

Articolo di riferimento (DOI: [10.33683/ddm.20.8.5](https://doi.org/10.33683/ddm.20.8.5))

La geometria dell'origami

Autori

Achille Maffini

Allegato 1

Approfondimento sull'assioma A7

Allegato 2

Attività con riga e compasso e con origami



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Allegato 3

Soluzioni o istruzioni per la risoluzione delle varie attività con gli origami

Allegato 4

Attività con GeoGebra



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Allegato 5

Soluzioni o istruzioni per la risoluzione delle varie attività con GeoGebra

Allegato 6

Attività sui sistemi formali



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Approfondimento sull'assioma A7

Come detto alla fine del **par. 3**, la formulazione più controversa è quella dell'assioma A7, ma questo proprio perché l'assioma in sé è problematico. Senza la condizione che le rette siano incidenti non sarebbe garantita l'esistenza di (almeno) una piega, per cui la condizione di incidenza è data proprio per questo.

Per comprendere meglio questa affermazione e la conseguente scelta, visualizziamo geometricamente la situazione, per capire in quali condizioni non ci sono soluzioni e, quando ci sono, quante sono.

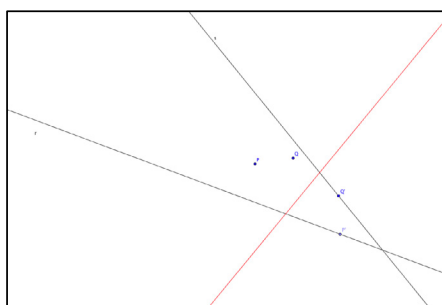


Figura 1. Rappresentazione assioma A7

Se indichiamo con P' e Q' i punti corrispondenti su r e s dei punti di P e Q (vedi **Figura 1**; la piega richiesta è indicata in rosso), si possono fare alcune osservazioni di carattere geometrico.

- a) Indicato con R il punto di intersezione tra la perpendicolare a r passante per P' e l'asse (retta rossa) del segmento $[PP']$, dalla congruenza dei segmenti $[RP']$ e $[RP]$ si deduce che R è un punto della parabola p di fuoco P e direttrice r e la retta rossa è la retta tangente alla parabola in R . Analoga costruzione si può fare con Q e la retta s e sia S il punto così ottenuto (**Figura 2**); quindi la piega (retta) richiesta è una tangente comune a due parabole (**Figura 3**). Il problema legato all'assioma diventa quindi stabilire se esiste sempre (almeno) una tangente e, nel caso, quante possono essere al massimo.

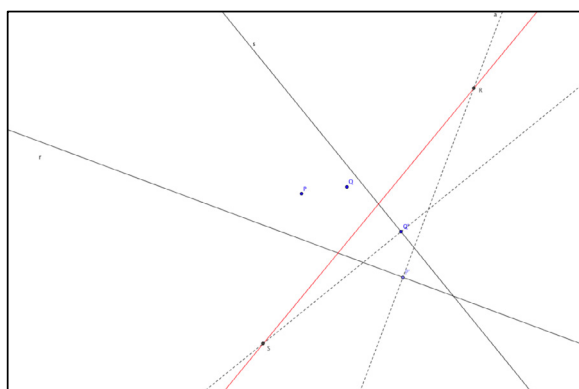


Figura 2. Costruzione punto di tangenza.

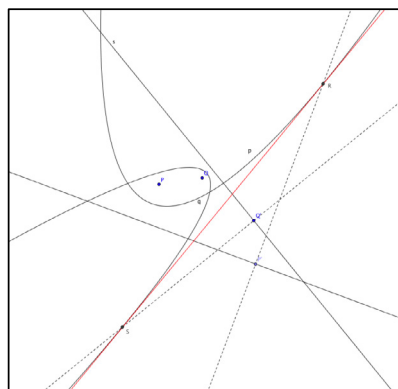


Figura 3. Parabole con tangente comune.

- b) Rispetto al punto precedente è facile quindi vedere come ci siano casi in cui non è garantita l'esistenza delle tangenti e che giustificano la condizione di incidenza sull'assioma A7; il caso più semplice è quello in cui (**Figura 4**)

- le rette r e s sono parallele e la retta PQ è perpendicolare alle due rette;
- P appartiene al semipiano individuato da r contenente s e Q al semipiano individuato da s non contenente r ;
- la distanza di P da r è maggiore della distanza di Q da s .

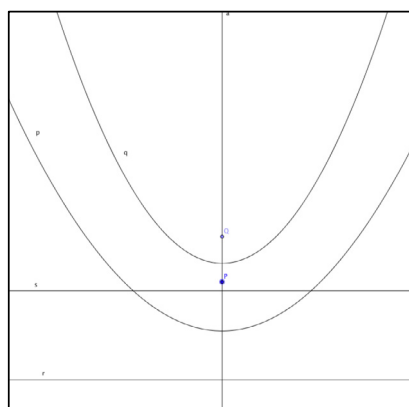


Figura 4. Parabole con assi coincidenti.

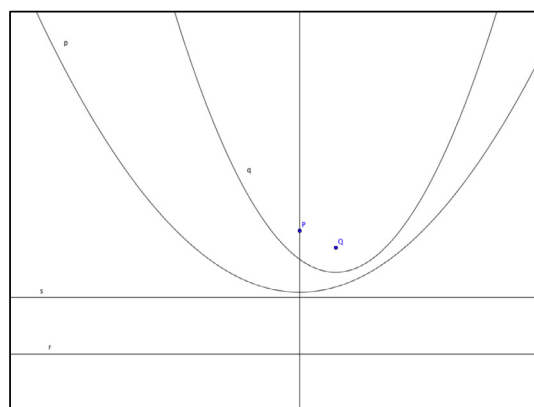


Figura 5. Parabole con assi paralleli.

Nelle condizioni precedenti la parabola p di fuoco P e direttrice r ha una concavità più ampia di quella della parabola q di fuoco Q e direttrice s , per cui non solo le parabole non hanno punti in comune, ma neppure tangenti comuni.

- c) Esiste quindi almeno una condizione che determina una categoria di situazioni per cui il problema non ha soluzione, ma ovviamente non è l'unica. La situazione generale prevede due casistiche:

- i. le rette sono parallele, i punti sono posti come nelle situazioni b. e c. del punto b) precedente e le parabole sono tali che q sia contenuta nella parte di piano convessa tra quelle individuate da p (**Figura 5**). Indichiamo con k, h (con $k > h$) rispettivamente:

k : distanza di P dalla retta r ,

h : distanza di Q dalla retta s .

Anziché procedere geometricamente, conviene operare analiticamente. Consideriamo quindi un sistema di riferimento in cui l'asse delle ordinate (a_y) coincide con la retta passante per P e perpendicolare a r e l'asse delle ascisse (a_x) con l'asse del segmento $[PH]$ essendo $\{H\} = r \cap a_y$. Orientando l'asse a_y nel verso in cui H precede P , il punto P ha coordinate $(0; k/2)$, la retta r ha equazione $y = -k/2$; indicate con $(\alpha; \beta)$ le coordinate di Q (per le condizioni poste si ha $\beta > 0$) e con $y = \beta - h$ l'equazione della retta s , si dimostra analiticamente che affinché si verifichi questa condizione (e quindi non ci siano tangenti comuni tra le due parabole) tra i quattro parametri deve sussistere la relazione

$$\alpha^2 < (k - h) \cdot (2\beta - h)$$

da cui si deduce, in particolare, che $\beta > h/2$. Sul piano geometrico i punti Q che individuano situazioni senza soluzione sono i punti appartenenti alla parte di piano convessa tra quelle individuate dalla parabola di equazione $y = \frac{x^2}{2(k-h)} + \frac{h}{2}$.

- ii. Le rette sono parallele e i punti sono tali che P appartiene al semipiano individuato da r e contenente s e Q nel semipiano individuato da s e contenente r (**Figure 6 e 7**).

