

# Recensioni

## “L’infinito sai cos’è?”

<https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/linfinito-sai-cose/>

“L’infinito sai cos’è?”, è una canzone, e anche un video musicale, che nasce da un’idea del centro che all’interno del Dipartimento formazione e apprendimento di Locarno si occupa di didattica della matematica (DdM), ma finisce per coinvolgere, praticamente e idealmente, tutto il dipartimento. Infatti nel video vediamo, oltre ai membri del DdM, gli insegnanti e i direttori scolastici che da ormai tanti anni collaborano con loro, anche gli studenti, gli amministrativi e la direzione del dipartimento, all’interno e soprattutto fuori dagli spazi dove abitualmente si fa lezione e ricerca. Sono sicura che questa non sia una scelta casuale, ma che corrisponde all’intento comunicativo di tutto il progetto *Matematicando*: portare la matematica e la sua didattica per le strade della città di Locarno, attraverso il suo tradizionale festival e adesso, grazie alla sua piattaforma, ovunque, per raggiungere sì le scuole, ma anche le famiglie e i non addetti ai lavori.

Il tema della canzone è quello dell’infinito, che nella matematica occidentale riscuote grandissima attenzione da ben oltre un secolo all’interno della teoria degli insiemi ed è capace di affascinare anche i meno appassionati alla disciplina, come evidenziato bene da Arrigo, D’Amore e Sbaragli (2020). Al tempo stesso, però, il concetto di infinito matematico è anche davvero poco intuitivo. Ecco perciò che nel ritornello quasi si annuncia l’inevitabile ostacolo (o “conflitto commognitivo” se vogliamo pensarlo come fa Anna Sfard, 2008) che lo studente o il curioso dovranno affrontare:

Non c’è trucco e non c’è inganno  
tutti quanti ormai lo sanno.  
L’infinito sai cos’è? È un’arte  
in cui il tutto è uguale alla sua parte.

Un bell’imbroglio in effetti, se si pensa al ben più familiare ed evidente assioma euclideo a cui il ritornello fa il verso, “Il tutto è maggiore della parte”, che qui si scontra con la sofisticata definizione di insieme infinito che dobbiamo a Dedekind. Per aiutare chi ascolta a superare questo ostacolo, perciò, in tutto il testo troviamo molte suggestioni e indizi: si parla - o forse bisognerebbe dire “si canta” - del concetto di equipotenza tra insiemi e di tanti esempi, presi dall’aritmetica e della geometria. Ecco così apparire insiemi che sono, contro il nostro intuito, “grandi quanto” l’insieme dei numeri naturali o quanto la retta reale. Lo si fa con grande ironia e leggerezza e, ovviamente, dato il contesto, senza la pretesa di essere esaustivi o formali. Inoltre, a far leva sull’attenzione di chi ascolta, ci sono le figure di due tra i matematici che più sono stati pionieri nell’esplorazione del concetto di infinito: Galileo Galilei e Georg Cantor. La matematica che conosciamo oggi, e che molti ritengono una scienza fredda e sterile, è in realtà un prodotto culturale, una creazione dell’uomo e degli uomini attraverso i secoli, o meglio i millenni: sottolineare questo aspetto durante la comunicazione è sicuramente un espediente efficace (Benvenuti & Natalini, 2017). E così risulta vincente la scelta di accennare alla scoperta di Galileo - ritenuta paradossale dal suo stesso autore - dell’equipotenza tra l’insieme dei numeri naturali e quello del suo sottoinsieme proprio dei quadrati perfetti (secondo molti storici la prima riflessione sull’equipotenza di insiemi infiniti numerabili). Scoperta che nel testo della canzone viene seguita da quella di Cantor, l’inventore della teoria degli insiemi, che nell’avvincente vicenda della storia della matematica risponde al para-

dosso di Galileo, rivoluzionando tutto il discorso sull'infinito. Cantor, infatti, introduce l'idea di confronto tra le taglie degli insiemi infiniti, e scopre che il tipo di infinito della retta reale è maggiore del tipo di infinito dei numeri naturali:

La cosa strabiliante è che anche interi e razionali  
si possono associare uno a uno ai naturali.  
Lo so che stai pensando: "Coi reali sarà uguale?"  
No, loro son di più! Ecco il fatto eccezionale.

