderes als 21 zu schreiben; "Punkt vor Strich" ist ein Motto, das die Sukzession bei arithmetischen Operationen regelt.) Beim Apéro ist es Sukzession des Symbolisierens, des Darstellens, des Bündelns, des Quantifizierens, wie auch beim Ritual «Zuerst die Arbeit, dann das Vergnügen».

Neuropsychologisches und pädagogisches Fundament des Rituals sind in der PASS-Theorie die optimale Anregung, die Emotionen und die Aufmerksamkeit (Lurija & Judowitsch, 1982; Cuomo, 2007; Goldstein, Princiotta & Naglieri, 2015; Otero, 2015). Die PASS-Theorie ermöglicht eine dynamische und ganzheitliche Beziehung zum Lehren und Lernen des dezimalen Stellenwertsystems in den gemeinsam gestalteten Situationen. Die geteilte Aufmerksamkeit und das gemeinsame Planen bei kognitiven Problemen und Aufgaben machen das Lernen erfolgreicher (Dewey, 2008; McCabe & Farrell, 2020).

4 Zur Theorie der Darstellungen (Duval, 1993)

Bei der Beschäftigung mit einem mathematischen Objekt (**Abbildung 3**) sollten nach Duval (1993) mehrere semiotische Register und Darstellungsformen mobilisiert sein (vgl. auch Presmeg et al., 2016).

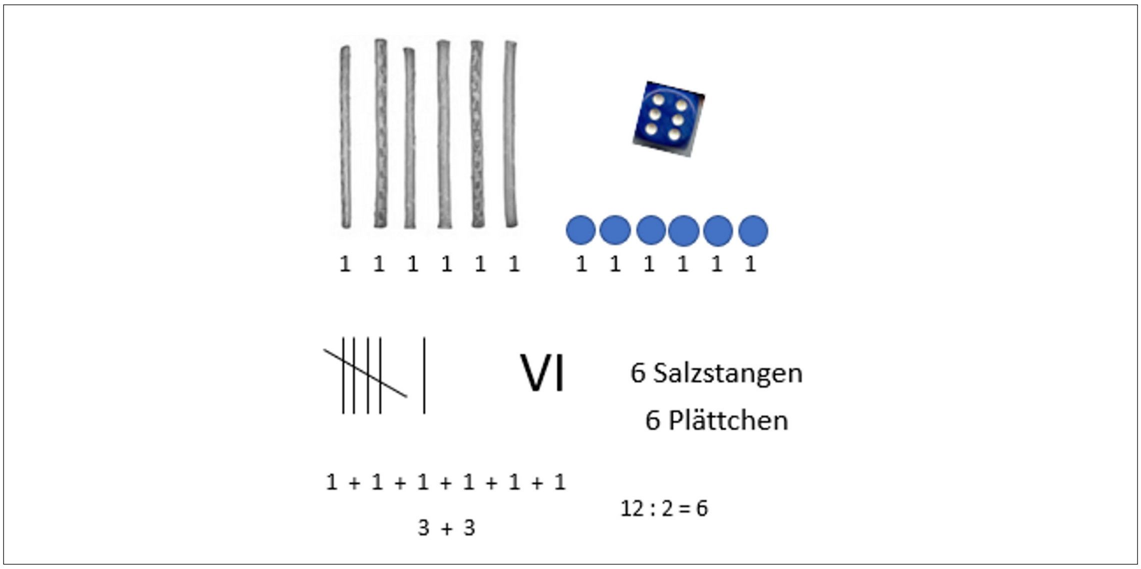

Abbildung 3. Beispiele von Darstellungen der Zahl 6.

Verschiedenheit der semiotischen Register (Sprachen) ist in Schulklassen eigentlich immer gegeben, wenn die Kinder eigene Darstellungsformen zeigen dürfen und nicht zu einer uniformierten Darstellungsform und Sprache gezwungen werden.

Mit Darstellungsformen sind Systeme von Zeichen (Sprache) gemeint, mit denen das Denken als ein Tun dargestellt wird (Figuren, Graphen, symbolische Schrift, der Ziffernvorrat von 0 bis 9, die Alltagssprache etc. (siehe Duval, 1993, S. 40). Die verschiedenen semiotischen Register tragen dazu bei, *dass mathematische Objekte nicht mit ihren Darstellungen verwechselt werden*. 100 ist nicht gezwungenermassen ein Hunderterfeld oder die hundertfach unterteilte Strecke auf einem Zahlenstrahl. 100 ist auch nicht gezwungenermassen eine Hunderternote. Hundert kann genauso als Quotient der Division $1:\frac{1}{100}$ ausgedrückt und dargestellt werden.

Nach Duval (2006, S. 64) stellt die Vielfalt der möglichen Darstellungsformen ein kognitives Problem dar, wie bei den verschiedenen Darstellungen (symbolischen Ausdrücken) der Zahl 100. Das kognitive Problem besteht darin, dass Gleiches in der Andersartigkeit logisch erkannt werden muss: $90+10$; $5\cdot 20$; $1000:10$; $1:\frac{1}{100}\ldots$, sind Darstellungen der Zahl 100 als mathematischem Objekt. Es geht um denselben Gegenstand in vielfach möglichen Darstellungen, d.h. um das Finden von Invarianten. «Mathematik ist das Finden von Invarianten» (mündliche Mitteilung von Hans Walser, 2020-01-17 über seinen Mathematiklehrer, Heinz Hopf). Lernen bedeutet, zur *Erkenntnis des Gemeinsamen* vorzustossen (Brief von Hans Walser, 13.08.2020), bzw. zu dem, was macht, dass und weshalb etwas gemeinsam ist (vgl. Piaget & Szeminska, 1975, S. 15-16). Die Uniformierung von Darstellungsformen auf der Basis guter didaktischer Absichten verdrängt die kognitiven Probleme. Sie erzeugt systemische Lehr- und Lernbehinderungen und verhindert, dass die Lehrpersonen die Mathematik der Schülerinnen und Schüler integrieren können (vgl. den Begriff "realistic" nach Freudenthal im Abschn. 1 und 2.1).