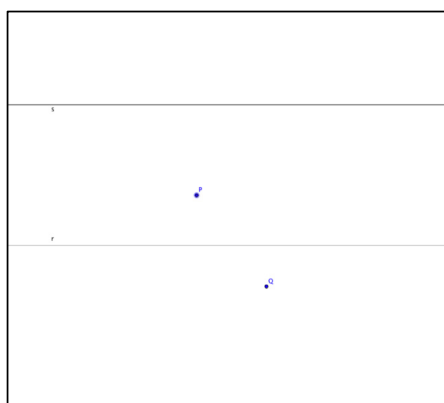


Figura 6. Rette parallele.

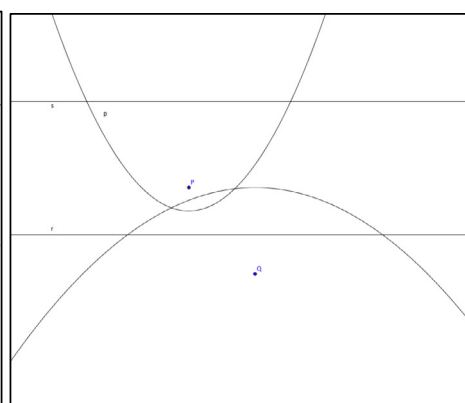


Figura 7. Parabole incidenti con assi paralleli.

Indichiamo con k, h rispettivamente:

k : distanza di P dalla retta r ,

h : distanza di Q dalla retta s .

Anche in questo caso conviene procedere analiticamente. Consideriamo quindi un sistema di riferimento in cui l'asse delle ordinate (a_y) coincide con la retta passante per P e perpendicolare a r e l'asse delle ascisse (a_x) l'asse del segmento $[PH]$ essendo $\{H\}=r \cap a_y$. Orientando l'asse a_y nel verso in cui H precede P , il punto P ha coordinate $(0 ; k/2)$ e la retta r ha equazione $y = -k/2$; indicate con $(\alpha; \beta)$ le coordinate di Q e con $y = \beta+h$ l'equazione della retta s , si dimostra che questa condizione (assenza di tangenti comuni tra le due parabole) si verifica se tra i quattro parametri sussiste la relazione

$$\alpha^2 < (k+h) \cdot (2\beta+h).$$

Sul piano geometrico i punti Q che individuano situazioni senza soluzione sono i punti contenuti nella parte di piano convessa tra quelle individuate dalla parabola di equazione $y = \frac{x^2}{2(k+h)} - \frac{h}{2}$.

Una volta stabilito che possono non esserci soluzioni nel caso di rette parallele, si tratta di capire, nel caso di rette incidenti, quante possono essere al massimo. Poiché le tangenti comuni a due parabole sono al massimo tre¹ (in **Figura 8** è riportato una situazione di questo tipo; le rette rosse sono le pieghe che risolvono il problema e i punti $P1, P2, P3, Q1, Q2, Q3$ sono i corrispondenti di P e Q rispetto alle tre pieghe), non sono determinabili con riga e compasso (tali strumenti, infatti, possono risolvere problemi che forniscono al massimo due soluzioni). Quindi le pieghe garantite dall'assioma A7, nel caso di rette incidenti, possono essere al massimo tre. *Questa possibilità è quella che pone l'assioma al di fuori del contesto costruttivo euclideo*, rendendolo al contempo indipendente dagli altri assiomi (ed è questo il motivo per cui ho proposto l'inversione degli assiomi 6 e 7).

¹ Due coniche possono avere in comune al massimo quattro tangenti, ma una tangente comune a due parabole è la retta impropria; se poi hanno assi di simmetria paralleli, le due parabole hanno in comune anche il punto improprio, per cui la retta impropria è una tangente con molteplicità due; in questo caso, quindi, le tangenti comuni possono essere al massimo due.

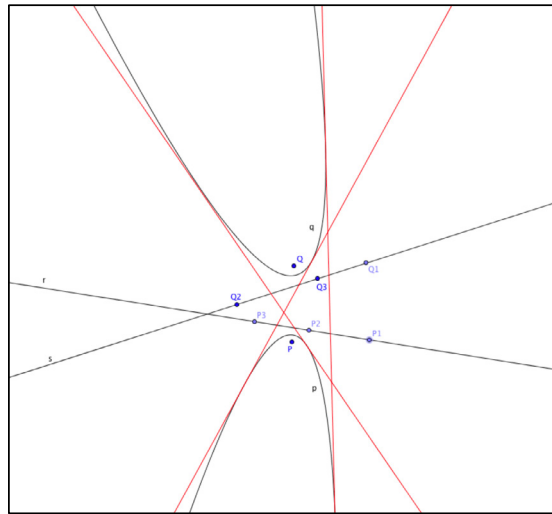


Figura 8. Tangenti comuni a due parabole con assi non paralleli.

Dalle considerazioni precedenti emerge come la caratterizzazione dell'assioma A7 non sia tanto l'esistenza della piega quanto la frase *"e si può costruire"*; è la possibilità della costruzione l'affermazione peculiare dell'assioma, affermazione non presente negli altri assiomi e che qui è indispensabile inserire proprio per superare i limiti di riga e compasso della geometria euclidea.

Le analisi precedenti permettono inoltre di vedere la mancanza di un assioma che faccia esplicito riferimento all'esistenza di circonferenze sotto un'altra luce: la geometria euclidea, vista come la geometria della riga e del compasso, ha come conica di riferimento la circonferenza, mentre la geometria dell'origami ha come riferimento la parabola.



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Attività con riga e compasso e con origami

Attività 1 – Costruiamo con le regole del gioco euclideo

Materiale occorrente: riga (non graduata), compasso, matita, fogli da disegno bianchi.

Modalità di lavoro: a gruppi.

- 1) Riporta i termini primitivi e gli assiomi della geometria euclidea nella formulazione che ti è stata proposta in classe.
- 2) Dopo aver riportato la definizione degli oggetti geometrici di cui si chiede la costruzione nei successivi punti a-f, effettuale con riga e compasso, specificando, per ogni costruzione, quali assiomi tra quelli riportati al punto 1 ritieni di aver utilizzato:
 - a) asse di un segmento;
 - b) circocentro e baricentro di un triangolo;
 - c) bisettrice di un angolo;
 - d) retta perpendicolare e retta parallela ad una retta data passante per un punto;
 - e) ortocentro e incentro di un triangolo;
 - f) triangolo equilatero di dato lato.
- 3) Analizza le costruzioni che hai fatto e prova a valutare se hai utilizzato solo gli assiomi di Euclide oppure altre condizioni implicite.
- 4) Dimostra, se riesci, che le costruzioni che hai fatto determinano effettivamente gli enti richiesti.

Attività 1A – La (prima) gara delle pieghe

Materiale occorrente: Forbici, matita, righello, compasso.

Modalità di lavoro: a gruppi.

- 1) Ritaglia dal presente foglio le figure (una per ciascun componente del gruppo) che sono riportate sotto e ricalca sul retro del foglio la retta e i punti segnati in ciascun disegno.
- 2) Deponi sul banco tutti i fogli così ritagliati e ridisegnati.
- 3) Quando l'insegnante ti darà il via, prendi i fogli (in sequenza: prima la **Figura 1**, poi la **Figura 2**, la **Figura 3** e infine la **Figura 4**) e cerca di piegarli in modo che la piega passi per il punto Q e che il punto P si sovrapponga alla retta r . Attenzione: non puoi cominciare a piegare un foglio se non hai prima completato quello precedente!
- 4) Se non riesci a fare la piega richiesta, cerca di capire, confrontandoti anche con gli altri componenti del tuo gruppo, se è una difficoltà tua oppure se non è possibile farla con la configurazione proposta. In quest'ultimo caso, cerca di trovare una motivazione per questa impossibilità.
- 5) Vince il gruppo che per primo riesce a risolvere tutti e quattro i casi.
- 6) Al termine, prova a costruire altre situazioni simili a quelle delle **Figure 1-4** per vedere se ottieni gli stessi risultati.