Eppure, lo stesso Cantor, nelle lettere al collega Dedekind, esplicita la sua difficoltà a superare la contraddizione tra l'evidenza del fatto che una parte è più piccola dell'insieme e le conseguenze a cui porta la sua teoria. E così troviamo nel testo:

Un gran bel turbamento fu per lui certamente  
disse: "Lo vedo, sì, ma non ci credo veramente!"

Insomma, proprio un piacevole stimolo di riflessione quello che ci arriva dal DdM e da tutti gli attori che sono stati coinvolti nella realizzazione della canzone e del suo video, davanti e dietro la videocamera. Sono sicura che ai lettori di questa rivista ha fatto sorridere e che a molti ha offerto anche un importante spunto: comunicare la matematica a un pubblico ampio, con il coraggio di sperimentare nuovi modi e nuovi canali, non dovrebbe essere un impegno di tutti coloro che credono nel valore sociale e culturale della disciplina?

---

## Bibliografia

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico. Storia, epistemologia e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Pitagora.

Benvenuti, S., & Natalini, R. (2017). Comunicare la matematica: chi, come, dove, quando e, soprattutto, perchè?!. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 2(2), 175-193.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Gemma Carotenuto  
Dipartimento di Matematica e Applicazioni  
Università degli Studi di Napoli "Federico II", Italia

### **Lolli, G. (2019). *I teoremi di incompletezza*. Bologna: il Mulino.**

Un libro di Gabriele Lolli con questo titolo è una specie di calamita per chiunque ami la logica; su questo tema lo stesso autore ha più volte scritto in precedenti pubblicazioni che hanno avuto fortuna editoriale, sia per il tema attraente e coinvolgente, sia per la maestria dell'autore. Quel che sempre mi sorprende e mi avvince è che un libro (breve) come questo, su questo tema, con questo linguaggio, può essere

letto con piacere da uno specialista (che sempre troverà comunque qualcosa che lo sorprenderà) sia da un amante della logica non professionista (che resterà sorpreso dalle spiegazioni e dai mille riferimenti ghiotti).

La storia di questi teoremi è nota a tutti; mentre Peano e anche Hilbert, rifacendosi al "sogno" di Leibniz, dichiaravano o speravano di aver creato sistemi logici in grado di decidere, in caso di controversie fra filosofi, chi avesse ragione, sulla base di un sistema logico semplice, formale, quasi a sorpresa, fra il 1930 e il 1931, il giovanissimo Gödel diede una mazzata a tutti, logicisti, intuizionisti, formalisti, ... pubblicando quei teoremi che hanno cambiato la storia della logica (e non solo), mostrando concretamente che, in un sistema neanche tanto potente (capace di contenere almeno l'aritmetica elementare dei numeri naturali), è possibile costruire formule ben formate che, in quel sistema, non sono né dimostrabili né confutabili. Sappiamo che fu una vera sorpresa per i più, una meraviglia assoluta. Il mondo logico era allora affascinato e conquistato dagli studi sulle antinomie e molti dei logici più famosi dedicavano tutto il loro tempo a cercare di dipanare quella matassa aggrovigliata cercando di creare ... antidoti, come la teoria dei tipi di Russell. La proposta di rimedi contro le antinomie aveva almeno in parte scardinato alcune certezze e creato discussioni di estremo interesse, come il tentativo di chiarire in modo definitivo e completo che cosa dovesse intendersi per deduzione, un concetto che appariva (appare) a molti come quasi ovvio e ad altri come estremamente complesso. Lolli ci racconta la sequenza esatta degli eventi che costituirono la storia di quella bomba, la formulazione esatta del teorema e alcune successive modifiche effettuate dallo stesso Gödel e da altri logici, per esempio quella di Barkley Rosser che riduceva alcune richieste della tesi originale. Naturalmente come quasi sempre avviene in matematica, v'erano stati precedenti al teorema di Gödel e Lolli ce li racconta con molta profondità nel capitolo III, discutendo in dettagli l'accettabilità o meno di questi precedenti come tali. Nessuno di essi raggiunse la forza enunciativa e dimostrativa di Gödel e dunque nulla faceva davvero presagire questo evento. In tal senso, sono di estremo interesse le lettere che Emil Post ha inviato a Gödel, alcuni anni dopo la pubblicazione dei suoi teoremi.