4.1 Der Schulabakus als Darstellungsmittel

Johann (2002) und Johann und Matros (2003) stellten den Schulabakus als Darstellungsmittel vor. Sie zeigten anhand von Fallbeispielen, dass dieses Mittel auch für SuS mit Lernschwierigkeiten beim Umgang mit dem dezimalen Positionssystem sehr hilfreich ist. Vorteile dieses Mittels sind die Adaptivität und die unendlichen Handlungsmöglichkeiten mit diesem an die Strukturlegetechnik (Flick, 2006) angelehnten Verfahren. Dieses kommt der Methode der kritischen Exploration nach Piaget sehr nahe. Die SuS verwenden *lose Blätter* und Stäbchen (Streichhölzer oder auch Salzstangen), um Mengen im Positionssystem mit der Basis 10 enaktiv darzustellen (Barrow, 1999). Wird gezeichnet oder geschrieben, so wird die Darstellung ikonisch oder symbolisch konvertiert. Das Material bleibt *beweglich*, die Symbole können verschoben, überarbeitet, ausgetauscht und vernetzt werden. Die SuS diskutieren und überprüfen die Darstellungen. Sie können sie auch fotografieren, wenn sie später weiterbehandelt werden sollen. – Die Strukturlegetechnik dient dem Ziel, das Positionssystem immer klarer gestalten und erklären zu können: Die SuS entdecken die Logik der Schreibweise (Barrow, 1999, S. 162), was in Anlehnung an Freudenthal (1991) als «guided-reinvention» bezeichnet werden soll.

Nehmen Sie für den Anfang 2-3 A4-Seiten und beschriften Sie diese, wie in Abbildung 4 gezeigt. Spielen Sie den Kindern *en passant* in einem Rollenspiel vor, wie eine Lehrperson Zahlen aufschreibt und nach welchen Regeln sie vorgeht.

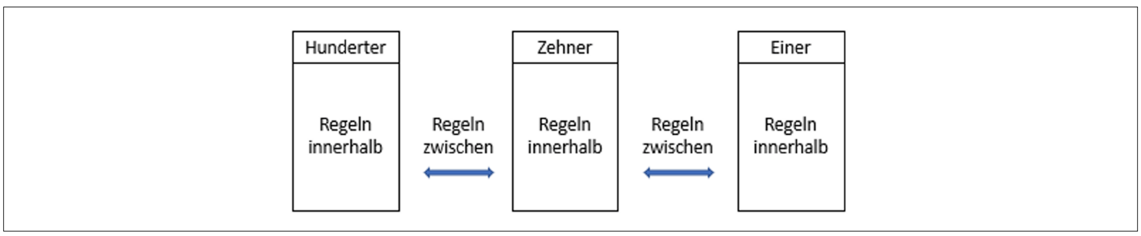

Abbildung 4. Schematische Darstellung des Stellenwertsystems Basis 10.

Die Einsicht in die Logik des dezimalen Stellenwertsystems (**Abbildung 4**) kommt schwerlich zustande, wenn die SuS bloss Regeln des Aufzeichnens üben müssen (Barrow, 1999; Reiss & Schmieder, 2005). Die Basis 10, die Stufenfolge der Zehnerpotenzen, die Bedeutung der Zahl 0, die arithmetischen Operationen, die Rechengesetze (vor allem das Assoziativ- und das Distributivgesetz) und die Schreibkonventionen sind arithmetische Elemente. Die multiple Klassifikation und Seriation sowie die Klasseninklusion (Teil-Ganze-Relation), die Korrespondenzen und Transformationen (Piaget & Voelin, 1980) sind kognitionspsychologische Operationsschemata. Beide Dimensionen, die arithmetische und die kognitionspsychologische, müssen während der ganzen Schulzeit thematisiert und geübt werden.

T	+	**H**	+	**Z**	+	**E**	+	**z**	+	**h**
$9 \cdot 10^{3}$	+	$9 \cdot 10^{2}$	+	$9 \cdot 10^{1}$	+	$9 \cdot 10^{0}$	+	$9 \cdot 10^{-1}$	+	$9 \cdot 10^{-2}$
9 000	+	900	+	90	+	9	+	0,9	+	0,09

Abbildung 5. Beispiel der mehrfach bezeichneten Zahl 9 999,99.

Abbildung 5 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen symbolischen Aufzeichnungen, sie zeigt Formen der Darstellung und Logik, welche abstrakt wirken. Wenn wir die statische Mathematikdidaktik überwinden wollten, müsste der Fokus verändert werden. Barrow hat diesen Fokus prägnant umschrieben:

> «Die Mathematiker haben den mathematischen Fortschritt von den speziellen Beispielen abstrahiert, die zur Motivation ihrer Einführung verwendet wurden, und untersuchen die Begriffe "Zahl", "Form" oder "Abstand" als Abstrakta. Das geschieht, indem sie ihre Aufmerksamkeit auf die Operationen richten, durch die Zahlen verändert werden, und nicht auf die Zahlen selbst».
>
> (Barrow, 1999, S. 164)

Die dynamische, an der Einsicht orientierte Mathematikdidaktik sollte mit dem Verändern von Zahlen, Darstellungen und Aufzeichnungen, mit dem «calcolo ragionato» und mit der «abstraction réfléchissante» arbeiten.