Figura 1

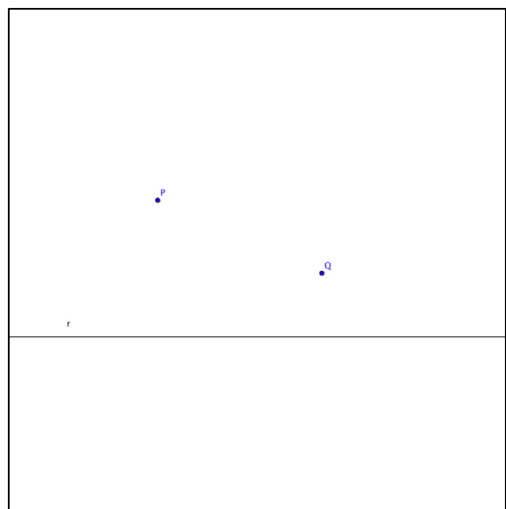


Figura 2

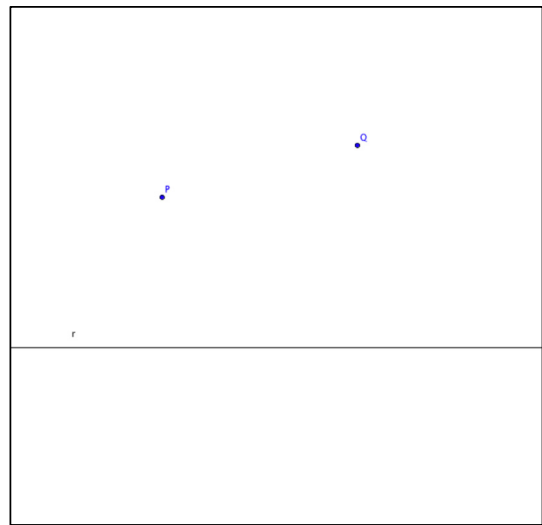


Figura 3

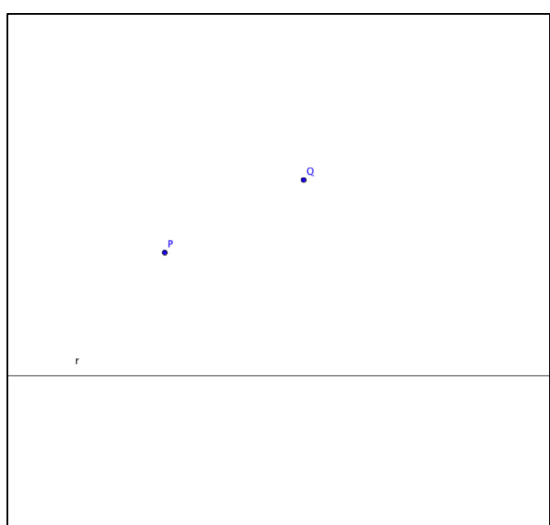


Figura 4

Attività 1B – La (seconda) gara delle pieghe

Materiale occorrente: Forbici, matita, righello, compasso.

Modalità di lavoro: a gruppi.

- 1) Come nell'attività precedente, ritaglia dal presente foglio le figure (una per ciascun componente del gruppo) che sono riportate sotto e ricalca sul retro del foglio le rette e i punti segnati in ciascun disegno.
- 2) Deponi sul banco tutti i fogli così ritagliati e ridisegnati.
- 3) Quando l'insegnante ti darà il via, anche in questo caso prendi i fogli (in sequenza: prima la **Figura 1**, poi la **Figura 2**, la **Figura 3** e infine la **Figura 4**) e cerca di piegarli in modo che il punto P si sovrapponga alla retta r e il punto Q alla retta s . Se non riesci, passa al foglio successivo.
- 4) Attenzione! Alcune figure non hanno soluzione, mentre altre ne hanno più di una. Vince il gruppo che riesce ad individuare i casi senza soluzioni e tutte le soluzioni di quelli che ne hanno più di una.

N.B. Nelle Figure 1, 2 e 3 le rette r e s sono parallele.