Né si deve supporre che il risultato di Gödel e soprattutto la sua dimostrazione siano passati indenni rispetto all'analisi dei contemporanei; più d'uno ha tentato di contrastare e di invalidare questi formidabili teoremi. Ernst Zermelo, per esempio, fra i più noti. Ma molti altri matematici di primo piano intervennero, von Neumann, Russell, Wittgenstein, Popper e vari altri filosofi della scienza, non sempre ben consapevoli della portata dei teoremi di Gödel. Trovo molto interessanti le notizie che Lolli narra a proposito delle diverse reazioni dei matematici non logici a proposito dei risultati di Gödel, che sono le più diverse. Molto ho appreso da questo libro quando narra delle reazioni dei fisici, in primis Stephen Hawking. Molto interessante l'incursione che Lolli fa nel campo dell'arte figurativa, campo nel quale anch'io spesso mi lancio in quanto lo trovo per molti versi paragonabile, in quanto a temi, processi e interessi, a quello della matematica; qui, Lolli cita i giganti Magritte, Escher e Pistoletto, assai a proposito. Molto interessanti le considerazioni che, grazie ai suoi risultati, Gödel fa sulla matematica prima e sull'intelligenza artificiale poi, e che Lolli commenta con la solita indubbia profondità. Trovo affascinante l'ultimo capitolo dal titolo "Bellezza e magia", nel quale si discute circa la bellezza della formula ideata da Gödel, ovviamente non in maniera frivola, ma basandosi su illustri citazioni di matematici che hanno parlato del tema assai controverso e delicato, la bellezza della matematica, tema che ha affascinato generazioni intere di matematici e che, anche se non sempre in modo esplicito, appare in modo molto presente nelle dichiarazioni di molti matematici anche contemporanei.

Credo che un simile testo dovrebbe essere letto da tutti coloro che, almeno una volta nella vita, hanno anche solo sentito citare il teorema di Gödel, anche se mai hanno dedicato tempo a leggerne l'enunciato o la dimostrazione, in una delle sue molte versioni (ricordo che esistono libri interi su questo tema, tentativi di rendere comprensibile ai non logici tale dimostrazione). Gli insegnanti di matematica, per esempio, per aumentare la capacità critica individuale della comprensione disciplinare, capire i limiti e i grandi traguardi della disciplina che insegnano, riconoscerne aspetti che altrimenti potrebbero essere basati su intuizioni poco fondate. Una lettura come questa amplia la mente, aumenta la capacità critica, dà ragione di temi affascinanti e delicati che, altrimenti, se ignorati, possono banalizzare la nostra disciplina.

Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

**Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Firenze: Mondadori Università.**

«Non è la conoscenza, ma l'atto di imparare; non il possesso, ma l'atto di arrivarci, che dà la gioia maggiore».

Con questa citazione di Gauss si apre il testo *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*, e non avrebbe potuto essere scelta frase migliore per rappresentare sinteticamente il contenuto del libro scritto dalle tre ricercatrici, più una insegnante-ricercatrice, in didattica della matematica. Sì, perché in questo testo l'atto di imparare è vissuto in almeno due sensi: da un lato si ragiona su cosa significhi imparare la matematica nei primi livelli scolastici, dall'altro vengono forniti consigli e impostazioni teoriche sulle quali fondare la propria preparazione di insegnante. Il libro è strutturato in modo da integrare queste due facce continuamente, in un'ulteriore ottica binaria di arricchimento reciproco fra pratica e riflessione teorica.

Dopo un primo capitolo nel quale si presenta un inquadramento di alcune linee teoriche in didattica della matematica a carattere generale, si entra nel vivo del discorso prettamente matematico-didattico. I tre capitoli centrali si riferiscono agli ambiti Numeri, Spazio e Figure, Relazioni, e sono organizzati in modo da analizzare gli aspetti epistemologici, cognitivi e didattici di ogni tema; tale analisi è poi sempre seguita da una presentazione di esperienze didattiche analizzate con gli strumenti teorici proposti. La stessa struttura è utilizzata anche nell'ultimo capitolo del libro, nel quale si tratta lo scottante tema della valutazione in matematica; anche in questo caso sono descritte e commentate attività didattiche riproducibili e implementabili.

All'interno di ogni capitolo, sono numerosi i riferimenti teorici dai quali poter prendere spunto per approfondire le riflessioni proposte; ma numerosi sono anche i protocolli di allievi, corredati da analisi puntuali e profonde grazie alle quali poter sperimentare il proficuo arricchimento dato dall'intreccio fra pratica e riflessione didattica. Questo è forse il contributo più interessante del libro, nel quale si avverte fortemente l'integrazione fra i vari approcci delle autrici. Insomma: si capisce che è un libro scritto da ricercatrici con la passione per le pratiche d'aula e da insegnanti con la passione per la ricerca e la riflessione.