Tabelle 1 illustriert die Zusammenhänge zwischen den Denkniveaus nach Piaget (1977a, 1977b), Piaget et al. (1990) sowie zwischen den entwicklungspsychologischen Niveaus der Einsicht in das dezimale Stellenwertsystems nach Ross (1986), Herzog et al. (2019) sowie den Handlungsaspekten der unterrichtlichen Episoden, den Darstellungsformen und den Zyklen der Bildung gemäss Lehrplan 21. Der Stil der **Tabelle 1** orientiert sich am Konzept der kognitiven Akzeleration (Adey, 2008).

Lehrplan 21 (2016, bereinigte Fassung)		Entwicklungspsychologie	
Zyklus **Alter**	**Zahl und Variable**	**Niveau** (Ross, 1986; Herzog et al.,2019)	**Morphismustheorie** (Piaget et al., 1990)
1 4 bis	MA.1.A1 Operieren und Benennen c) verstehen und verwenden die Begriffe mal, grösser als, kleiner als, gerade, ungerade, ergänzen, halbieren, verdoppeln, Zehner, Einer und die Symbole ·, <, >. Können natürliche Zahlen bis 100 lesen und schreiben.	**Niveau 1** Die zweistellige Zahl repräsentiert die Menge der Objekte (alle 25 Stäbchen). **Niveau 2** Die zweistellige Zahl repräsentiert die ganze Menge (25 Stäbchen). Das Kind "erfindet" Bedeutungen für die einzelnen Ziffern.	**Intramorphisches Niveau** (präoperativ) Nur Relationen zwischen beobachtbaren Zuständen. 5-6 J.
8	MA.1.C2 Mathematisieren und Darstellen c) können die Bedeutung der Ziffern im Stellenwertsystem darstellen (z.B. 5 10-er-Stäbe und 7 1er-Würfel stellen 57 dar).	**Niveau 3** Die zweistellige Zahl repräsentiert die ganze Menge von 25 Objekten. Die einzelnen Ziffern bedeuten Zehner oder Einer. Das Kind weiss aber nur ungenau, wie das funktioniert.	
2	MA.1.C2 Mathematisieren und Darstellen 2) können die Bedeutung der Ziffern im Stellenwertsystem darstellen (z.B. 2 100er-Platten, 5 10-er-Stäbe und 7 1er-Würfel stellen 257 dar).	**Niveau 4** Die zweistellige (oder grössere) Zahl repräsentiert die ganze Menge von 25 oder mehr Objekten. Die einzelnen Stellen sind Teile der ganzen Zahl. Sie bestehen aus den Gruppen der Zehner und Einer. Das Ganze ist gleich der Summe der Teile.	**Intermorphisches Niveau** (konkrete Operationen) Systematische Koordination von Korrespondenzen (Plättchen, Zahlen, Stellenwerte), v.a. von beobachtbaren Zuständen und Ereignissen. 6-10 J.
9 bis 12	MA.1.B3 Erforschen und Argumentieren c) können Stellenwerttafel beim Erforschen arithmetischer Strukturen nutzen (z.B. Plättchen in die Stellenwerttafel legen und verschieben).		
	MA.1.B.1 Erforschen und Argumentieren j) können arithmetische Zusammenhänge durch systematisches Variieren von Zahlen, Stellenwerten und Operationen erforschen und Beobachtungen festhalten.	Neu: Die Zehnerpotenzen werden allen Positionen, auch den Dezimalbruchzahlen, zugeordnet und erläutert (S. Meyer, 2020b).	
3 13 bis	MA.1.A.1 Operieren und Benennen j) verstehen und verwenden die Begriffe Term, Variable, Unbekannte, hoch, Potenz, Zehnerpotenz, Vorzeichen, positive Zahlen, negative Zahlen, (Quadrat-) Wurzel. Erweiterung: verstehen und verwenden die Begriffe Basis, Exponent.	Neu: Die Potenzen der Basis g werden den Positionen zugeordnet und mittels algebraischer Gleichung dargestellt und erläutert (S. Meyer, 2020b).	**Transmorphisches Niveau** Ablösung von den sichtbaren Zuständen und Vorgängen. Abstraktes operatorisches, kognitives System wird ausgebildet.

16	MA.1.B.2 Erforschen und Argumentieren j) können algebraische Aussagen durch Einsetzen von Zahlen überprüfen.		↓ Stellenwertsysteme werden algebraisch rekonstruiert. Ab 11 J.

Tabelle 1. Lehrplan 21 und kognitive Entwicklungsniveaus (S. Meyer, 2020b).

In Klassengruppen bestehen Unterschiede in den Denkniveaus. Es kann sein, dass Kinder und Jugendliche die natürlichen Zahlen entdecken und untersuchen wollen, während andere bereits den Übergang zu den Dezimalbruchzahlen und Zehnerpotenzen verstanden haben. Es ist eine Kunst, diese Unterschiede als *Vielfalt und Ressource* zur Stimulierung der Denkoperationen im Sinne der Zone der nächsten Entwicklung und der Ko-Konstruktion aufzufassen (Vygotskij, 1986; Cuomo, 2007; Adey, 2008).
Die Tabelle 1 dient der Orientierung bei den Entwicklungs- und den Handlungsaspekten sowie bei der Lagebestimmung in den Zyklen des Lehrplans 21.