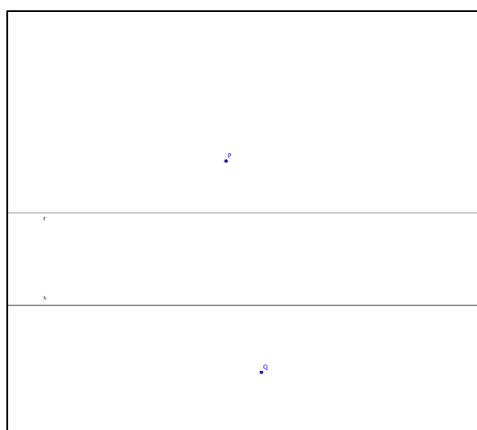


Figura 1

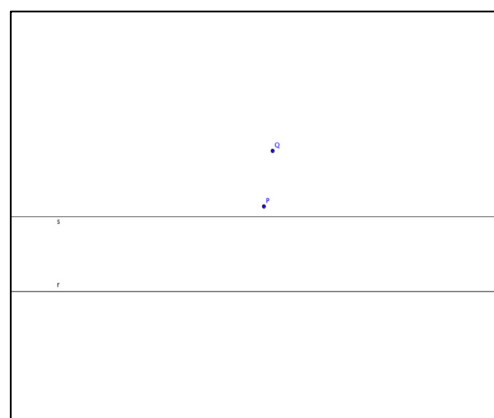


Figura 2

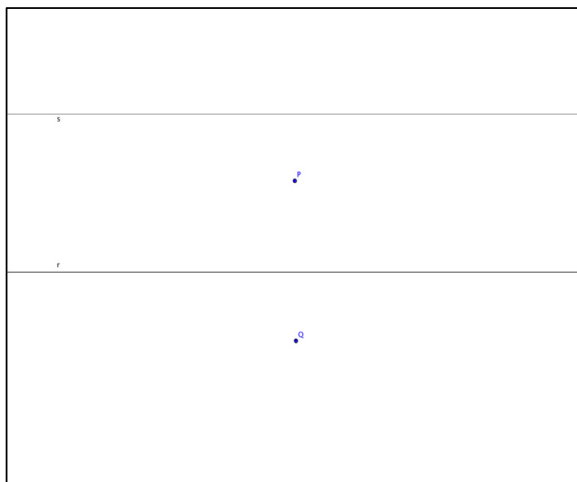


Figura 3

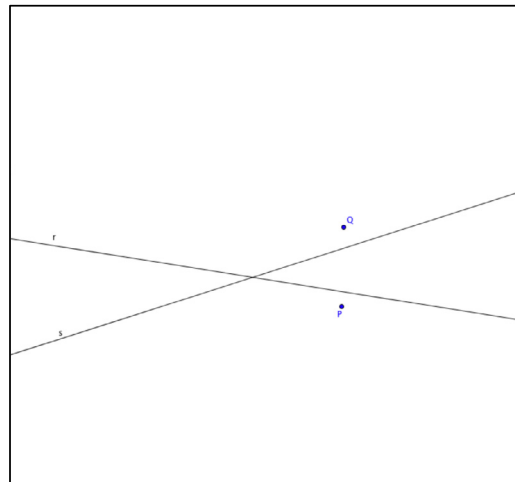


Figura 4

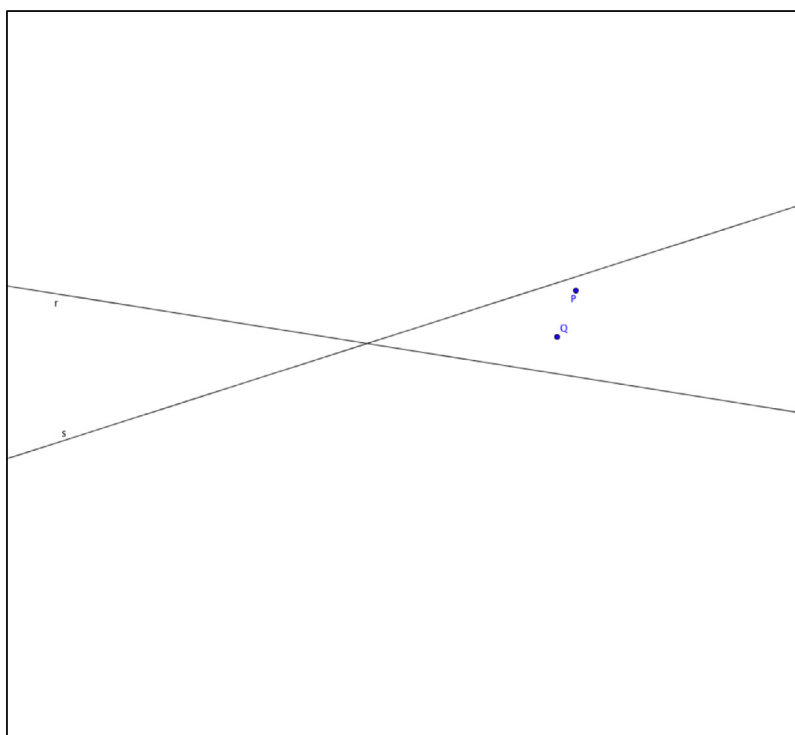


Figura 5

Attività 2 – Costruiamo con le regole del gioco origami

Materiale occorrente: fogli di carta quadrati semitrasparenti.

Modalità di lavoro: a gruppi.

Oltre al *gioco della geometria* che conosci ce ne sono altri con altre regole. Quella che ti proponiamo qui è un cambio di regole del gioco per fare la geometria del piegamento di carta (o origami).

Ecco le nuove regole:

Termini primitivi: punto, retta, piega.

Assiomi:

- A1. Dati due punti P e Q , esiste un'unica piega che passa per entrambi.
- A2. Dati due punti P e Q , esiste un'unica piega che porta P su Q .
- A3. Date due rette r e s , esiste almeno una piega che porta r su s .
- A4. Dati un punto P e una retta r , esiste un'unica piega perpendicolare a r che passa per il punto P .
- A5. Dati due punti P e Q e una retta r , tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P , esiste almeno una piega passante per Q che porta P su r .
- A6. Dati un punto P e due rette incidenti r e s , esiste un'unica piega perpendicolare a s che porta P su r .
- A7. Dati due punti P e Q e due rette incidenti r e s , esiste e si può costruire almeno una piega che porta P su r e Q su s .

- 1) Analizza gli assiomi precedenti, cercando in particolare di riflettere sui seguenti punti:
 - a. Che differenza c'è, secondo te, tra “retta” e “piega”?
 - b. Cosa significa, secondo te, che in alcuni casi si parla di “una piega” e in altri di “un'unica piega”?
 - c. Come interpreti il verbo “portare” utilizzato negli assiomi?
- 2) Effettua, con la tecnica del piegamento, le costruzioni degli oggetti indicati ai punti a-f, specificando, per ogni costruzione, quali assiomi dell'origami ritieni di aver utilizzato:
 - a) asse di un segmento;
 - b) circocentro e baricentro di un triangolo;
 - c) bisettrice di un angolo;
 - d) retta perpendicolare e retta parallela ad una retta data passante per un punto;
 - e) ortocentro e incentro di un triangolo;
 - f) triangolo equilatero di dato lato.

- 3) Analizza le costruzioni e stabilisci se, rispetto alle analoghe costruzioni fatte con riga e compasso, hai avuto maggiore o minore difficoltà, cercando di motivare la risposta.

Attività 3 – Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo

Materiale occorrente: foglio di carta quadrato, goniometro (riga e matita).

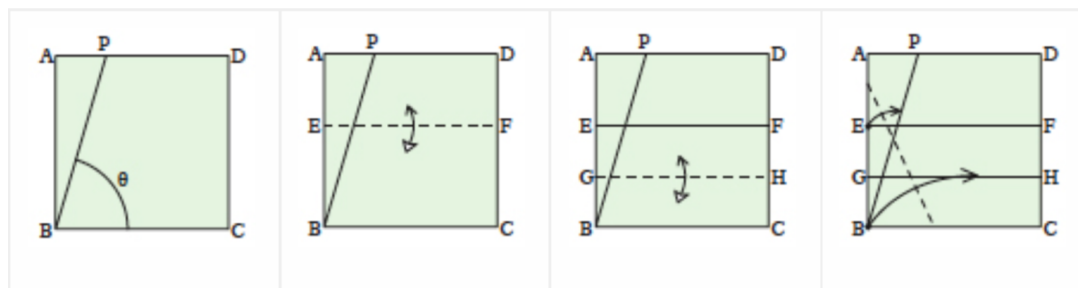
Modalità di lavoro: a gruppi.

Introduzione all'attività.

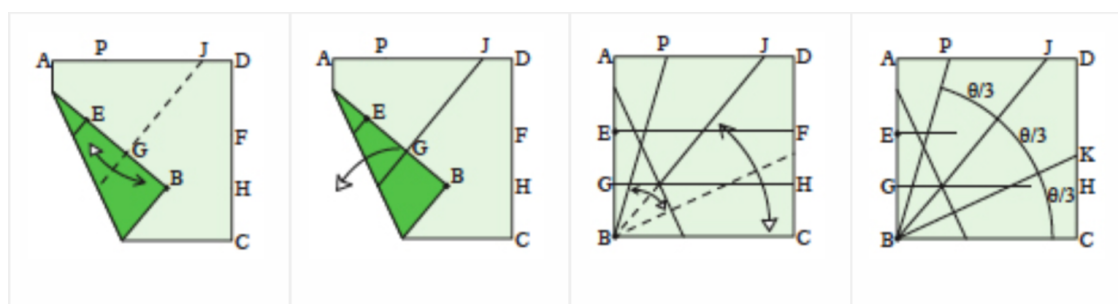
Breve illustrazione del problema (nella storia) della trisezione dell'angolo degli altri problemi notevoli (duplicazione del cubo, quadratura del cerchio) non risolvibili con riga e compasso.

- 1) Come visto, si è dimostrato che con riga e compasso non è possibile, in generale, trisecare un angolo. Ciò non significa che, in assoluto, non si possa trisecare un angolo. Ci sono angoli che, con riga e compasso, riusciresti a dividere in tre angoli congruenti? Quali? Indicali e mostra le costruzioni che ti permettono di farlo.
- 2) Consideriamo ora un angolo qualunque e vediamo come dividerlo in tre parti uguali con la geometria dell'origami. Costruzioni preliminari:
 - a) prendi un foglio di carta quadrata;
 - b) prendi come lato dell'angolo un lato del quadrato e come vertice dell'angolo uno degli estremi di tale lato;
 - c) a partire dal vertice considerato, disegna il secondo lato dell'angolo (oppure fai una piega che rappresenti il secondo lato).

Questo sarà l'angolo che dovrai trisecare. Nei punti successivi ti saranno indicati vari passaggi per la costruzione: ciò che ti è richiesto, oltre ad effettuare tali passaggi, è di indicare sotto ciascun passaggio quale tra gli assiomi A1-A7 è stato applicato. Indica inoltre, al termine dell'attività, in quali passaggi hai incontrato delle difficoltà e di che tipo.



1. Posizione iniziale.	2. Fai una piega EF in modo che sia parallela ai lati del quadrato. Assioma:	3. Porta BC su EF e sia GH la piega così ottenuta. Assioma:	4. Porta E su BP e B su GH . Assioma:
------------------------	---	--	--



5. Porta B su E in modo da continuare la piega che termina in G (piega GJ). Assioma:	6. Riporta B nella posizione iniziale.	7. Continua la piega che parte da J fino a B . Porta BC su BJ . Assioma:	8. Verifica con un goniometro che i tre angoli PBJ , JBK e KBC hanno la stessa ampiezza.
--	--	--	--

Soluzioni o istruzioni per la risoluzione delle varie attività con gli origami

Risoluzione Attività 1B

Nel seguito sono riportate le costruzioni relative alle varie situazioni proposte nelle schede.