È per questi motivi che consiglio la lettura del libro in primo luogo a tutti i giovani che studiano per diventare maestri di scuola dell'infanzia ed elementare: in che cosa

consiste la formazione docenti, infatti, se non proprio nel cercare di comprendere da un lato cosa significhi insegnare e apprendere, e dall'altro come sostenere la quotidianità della pratica scolastica con la riflessione teorica e viceversa?

Michele Canducci  
Dipartimento Formazione e apprendimento  
SUPSI di Locarno, Svizzera

**Nicosia, G. G. (2019). *Contare per ventine – Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo*. Disponibile liberamente al link: <http://www.lulu.com/shop/giovanni-giuseppe-nicosia/contare-per-ventine-unanalisi-etnomatematica-di-numerali-del-mondo/ebook/product-24229523.html>**

Giovanni Giuseppe Nicosia non è nuovo nel mondo dell'etnomatematica, una disciplina che si è inserita nel panorama della ricerca da alcuni decenni e che si trova a metà strada tra la matematica e l'antropologia culturale. L'inizio del suo contributo scientifico su questo tema risale al 2002, quando si è occupato di tradurre in italiano il famoso libro *Etnomatematica* (D'Ambrosio, 2002), contributo imprescindibile per i ricercatori che vogliono approfondire lo studio delle pratiche matematiche dei diversi gruppi socioculturali. Ma, oltre a essere un ricercatore e un appassionato studioso di culture del mondo, Nicosia è anche un insegnante, e proprio dall'interesse per la didattica nasce il volume *Numeri e culture* (Nicosia, 2008), libro nel quale l'autore riesce a dare un contributo all'educazione matematica dei giovani che vivono in un ambiente multiculturale.

In un certo senso, *Contare per ventine – Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo* è la continuazione di questa opera di avvicinamento del mondo scolastico, sempre più multiculturale, al mondo delle matematiche, intese come espressione culturale del sapere di un popolo.

In questo libro, che per desiderio dell'autore «appartiene al Popolo, che ne è il vero autore profondo», Nicosia tratta dei numerali e dei sistemi di numerazione dapprima nelle popolazioni europee e in Asia, poi nelle Americhe.

La quantità di culture prese in considerazione è impressionante. In Europa e in Asia si discutono i sistemi di numerazione georgiani, baschi, bretoni, gaelico irlandesi, gallesi, danesi ecc. Nelle Americhe si affrontano i numerali in uso nelle civiltà maya, atzeche, zapotечи, mesoamericane o messicane, e ancora i numerali waunana, andoque, macune ecc., provenienti dalle culture sudamericane; l'esposizione si conclude con il tentativo di raccogliere le informazioni concernenti i sistemi di numerazione in uso nei popoli indigeni dell'America del Nord. La ricerca in quest'ultimo caso è particolarmente complessa, sia a causa delle tradizioni principalmente orali di questi popoli, sia a causa di colonizzazioni e stermini avvenuti nel corso della storia.

Con questo testo, Nicosia dimostra di essere uno dei massimi cultori italiani della materia, con un'attenzione particolare alle applicazioni dei suoi studi in ambito educativo: l'autore sembra infatti essere estremamente consapevole di come il mondo multiculturale in cui è immersa la scuola al giorno d'oggi necessiti di una cultura dell'accoglienza e dell'inclusione. D'altra parte, per accogliere e includere è dapprima necessario essere disposti a conoscere non solo in modo superficiale, ma approfondito. Il contributo principale di questo volume sembra quindi essere: proporre

una conoscenza effettiva di alcuni aspetti, quelli matematici, delle culture che sono lontane dalla nostra, con il fine di aiutare insegnanti, ricercatori, lettori interessati, a entrare nella relazione con ciò che è diverso con curiosità e spirito di confronto.

---

## Bibliografia

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

Nicosia, G.G. (2008). *Numeri e culture*. Trento: Erickson.

Michele Canducci

Dipartimento formazione e apprendimento  
SUPSI di Locarno, Svizzera

**D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica*. Bologna: Pitagora.**

Questo volume fornisce gli strumenti necessari a orientarsi nel mondo delle specificità che si incontrano nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Ricordo con affetto di averlo accolto come guida nel mio percorso di studi, fin dalla pubblicazione di una sua prima versione, nel 2008. Ma questa nuova versione del 2019 è assai più ampia e più estesa.