5 Impulse für Apéro-Rituale

Die folgenden Abschnitte beschreiben, welche Probleme in Apéro-Ritualen angegangen werden könnten. Auf eine Systematik der Sequenzen wird verzichtet, zugunsten der Systematik, welche auf den spontanen Fragen, den Problemen und den Interessen der ganzen Klasse beruhen. Wenn die Klasse spürt, dass sie die Thematik eines Rituals weiterverfolgen möchte, so können die Vorbereitungsgruppen entsprechende Aufgaben für künftige Rituale kreieren.
Die erste Sequenz, "Wundertüte" genannt, portraitiert die Teilschritte der Sequenzen exemplarisch und ungefähr. Die Ziele werden gleichwohl in der Wechselwirkung mit den Interessen und Problemen der SuS und der Lehrpersonen festgelegt. Mit der Zeit entsteht ein Rhizom von Zielen, an denen gearbeitet worden ist und welche die Einsicht zum Blühen gebracht haben (Deleuze & Guattari, 1977). Die Neugier und die Freude am Verstehen sind die Antriebskräfte für das Wurzelwerk der Ziele. Dauernd liegen Fragen in der Luft wie: «Wisst ihr noch, warum das so ist? Was passiert, wenn man die Zahl 9,99 mit der Zahl 0,01 addiert? Und warum passiert es so? Wer kennt ein Problem, das wir noch nie untersucht haben? Oder: Warum ist das wahr?» Die Lehrperson verhält sich zur Pflege der Einsicht wie die Gärtnerin zum Garten.

6 Apéro-Ritual: die "Wundertüte"

Das Ritual "Wundertüte" wird von kleinen Gruppen nach einem kohärenten Muster vorbereitet. Die Gruppe ist für das Ritual, das Material und die Fragen für die Denkaufgaben verantwortlich. Die SuS können die Lehrperson oder Kameraden bei der Vorbereitung um Rat fragen. Die Inhalte bleiben bis zu dem Zeitpunkt geheim, in dem die Wundertüten-Aufgabe der ganzen Klasse gestellt wird. Die Vorbereitung der Aufgabe ist gleichzeitig eine Form des *Preteaching* und der Prävention (Berg, 2013). Die Interessen und Kompetenzen werden exploriert, wichtige Informationen und praktische Kenntnisse werden angeeignet, und die kommenden Lektionen sind für die Lehrpersonen und die Schüler klarer vorbereitet.

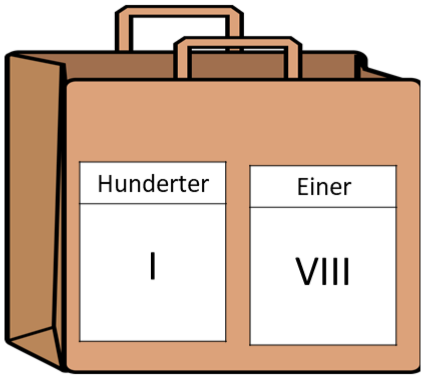

Abbildung 6. Darstellungsmaterial für die Wundertüte.

Abbildung 6 zeigt eine Wundertüten-Aufgabe. Die Gruppe hat einen Hunderter und 8 Einer festgelegt und mit römischen Zahlen symbolisiert, wie es beim Jassen üblich ist. Ziel dieses Rituals ist, dass die römischen Symbole im dezimalen Positionssystem wahrheitsgetreu zugeordnet und interpretiert werden können. Ein Schüler der Klassengruppe kann die Karten aus der Wundertüte ziehen, sie werden an die Wandtafel geheftet.
Nun diskutieren die Kleingruppen über die folgenden Fragen:

1. Um welche Zahl handelt es sich?
2. Wie schreibt man die Zahl im arabischen numerischen Schreibsystem?
3. Wie könnte die Anzahl der Salzstangen in der ganzen Klasse gerecht aufgeteilt werden?

Nachdem diese Fragen in den Kleingruppen besprochen worden sind, zeigen einige Gruppensprecher, wie sie das Problem gelöst haben. Sie sollen die wichtigsten Informationen an die Wandtafel schreiben. Die Lehrperson ermuntert die Gruppen, der ganzen Klasse so viele Antworten und Überlegungen wie möglich mitzuteilen (*Sharingphase*, Adey, 2008). Sie verzichtet bewusst auf Richtig-Falsch-Beurteilungen. Sie lobt den Forschergeist der Klasse. Eventuelle kognitive Konflikte werden in die Denkschulung aufgenommen.

4. Der vierte Schritt ist der reflektierenden Abstraktion (Denkschulung) gewidmet. Die Kleingruppen diskutieren präzise vorbereitete metakognitive Fragen. Die Lehrperson hilft bei der Perfektionierung der Fragen. Beispiele sind:
   – Welche Gedanken beweisen dir, dass die ermittelte Zahl *wahr ist*?
   – Welche Gedanken zeigen einem, dass die zwei Symbolkarten wahrheitsgetreu in die arabische numerische Schreibweise umgewandelt worden sind?
   – Welche Gedanken zeigen einem an, dass die Anzahl der Salzstangen gerecht auf die Klassengruppe verteilt worden ist? Mit welchen Gedanken kann man prüfen, dass die Verteilung gerecht erfolgt ist?