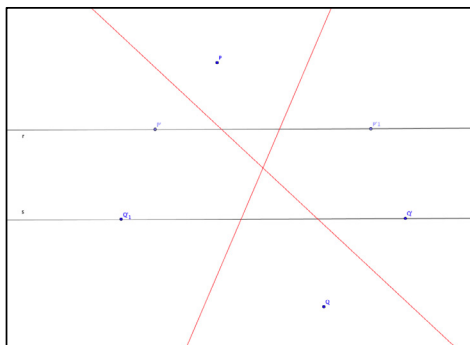


Figura 1: due soluzioni.

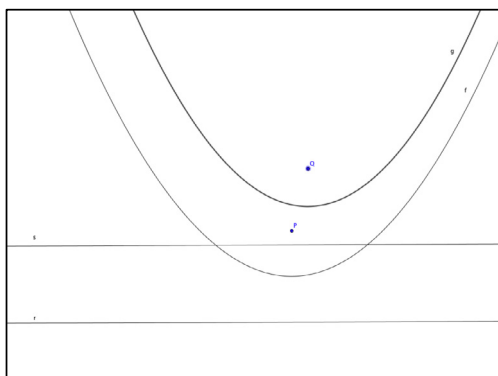


Figura 2: nessuna soluzione.

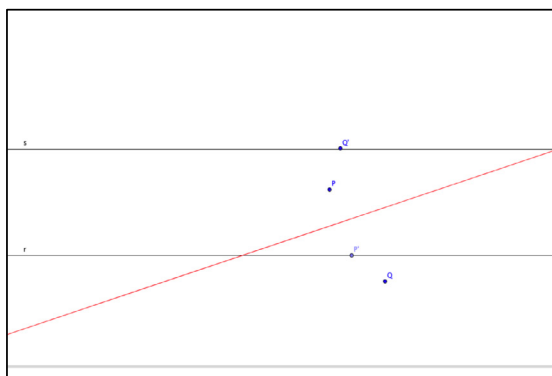


Figura 3: una soluzione.

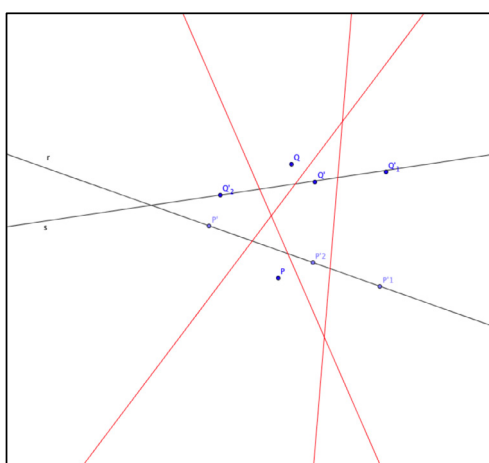


Figura 4: 3 soluzioni.

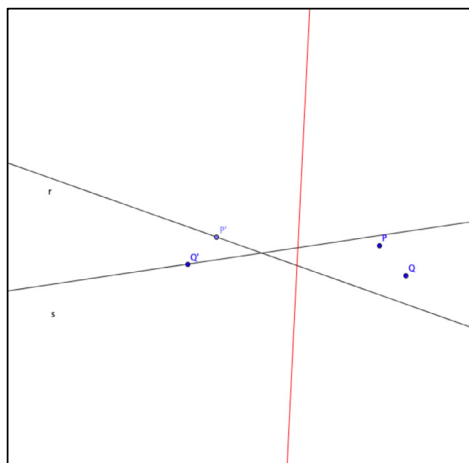


Figura 5: 1 soluzione.

Istruzioni per la risoluzione dell'Attività 2.

- a) Dopo aver disegnato il segmento $[AB]$, si pieghi la carta per sovrapporre A e con B . La piega rappresenta l'asse del segmento.
- b) Circocentro: basta costruire due assi come al punto a.
Baricentro: si individuano i punti medi di due lati piegando il foglio in modo da sovrapporre due vertici consecutivi. Poi si piega il foglio facendo passare la piega da un vertice e dal punto medio del lato opposto.
- c) Bisettrice: piegare il foglio in modo che un lato dell'angolo si sovrapponga all'altro. La piega è la bisettrice.
- d) Retta perpendicolare: piegare il foglio in modo che la retta sia divisa in due semirette che si sovrappongono e passi per il punto. La piega è la retta perpendicolare.
Retta parallela: costruire la perpendicolare come in precedenza (o una qualunque perpendicolare piegando il foglio in modo che la retta si sovrapponga a se stessa). Successivamente si costruisca la perpendicolare alla retta così ottenuta passante per il punto. L'ultima piega così ottenuta è la parallela.
- e) Si utilizzano su due lati quanto fatto ai punti c e d precedenti.
- f) Triangolo equilatero: dato un quadrato $ABCD$ supponiamo di voler costruire il triangolo equilatero di lato $[AB]$. Si traccia l'asse del segmento $[AB]$ (vedi a); successivamente si prendono i vertici C e D e li si portano sull'asse così ottenuto. Infine, in questa posizione, si effettuano due pieghe lungo i lati $[BC]$ e $[AD]$. Le pieghe così ottenute individuano con $[AB]$ un triangolo equilatero.

Dimostrazione della correttezza della trisezione di un angolo con la geometria dell'Origami

Nella costruzione proposta nell'attività ci sono due passaggi che richiedono una dimostrazione:

- a) il passaggio per il vertice dell'angolo della retta del prolungamento della piega passante per J ;
- b) che le rette JB e KB trisecano l'angolo.

Per la dimostrazione mi riferirò alla situazione proposta in **Figura 6** ottenuta con GeoGebra.

Partiamo dal punto a.

Gli angoli GLQ e QLG' sono congruenti in quanto G e G' si corrispondono nella simmetria assiale di asse QO ; per lo stesso motivo sono congruenti gli angoli BLO e OLB' . Poiché QLG e OLB' sono congruenti (angoli opposti al vertice) lo sono anche BLO e $G' LQ$ ed essendo i punti Q, L e O allineati, lo sono anche i punti G', L e B (detto diversamente, gli angoli $G'LB'$ e $B'LB$ sono supplementari).

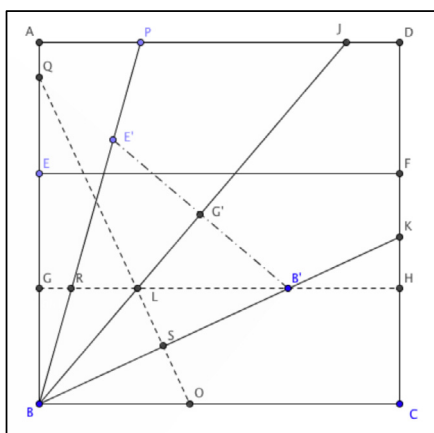


Figura 6

Dimostriamo ora il punto b.

Indichiamo con α l'ampiezza dell'angolo da trisecare PBC .

Osserviamo che $\widehat{LBB'} \cong \widehat{LB'B}$ in quanto i segmenti $[BL]$ e $[B'L]$ si corrispondono nella simmetria assiale di asse QO . Indicato con β l'ampiezza degli angoli LBB' e $LB'B$ si ha che anche l'ampiezza di $B'BC$ è uguale a β essendo $\widehat{LBB'} \cong \widehat{B'BC}$ (angoli alterni interni formati dalle rette parallele GH e BC e dalla trasversale BB').

Consideriamo ora il triangolo $BB'E'$. G' appartiene al segmento $[E';B']$, essendo i punti E' , G' e B' i corrispondenti dei tre punti allineati E , G e B attraverso la simmetria assiale di asse QO . Inoltre i segmenti $[E'G']$ e $[G'B']$ sono congruenti (corrispondenti di segmenti congruenti) ed essendo LG' la corrispondente della retta LG si ha che LG' è perpendicolare a $E'B'$ (poiché LG è perpendicolare a EB).