Il lettore che parte alla scoperta del meraviglioso mondo della didattica della matematica troverà in questo libro una mappa, in cui sono tracciati percorsi e pericoli, e una luce per districarsi nelle dinamiche d'aula e rivelarne le delicatezze.

L'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica* può essere ingenuamente o frettolosamente interpretata solo come la difficoltà di qualcuno (il tal allievo) in qualcosa (le frazioni). Gli Autori conducono invece un'analisi della questione dal punto di vista didattico più generale e scientifico, e sfruttano i risultati della ricerca degli ultimi decenni per svelare quanto la suddetta interpretazione sia illusoria.

Innanzitutto, l'apprendimento, nel caso della matematica, ha delle specificità delle quali è necessario tenere conto. Nel testo si fa continuo riferimento ad esse e riguardano sia la natura degli oggetti matematici che il processo di insegnamento-apprendimento in sé. Inoltre, come esplicitamente analizzato nell'ultimo capitolo, le dinamiche d'aula si caratterizzano per le relazioni interpersonali che ivi si instaurano. Questo significa che sarà necessario considerare opportunamente tutte le declinazioni e le sfumature di tali relazioni e dei modi in cui esse possono influenzare il processo di insegnamento-apprendimento.

Gli Autori ci rivelano un mondo dove gli "errori" e i "fallimenti" sono in realtà dei comportamenti messi in atto sempre per una ragione e che come tali dovrebbero essere trattati in modo costruttivo, come manifestazione di qualcosa che avviene e non di qualcosa che manca. Un avvertimento e non solo una manchevolezza. Il segnale di un malessere cognitivo, come dicono gli Autori.

Siamo di fronte a un cambio di prospettiva di incredibile potenza. L'attenzione – e l'intenzione – si sposta dal voler colmare ciò che (l'insegnante) identifica come

le conoscenze mancanti, al voler individuare e caratterizzare, anche in termini di conoscenza, ciò che sta accadendo all'allievo (e in aula). La forza motrice di tale spostamento è la capacità di mettersi in discussione – processo tutt'altro che facile e spontaneo. Gli innumerevoli esempi concreti che gli Autori presentano e commentano, accompagnano il lettore nel passaggio dall'uno all'altro punto di vista. È un cambio di prospettiva che può ispirare, tanto da far rendere conto di non poter – e non voler – più tornare indietro; se non per rileggere daccapo il libro.

*Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica* riesce a dare voce ad aspetti cruciali per il processo di insegnamento-apprendimento della matematica e trasmette un grande senso di umiltà e di rispetto per la complessità del tema trattato e per le persone coinvolte. Si prova rispetto per l'allievo che in un percorso di apprendimento significativo dovrà mettersi in gioco, assumersi responsabilità, acquisire consapevolezza, vivere conflitti cognitivi, esternare, difendere e mettere in discussione le proprie idee. Si prova rispetto per l'insegnante che, nell'esercitare la sua difficile e delicata professione, dovrà coraggiosamente essere pronto a mettersi in discussione in ogni istante con l'intelligenza e la professionalità che gli sono proprie. Si prova rispetto per la matematica, dietro la quale ci sono secoli di storia e i contributi di centinaia di persone che – ciascuna nel proprio contesto storico-culturale – con grande coraggio, e a volte anche con grande fatica, hanno portato avanti le proprie idee. Si prova rispetto per il ricercatore in didattica della matematica che, in questa dimensione così complessa, cerca di delineare con rigore scientifico i contorni del processo di insegnamento-apprendimento accogliendone e mostrandone tutta la complessità.

Per comprendere dunque il senso dell'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica*, il volume ci mostra come ciascuno di tali elementi vada considerato opportunamente in tutte le sue declinazioni e, sin dai primi paragrafi, ciò viene fatto con cura, dedizione, profondità e ricchezza di esempi.

Gli Autori, nella Premessa, si rivolgono al lettore-insegnante per il quale, di certo, il libro è uno strumento di crescita personale e professionale perché vi troverà informazioni e riferimenti essenziali per accogliere adeguatamente la complessità del tema trattato. Tuttavia, consiglio questo testo anche a molte altre categorie di lettori: il ricercatore in didattica della matematica, lo psicologo che si occupa di processi di apprendimento, l'educatore, l'editore, il politico, il genitore. In generale, consiglieri la lettura di questo libro a chiunque nell'ambito della noosfera voglia ampliare il proprio punto di vista accogliendo una visione olistica di ciò che riguarda l'insegnamento-apprendimento in matematica.