Die Kleingruppen werden von der Lehrperson aufgefordert, zu den Fragen möglichst klare Gedanken zu finden. Die Lehrperson geht durch die Klasse, lobt die Gruppen für ihre Denkbemühungen und wiederholt die metakognitive Frage. Die metakognitiven Gedanken werden wiederum in der Klassengruppe vorgestellt (Sharing). Die Lehrperson hütet sich vor Richtig-Falsch-Beurteilungen. Ganz bewusst unterstützt sie die Denkhandlungen und die Verschiedenartigkeit der Begründungen (Adey, 2008).
Die Erfahrung zeigt (vgl. Adey, 2008), dass das metakognitive Fragen von den Lehrpersonen intensiv geübt und dass es supervidiert werden muss. Oft ist einem nicht bewusst, dass man bloss Fragen

nach der empirischen Abstraktion stellt (Piaget, 1977a, 1977b). Beispiele sind: «Was hast du heute gelernt? War es schwierig oder leicht? Wie habt ihr die Aufgabe gelöst?» etc. Die reflektive Abstraktion benötigt Fragen, welche die SuS nicht nur zum Erzählen, sondern zum Denken über das Denken herausfordern.
Kognitive Konflikte und Probleme können von den künftigen Vorbereitungsgruppen aufgenommen und in eine neue Wundertüten-Aufgabe integriert werden. Die Lehrperson macht die Klassengruppe darauf aufmerksam. Dies ist gleichsam die Brücke zu künftigen Ritualen und Denkschulungen; diese Abschlussphase wird in der kognitiven Akzeleration «Bridging» genannt (Adey, 2008).

7 Drei Freunde, drei Salzstangen und Stellenwerte

Mit einem comicartigen Figurenspiel werden die Betrachter mit einem Schulabakus in die Bedeutung von Stellenwerten eingeführt. Zu Beginn werden drei Salzstangen auf drei Figuren verteilt. Eine weitere Szene zeigt eine Salzstange auf einem Kärtchen und zwei Salzstangen auf einem zweiten Kärtchen. Eine Figur interpretiert das in der ersten Szene Gesehene, nämlich dass drei Salzstangen auf drei Personen verteilt werden. Die beiden anderen Figuren stehen für die symbolisierte Menge in Bezug auf das dezimale Stellenwertsystem als ein Zehner und als zwei Einer, d.h. als Zahl 12. Die Menge der zwölf Salzstangen teilen sie dem Alter entsprechend auf: Die kleine Figur bekommt 3, die mittlere Figur 4 und die größte 5. Es entsteht ein kognitiver und sozialer Konflikt, der eine gerechte Lösung verlangt, welcher in Gruppendiskussionen gelöst und reflektiert werden soll, siehe https://www.youtube.com/watch?v=ZrQaswrCLwc "Three friends, three salt sticks".
Die Filmsequenz lässt andere Interpretationen und Tätigkeiten zu. Diese entzünden sich an der Frage: «Welche Zahlen lassen sich erschaffen, wenn man die Mengensymbole «I» und «II» oder «II» und «I» beibehält, aber den Kärtchen andere Stellenwerte zuteilt?» Die Kinder explorieren in kleinen Gruppen neue Zahlen wie z.B. 21, 1200 etc., indem sie die Salzstangen als Symbole benutzen.

8 Wie viele Salzstangen gibt es zu essen, wenn fünf Symbolzeichen vorhanden sind?

Bei diesem Ritual setzt sich die Klasse mit der Tatsache auseinander, dass eine geschriebene Zahl immer als Multiplikator des durch die Position festgelegten Multiplikanden fungiert, und das ist auch das Ziel dieses Rituals. Mit der Basis 10 können das bei den natürlichen Zahlen die Einer, Zehner, Hunderter sein, welche als Teilprodukte zur Gesamtsumme der Zahl addiert werden.
Eine Gruppe würde zusammen mit der Lehrperson das Apéro-Ritual vorbereiten. Fünf Salzstangen und drei A4-Blätter für die Positionen würden in Schachteln gelegt. Jede Arbeitsgruppe bekäme eine Schachtel. Die Aufgabe würde lauten:
«Welche Anzahlen von Salzstangen können mit diesen fünf Salzstangen als Symbole für Zahlen gefunden werden? Was wäre die kleinste Zahl der Salzstangen für den Apéro, welches wäre die grösste Zahl? Welche Zahlen können zwischen der kleinsten und der grössten gefunden werden? Legt die Salzstangen auf die Blätter, sie dürfen auch aufgeteilt werden, und schreibt die Zahlen mit arabischen Ziffern auf ein Blatt».
Ein Kind der Vorbereitungsgruppe könnte ein Beispiel vorgeben, z.B. mit 3 Salzstangen und 2 Positionsblättern. «Ich lege 3 Salzstangen auf das Blatt für die Zehner und schreibe die Zahl 30 auf das Protokollblatt».

9 Was geschieht, wenn ein Komma im Zahlensymbol vorkommt: 5 – 0,5?

Die Wahrnehmung und Bedeutung der Zeichen stehen in keinem direkten Verhältnis zueinander. Das Verhältnis wird durch die Bedeutung der Logik des dezimalen Stellenwertsystems bestimmt. Dies kann durch das Ritual "Komma im Zahlensymbol" untersucht werden.