Il triangolo $E'BB'$ è quindi isoscele ed essendo BG' mediana è anche bisettrice dell'angolo $E'BB'$, per cui anche l'angolo $E'BG'$ ha ampiezza β .



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Attività con GeoGebra

Attività 1G – Origami con GeoGebra

Prerequisiti:

- a) conoscenza degli strumenti base del software GeoGebra;
- b) conoscenza, almeno intuitiva, del concetto di simmetria assiale e/o di una sua definizione di massima.

Materiale occorrente: software GeoGebra.

Modalità di lavoro: a coppie.

Cambiamo di nuovo ambiente. Proviamo a fare le costruzioni anziché con riga e compasso o con gli origami con gli strumenti di GeoGebra. Partiamo dalle costruzioni già viste nell'Attività 1; osserva come diverse richieste siano effettuabili direttamente con comandi già presenti in GeoGebra (come ad esempio l'asse di un segmento): tu, però, svolgile come hai fatto con riga e compasso (quindi utilizzando solo i comandi *retta* e *compasso*), cioè come se tu non avessi il comando diretto.

- 1) Costruisci gli oggetti indicati ai punti a-f:
 - a) asse di un segmento;
 - b) circocentro e baricentro di un triangolo;
 - c) bisettrice di un angolo;
 - d) retta perpendicolare e retta parallela ad una retta data passante per un punto;
 - e) ortocentro e incentro di un triangolo;
 - f) triangolo equilatero di dato lato.
- 2) Abbiamo visto come le stesse costruzioni si possano fare con il piegamento della carta. Tale piegamento, in ambiente GeoGebra, è sostituito dal concetto di simmetria assiale. Per questo modifichiamo gli assiomi A1-A7 dell'Attività 2 con i seguenti AG1-AG7 della geometria con GeoGebra:
 - AG1. Dati due punti P e Q c'è un'unica retta passante per entrambi.
 - AG2. Dati due punti P e Q c'è un'unica simmetria assiale che trasforma P in Q .
 - AG3. Date due rette r e s c'è una simmetria assiale che trasforma r in s .
 - AG4. Dato un punto P ed una retta r c'è un'unica retta perpendicolare a r passante per P .

AG5. Dati due punti P e Q ed una retta r tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P c'è una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r ed il cui asse di simmetria passa per Q .

AG6. Dato un punto P e due rette incidenti r e s c'è una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r ed il cui asse di simmetria è perpendicolare a s .

AG7. Dati due punti P e Q e due rette incidenti r ed s , esiste e si può costruire una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r e il trasformato di Q appartenga a s .

Prova a fare con GeoGebra le costruzioni che ti permettono di ottenere i vari assiomi (anche utilizzando i comandi già presenti in GeoGebra, come l'asse di un segmento o la bisettrice di un angolo), considerando varie posizioni per rette e punti.

- 3) Ci sono posizioni di rette e punti che non permettono le costruzioni? Riesci a farle tutte in modo preciso o alcune hanno bisogno di metodi non rigorosi? Quali?
- 4) Come interpreti la condizione sulle distanze nell'assioma AG5? Cosa succederebbe se tale condizione non fosse soddisfatta?
- 5) Dimostra che le costruzioni precedenti sono proprio quelle richieste. Dalle costruzioni che hai fatto sapresti dire quante possono essere (al massimo) le costruzioni che risolvono il problema?
- 6) Con le costruzioni precedenti hai visto come quasi tutte le regole del gioco dell'origami (riviste in ambiente GeoGebra) siano ricostruibili con gli strumenti euclidei di GeoGebra. Come interpreti questo "quasi tutte"? Cosa significa, secondo te, che delle regole di un gioco siano ottenibili come *mosse* in un altro gioco?

Attività 2G – Dall'origami a GeoGebra

Materiale occorrente: software GeoGebra.

Modalità di lavoro: a coppie.

- 1) Ricostruisci sul piano di GeoGebra le figure delle attività 1A e 1B e cerca di risolvere le questioni poste in tali attività.
- 2) Rispetto a quanto fatto con la carta piegata nelle attività 1A e 1B, ti risulta più semplice o meno semplice trovare le risposte?

Attività 3G – Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo con GeoGebra

Materiale occorrente: software GeoGebra.

Modalità di lavoro: a coppie.

- 1) Riprendi la costruzione della trisezione dell'angolo dell'attività 3 fatta con l'origami. Prova a rifare la stessa costruzione con GeoGebra utilizzando gli assiomi AG1-AG7 dopo aver costruito nell'ambiente di GeoGebra un quadrato (analogo a quello dell'origami) all'interno del quale lavorare (ricorda di prestare particolare attenzione all'uso dell'assioma AG7!).
- 2) Verifica, con lo strumento che permette di determinare l'ampiezza di un angolo, la correttezza della costruzione. La tua costruzione supera la prova del trascinamento (se cioè cambi l'angolo iniziale, hai automaticamente la trisezione del nuovo angolo)? Perché?
- 3) Le costruzioni che hai fatto permettono di trisecare angoli acuti. Ipotizza una costruzione per trisecare angoli:
 - a) ottusi;
 - b) concavi.

Suggerimento: traccia le bisettrici dei due angoli e, se necessario (caso dell'angolo concavo), le ulteriori bisettrici degli angoli così ottenuti.

Attività 4G– Risolviamo le equazioni di terzo grado con GeoGebra

Nelle attività precedenti hai visto come alcune costruzioni geometriche si possano fare con riga e compasso, mentre per altre servano altri strumenti. Sul piano algebrico queste ultime si configurano come problemi risolvibili con equazioni di terzo grado. Con questa attività vedremo come fare una costruzione che permetta di risolvere con GeoGebra, in modo approssimato, un'equazione di terzo grado, utilizzando gli assiomi AG1-AG7.

Materiale occorrente: Piano cartesiano di GeoGebra.

Modalità di lavoro: a coppie.

1) I passi successivi ti permetteranno di fare la costruzione richiesta per la risoluzione approssimata di un'equazione di terzo grado.

a) Considera un'equazione di terzo grado nella forma canonica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) e assegna ai parametri a , b e c tre valori che vuoi (ovviamente evita di assegnare il valore 0 a tutti e tre...).

b) Considera la sostituzione $x = X - a/3$ (2). Una volta fatti i calcoli dovresti aver ottenuto un'equazione della forma

$$X^3 + pX + q = 0 \quad (3)$$

c) Determina i parametri p e q associati alla tua equazione di partenza.

d) Nel piano cartesiano di GeoGebra fissa il punto A di coordinate $(p ; 0)$ e traccia la retta r perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per A .

e) Sulla retta r determina il punto B di coordinate $(p ; q)$.

f) Indicato con P il punto di coordinate $(1 ; 0)$ si tratta di costruire un percorso che, partendo da P , abbia come bersaglio il punto B . Vediamo come.

a. Considera un punto P' sull'asse delle ordinate e traccia la retta s passante per P e P' ; traccia la retta s' perpendicolare a s e passante per P' e sia A' il punto di intersezione di s' con l'asse delle ascisse. Traccia infine la retta t perpendicolare a s' e passante per A' . La retta t sarà lo strumento per colpire il bersaglio B .

b. Sposta il punto P' sull'asse delle ordinate in modo che la retta t passi per B . Le ordinate dei punti P' così ottenuti sono le soluzioni (approssimate) dell'equazione (3). Utilizzando la sostituzione (2) trova le soluzioni dell'equazione (1).

Soluzioni o istruzioni per la risoluzione delle varie attività con GeoGebra

AG1, AG2, AG3, AG4: banali. In particolare per l'assioma AG3 i ragazzi dovranno prendere in considerazione il caso in cui le rette siano incidenti oppure siano parallele: nel primo caso i due assi richiesti sono le bisettrici degli angoli formati dalle due rette, mentre nel secondo l'asse è la retta parallela ed equidistante ad entrambe le rette.