Agnese Del Zozzo

Facoltà di Scienze della Formazione  
Libera Università di Bolzano, Italia

**D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). *Zero*. Bologna: Pitagora.**

Zero, forse il più misterioso dei numeri, riveste un interesse speciale in molti ambiti. Senza dubbio è un oggetto matematicamente interessante ed è uno dei pilastri della cultura matematica internazionale, che lo sfrutta pesantemente nella scrittura di numeri in notazione posizionale. Quest'ultima è stata probabilmente uno dei fattori

del progresso delle scienze, consentendo notazioni comode e algoritmi di grande efficacia. Parimenti cruciale è il suo ruolo nella storia della matematica, costituendo un percorso interculturale che riunisce quasi tutto il mondo.

E che dire delle difficoltà causate dallo zero nella didattica?

Gli autori di questo libro, tra i maggiori esperti di ognuno dei campi citati, seguono il filo offerto dallo zero per un viaggio che li attraversa, mostrandocene le fondamenta. In questo percorso trovano posto anche alcuni temi che sono in realtà, per moltissimi, dei dubbi dimenticati dall'infanzia: perché  $a^0 = 1$ ? Perché non si può nemmeno scrivere sensatamente  $a/0$ ? Perché la moltiplicazione di due interi negativi dà un intero positivo? Spesso è solo una coltre di abitudine e di rimozione a non farcene più stupire, anche quando, insegnanti, incontriamo la viva curiosità dei giovani allievi. Ecco che in questo libro l'insegnante trova strumenti necessari ad approfondire il suo lavoro, mentre lo studioso trova rigore epistemologico e storico, e il generico lettore curioso trova mille stimoli.

Tutti possono leggerlo anche in ragione dell'estrema semplicità e linearità dei ragionamenti: quando il discorso diviene troppo complesso o richiede troppi termini tecnici, gli Autori lo abbandonano dicendo «Noi qui ci fermiamo» e indicano riferimenti bibliografici per approfondire.

Ma a dispetto di tale semplicità di forme, il libro approfondisce temi complessi. Zero, le sue proprietà in alcuni dei diversi insiemi cui appartiene, le ragioni logiche e storiche della sua presenza divengono pretesti per esaminare gli aspetti più interessanti delle strutture che tali insiemi costituiscono con le operazioni cui intuitivamente ci crediamo legittimati a dotarli.

Una particolare attenzione viene dedicata alla motivazione di notazioni che sono ormai familiari a tutti e che, nella loro ovvietà apparente, creano poi conflitti cognitivi ed errori. Di errori tipici e significativi si affronta una lista lunghissima. Nella pratica scolastica diffusa, purtroppo, i provvedimenti adottati contro essi si riconducono spesso alla ripetizione schematica e chiara di regole: "si fa così". In questo libro molte di queste "regole" vengono riesumate, scrollando gli strati di abitudine sotto cui li abbiamo sepolti dopo anni di pratica, rivelando la loro natura stupefacente di proposizioni matematiche o di soluzioni a problemi logici e concreti.

A fornire ulteriori motivazioni per oggetti e prassi che siamo abituati a usare, concorre anche la sezione storica. Zero percorre, in modo talora implicito, gran parte della storia delle più importanti civiltà. Una rassegna ricchissima delle sue interpretazioni matematiche e filosofiche viene qui estesa anche alle parole con cui zero viene indicato, con le loro connotazioni che le ricollegano ai contesti storici e sociali, e dunque al ruolo dello zero in culture e comunità del passato e del presente. Da artificio e strumento tecnico, zero prende il suo posto cruciale tra i numeri veri e propri in un processo che talora si ripete in diversi contesti storici.

Zero è un numero critico in campo didattico, ed ecco che gli autori forniscono qui un arsenale di strumenti teorici che ne inquadrano il ruolo nelle concettualizzazioni degli allievi. Ma si passa subito alla pratica, con l'esame di alcune registrazioni di colloqui individuali e interviste collettive a bambini di scuola dell'infanzia e primaria sullo zero. Il capitolo conclusivo riconduce tutto il materiale precedente ai principali elementi della didattica della matematica.

Su diversi piani quest'opera costituisce una lettura estremamente significativa in special modo per gli insegnanti.

Giovanni Giuseppe Nicosia

Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica di Bologna, Italia