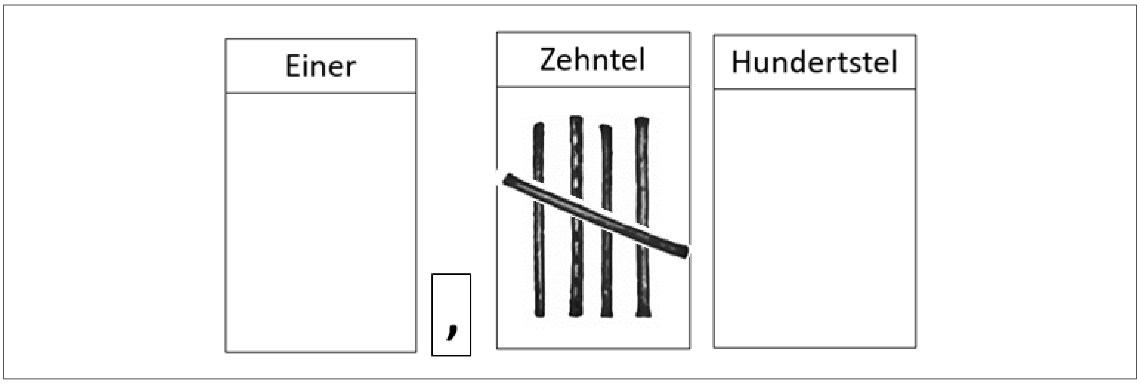

Abbildung 7. Wahrnehmen und verstehen lernen der Zahl 0,5.

Abbildung 7 zeigt die Darstellung des Dezimalbruchs 0,5 mit dem Schulabakus. Die SuS haben gelernt, dass die Wahrnehmung der Zeichen nicht identisch ist mit der Bedeutung der Zeichen und der Logik des Positionssystems. Sie haben schon bei den natürlichen Zahlen mit der Veränderung von Positionen experimentiert: «5» kann als Multiplikator mit jeder Position (als Multiplikand) verknüpft werden. Ziel dieses Rituals ist es, dass die SuS mit Bedeutungen und Darstellungen von Dezimalzahlen experimentieren lernen.
Die Arbeitsgruppen bekommen eine Tüte mit dem in Abbildung 6 dargestellten Material und den Fragen. Die Vorbereitungsgruppe liest die Fragen und kommentiert sie kurz. Danach werden sie von den Arbeitsgruppen bearbeitet:

1. «Um welche Zahl handelt es sich? Wie liest man sie?»
2. «Wie schreibt man die Zahl im arabischen numerischen Schreibsystem?»
3. «Wie könnten zwei Kinder die Anzahl der angezeigten Salzstangen gerecht aufteilen?»

Einige Gruppensprecher erläutern, wie sie das Problem gelöst haben. Auch hier ermuntert die Lehrperson die Gruppen, so viele Antworten und Überlegungen wie möglich der ganzen Klasse mitzuteilen (*Sharingphase*, Adey, 2008). Der Verzicht auf Richtig-Falsch-Beurteilungen und das Lob des Forschergeists der Klasse gehören selbstverständlich dazu. Kognitive Konflikte werden in nachfolgende Denkschulungen aufgenommen.

4. Der vierte Schritt enthält wiederum die reflektierende Abstraktion (Metakognition). Die Lehrperson fragt:
   - «Welche Gedanken beweisen dir, dass die herausgefundene Zahl 0,5 wahr ist?»
   - «Welche Gedanken zeigen einem, dass die Karten wahrheitsgetreu in die arabische numerische Schreibweise umgewandelt worden sind?»
   - «Welche Gedanken zeigen einem an, dass die Anzahl der Salzstangen gerecht auf die Klassengruppe verteilt worden ist? Mit welchen Gedanken kann man prüfen, dass die Verteilung gerecht erfolgt ist?» – Eine Antwort könnte lauten: «Wenn ich fünf Einer-Salzstangen hät-

te, so wäre das die Hälfte von Zehn. Die fünf Salzstangen in der Abbildung sind folglich die Hälfte von Eins. D. h., dass die fünf Salzstangen auf der Zehntel-Position im Schulabakus genau eine halbe Salzstange anzeigen». Die beiden Kinder bekämen je eine Hälfte der halben Salz stange, d.h. einen Viertel.

10 Ausblick

Wir sind bei der Schlussfrage angekommen: Was bedeutet ein Apéro-Ritual genau? Das Apéro-Ritual gleicht in Anlehnung an John Dewey (1993) einem Gramm Erfahrung im Verhältnis zu einer Tonne Theorie. «Eine Erfahrung, selbst eine sehr bescheidene Erfahrung, kann Theorie in jedem Umfang erzeugen und tragen, aber eine Theorie ohne Bezugnahme auf irgendeine Erfahrung kann nicht einmal als Theorie bestimmt und klar erfasst werden» (Dewey 1993, S. 193, Übersetzung des Autors).
Die skizzierten Rituale sowie der Einsatz von dynamischen Methoden erzeugen Erfahrungen der "aritmetica ludica" sowie der explorativen und geführten Arithmetik. Es werden weniger Aufgaben durchgenommen. Im Gegenzug wird Zeit geschaffen für learning-by-doing, für Inquiry und für ein gemeinschaftliches Ritual wie den Apéro. Das Ritual sowie die dynamischen Methoden vertiefen die Denkschulung gemeinsam mit der Mathematik als Erfahrung.
Diese Erfahrungen werden zu neuen Theorien der mathematischen Bildung führen und dazu beitragen, dass Spontaneität und Kreativität die Einsicht in mathematische Probleme positiv unterstützen.

Literatur

Abrahamson, D., Zolkower, B., & Stone, E. (2020). Reinventing Realistic Mathematics Education at Berkeley – Emergence and Development of a Course for Pre-service Teachers (ICME-13 Monographs). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 255–277). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_14

Adey, P. (2008). *Let's Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Arrigo, G. (2014). Calcolo mentale-approssimato-strumentale. *Bollettino dei docenti di matematica, 68*, 53–62.