AG5. Si considera la circonferenza di centro Q passante per P . Poiché la distanza di Q da r è minore o uguale del raggio della circonferenza, tale circonferenza interseca la retta r in (almeno) un punto K . L'asse del(i) segmento(i) $[PK]$ è l'asse di simmetria richiesto. Dalla costruzione si deduce poi che le simmetrie (e quindi le pieghe in cotesto *foglio di carta*) sono al massimo due.

AG6. Si consideri la retta per P parallela a s e sia R il punto di intersezione con r . L'asse del segmento $[PR]$ è l'asse di simmetria richiesto.

AG7. È possibile una costruzione approssimata che sfrutta la possibilità di spostare gli elementi sul piano di GeoGebra. Si consideri un punto R su r e si costruisca l'asse a del segmento $[PR]$. Si consideri il simmetrico Q' di Q rispetto ad a e si sposti il punto R su r fino a quando il punto Q' non appartiene a s . La posizione assunta da a in questo caso è l'asse richiesto (vedi **Figura 1**).

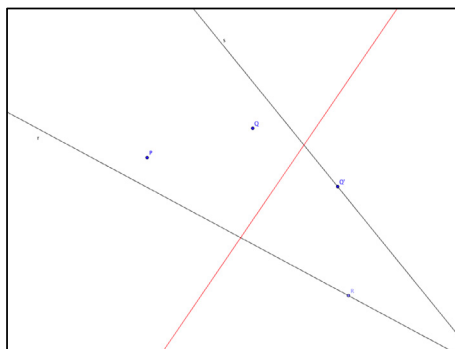


Figura 1. Costruzione per l'assioma AG7.

Risoluzione equazioni di terzo grado: dimostrazione della correttezza della costruzione

Riprendiamo la figura (**Figura 2**) proposta nell'attività, considerando le coordinate dei punti riferiti ai parametri corrispondenti e non al particolare caso numerico considerato:

Poiché $p + \alpha^2 > 0$, la (3) può essere scritta nella forma $\frac{|q|}{|\alpha|} = p + \alpha^2$. P' e B appartengono a semipiani opposti rispetto all'asse delle ascisse, in quanto $A'B \parallel PP'$, per cui $\frac{|q|}{|\alpha|} = -\frac{q}{\alpha}$ da cui $-q = \alpha^3 + p\alpha$ e quindi la tesi.

Teorema 3

Sia $p < 0$. Allora si ha che

- a) se $q > 0$ allora $\alpha \cdot (p - \beta) < 0$ ed α è soluzione dell'equazione (*);
- b) se $q < 0$ allora $\alpha \cdot (p - \beta) > 0$ ed α è soluzione dell'equazione (*).

Dimostrazione

Dimostriamo il punto (a).

Sia $q > 0$ e $A' \in [AO]$. L'angolo $\widehat{BA'P'}$ è retto; $\widehat{BA'O}$ è un angolo esterno del triangolo (rettangolo in A) BAA' , per cui è ottuso (**Figura 3**). Quindi B e P' appartengono allo stesso semipiano rispetto alla retta OP ($A'P'$ è interno all'angolo $\widehat{BA'O}$); quindi $\alpha > 0$ e $\beta > p$ da cui $\alpha \cdot (p - \beta) < 0$.

Sia $q > 0$ e $A' \notin [AO]$ (**Figura 4**). Osserviamo che in questo caso A' precede A in quanto l'angolo che la retta PP' forma col semiasse positivo delle ascisse è ottuso. L'angolo $\widehat{BA'P'}$ è retto per costruzione ed essendo $\widehat{BA'O}$ contenuto nell'angolo $\widehat{BA'P'}$, si ha che B e P' appartengono a semipiani opposti rispetto alla retta OP , quindi $\alpha < 0$ e poiché A' precede A , $\beta < p$ da cui $\alpha \cdot (p - \beta) < 0$.

Dalle considerazioni precedenti si arriva alla conclusione che il segno di $\frac{1}{\alpha}$ è opposto a quello di $\frac{p+\alpha^2}{q}$ (o, in modo più semplice, a quello di $\frac{p-\beta}{q}$). Quindi la (3) può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{p+\alpha^2}{q} \quad (4)$$

da cui $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$. Quindi α è soluzione dell'equazione (*).

Il caso (b) si dimostra in modo del tutto analogo (vedi **Figure 5 e 6** per le situazioni specifiche) e in una possibile attività su questi argomenti tale dimostrazione potrebbe essere lasciata agli studenti.

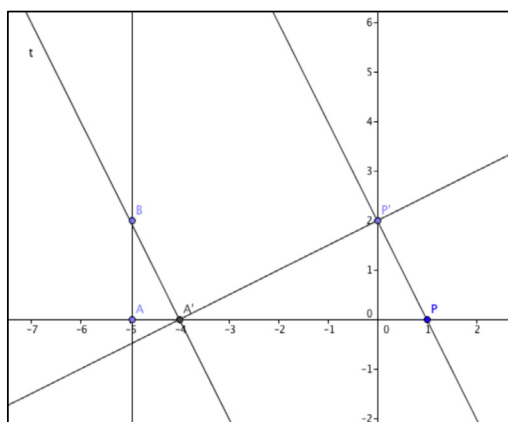


Figura 3

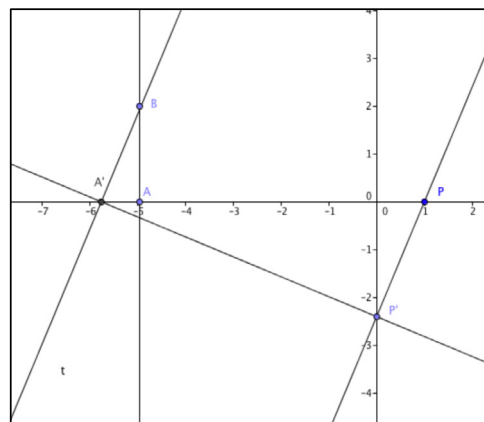


Figura 4

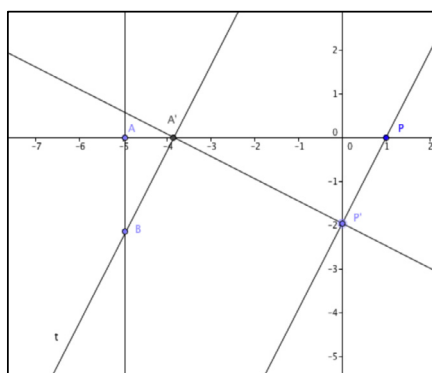


Figura 5

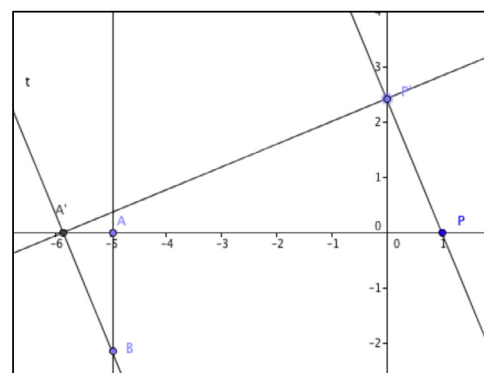


Figura 6

Esiste anche una procedura per risolvere (sempre in modo approssimato) direttamente un'equazione di terzo grado nella forma generale, che per comodità è più opportuno scrivere nella forma

$$x^3 + bx + c = ax^2 \quad (4)$$

Vediamo come:

- Nel piano cartesiano di GeoGebra fissa il punto P di coordinate $(1 ; 0)$, un punto A di coordinate $(0 ; a)$, un punto B di coordinate $(b ; a)$ e un punto $C(b ; c + a)$. C sarà il nostro punto obiettivo.
- Considera un punto P' sull'asse delle ordinate e sia s la retta PP' . Traccia la perpendicolare s' a s passante per P e sia A' il punto di intersezione di s' con la retta AB ; traccia la perpendicolare t a s' passante per A' .
- Sposta P' sull'asse delle ordinate in modo che la retta t passi per C . L'ordinata di P è una soluzione (approssimata) dell'equazione (4).