Barrow, J. D. (1999). *Ein Himmel voller Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit*. Reinbek b. Hamburg: Rowohlt.

Berg, J. L. (2013). Preteaching Strategies to Improve Student Learning in Content Area Classes. *Intervention in School and Clinic, 49*(1), 14–20.

Bodrova, E. (2007). *Tools of the Mind. The Vygotskian Approach to Early Childhood Education* (2nd ed.). New Jersey: Pearson Education Inc.

Brugger, C., Sidler, A., & Meyer, S. (2007). *Stellenwerte des Zehnersystems verstehen*. Rapporto di ricerca inedito (p. 9). Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Bruner, J. S. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung: eine kooperative Untersuchung am „Center for cognitive studies" der Harvard-Universität*. Stuttgart: Klett.

Cuomo, N. (2007). *Verso una scuola dell'emozione di conoscere. Il futuro insegnante, insegnante del futuro*. Pisa: Edizioni ETS.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1977). *Rhizom*. Berlin: Merve Verlag.

Devereux, G. (1998). *Angst und Methode in den Verhaltenswissenschaften* (4. Aufl.). Frankfurt a.M.: suhrkamp taschenbuch verlag.

Dewey, J. (1993). *Demokratie und Erziehung: eine Einleitung in die philosophische Pädagogik*. Herausgegeben und mit einem Nachwort versehen von Jürgen Oelkers. Weinheim: Beltz.

Dewey, J. (2008). *Logik. Die Theorie der Forschung*. Frankfurt a.M.: suhrkamp taschenbuch verlag.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37–65.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime, Número Especial*, 45-81.

Flick, U. (2006). *Qualitative Sozialforschung* (4. vollständig überarbeitete und erweiterte Neuausgabe.). Reinbek b. Hamburg: Rowohlt.

Freire, P. (2011). *Pedagogy of the oppressed*. New York: Continuum International Publishing Group.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (2., durchgesehene Auflage., Band 1 und 2). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goldstein, S., Princiotta, D., & Naglieri, J. A. (2015). *Handbook of Intelligence: Evolutionary Theory, Historical Perspective, and Current Concepts* (2015. Auflage). Springer.

Gupta, A. (2009). Vygotskian perspectives on using dramatic play to enhance children's development and balance creativity with structure in the early childhood classroom. *Early Child Development and Care, 179*(8), 1041–1054. Routledge. https://doi.org/10.1080/03004430701731654

Gur-Ze'ev, I. (Ed.). (2005). *Critical Theory and Critical Pedagogy Today - Toward a New Critical language in Education* (Studies in Education). Haifa: University of Haifa. Abgerufen von: https://www.academia.edu/195758/Critical_Theory_and_Critical_Pedagogy_Today_-_Toward_a_New_Critical_language_in_Education (10.10.2020).

Herzog, M., Fritz, A., & Ehlert, A. (2017). Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Eds.), *Handbuch Rechenschwäche* (3., vollständig überarbeitete u. erweiterte Aufl., pp. 266–285). Weinheim: Beltz Verlag.

Herzog, M., Ehlert, A., & Fritz, A. (2019). Development of a Sustainable Place Value Understanding. In A. Fritz, V. G. Haase & P. Räsänen (Eds.), I*nternational Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 561–579). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_33

Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974). *Apprentissage et structures de la connaissance*. Paris: Presses Universitaires de France.

Johann, M. (2002). Pumucklzahlen am Abakus. Einsatz des Abakus beim Aufbau des Zahlbewusstseins und des Zahlwortschatzes. *Grundschulunterricht, 6*, 1–5.

Johann, M., & Matros, N. (2003). *Wechselspiele - Kreatives Rechnen am Schulabakus* (2. Auflage). Weinheim: Beltz.

Kamii, C. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic. 3rd Grade*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2000). *Number in preschool & kindergarten* (8th Printing.). Washington: National Association for the Education of Young Children.

Kamii, C. (2004). *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic. 2nd Grade* (2nd ed.). New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 39–50.

Klafki, W. (1996). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemässe Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik* (5. Auflage.). Basel: Beltz Verlag.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Lurija, A. R., & Judowitsch, F. Ja. (1982). *Die Funktion der Sprache in der geistigen Entwicklung des Kindes*. Frankfurt a.M.: Ullstein.

McCabe, U., & Farrell, T. (2020). Play, pedagogy and power: a reinterpretation of research using a Foucauldian lens. *International Journal of Early Years Education, published online, 1-13.* Routledge. https://doi.org/10.1080/09669760.2020.1742669

Meyer, H. (2000). *Unterrichtsmethoden II: Praxisband* (9. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Meyer, S. (2017). Mathematik-Kurz-Test (MKT) 1-9. Flexible Interviews und Blitzrechnen (FI-B) Abgerufen von: https://www.hfh.ch/de/unser-service/shop/produkt/mathematik_kurztest_mkt_19 (12.10.2020).

Meyer, S. (2019). „Ich bin dein Taschenrechner“ – Kritische Exploration und Rollenspiel. Abgerufen von: https://flexiinterview.blogspot.com/2019/05/ich-bin-dein-taschenrechner-kritische.html (10.10.2020).

Meyer, S. (2020a). Bedeutsame Inhalte in der mathematischen Bildung. Was systemische didaktische Analysen bewirken können. Unveröffentlichter Essay, Zürich.