Nella **Figura 7** ripropongo la situazione relativa all'equazione $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$ vista nell'Attività 4G.

In forma normale diventa $x^3 - 2x - 2 = -3x^2$:

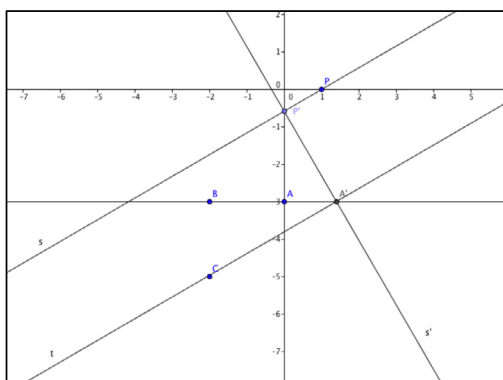


Figura 7

Analogamente alla situazione precedente, si può dimostrare che l'ordinata di P' è una soluzione dell'equazione (4) a partire dalla similitudine dei triangoli POP' , $P'AA'$ e $A'BC$ e con considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza. Inoltre, in termini didattici, si può invitare gli studenti a giustificare il fatto di come mai la forma (4) sia più adeguata per la risoluzione dell'equazione.



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Attività sui sistemi formali

Attività 1SF – Le flogghe che scorpano

Modalità di lavoro: a gruppi.

Di seguito ti è proposto un sistema in cui ci sono termini che non hanno un significato e delle regole che ne stabiliscono le reciproche relazioni.

Termini: *flogga*, *scorpare*.

Regole:

- 1) Se A e B sono due flogghe distinte, allora A scorpa B oppure B scorpa A .
- 2) Nessuna flogga scorpa se stessa.
- 3) Se A , B e C sono tre flogghe tali che A scorpa B e B scorpa C , allora A scorpa C .
- 4) Vi sono esattamente quattro flogghe.

(A) Utilizzando le regole precedenti cerca di dedurre, giustificando le tue affermazioni, che:

- a) Date due flogghe distinte A e B , se A scorpa B allora B non scorpa A .
- b) Date tre flogghe A , B e C , se A scorpa B e C è distinta da A , allora C scorpa B oppure A scorpa C (eventualmente entrambe le cose).
- c) Esiste almeno una flogga che scorpa tutte le altre.
- d) Esiste una sola flogga che scorpa tutte le altre.

Definizione. Chiamiamo **flogga prepotente** quella che scorpa tutte le altre.

(B) Nel disegno sottostante sono rappresentate con le lettere X , Y , Z , P le quattro flogghe (P rappresenta la flogga prepotente). Rappresenta con delle frecce una possibile situazione della relazione “scorporare” tra le quattro flogghe (rivolgi la punta della freccia verso la flogga scorpatata):

X

P

Y Z

Quella trovata è, secondo te, l'unica disposizione possibile? Confrontala con quella degli altri componenti del tuo gruppo e successivamente con quella degli altri gruppi; in particolare osserva se ci sono frecce in comune e quali.

(C) Come detto, i termini *flogga* e *scorpare* non hanno significato e per questo, ovviamente, le regole non sono né vere né false. In base alle regole e a quanto ottenuto al punto (A), ti sarai fatto l'idea di quale situazione potrebbero rappresentare questi termini; prova quindi a cercare dei termini (aventi un preciso significato) da sostituire a *flogga* e *scorpare* in modo che le regole 1)-4) e le affermazioni del punto (A) risultino frasi vere.

Confronta la tua proposta con quella degli altri gruppi; al di là di eventuali termini diversi, quali ti sembra siano gli aspetti comuni?

Una situazione *reale* in cui è possibile interpretare i termini (vuoti) di una teoria in modo che le regole (gli assiomi) risultino frasi vere si chiama **modello** per quella teoria.

Quindi “Le flogghe che scorpano” sono la nostra teoria (di cui le regole sono gli assiomi) e quello che hai trovato è uno dei possibili modelli della teoria.

Attività 2SF – Caselle e percorsi

Modalità di lavoro: a gruppi.

Prima parte

Pezzi del gioco: *caselle e percorsi.*

Le caselle sono 9 e sono indicate con le lettere $A, B, C, D, E, F, G, H, I$.

Regole del gioco:

- 1) Per due caselle distinte passa uno ed un solo percorso.
- 2) Per ogni percorso p esiste almeno una casella X che non appartiene a p .
- 3) Ogni percorso è fatto di tre caselle.
- 4) Data una casella X e un percorso p a cui non appartiene la casella X , esiste uno ed un solo percorso che contiene X e non ha caselle in comune con p .

(A) A partire da queste regole costruisci, con tutte le 9 caselle a disposizione, tutti i possibili percorsi che le soddisfano.

N.B. Indica un percorso come se fosse un insieme di lettere (ad esempio $\{A;B;C\}$).

(B) Confrontate i risultati ottenuti con quelli degli altri gruppi. Vince il gruppo che ha trovato il maggior numero di percorsi che soddisfino le regole.

Successivamente rispondi alle seguenti domande:

- a) avete ottenuto tutti lo stesso numero di percorsi?
- b) tutti i percorsi trovati dai vari gruppi sono formati dalle stesse caselle?

Seconda parte

Confronta i percorsi che hai ottenuto con quelli della seguente immagine (le varie righe colorate collegano le caselle che individuano lo stesso percorso):

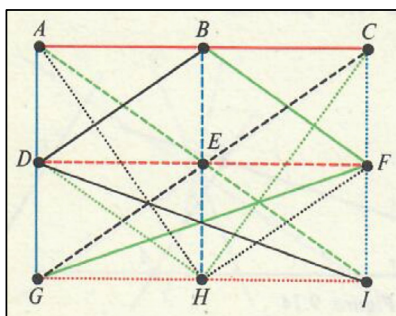


Figura 1

(C) Riscrivi in modo insiemistico i vari percorsi rappresentati in **Figura 1** (ad esempio il primo sarebbe $\{A;B;C\}$).

Successivamente rispondi alle seguenti domande:

- a) Nel tuo gruppo avete trovato tutti i percorsi rappresentati?
- b) Sono gli stessi percorsi che avete trovato voi o sono diversi?
- c) Nel caso siano diversi, pensi che cambi effettivamente qualcosa o possono essere considerati *equivalenti*? (Spiega come si può intendere, secondo te, il termine 'equivalente')

(D) Sostituisci nel gioco precedente il termine *casella* col termine *punto* e il termine *percorso* col termine *retta* e prova a riscrivere le regole del gioco con questi due termini.

- (i) Rispetto ai percorsi che avete costruito o a quelli della **Figura 1** le frasi ottenute risultano vere?
- (ii) Cosa rappresentano i percorsi in cui le relative caselle sono collegate da righe dello stesso colore?

Con le sostituzioni che ti sono state richieste al punto (D) avrai riconosciuto come le regole del gioco siano diventati alcuni assiomi geometrici. Quello proposto in **Figura 1** è quindi un modello per questa geometria 'povera'. Il fatto che una teoria abbia un modello permette di dare significato a termini che potrebbero non averne. Quindi i termini *punto* e *retta* possono indicare anche altri oggetti rispetto a quelli cui sei abituato.

Uno degli assiomi della geometria afferma che su ogni retta è possibile dare due ordinamenti, uno inverso dell'altro, dei rispettivi punti.

Nelle *rette* della **Figura 1** indica un possibile ordinamento su ciascuna retta mettendo una freccia che va dal punto che precede a quello che segue. Infine riscrivi le rette secondo questi ordinamenti riportando i punti tra parentesi tonde e non tra parentesi graffe.

Esempio: la scrittura $(G;D;A)$ indica l'ordinamento della retta $\{A;D;G\}$ in cui G precede D e D precede A .