Meyer, S. (2020b). Muster einer Denkschulung – Das Stellenwertsystem. Wahlmodul 207: Das Denken miteinander schulen – Cognitive Acceleration, Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Meyer, S., & Wyder, A. (2017). Mathematik-Kurz-Test (MKT) 1-9. Abgerufen von: https://www.hfh.ch/de/unser-service/shop/produkt/mathematik_kurztest_mkt_19 (10.10.2020).

Moreno, J. L. (1996). *Die Grundlagen der Soziometrie. Wege zur Neuordnung der Gesellschaft* (Unveränderter Nachdruck der 3. Auflage.). Opladen: Leske + Budrich.

Moreno, J. L. (2007). Theorie der Spontaneität-Kreativität. In H. G. Petzold & I. Orth (Eds.), *Die neuen Kreativitätstheorien. Handbuch der Kunsttherapie. Theorie und Praxis* (4. Aufl., Bände 1-II, Band I, pp. 189–202). Bielefeld und Locarno: Edizioni Sirius.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie.* Bern: Haupt-Verlag.

Otero, T. M. (2015). Intelligence: Defined as Neurocognitive Processing. In S. Goldstein, D. Princiotta & J. A. Naglieri (Eds.), *Handbook of Intelligence: Evolutionary Theory, Historical Perspective, and Current Concepts* (pp. 193–208). New York: Springer.

Piaget, J. (1977a). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 1. L'abstraction des relations logico-arithmétiques*. (Études d'épistémologie génétique) (Band 1). Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J. (1977b). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 2. L'abstraction de l'ordre des relations spatiales* (Bände 1-2, Band 2). Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J., Henriques, G., & Ascher, E. (1990). *Morphismes et Catégories. Comparer et Transformer*. Lausanne: Delachaux et Niestlés.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1975). Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde (Bd. 3). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Piaget, J., & Voelin, Cl. (1980). Correspondances et transformations dans le cas de l'intersection. In J. Piaget (Ed.), *Recherches sur les correspondances* (pp. 121- 131). Paris: Presses Universitaires de France.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W.-M., & Kadunz, G. (2016). Semiotics in Theory and Practice in Mathematics Education (ICME-13 Topical Surveys). In N. Presmeg, L. Radford, W.-M. Roth & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 5–29). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2_2

Reiss, K., & Schmieder, G. (2005). *Basiswissen Zahlentheorie.* Berlin: Springer.

Resnick, L. B., Asterhan, C. S. C., & Clarke, S. N. (2018). Accountable Talk: Instructional dialogue that builds the mind. *Educational Practices Series, 29*. International Academy of Education. Abgerufen von: http://www.iaoed.org (12.10.2020).

Ross, S. H. (1986). The Development of Children's Place-Value Numeration Concepts in Grades Two through Five. Gehalten auf der Annual Meeting of the American Educational Research Association, (ERIC Dokument Reproduction Service No. ED, 273 482).

Ruflin, A.-L. (2008). *Stellenwert unter erschwerten Bedingungen entdecken: verbessert aktiv-entdeckender und problemlösender Mathematikunterricht das Verständnis der Stellenwerte bei lernbehinderten Schülern der Oberstufe?* Lavoro per il master, inedito. Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Schenker, I. (2018). Die didaktische Unterstützung des kindlichen Spielens durch pädagogische Fachkräfte. In I. Schenker (Ed.), *Didaktik der Kindertageseinrichtungen. Eine systemisch-konstruktivistische Perspektive* (pp. 250–268). Weinheim: Beltz Juventa.

Schuler, M. (2004). *Neue Erfahrungen mit dem Zehnerübergang.* Unveröff. Modul-Leistungsnachweis. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Storch, M. (1996). Kreativität und Psychodrama. Vortrag gehalten auf der 53. Psychotherapie-Seminar vom 22. bis 27. September 1996, Freudenstadt. Abgerufen von: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi47Jmfq8zqAhXMi1wKHeSyDGQQFjAAegQIAhAB&url=https%3A%2F%2Fzrm.ch%2Fimages%2Fstories%2Fdownload%2Fpdf%2Fpublikationen%2Fpublikation_storch_19960927.pdf&usg=AOvVaw3k4XHuFuofUakmJNRDXKZH (10.10.2020).

Vygotskij, L. S. (1986). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer.

Walser, H. (2020). Kinematische Geometrie. Atelier gehalten auf der Wintertagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik CH, Zürich. Abgerufen von: http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20200117/index.html (10.10.2020).

Watzlawick, P. (2017). *Menschliche Kommunikation: Formen Störungen, Paradoxien* (13., unveränderte Auflage.). Bern: Hogrefe.

Weltgesundheitsorganisation. (2011). *ICF-CY. Internationale Klassifikation der Funktionsfähigkeit, Behinderung und Gesundheit bei Kindern und Jugendlichen*. Bern: Hans Huber.

Wieser, M., & Ottomeyer, K. (2000). Spontaneität. In G. Stumm & A. Pritz (Eds.), *Wörterbuch der Psychotherapie* (S. 662). Vienna: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-211-99131-2_1804

Wink, J. (2011). *Critical pedagogy: notes from the real world* (4th ed.). New Jersey: Pearson Education.

Wittgenstein, L. (2013). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Werkausgabe Band 6) (9. Auflage.). Frankfurt a.M.: Suhrkamp Verlag.

Wittmann, E. C. (2002). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6. neu bearbeitete Auflage.). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (2020). The Impact of Hans Freudenthal and the Freudenthal Institute on the Project Mathe 2000 (ICME-13 Monographs). In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 63–69). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_4